VIII F 1551

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

116

1

ANUL XI
1960

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI :

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

626/116

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F
2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratleltár
107/1962

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.

— Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

— Referate științifice și tehnice în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări științifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

— Recenzii asupra cărților și studiilor romîne sau străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori).

— Hidromecanică (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice).

— Construcții de mașini (cinematica și dianamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue).

— Mecanică generală (rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate analogii electrice și hidraulice).

— Statica și dinamica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor metode de executarea lucrărilor de construcții).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 1 1960

SUMAR

Pag.

STUDII

AEROMECANICĂ

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU, Metoda generală pentru determinarea interferenţei dintre aripă şi fuzelaj conic în regim supersonic 11

ŞERBAN SĂNDULESCU, Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor poligonale cu şarnieră sonică avînd o mişcare oscilatorie armonică 49

ŞT. SĂVULESCU, Determinarea caracteristicilor stratului limită tridimensional. Aplicaţii la cazul palelor de ventilator axial 61

HIDROMECANICĂ

T. OROVEANU, Cîteva consideraţii asupra scurgerii cu suprafaţă liberă a unui lichid printr-un mediu poros neomogen 79

TEORIA MECANISMELOR

D. MAROS şi A. CSULAK, Bazele teoretice ale prelucrării corecte a melcilor şi a roţilor melcate 103

ELASTICITATE — REZISTENŢA MATERIALELOR

VLADIMIR DERSKI, Despre unele probleme ale termoelasticităţii 131

MIRCEA MIŞICU, Problema dinamică a torsiunii (Aplicaţii) 153

P. P. TEODORESCU, Cîteva consideraţii în legătură cu calculul grinzilor drepte . . 173

CHR. PELECUDI şi V. PLATON, Tensiunile de creştere radiale şi longitudinale ale lemnului 195

MIRCEA MIHAILESCU şi YVONNE MIHAILESCU, Învelitori de translaţie calculate prin metoda relaxării 211

MIRCEA SOARE, Aplicarea metodei plurilocale la calculul plăcilor curbe subţiri . . 239

STELIAN CETĂŢEANU, Grinzi cu inimă plină rigidizate transversal, unilateral . . 261

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

Pag.

D. PAVELESCU, Aspecte privind eficacitatea metodelor de măsură radioactive şi cu semiconductori, funcţie de traductoare şi domeniul cercetării 283

V. N. CONSTANTINESCU şi GH. MARIN, Motor pneumatic cu lagăre cu aer . . . 291

A. ZAHARESCU, Tensometru static cu comutare pe 15 puncte de măsură 297

RECENZII 303

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 313

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI, № 1 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

ЭЛИЕ КАРАФОЛИ и ДАН МАТЕЕСКУ, Общий метод определения интерференции между крылом и коническим фюзеляжем в сверхзвуковом режиме 11
Ш. СЭНДУЛЕСКУ, Аэродинамическая характеристика многоугольных элеронов со звуковым шарниром, имеющим гармоническое колебательное движение 49
Ш. СЭВУЛЕСКУ, Определение характеристики трехмерного пограничного слоя. Практическое применение в случае лопастей осевого вентилятора 61

ГИДРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ, Некоторые соображения о течении жидкости со свободной поверхностью через неоднородную пористую среду 79

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Д. МАРОШ и А. ЧУЛАК., Теоретические основы правильной обработки червяков и червячных зубчатых колес 103

УПРУГОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

В. ДЕРЗКИЙ, О некоторых задачах термоупругости 131
М. МИШИКУ, Динамическая задача кручения 153
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, Некоторые соображения о расчете прямых балок . . 173
Х. ПЕЛЕКУДИ и Б. ПЛАТОН, Радиальные и продольные напряжения роста древесины 195
М. МИХАИЛЕСКУ и И. МИХАИЛЕСКУ, Линейчатые оболочки рассчитанные методом релаксации 211
М. СОАРЕ, Применение многопозиционного метода при расчете тонких изогнутых пластин 239
Ш. ЧЕТЭЦЯНУ, Сплошные балки с односторонним укреплением 261

Стр.

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Д. ПАВЕЛЕСКУ, Эффективность радиоактивных методов измерения и методов с полупроводниками в зависимости от датчиков и области исследования 283

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ и Г. МАРИН, Пневматический двигатель на подшипниках с воздушной смазкой 291

А. ЗАХАРЕСКУ, Статический тензометр с переключением на 15 точек измерения 297

РЕЦЕНЗИИ 303

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ . . . 313

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛКИИ

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы) оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике. описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(«ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE»)

publie :

— *des* études originales, *des recherches fondamentales d'un caractère hautement scientifique, orientées vers l'activité pratique* ;

— *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;

— *des* rapports scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau ; des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée ; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée* ;

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— *Aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)* ;

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes)* ;

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus)* ;

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques)* ;

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction)* ;

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, raionul Gh. Gheorghiu-Dej, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE « TRAIAN VUIA »

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, nº 1 1960

SOMMAIRE

Page

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

ELIE CARAFOLI et DAN MATEESCU, Méthode générale pour déterminer l'interférence entre l'aile et le fuselage conique en régime supersonique 11
ŞERBAN SĂNDULESCU,' Caractéristiques aérodynamiques des ailerons polygonaux à charnière sonique, ayant un mouvement oscillatoire harmonique 49
ŞT. SĂVULESCU, Détermination des caractéristiques de la couche limite à trois dimensions. Applications au cas des pales d'un ventilateur axial 61

HYDROMÉCANIQUE

T. OROVEANU, Considérations sur l'écoulement à surface libre d'un liquide à travers un milieu poreux non homogène 7

THÉORIE DES MÉCANISMES

D. MAROS et A. CSULAK, Bases théoriques de la fabrication correcte des vis sans fin et des roues hélicoïdales 03

ÉLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

VL. DERSKI, Sur quelques problèmes de la thermoélasticité 131
M. MIŞICU, Problème dynamique de la torsion (Applications) 153
P. P. TEODORESCU, Considérations sur le calcul des poutres droites 173
CHR. PELECUDI et V. PLATON, Tensions radiales et longitudinales de croissance du bois 195
M. MIHAILESCU and YVONNE MIHAILESCU, Translation shells calculated through the relaxation method 211
M. SOARE, Application de la méthode plurilocale au calcul des coques 239
S. CETĂŢEANU, Poutres à âme pleine raidies unilatéralement 261

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

D. PAVELESCU, Efficiency of radioactive and semiconductor measuring methods as related to gauges and the investigated field 283
V. N. CONSTANTINESCU et GH. MARIN, Moteur pneumatique à coussinets d'air 291
A. ZAHARESCU, Tensomètre statique à commutation sur 15 points de mesure . . . 297

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 303

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION 313

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

AEROMECANICĂ

METODA GENERALĂ PENTRU DETERMINAREA INTERFERENȚEI DINTRE ARIPĂ ȘI FUZELAJ CONIC ÎN REGIM SUPERSONIC

DE

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Într-o lucrare anterioară [1] am prezentat o metodă care rezolvă problema scurgerii supersonice în jurul sistemului portant aripă-fuzelaj conic, aripa avînd bordurile subsonice și incidența diferită în general de cea a fuzelajului.

În cele ce urmează, vom extinde această metodă la cazul cînd pe aripă există muchii în care au loc salturi de incidență sau de pantă, stabilind astfel o metodă generală de soluționare a scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic, metodă care poate fi aplicată în toate cazurile curente, oricare ar fi poziția aripii față de conul Mach.

Vom considera sistemul aripă-fuzelaj ca în figura 1, axa fuzelajului avînd incidența α_0 față de curentul neperturbat U_∞, iar aripa avînd incidența și panta constante pe porțiuni.

Vom presupune că fuzelajul are dimensiuni reduse față de conul Mach ($B^2c^2 \ll 1$), și că incidența și panta într-un punct al aripii, precum și incidența α_0 a fuzelajului, sînt destul de mici pentru a putea aplica teoria micilor perturbații.

În acest caz, vom putea descompune scurgerea în jurul sistemului considerat mai sus în suma următoarelor trei mișcări :

I. Scurgerea axial simetrică în jurul fuzelajului conic izolat, fără incidență (problemă cunoscută).

II. O mișcare care, însumată cu scurgerea I, reprezintă scurgerea în jurul sistemului format de fuzelaj și aripă subțire, axa fuzelajului avînd incidența α_0, iar aripa avînd incidența constantă pe porțiuni. Pentru ușurarea expunerii, mișcarea aceasta o vom denumi mișcarea în jurul sistemului fuzelaj conic — aripă subțire.

III. O mişcare care, însumată cu scurgerea I, reprezintă scurgerea în jurul sistemului format de fuzelaj şi aripă de grosime simetrică, axa fuzelajului ca şi aripa neavînd nici o incidenţă, în schimb aripa avînd panta constantă pe porţiuni. Această mişcare va fi denumită mişcarea în jurul sistemului fuzelaj conic-aripă de grosime simetrică.

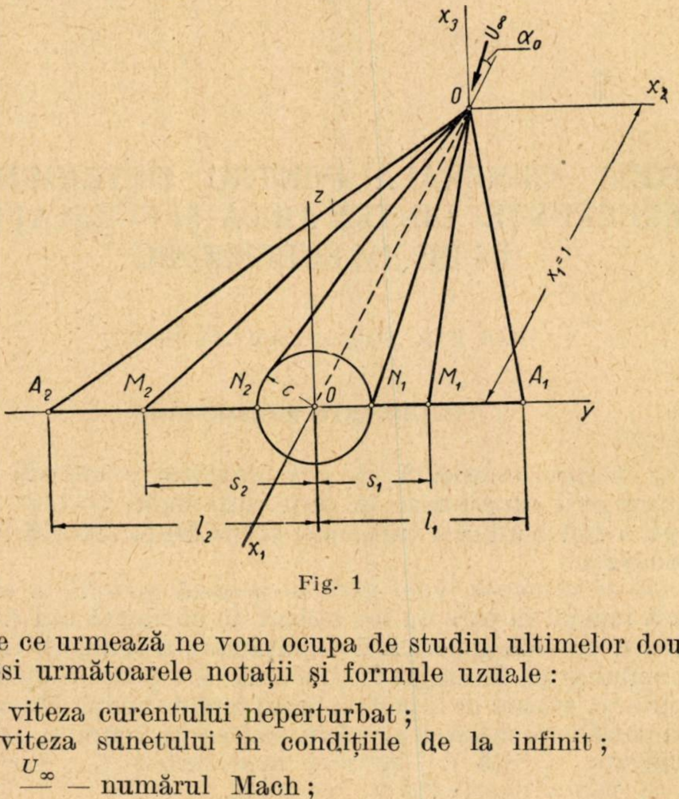


Fig. 1

În cele ce urmează ne vom ocupa de studiul ultimelor două mişcări, şi vom folosi următoarele notaţii şi formule uzuale:

U_∞ — viteza curentului neperturbat;

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile de la infinit;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach;

$B \;\; = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$;

$Ox_1x_2x_3$ — sistemul ortogonal de coordonate, axa Ox_1 fiind dirijată după axa fuzelajului (figura 1);

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic oyz ($x_1 = 1$, figura 1);

$\omega\eta\zeta$ — planul lui Busemann, obţinut prin transformarea

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2); \tag{1}$$

$oy\mathfrak{z}$ — plan auxiliar obţinut prin transformarea conformă

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad (x = y + i\mathfrak{z}, \quad \xi = \eta + i\zeta); \tag{2}$$

OYZ — plan auxiliar obţinut prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \quad x = \frac{X + \sqrt{X^2 - 4c^2}}{2}, \quad X = Y + iZ, \tag{3}$$

unde c este raza secţiunii circulare a fuzelajului în planul $x_1 = 1$;

u, v, w — componentele vitezei de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3, care sînt funcţii armonice în planele ξ, x, X;

$\mathcal{U} = u + iu'$, $\mathcal{V} = v + iv'$, $\mathcal{W} = w + iw'$ — funcţii analitice între care se pot scrie relaţiile de compatibilitate

$$d\mathcal{U} = -x d\mathcal{V} = \frac{ix d\mathcal{W}}{\sqrt{1 - B^2x^2}}. \tag{4}$$

2. METODA DE CALCUL

Vom considera sistemul fuzelaj conic—aripă subţire, axa fuzelajului avînd incidenţa α_0, iar aripa avînd incidenţa α_i constantă pe porţiuni ($i = 1, 2, 3, \ldots$); aripa are bordurile de atac în A_1 ($y = l_1$, $z = 0$) şi A_2 ($y = -l_2$, $z = 0$), şi are salturi de incidenţă pe muchiile din punctele $M_i(y = s_i,\ z = 0)$, în care $i = 1, 2, 3, \ldots$ Condiţiile la limită în acest caz sînt respectiv

$$v \cos \theta + (w - \alpha_0 U_\infty) \sin \theta = cu \approx 0, \tag{5}$$

pe cercul de rază c, care reprezintă urma fuzelajului în planul fizic oyz, şi

$$w = \alpha_i U_\infty = \text{const.}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6}$$

pe diferitele porţiuni ale urmei aripii ($-l_2 < y < -c$ şi $c < y < l_1$, $z = 0$); condiţiile la limită pe restul axei oy şi pe cercul Mach sînt aceleaşi ca şi în cazul aripii subţiri izolate.

De asemenea, vitezele de perturbaţie u şi v au aceleaşi singularităţi la bordurile de atac ale aripii şi la muchii, care reprezintă salturi de incidenţă, ca şi în cazul aripii subţiri izolate; astfel, funcţiile $\mathcal{U} = u + iu'$ şi $\mathcal{V} = v + iv'$ tind către infinit în aceste puncte ca expresiile

$$\frac{1}{\sqrt{l_1 - x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l_2 + x}}, \tag{7}$$

dacă bordurile sînt subsonice $A_1\left(x = l_1 < \frac{1}{B}\right)$ şi $A_2\left(x = -l_2 > -\frac{1}{B}\right)$, sau ca expresiile

$$\ln (l_1 - x), \quad \ln (l_2 + x), \tag{8}$$

dacă bordurile sînt supersonice $A_1\left(x = l_1 > \frac{1}{B}\right)$ şi $A_2\left(x = -l_2 < -\frac{1}{B}\right)$; în sfîrşit ca

$$\ln (s_i - x), \tag{9}$$

dacă există o muchie situată în punctul $x = s_i$.

Pentru soluționarea problemei, ne vom ocupa de funcția $\mathcal{V}$, și vom căuta să deducem condițiile la limită pentru această funcție. Folosind relațiile de compatibilitate (4), se poate deduce, considerînd mereu raza secțiunii fuzelajului în planul fizic *oyz* foarte mică față de cercul Mach ($B^2c^2 \ll 1$),

$$-dv' \approx dw, \qquad v' + w = k_0 = \text{const.} \tag{10}$$

pe cercul de rază c din planul x (fig. 2 *a*,*b*, *c*), pe de altă parte ținînd seamă de (6), se poate deduce

$$-dv' = \frac{dw}{\sqrt{1 - B^2y^2}} = 0, \qquad v' = k_i = \text{const.}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n) \tag{11}$$

pe diferitele porțiuni subsonice ale aripii $\left(\max\left[-\frac{1}{B},\ -l_2\right] < y < -c\right.$ și $c < y < \min\left[\frac{1}{B},\ l_1\right]$, $\left.\mathfrak{z} = 0\right)$, (fig. 2*a*, *b*, *c*), și în mod analog,

$$dv = \frac{dw}{\sqrt{B^2y^2 - 1}} = 0, \quad v = K_j = \text{const.}, \quad (j = n + 1,\ n + 2, \ldots), \tag{12}$$

pe diferitele porțiuni supersonice ale aripii $\left(-l_2 < y < -\frac{1}{B}\right.$ și $\frac{1}{B} < y < l_1$, $\left.\mathfrak{z} = 0\right)$ (fig. 2*b*, *c*).

Ca și în lucrarea noastră anterioară [1], vom considera funcția

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{V} - i\,(k_0 - \alpha_0 U_\infty), \tag{13}$$

cu ajutorul căreia, ținînd seamă de (4), soluția mișcării se poate scrie

$$\mathcal{U} = -x\,\frac{dF}{dx} + F. \tag{14}$$

Condițiile la limită se pot scrie acum mai simplu și anume

$$\mathcal{R}e\, x\,\frac{dF}{dx} = 0 \tag{15}$$

pe cercul de rază c, care reprezintă (considerînd mereu $B^2c^2 \ll 1$) transformatul în planul x al cercului de rază c din planul fizic *oyz*;

$$\mathcal{I}m\,\frac{dF}{dx} = K_i = \text{const.}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n), \tag{16}$$

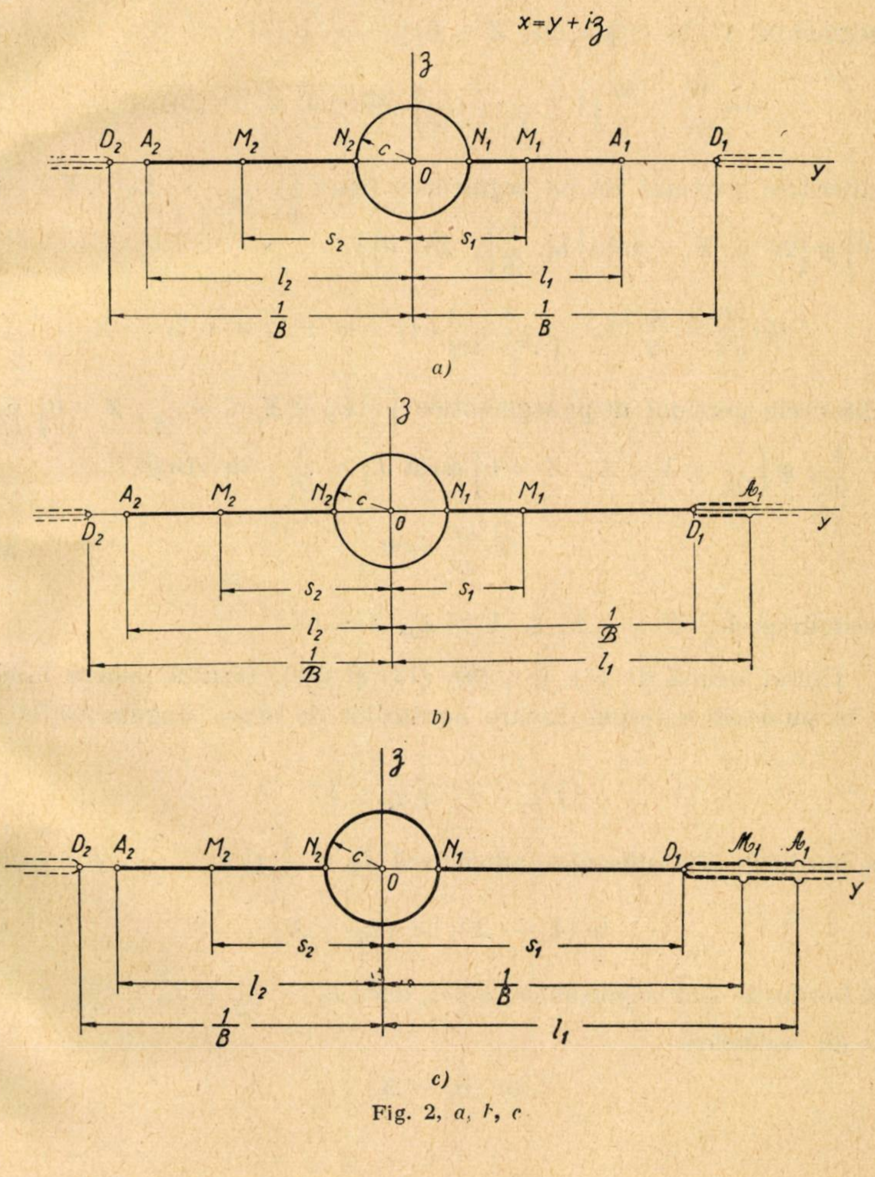
pe diferitele porțiuni de pe segmentul $\left(\max\left[-\frac{1}{B},\ -l_2\right] < y < -c\right.$ $\left.\mathfrak{z} = 0\right)$, sau de pe segmentul $\left(c < y < \min\left[\frac{1}{B},\ l_1\right],\ \mathfrak{z} = 0\right)$;

$$\mathcal{R}e\,\frac{dF}{dx} = K_j = \text{const.}, \quad (j = n + 1,\ n + 2, \ldots), \tag{17}$$

pe diferitele porţiuni de pe segmentul $\left(-l_2 < y < -\frac{1}{B}, \mathfrak{z} = 0\right)$ dacă $l_2 > \frac{1}{B}$, sau de pe segmentul $\left(\frac{1}{B} < y < l_1, \mathfrak{z} = 0\right)$ dacă $l_1 > \frac{1}{B}$; în sfîrşit

$$\mathcal{R}e \frac{dF}{dx} = 0 \tag{18}$$

pe semidreptele $(y < -l_2$ şi $y > l_1, \mathfrak{z} = 0)$.


x=y+iz
z
D2
A2
M2
N2
c
N1
M1
A1
D1
0
y
s2
s1
l2
l1
1/B

a)

b)

c)

Fig. 2, *a, b, c*

În urma transformării conforme (3), în planul X se obţine

$$\frac{dF}{dX} = x\frac{dF}{dx}\,\frac{1}{x-\dfrac{c^2}{x}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}\right)\frac{dF}{dx}, \tag{19}$$

de unde rezultă următoarele condiţii la limită în planul X (fig. 3 a, b, c):

$$\mathcal{I}m\frac{dF}{dX} = 0 \tag{20}$$

pe segmentul $(-2c < y < 2c,\ Z = 0)$;

$$\mathcal{I}m\frac{dF}{dX} = \frac{K_i}{2}\left(1+\frac{Y}{\sqrt{Y^2-4c^2}}\right),\ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

pe diferitele porţiuni de pe segmentele $\left(\max\left[-\frac{1}{\mathcal{B}},\ -L_2\right] < Y < -2c,\ Z = 0\right)$ şi $\left(2c < Y < \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right],\ Z = 0\right)$;

$$\mathcal{R}e\frac{dF}{dX} = \frac{K_j}{2}\left(1+\frac{Y}{\sqrt{Y^2-4c^2}}\right),\ (j = n+1,\ n+2, \ldots), \tag{22}$$

pe diferitele porţiuni de pe segmentele $\left(-L_2 < Y < -\frac{1}{\mathcal{B}},\ Z = 0\right)$ dacă $L_2 > \frac{1}{\mathcal{B}}$, şi $\left(\frac{1}{\mathcal{B}} < Y < L_1,\ Z = 0\right)$ dacă $L_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}$; în sfîrşit

$$\mathcal{R}e\frac{dF}{dX} = 0 \tag{23}$$

pe semidreptele $(Y < -L_2$ şi $Y > L_1,\ Z = 0)$.

Ţinînd seamă de (7), (8), (9), (13) şi (19), rezultă pentru funcţia $\frac{dF}{dX}$, în punctele corespunzătoare bordurilor de atac, singularităţile

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 - X}},\ \frac{1}{\sqrt{L_2 + X}}, \tag{24}$$

dacă bordurile sînt subsonice, adică dacă $L_1 < \frac{1}{\mathcal{B}}$ şi $L_2 < \frac{1}{\mathcal{B}}$, şi respectiv

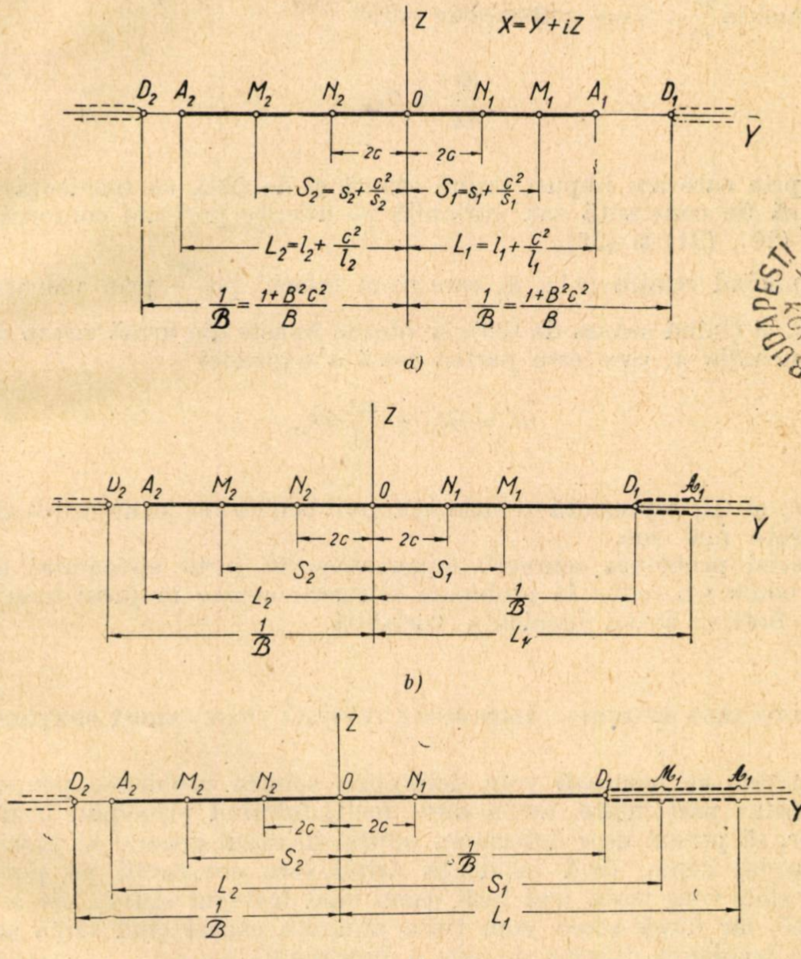
$$\ln(L_1 - X),\ \ln(L_2 + X), \tag{25}$$

dacă bordurile sînt supersonice, adică dacă $L_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}$ şi $L_2 > \frac{1}{\mathcal{B}}$; vom avea de asemenea

$$\ln(S_i - X) \tag{26}$$

în punctele de salt $X = S_i$. Valorile L_1, L_2 și S_i sînt date de expresiile

$$L_1 = l_1 + \frac{c^2}{l_1}, \quad L_2 = l_2 + \frac{c^2}{l_2}, \quad S_i = s_i + \frac{c^2}{s_i}. \tag{27}$$


Z
X=Y+iZ
D2
A2
M2
N2
0
N1
M1
A1
D1
Y
2c
2c
$S_2=s_2+\frac{c^2}{s_2}$
$S_1=s_1+\frac{c^2}{s_1}$
$L_2=l_2+\frac{c^2}{l_2}$
$L_1=l_1+\frac{c^2}{l_1}$
$\frac{1}{\mathcal{B}}=\frac{1+B^2c^2}{B}$
$\frac{1}{\mathcal{B}}=\frac{1+B^2c^2}{B}$
Z
D2
A2
M2
N2
0
N1
M1
D1
𝒜1
Y
2c
2c
S2
S1
L2
$\frac{1}{\mathcal{B}}$
$\frac{1}{\mathcal{B}}$
L1
Z
D2
A2
M2
N2
0
N1
D1
ℳ1
𝒜1
Y
2c
2c
S2
$\frac{1}{\mathcal{B}}$
L2
S1
$\frac{1}{\mathcal{B}}$
L1

a)

b)

c)

Fig. 3 *a*, *b*, *c*

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Prin analogie cu mișcarea conică în jurul unei aripi triunghiulare plane, vom considera în planul X o mișcare conică fictivă, avînd vitezele de perturbație $u_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}_a$, $v_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a$ și $w_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{W}_a$, care satisfac relații de compatibilitate analoage cu (4),

$$d\mathcal{U}_a = -X d\mathcal{V}_a = \frac{iX d\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}, \quad \left(\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}\right). \tag{28}$$

Considerînd că bordurile aripii fictive sînt situate în aceleași puncte $X = L_1$ și $X = -L_2$, și că aripa fictivă are aceleași muchii în punctele $X = S_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, este ușor de văzut că funcția $\mathcal{V}_a$ prezintă aceleași singularități (24), (25) și (26), și satisface condiția la limită (23) ca și funcția $\frac{dF}{dX}$. Vom putea deci scrie

$$\frac{dF}{dX} = \mathcal{V}_a, \tag{29}$$

relație prin care am impus, ținînd seamă și de (26), ca incidența aripii fictive să fie constantă sau variabilă pe diferite porțiuni conform condițiilor (20), (21) și (22).

Aplicînd relația (14), în care vom înlocui pe $\frac{dF}{dx}$ prin valoarea sa din (19), și ținînd seama de (28), se obține în cele din urmă viteza axială de perturbație u, care este partea reală a expresiei

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a, \tag{30}$$

unde $\mathcal{U}_a$ și $\mathcal{V}_a$ reprezintă soluția scurgerii conice în jurul aripii fictive considerate mai sus.

Astfel problema scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic s-a redus la problema scurgerii conice în jurul unei aripi izolate, fictive, avînd incidența variabilă.

3. MIȘCAREA ÎN JURUL SISTEMULUI FUZELAJ CONIC - ARIPĂ SUBȚIRE

În cele ce urmează vom determina soluția problemei pentru diferite cazuri particulare, astfel alese încît, folosind principiul însumării efectelor, să putem ușor determina soluția în cazul general al sistemului aripă-fuzelaj conic, cînd incidența aripii este constantă pe porțiuni.

Astfel, vom trata mai întîi cazul cînd întregul sistem are aceeași incidență, iar după aceea vom trata anumite cazuri cînd aripa are pe porțiuni incidențe diferite de cea a fuzelajului.

3.1. **Cazul cînd aripa și fuzelajul au aceeași incidență** α_0. În acest caz, condițiile la limită în planul x sînt date de (5) pe cercul de raza c și, respectiv,

$$w = \alpha_0 U_\infty = \text{const.} \tag{31}$$

pe segmentele $(-l_2 < y < -c,\ \mathfrak{z} = 0)$ și $(c < y < l_1,\ \mathfrak{z} = 0)$, și

$$u = v = 0 \tag{32}$$

pe semidreptele $(y < -l_2,\ \mathfrak{z} = 0)$ și $(y > l_1,\ \mathfrak{z} = 0)$.

Ţinînd seama de relaţiile (5) şi (31), precum şi de (10) şi (11), se poate deduce

$$v' = k_0 - \alpha_0 U_\infty \tag{33}$$

pe segmentele $\left(\max\left[-\frac{1}{B},\ -l_2\right] < y < -c,\ \mathfrak{z} = 0\right)$ şi $\left(c < y < \right.$ $\left. < \min\left[\frac{1}{B},\ l_1\right],\ \mathfrak{z}=0\right)$.

Pe porţiunile supersonice ale aripii se pot deduce condiţiile

$$v = \frac{\alpha_0 U_\infty}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} = Q_1 \tag{34}$$

pe segmentul $\left(\frac{1}{B} < y < l_1,\ \mathfrak{z} = 0\right)$, dacă bordul A_1 este supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$, şi

$$v = \frac{-\alpha_0 U_\infty}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}} = Q_2 \tag{35}$$

pe segmentul $\left(-l_2 < y < -\frac{1}{B},\ \mathfrak{z} = 0\right)$ dacă bordul A_2 este supersonic $\left(l_2 > \frac{1}{B}\right)$. Aceste expresii au fost deduse scriind relaţiile de compatibilitate (4) în jurul punctului $x = l_1 > \frac{1}{B}$, şi respectiv $x = -l_2 < -\frac{1}{B}$, efectuînd apoi semireziduul în jurul acestor puncte şi ţinînd seama de relaţiile (8), (12) şi (31), precum şi de faptul că $u = v = w = 0$ pe semidreptele $\left(y > l_1 > \frac{1}{B},\ \mathfrak{z} = 0\right)$ şi $\left(y < -l_2 < -\frac{1}{B},\ \mathfrak{z} = 0\right)$.

Luînd în consideraţie cele de mai sus, precum şi relaţiile (13), (19) şi (29), se obţin condiţiile la limită pentru aripa fictivă, în planul X,

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{V}_a = 0 \tag{36}$$

pe segmentul $\left(\max\left[-\frac{1}{\mathcal{B}},\ -L_2\right] < Y < \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right],\ Z = 0\right)$,

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = \frac{Q_1}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{37}$$

pe segmentul $\left(\frac{1}{\mathcal{B}} < Y < L_1,\ Z = 0\right)$, dacă $L_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}$,

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = \frac{Q_2}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{38}$$

pe segmentul $\left(-L_2 < Y < -\frac{1}{\mathcal{B}},\ Z = 0\right)$, dacă $L_2 > \frac{1}{\mathcal{B}}$, şi

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = 0 \tag{39}$$

pe semidreptele $(Y < -L_2,\ Z = 0)$ şi $(Y > L_1, Z = 0)$.

Ținînd seamă de condițiile de mai sus și de (28), vom determina în cele ce urmează soluția mișcării în jurul aripii fictive, din planul X, pentru diferitele poziții ale aripii față de conul Mach.

a. *Dacă bordurile de atac sînt subsonice*, vom obține soluția mișcării în jurul aripii fictive

$$\mathcal{U}_a = \frac{C + C'X}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}}, \tag{40a}$$

$$\mathcal{V}_a = \frac{D + D'X}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}}. \tag{40b}$$

Pentru a evita unele incompatibilități fizice, care apar ca o consecință a relațiilor de compatibilitate (28), ca și la aripa izolată reală, am impus condiția

$$[d\mathcal{U}_a]_{X=0} = 0. \tag{41}$$

Folosind această condiție, precum și prima din relațiile de compatibilitate (28), vom putea determina următoarele relații între constante:

$$C' = D = C_0 \frac{l_1 - l_2}{2l_1 l_2}\left(1 - \frac{c^2}{l_1 l_2}\right), \quad D' = -\frac{C_0}{l_1 l_2}, \tag{42}$$

unde am notat

$$C_0 = \frac{C}{\left(1 + \frac{c^2}{l_1^2}\right)\left(1 + \frac{c^2}{l_2^2}\right)}. \tag{43}$$

Aplicînd mai departe relația (30), se obține expresia vitezei axiale de perturbație [1] din mișcarea în jurul sistemului fuzelaj-aripă subțire în cazul cînd aripa și fuzelajul au aceeași incidență α_0,

$$\mathcal{U} = \frac{C_0}{l_1 l_2} \cdot \frac{l_1 l_2 \left(1 + \frac{c^2}{l_1^2}\right)\left(1 + \frac{c^2}{l_2^2}\right) - 2c^2\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right) + \frac{l_1 - l_2}{2}\left(1 - \frac{c^2}{l_1 l_2}\right)\left(x + \frac{3c^2}{x}\right)}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1 + \frac{c^2}{l_2 x}\right)}}. \tag{44}$$

Constanta C_0 poate fi determinată impunînd condiția ca pe aripă viteza verticală de perturbație să aibă valoarea $w = \alpha_0 U_\infty = \text{const.}$, ceea ce conduce la condiția

$$\mathcal{R}e \int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă}} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix}\, d\mathcal{U} = \alpha_0 U_\infty. \tag{45}$$

---

[1] *Remarcă*. Deși s-a menținut simbolic X pentru considerente de uniformitate, soluțiile obținute sînt valabile, în limitele aproximației anunțate, numai pe aripă și pe fuzelaj sau în imediata lor apropiere. Pentru a se obține expresia vitezei axiale de perturbație ($u = \mathcal{R}e\, \mathcal{U}$) pe aripă și pe fuzelaj, se face $X = Y$ ($x = y$ pe aripă și $x = c\, e^{i\theta}$ pe fuzelaj).

b. *Dacă bordul A_1 este supersonic, iar bordul A_2 este subsonic,* vom obține

$$\mathcal{V}_a = D_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} + \frac{Q_1}{\pi}\left(1 + \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 - 4c^2}}\right) \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} + I_v, \quad (46a)$$

$$\mathcal{U}_a = C_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} - \frac{Q_1 L_1}{\pi}\left(1 + \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 - 4c^2}}\right) \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} + I_u, \quad (46b)$$

în care I_v și I_u reprezintă contribuțiile distribuției de incidență variabilă, corespunzătoare cu (37) și (28), de pe segmentul $\left(\frac{1}{\mathcal{B}} < Y < L_1,\ Z = 0\right)$, al aripii fictive, și au expresiile

$$I_v = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{\mathcal{B}}}^{L_1} - \frac{d}{d\eta}\left[\frac{Q_1}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + \eta)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(\eta - X)}}\, d\eta, \quad (47a)$$

$$I_u = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{\mathcal{B}}}^{L_1} \eta \frac{d}{d\eta}\left[\frac{Q_1}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + \eta)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(\eta - X)}}\, d\eta. \quad (47b)$$

Efectuînd calculele, și introducînd rezultatele în (46 a, b), se obțin expresiile

$$\mathcal{V}_a = D_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} + \frac{Q_1}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} + f_1 -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi (X - 2c)} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \left[2c\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \frac{X}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1)\right], \quad (48a)$$

$$\mathcal{U}_a = C_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} - \frac{2Q_1 l_1}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} - \frac{4c^2}{X} f_1 -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi} \frac{4c^2}{X - 2c} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \left[\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1)\right], \quad (48b)$$

în care

$f_1 = \frac{Q_1}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < L_1$, şi $f_1 = 0$ în afara acestui segment

iar $\mathbf{F}(\varphi_1, k_1)$ şi $\mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1)$ sînt integrale eliptice de speţa I şi respectiv a III-a, modulul k_1, argumentul φ_1 şi parametrul ρ_1 al integralei eliptice de speţa a III-a avînd expresiile

$$k_1^2 = \frac{4c\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}, \tag{49a}$$

$$\rho_1 = -\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(X - 2c)}{(L_2 + 2c)\left(X - \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}, \tag{49b}$$

$$\varphi_1 = \text{arc sin} \sqrt{\frac{(L_2 + 2c)\left(L_1 - \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - 2c)}}. \tag{49c}$$

Introducînd expresiile de mai sus în (30), se obţine soluţia problemei în acest caz; constanta Q_1 este dată de relaţia (34), iar constantele C_2 şi D_2 pot fi determinate folosind prima din relaţiile de compatibilitate (28), precum şi relaţiile (48 a, b).

c. *Dacă bordul A_2 este supersonic, iar bordul A_1 subsonic*, se deduce în mod analog

$$\mathcal{V}_a = D_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{Q_2}{\pi} \text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} + f_2 +$$

$$+ \frac{Q_2}{\pi(X + 2c)} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \left[2c\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) + \frac{X}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)\mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2)\right], \tag{50a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{2Q_2 l_2}{\pi} \text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} - \frac{4c^2}{X} f_2 +$$

$$+ \frac{Q_2}{\pi} \frac{4c^2}{X + 2c} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \left[\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) - \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2)\right], \tag{50b}$$

în care

$$f_2 = \frac{Q_2}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \text{ pe segmentul } -L_2 < X = Y < -\frac{1}{\mathcal{B}}, \text{ şi } f_2 = 0 \text{ în afara acestui segment,}$$

şi

$$k_2^2 = \frac{4c\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_1 + 2c)}, \tag{51a}$$

$$\rho_2 = -\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(X + 2c)}{(L_1 + 2c)\left(X + \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}, \tag{51b}$$

$$\varphi_2 = \text{arc sin} \sqrt{\frac{(L_1 + 2c)\left(L_2 - \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 - 2c)}}, \tag{51c}$$

constanta Q_2 este dată de relaţia (35), iar constantele C_1 şi D_1 se determină folosind prima din relaţiile de compatibilitate (28). Soluţia problemei în acest caz se obţine introducînd relaţiile (50 a, b) în (30).

d. *Dacă ambele borduri de atac sînt supersonice*, vom obţine într-un mod asemănător pe $\mathcal{V}_a$ şi $\mathcal{U}_a$, care, introduse în (30), ne dau expresia vitezei axiale de perturbaţie,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = {} & -\frac{2Q_1}{\pi}\left(l_1 - \frac{c^2}{x}\right) \text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_1 - X)}} + \frac{2Q_2}{\pi}\left(l_2 + \right. \\
& \left. + \frac{c^2}{x}\right) \text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_2 + X)}} - \frac{Q_1}{\pi x} \frac{2c^2}{x - c} \frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c} \Bigg[2x\mathrm{F}(\varphi_1, k_0) + \\
& + \frac{x + c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \Pi(\varphi_1, \rho_1, k_0)\Bigg] - h_1 + \frac{Q_2}{\pi x} \frac{2c^2}{x + c} \frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c} \Bigg[2x\mathrm{F}(\varphi_2, k_0) - \\
& - \frac{x - c}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \Pi(\varphi_2, \rho_2, k_0)\Bigg] - h_2,
\end{aligned} \tag{52}$$

în care

$h_1 = \frac{Q_1 c^2}{x}$ pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < L_1$, și $h_1 = 0$ în afara acestui segment,

$h_2 = \frac{Q_2 c^2}{x}$ pe segmentul $-\frac{1}{\mathcal{B}} > X = Y > -L_2$, și $h_2 = 0$ în afara acestui segment,

și în care Q_1 și Q_2 au valorile din (34) și (35), φ_1 și ρ_1 se obțin înlocuind în (49 b, c) pe L_2 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, φ_2 și ρ_2 se obțin înlocuind în (51 b, c) pe L_1 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, iar k_0 are valoarea

$$k_0^2 = \frac{8\mathcal{B}c}{(1+2\mathcal{B}c)^2}\,. \tag{53}$$

Dacă aripa este simetrică, $l_1 = l_2 = l > \frac{1}{B}$, se obține o expresie simplificată,

$$\mathcal{U} = -\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L - X)}} - \frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L + X)}} - \frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}}, \tag{54}$$

în care

$$Q = \frac{\alpha_0 U_\infty}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}},\quad L = l + \frac{c^2}{l}\,. \tag{55}$$

3.2. **Cazul cînd aripa are incidența α_1 pe porțiunea M_1A_1, restul aripii și axa fuzelajului neavînd incidență.** În acest caz condițiile la limită în planul x sînt

$$v\cos\theta + w\sin\theta = 0 \tag{56}$$

pe cercul de rază c,

$$w = 0 \tag{57}$$

pe segmentul $(-l_2 < y < -c,\ \mathfrak{z} = 0)$ și $(c < y < s_1,\ \mathfrak{z} = 0)$,

$$w = \alpha_1 U_\infty \tag{58}$$

pe segmentul $(s_1 < y < l_1,\ \mathfrak{z} = 0)$, și condiția (32) pe semidreptele $(y < -l_2,\ \mathfrak{z} = 0)$ și $(y > l_1,\ \mathfrak{z} = 0)$.

Ținînd seamă de relațiile (56), (57), precum și de (4), (10) și (11), se poate deduce condiția

$$v' = k_0 \tag{59}$$

pe segmentele $\left(\max\left[-\frac{1}{B}, -l_2\right] < y < -c, \mathfrak{z} = 0\right)$ și $\left(c < y < \min\left[s_1, \frac{1}{B}\right], \mathfrak{z} = 0\right)$.

Scriind relațiile de compatibilitate (4) în jurul muchiei subsonice $M_1\left(x = s_1 < \frac{1}{B}\right)$, efectuînd semireziduul în jurul acestui punct și ținînd seamă de (11), (57) și (58), se poate deduce

$$v' = k_0 + K_1, \quad K_1 = -\frac{\alpha_1 U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 s_1^2}}, \tag{60}$$

pe segmentul $\left(s_1 < y < \min\left[l_1, \frac{1}{B}\right], \mathfrak{z} = 0\right)$.

Procedînd în mod analog se obține:

— dacă bordul A_1 este supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$,

$$v = \frac{\alpha_1 U_\infty}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} = K_3 \tag{61}$$

pe segmentul $\left(\max\left[\frac{1}{B}, s_1\right] < y < l_1, \mathfrak{z} = 0\right)$;

— dacă muchia M_1 și bordul A_1 sînt supersonice $\left(l_1 > s_1 > \frac{1}{B}\right.$,

$$v = K_3 + K_5, \quad K_5 = -\frac{\alpha_1 U_\infty}{\sqrt{B^2 s_1^2 - 1}}, \tag{62}$$

pe segmentul $\left(\frac{1}{B} < y < s_1, \mathfrak{z} = 0\right)$;

— dacă bordul A_2 este supersonic $\left(l_2 > \frac{1}{B}\right)$, $v = 0$, pe segmentul $\left(-l_2 < y < -\frac{1}{B}, \mathfrak{z} = 0\right)$.

Considerînd funcția $\frac{dF}{dx}$ ca în expresia (13), în care vom pune $\alpha_0 = 0$ (axa fuzelajului neavînd incidență în acest caz), și ținînd seamă de (19) și (29), se obțin următoarele condiții în planul X:

$$\mathcal{J}m\mathcal{V}_a = 0 \tag{63}$$

pe segmentul $\left(\max\left[-\frac{1}{\mathcal{B}}, -L_2\right] < Y < \min\left[S_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right], Z = 0\right)$;

$$\mathcal{J}m\mathcal{V}_a = \frac{K_1}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{64}$$

pe segmentul $\left(S_1 < Y < \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right], Z = 0\right)$;

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = 0 \tag{65}$$

pe semidreptele $(Y > L_1, Z = 0)$ și $\left(Y < \max\left[-L_2, -\frac{1}{\mathcal{B}}\right], Z = 0\right)$;

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = \frac{K_3}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{66}$$

pe segmentul $\left(\max\left[\frac{1}{\mathcal{B}}, S_1\right] < Y < L_1, Z = 0\right)$, dacă bordul A_1 este supersonic $\left(L_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}\right)$;

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = \frac{K_3 + K_5}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{67}$$

pe segmentul $\left(\frac{1}{\mathcal{B}} < Y < S_1, Z = 0\right)$, dacă muchia M_1 și bordul A_1 sînt supersonice $\left(L_1 > S_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}\right)$.

Ținînd seama de condițiile la limită de mai sus și de (28), vom determina în cele ce urmează, soluția mișcării în jurul aripii fictive considerată în planul X, pentru diferitele poziții ale aripii reale față de conul Mach.

a. *Cînd ambele borduri de atac sînt subsonice*, se obține

$$\mathcal{V}_a = D_1\sqrt{\frac{L_2 + X}{L_1 - X}} + D_2\sqrt{\frac{L_1 - X}{L_2 + X}} +$$

$$+ \frac{K_1}{\pi}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - 4c^2}}\right) \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + S_1)}{(L_1 + L_2)(S_1 - X)}} + I_v, \tag{68a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1\sqrt{\frac{L_2 + X}{L_1 - X}} + C_2\sqrt{\frac{L_1 - X}{L_2 + X}} -$$

$$- \frac{K_1 S_1}{\pi}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - 4c^2}}\right) \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + S_1)}{(L_1 + L_2)(S_1 - X)}} + I_u, \tag{68b}$$

în care I_v și I_u sînt contribuțiile distribuției de incidență variabilă, corespunzătoare cu (64) și (28), de pe segmentul $(S_1 < Y < L_1, Z = 0)$, și au expresiile

$$I_v = \frac{2}{\pi}\int_{S_1}^{L_1} \frac{d}{d\eta}\left[\frac{K_1}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + \eta)}{(L_1 + L_2)(\eta - X)}}\, d\eta, \tag{69a}$$

$$I_u = \frac{2}{\pi}\int_{S_1}^{L_1} - \eta\frac{d}{d\eta}\left[\frac{K_1}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + \eta)}{(L_1 + L_2)(\eta - X)}}\, d\eta. \tag{69b}$$

Efectuînd calculele, se obține

$$\mathcal{V}_a = D_1\sqrt{\frac{L_2+X}{L_1-X}} + D_2\sqrt{\frac{L_1-X}{L_2+X}} + \frac{K_1}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\,(L_2+S_1)}{(L_1+L_2)\,(S_1-X)}} + i\,\psi_1 +$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\,\frac{2c}{X+2c}\,\frac{\sqrt{(L_1-X)\,(L_2+X)}}{\sqrt{(L_1+2c)\,(L_2+2c)}}\Big\{\mathbf{K}(k)-\mathbf{F}(\varphi_3,k)-$$

$$-\frac{2X}{X-2c}\Big[\mathbf{\Pi}(\rho,k)-\mathbf{\Pi}(\varphi_3,\rho,k)\Big]\Big\}, \tag{70a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1\sqrt{\frac{L_2+X}{L_1-X}} + C_2\sqrt{\frac{L_1-X}{L_2+X}} - \frac{2s_1K_1}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\,(L_2+S_1)}{(L_1+L_2)\,(S_1-X)}} - \frac{4c^2}{X}\,i\psi_1 +$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\,\frac{4c^2}{X+2c}\,\frac{\sqrt{(L_1-X)\,(L_2+X)}}{\sqrt{(L_1+2c)\,(L_2+2c)}}\Big\{\mathbf{K}(k)-\mathbf{F}(\varphi_3,k)+$$

$$+\frac{4c}{X-2c}\Big[\mathbf{\Pi}(\rho,k)-\mathbf{\Pi}(\varphi_3,\rho,k)\Big]\Big\}, \tag{70b}$$

în care

$\psi_1 = \frac{K_1}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}$ pe segmentul $S_1 < X = Y < L_1$, și $\psi_1 = 0$ în afara acestui segment,

$\mathbf{F}(\varphi_3, k)$ și $\mathbf{\Pi}(\varphi_3, \rho, k)$ sînt integrale eliptice de speța I și respectiv a III-a, k, ρ și φ_3 avînd expresiile

$$k = \frac{(l_1-c)\,(l_2-c)}{(l_1+c)\,(l_2+c)}, \tag{71a}$$

$$\rho = -\frac{(l_1-c)^2\,(x+c)^2}{(l_1+c)^2\,(x-c)^2}, \tag{71b}$$

$$\varphi_3 = \arcsin\frac{(l_1+c)\,(s_1-c)}{(l_1-c)\,(s_1+c)}, \tag{71c}$$

iar $\mathbf{K}(k)$ și $\mathbf{\Pi}(\rho, k)$ sînt integrale eliptice complete de speța I și respectiv a III-a.

Introducînd în (30) relațiile (70 a, b) se obține expresia vitezei axiale de perturbație în acest caz. În ceea ce priveşte constantele, K_1 este dată de relația (60), iar constantele C_1, C_2, D_1 și D_2 pot fi determinate utilizînd prima din relațiile de compatibilitate (28), care furnizează trei ecuații, şi condiția

$$\mathcal{R}e\int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă (segm. } M_1A_1)}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\,d\mathcal{U} = \alpha_1\,U_\infty, \tag{72}$$

care este cea de-a IV-a ecuație.

b. *Dacă bordul A_2 este supersonic iar bordul A_1 este subsonic*, soluția se obține înlocuind în (70 a, b) precum și în (71 a, b, c), pe l_2 prin $\frac{1}{B}$ și pe L_2 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, și făcînd $C_2 = D_2 = 0$.

c. *Dacă bordul A_1 este supersonic iar muchia M_1 și bordul A_2 sînt subsonice*, soluția problemei se obține ușor procedînd ca mai sus,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_a = D_2 & \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} + \frac{K_3}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} + \\ & + \frac{K_1}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + S_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(S_1 - X)}} - \frac{K_3}{\pi(X - 2c)} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \\ & + \frac{X}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1) \Bigg] + f_3 + \frac{K_1}{\pi} \frac{2c}{X + 2c} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \Bigg\{ \mathbf{K}(k) - \\ & - \mathbf{F}(\varphi_3, k) - \frac{2X}{X - 2c} \Big[\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}(\varphi_3, \rho, k) \Big] \Bigg\} + i\,\psi_1, \end{aligned} \tag{73a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_a = C_2 & \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} - \frac{2K_3 l_1}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} - \\ & - \frac{2K_1 s_1}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + S_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(S_1 - X)}} - \frac{K_3}{\pi} \frac{4c^2}{X - 2c} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \Bigg[\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \\ & + \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1) \Bigg] - \frac{4c^2}{X} f_3 + \frac{K_1}{\pi} \frac{4c^2}{X + 2c} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \Bigg\{ \mathbf{K}(k) - \\ & - \mathbf{F}(\varphi_3, k) + \frac{4c}{X - 2c} \Big[\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}(\varphi_3, \rho, k) \Big] \Bigg\} - \frac{4c^2}{X}\, i\,\psi_1 \end{aligned} \tag{73b}$$

în care

$\psi_1 = \frac{K_1}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $S_1 < X = Y < \frac{1}{\mathcal{B}}$, și $\psi_1 = 0$ în afara acestui segment,

$f_3 = \frac{K_3}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < L_1$, și $f_3 = 0$ în afara acestui segment,

și în care K_1 și K_3 au valorile din (60) și (61), k_1, ρ_1 și φ_1 sînt date de relațiile (49 a, b, c), iar k, ρ și φ_3 au expresiile

$$k = \frac{(1 - Bc)\,(l_2 - c)}{(1 + Bc)\,(l_2 + c)}, \tag{74a}$$

$$\rho = -\frac{(1 - Bc)^2\,(x + c)^2}{(1 + Bc)^2\,(x - c)^2}, \tag{74b}$$

$$\varphi_3 = \text{arc sin}\, \frac{(1 + Bc)\,(s_1 - c)}{(1 - Bc)\,(s_1 + c)}. \tag{74c}$$

Expresia vitezei axiale de perturbație în acest caz, se obține introducînd în (30) pe (73 a, b). Constantele C_2 și D_2 se pot determina folosind prima din relațiile de compatibilitate (28).

d. *Dacă ambele borduri sînt supersonice, iar muchia M_1 subsonică,* soluția se obține înlocuind în (73 a, b) precum și în (74 a, b, c) și (49 a, b, c) pe l_2 prin $\frac{1}{B}$ și pe L_2 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, și făcînd $C_2 = D_2 = 0$.

e. *Dacă bordul A_1 și muchia M_1 sînt supersonice, iar bordul A_2 este subsonic,* procedînd ca mai sus se obține

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_a = {} & D_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} + \frac{K_3}{\pi}\,\text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} + \\ & + \frac{K_5}{\pi}\,\text{arc cos} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + S_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(S_1 - X)}} - \frac{1}{\pi(X - 2c)} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}} \Bigg\{ K_3 \Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \\ & + \frac{X}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1) \Bigg] + K_5 \Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_5, k_1) + \\ & + \frac{X}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right) \mathbf{\Pi}(\varphi_5, \rho_1, k_1) \Bigg] \Bigg\} + (f_3 + f_5)\,,\end{aligned} \tag{75a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_2\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_2 + X}} - \frac{2K_3 l_1}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + L_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(L_1 - X)}} -$$

$$- \frac{2K_5 s_1}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + S_1)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(S_1 - X)}} - \frac{4c^2}{\pi(X-2c)}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + X)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)(L_2 + 2c)}}\left\{K_3\left[\mathbf{F}(\varphi_1, k_1) + \right.\right.$$

(75b)

$$\left.\left. + \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}}\,\mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho_1, k_1)\right] + K_5\left[\mathbf{F}(\varphi_5, k_1) + \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}}\,\mathbf{\Pi}(\varphi_5, \rho_1, k_1)\right]\right\} - \frac{4c^2}{X}(f_3 + f_5),$$

in care

$f_3 = \frac{K_3}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < L_1$, şi $f_3 = 0$ în afara acestui segment,

$f_5 = \frac{K_5}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < S_1$, şi $f_5 = 0$ în afara acestui segment,

şi în care k_1, ρ_1 şi φ_1 sînt date de relaţiile (49 a, b, c), iar φ_5 are valoarea

$$\varphi_5 = \arcsin\sqrt{\frac{(L_2 + 2c)\left(S_1 - \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(S_1 - 2c)}}; \qquad (76)$$

în ceea ce priveşte constantele, K_3 şi K_5 au valorile din (60) şi (62), iar C_2 şi D_2 se determină utilizînd prima din relaţiile de compatibilitate (28).

Soluţia problemei se obţine introducînd în (30) expresiile (75a, b).

f. *Dacă ambele borduri de atac şi muchia M_1 sînt supersonice*, soluţia se obţine înlocuind în (75 a, b) precum şi în (49 a, b, c) şi (76), pe l_2 prin $\frac{1}{B}$ şi pe L_2 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, şi făcînd $C_2 = D_2 = 0$.

Remarcă. În cazul cînd aripa are aceeaşi incidenţă α_1 pe întreaga porţiune N_1A_1 soluţia problemei se obţine făcînd pe s_1 să tindă către c în formulele de mai sus.

3.3. Cazul cînd aripa are incidenţa α_2 pe porţiunea A_2M_2, restul aripii şi axa fuzelajului neavînd incidenţă. Procedînd ca în cazul precedent, vom obţine următoarele rezultate:

a. *Dacă ambele borduri de atac sînt subsonice,*

$$\mathcal{V}_a = D_1\sqrt{\frac{L_2+X}{L_1-X}} + D_2\sqrt{\frac{L_1-X}{L_2+X}} - \frac{K_2}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_2+X)\,(L_1+S_2)}{(L_1+L_2)\,(S_2+X)}} + i\,\psi_2 +$$

$$+\frac{K_2}{\pi}\,\frac{2c}{X-2c}\,\frac{\sqrt{(L_1-X)\,(L_2+X)}}{\sqrt{(L_1+2c)\,(L_2+2c)}}\Big\{\mathbf{K}(k)-\mathbf{F}(\varphi_4,k)-$$

$$-\frac{2X}{X+2c}\left[\Pi\left(\frac{k^2}{\rho},k\right)-\Pi\left(\varphi_4,\frac{k^2}{\rho},k\right)\right]\Big\}, \tag{77a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1\sqrt{\frac{L_2+X}{L_1-X}} + C_2\sqrt{\frac{L_1-X}{L_2+X}} - \frac{2K_2 s_2}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_2+X)\,(L_1+S_2)}{(L_1+L_2)\,(S_2+X)}} - \frac{4c^2}{X}\,i\,\psi_2-$$

$$-\frac{K_2}{\pi}\,\frac{4c^2}{X-2c}\,\frac{\sqrt{(L_1-X)\,(L_2+X)}}{\sqrt{(L_1+2c)\,(L_2+2c)}}\Big\{\mathbf{K}(k)-\mathbf{F}(\varphi_4,k)-$$

$$-\frac{4c}{X+2c}\left[\Pi\left(\frac{k^2}{\rho},k\right)-\Pi\left(\varphi_4,\frac{k^2}{\rho},k\right)\right]\Big\}, \tag{77b}$$

în care

$\psi_2 = \frac{K_2}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}$ pe segmentul $-L_2 < X = Y < -S_2$, şi $\psi_2 = 0$ în afara acestui segment,

$$K_2 = -\frac{\alpha_2 U_\infty}{\sqrt{1-B^2 s_2^2}}, \tag{78}$$

k şi ρ au valorile din (71 a, b), iar φ_4 are valoarea

$$\varphi_4 = \arcsin\frac{(l_2+c)\,(s_2-c)}{(l_2-c)\,(s_2+c)}. \tag{79}$$

Expresia vitezei axiale de perturbaţie în acest caz se obţine introducînd relaţiile de mai sus în (30); constantele C_1, C_2, D_1 şi D_2 se determină, după cum am indicat şi la punctul 3.2., folosind prima din relaţiile de compatibilitate (28), care ne furnizează trei ecuaţii, şi o condiţie similară cu (72).

b. *Dacă bordul A_1 este supersonic, iar bordul A_2 este subsonic,* soluţia se obţine înlocuind în (77 a, b) pe l_1 şi L_1 prin $\frac{1}{B}$ şi respectiv $\frac{1}{\mathcal{B}}$, şi făcînd $C_1 = D_1 = 0$.

c. *Dacă bordul A_2 este supersonic, iar bordul A_1 şi muchia M_1 sînt subsonice,*

$$\mathcal{V}_a = D_1 \left[\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{K_4}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} - \right.$$

$$- \frac{K_2}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + S_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(S_2 + X)}} + \frac{K_4}{\pi (X + 2c)} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) +$$

$$+ \frac{X}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{B} - 2c\right) \mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2) \Bigg] + f_4 + \frac{K_2}{\pi} \frac{2c}{X - 2c} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \Bigg\{ \mathbf{K}(k) -$$

$$\left. - \mathbf{F}(\varphi_4, k) - \frac{2X}{X + 2c} \left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{k^2}{\rho}, k\right) - \mathbf{\Pi}\left(\varphi_4, \frac{k^2}{\rho}, k\right) \right] \Bigg\} \right] + i\,\psi_2, \tag{80a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1 \left[\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{2K_4 l_2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} - \right.$$

$$- \frac{2K_2 s_2}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + S_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(S_2 + X)}} + \frac{K_4}{\pi} \frac{4c^2}{X + 2c} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \Bigg[\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) -$$

$$- \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2) \Bigg] - \frac{4c^2}{X} f_4 - \frac{K_2}{\pi} \frac{4c^2}{X - 2c} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \Bigg\{ \mathbf{K}(k) -$$

$$\left. - \mathbf{F}(\varphi_4, k) - \frac{4c}{X + 2c} \left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{k^2}{\rho}, k\right) - \mathbf{\Pi}\left(\varphi_4, \frac{k^2}{\rho}, k\right) \right] \Bigg\} \right] - \frac{4c^2}{X}\, i\,\psi_2, \tag{80b}$$

în care

$\psi_2 = \frac{K_2}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}$ pe segmentul $-\frac{1}{\mathcal{B}} < X = Y < -S_2$, și $\psi_2 = 0$ în afara acestui segment,

$f_4 = \frac{K_4}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}$ pe segmentul $-L_2 < X = Y < -\frac{1}{\mathcal{B}}$, și $f_4 = 0$ în afara acestui segment,

și în care K_2 are valoarea din (78), k_2, ρ_2, φ_2 și ρ sînt date de relațiile (51 a, b, c) și respectiv (71 b), și

$$K_4 = -\frac{\alpha_2 U_\infty}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}, \tag{81a}$$

$$k = \frac{(l_1 - c)(1 - Bc)}{(l_1 + c)(1 + Bc)}, \tag{81b}$$

$$\varphi_4 = \text{arc sin}\,\frac{(1 + Bc)(s_2 - c)}{(1 - Bc)(s_2 + c)}. \tag{81c}$$

Soluția problemei în acest caz se obține introducînd expresiile (80 a, b) în (30); constantele C_1 și D_1 se determină, după cum am văzut mai sus folosind prima din relațiile de compatibilitate (28).

d. *Dacă ambele borduri sînt supersonice, iar muchia M_2 subsonică*) soluția se obține înlocuind în (80 a, b), precum și în (51 a, b, c), (71 b, și (81 b, c), pe l_1 și L_1 prin $\frac{1}{B}$ și respectiv $\frac{1}{\mathcal{B}}$, făcînd $C_1 = D_1 = 0$.

e. *Dacă bordul A_2 și muchia M_2 sînt supersonice, iar bordul A_1 este subsonic,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_a = D_1 &\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{K_4}{\pi}\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} + \\
&+ \frac{K_6}{\pi}\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + S_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(S_2 + X)}} + \frac{1}{\pi(X + 2c)}\frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}}\Bigg\{K_4\Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) + \\
&+ \frac{X}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)\mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2)\Bigg] + K_6\Bigg[2c\,\mathbf{F}(\varphi_6, k_2) + \\
&+ \frac{X}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)\mathbf{\Pi}(\varphi_6, \rho_2, k_2)\Bigg]\Bigg\} + (f_4 + f_6),
\end{aligned} \tag{82a}$$

$$\mathcal{U}_a = C_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} + \frac{2K_4\, l_2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + L_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(L_2 + X)}} +$$

$$+ \frac{2K_6\, s_2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + S_2)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(S_2 + X)}} +$$

$$+ \frac{4c^2}{\pi(X + 2c)} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \left\{ K_4 \left[\mathbf{F}(\varphi_2, k_2) - \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_2, \rho_2, k_2) \right] + \right.$$

$$\left. + K_6 \left[\mathbf{F}(\varphi_6, k_2) - \frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c}{X + \frac{1}{\mathcal{B}}} \mathbf{\Pi}(\varphi_6, \rho_2, k_2) \right] \right\} - \frac{4c^2}{X}(f_4 + f_6), \tag{82b}$$

în care

$f_4 = \frac{K_4}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $-L_2 < X = Y < -\frac{1}{\mathcal{B}}$, și $f_4 = 0$ în afara acestui segment,

$f_6 = \frac{K_6}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $-S_2 < X = Y < -\frac{1}{\mathcal{B}}$, și $f_6 = 0$ în afara acestui segment,

și în care K_4 și k_2, ρ_2, φ_2 sînt date de (81 a) și (51 a, b, c), iar K_6 și φ_6 au valorile

$$K_6 = \frac{\alpha_2 U_\infty}{\sqrt{B^2 s_2^2 - 1}}, \tag{83a}$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{(L_1 + 2c)\left(S_2 - \frac{1}{\mathcal{B}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)(S_2 - 2c)}}; \tag{83b}$$

constantele C_1 și D_1 se determină utilizînd prima din relațiile de compatibilitate (28).

Soluția problemei se obține introducînd în (30) expresiile (82 a, b).

f. *Dacă ambele borduri de atac și muchia M_2 sînt supersonice*, soluția se obține înlocuind în (82 a, b), precum și în (51 a, b, c) și (83 b) pe l_1 și L_1 prin $\frac{1}{B}$ și respectiv $\frac{1}{\mathcal{B}}$, și făcînd $C_1 = D_1 = 0$.

Remarcă. În cazul cînd aripa are aceeași incidență α_2 pe întreaga porțiune A_2N_2, soluția problemei se obține făcînd pe s_2 să tindă către c în formulele de mai sus.

3.4. Cazul cînd aripa are aceeași incidență α pe porțiunile A_2M_2 și M_1A_1, restul aripii și axa fuzelajului neavînd incidență. Soluția în acest caz se obține însumînd rezultatul corespunzător cazului cînd aripa are incidența $\alpha_1 = \alpha$ pe porțiunea M_1A_1, cu rezultatul corespunzător cazului cînd aripa are incidența $\alpha_2 = \alpha$ pe porțiunea A_2M_2. Dacă aripa are simetrie geometrică față de axa fuzelajului, soluția prezintă simplificări importante. De aceea, în cele ce urmează, vom da soluțiile pentru cazul aripii simetrice, avînd bordurile de atac în $A_1\,(x = l)$ și $A_2\,(x = -l)$ și muchiile în $M_1\,(x = s)$ și $M_2\,(x = -s)$, pentru diferitele poziții ale aripii față de conul Mach. Vom avea astfel:

a. *Pentru aripa cu bordurile de atac subsonice*

$$\mathcal{V}_a = \frac{D + D'X}{\sqrt{L^2 - X^2}} + \frac{K}{\pi} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L-X)\,(L+S)}{2L\,(S-X)}} - \frac{K}{\pi} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L+X)\,(L+S)}{2L\,(S+X)}} + \\ + \frac{K}{\pi} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L^2 - X^2)\,(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\,(L^2 - 4c^2)}}, \tag{84a}$$

$$\mathcal{U}_a = \frac{C + C'X}{\sqrt{L^2 - X^2}} - \frac{2Ks}{\pi} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L-X)\,(L+S)}{2L\,(S-X)}} - \frac{2Ks}{\pi} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L+X)\,(L+S)}{2L\,(S+X)}} - \\ - \frac{K}{\pi} \frac{4c^2}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L^2 - X^2)\,(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\,(L^2 - 4c^2)}}, \tag{84b}$$

și

$$\mathcal{U} = \frac{C + 2c^2D' + C'x + (C' + 2D)\dfrac{c^2}{x} + 2D'\dfrac{c^4}{x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}\sqrt{1 - \dfrac{c^4}{l^2x^2}}} - \\ - \frac{2K}{\pi}\left(s - \frac{c^2}{x}\right) \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L-X)\,(L+S)}{2L\,(S-X)}} - \\ - \frac{2K}{\pi}\left(s + \frac{c^2}{x}\right) \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L+X)\,(L+S)}{2L\,(S+X)}} - \frac{Kc^2}{x}\,\frac{2}{\pi} \arg\operatorname{ch} \sqrt{\frac{(L^2 - X^2)\,(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\,(L^2 - 4c^2)}}, \tag{85}$$

în care L este dat de relația (55), iar K și S au valorile

$$K = -\frac{\alpha U\infty}{\sqrt{1 - B^2s^2}}, \quad S = s + \frac{c^2}{s}; \tag{86}$$

constantele C, C', D şi D' se determină folosind prima din relaţiile de compatibilitate (28), care furnizează trei ecuaţii, şi o condiţie similară cu (45).

b. *Pentru aripa cu bordurile de atac supersonice şi muchiile subsonice*,

$$\mathcal{U} = -\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L - X)}} -$$

$$-\frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L + X)}} +$$

$$-\frac{2K}{\pi}\left(s - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S - X)}} -$$

$$-\frac{2K}{\pi}\left(s + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S + X)}} - \tag{87}$$

$$-\frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}} -$$

$$-\frac{Kc^2}{x}\frac{2}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}},$$

în care K, L şi S sînt date de relaţiile (55) şi (86), iar Q are valoarea

$$Q = \frac{\alpha U_\infty}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\,. \tag{88}$$

c. *Pentru aripa cu bordurile de atac şi muchiile supersonice,*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} = & -\frac{2Q}{\pi}\left(l-\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}-X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L-X)}} - \\
& -\frac{2Q}{\pi}\left(l+\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L+X)}} - \\
& -\frac{2K'}{\pi}\left(s-\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}-X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S-X)}} - \\
& -\frac{2K'}{\pi}\left(s+\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S+X)}} - \\
& -\frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-X^2\right)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-4c^2\right)}} - \\
& -\frac{K'c^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-X^2\right)(S^2-4c^2)}{(S^2-X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-4c^2\right)}},
\end{aligned}
\tag{89}
$$

în care Q, L şi S sînt date de relaţiile (88), (55) şi (86), iar K' are valoarea

$$
K' = -\frac{\alpha U_\infty}{\sqrt{B^2 s^2 - 1}}. \tag{90}
$$

3.5. **Cazul cînd întreaga aripă are incidenţa α, axa fuzelajului neavînd incidenţă.** Soluţia în acest caz se obţine însumînd rezultatele cazurilor de la punctele 3.2. şi 3.3., şi făcînd să tindă $s_1 = s_2 = s$ către c. Întrucît în acest caz se produc simplificări importante în expresia vitezei axiale de perturbaţie, vom da în cele ce urmează soluţiile pentru diferitele poziţii ale aripii faţă de conul Mach.

a. *Dacă aripa are bordurile de atac subsonice, se obține soluția*

$$\mathcal{U}=\frac{C_0 l_1 l_2}{l_1 l_2}\frac{\left(1+\frac{c^2}{l_1^2}\right)\left(1+\frac{c^2}{l_2^2}\right)-2c^2\left(1+\frac{c^2}{x^2}\right)+\frac{l_1-l_2}{2}\left[\left(1-\frac{c^2}{l_1 l_2}\right)\left(x+\frac{3c^2}{x}\right)+\frac{2c}{\pi}\frac{\varkappa}{C_0}\sqrt{l_1 l_2}\left(x-\frac{c^2}{x}\right)\right]}{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1+\frac{c^2}{l_2 x}\right)}}-$$

$$-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\,(L_2+2c)}{(L_1+L_2)\,(2c-X)}}-$$

$$-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_2+X)\,(L_1+2c)}{(L_1+L_2)\,(2c+X)}}-\frac{i\varkappa c^2}{x}, \tag{91}$$

în care

$$\varkappa=-\frac{\alpha U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}}, \tag{92}$$

iar C_0 se determină utilizînd o condiție similară cu (45).

b. *Dacă aripa are bordurile de atac supersonice și simetrice* $A_1(x=l)$ *și* $A_2(x=-l)$, soluția este

$$\mathcal{U}=-\frac{2Q}{\pi}\left(l-\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}-X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L-X)}}-$$

$$-\frac{2Q}{\pi}\left(l+\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L+X)}}-$$

$$-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}-X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c-X)}}-$$

$$-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c+X)}}-$$

$$-\frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-X^2\right)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2}-4c^2\right)}}-\frac{i\varkappa c^2}{x}, \tag{93}$$

în care Q și $\varkappa$ au valorile din (88) și respectiv (92).

3.6. Exemple de aplicație. În cele de mai sus am tratat diferite cazuri elementare de sistem fuzelaj conic — aripă subțire, și am anunțat că folosind principiul însumării efectelor vom putea ușor determina soluția în cazul general cînd incidența aripii este constantă pe porțiuni.

Pentru fixarea ideilor, vom da mai jos expresia vitezei axiale de perturbație în cîteva cazuri mai interesante.

a. *Dacă întreaga aripă are aceeași incidență* α, *iar fuzelajul are incidența* α_0, expresia vitezei axiale de perturbație este (91) , în care însă $\varkappa$ are valoarea

$$\varkappa = \frac{(\alpha_0-\alpha)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}}, \tag{94}$$

observîndu-se că se regăsește soluția obținută în lucrarea noastră anterioară [1]; valoarea constantei $\varkappa$ determinată aproximativ în [1], nu diferă de valoarea din (94), după cum era de așteptat, decît în limitele aproximației anunțate inițial.

b. *Dacă aripa are incidența* α_1 *pe porțiunile* A_2M_2 *și* M_1A_1 *și incidența* α_2 *pe porțiunile* M_2N_2 *și* N_1M_1, *iar fuzelajul are incidența* α_0, *și dacă aripa are simetrie geometrică față de axa fuzelajului, adică* $l_1 = l_2 = l$ *și* $s_1 = s_2 = s$, soluția este:

— dacă bordurile de atac sînt subsonice $\left(l < \dfrac{1}{B}\right)$,

$$\mathcal{U} = \frac{C + 2c^2D' + C'x + (C'+2D)\dfrac{c^2}{x} + 2D'\dfrac{c^4}{x^2}}{\sqrt{l^2-x^2}\sqrt{1-\dfrac{c^4}{l^2x^2}}} - \frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L-X)(L+2c)}{2L(2c-X)}} -$$

$$- \frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\ ah}\sqrt{\frac{(L+X)(L+2c)}{2L\ (2c+X)}} - \frac{i\varkappa c^2}{x} -$$

$$- \frac{2K}{\pi}\left(s-\frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L-X)\,(L+S)}{2L\,(S-X)}} - \frac{2K}{\pi}\left(s+\frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L+X)(L+S)}{2L(S+X)}} -$$

$$- \frac{Kc^2}{x}\,\frac{2}{\pi}\operatorname{arg\ ch}\sqrt{\frac{(L^2-X^2)\,(S^2-4c^2)}{(S^2-X^2)\,(L^2-4c^2)}}, \tag{95}$$

în care

$$\varkappa = \frac{(\alpha_0-\alpha_2)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}},\quad K = \frac{(\alpha_2-\alpha_1)U_\infty}{\sqrt{1-B^2s^2}}, \tag{96}$$

iar constantele C, C', D și D' se determină în modul indicat mai sus;

— dacă bordurile de atac sînt supersonice, iar muchiile sînt subsonice $\left(l > \frac{1}{B} > s\right)$,

$$\mathcal{U} = -\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c - X)}} -$$

$$-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c + X)}} -$$

$$-\frac{2K}{\pi}\left(s - \frac{c^2}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S - X)}} -$$

$$-\frac{2K}{\pi}\left(s + \frac{c^2}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S + X)}} -$$

$$-\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L - X)}} -$$

$$-\frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L + X)}} -$$

$$-\frac{i\varkappa c^2}{x} - \frac{Kc^2}{x}\frac{2}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}} -$$

$$-\frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}}, \qquad (97)$$

în care $\varkappa$ şi K au valorile din (96), şi

$$Q = \frac{\alpha_1 U_\infty}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\,; \tag{98}$$

— dacă bordurile de atac şi muchiile sînt supersonice $\left(l > s > \frac{1}{B}\right)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = &-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c - X)}} - \\
&-\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c + X)}} - \\
&-\frac{2K^{*}}{\pi}\left(s - \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S - X)}} - \\
&-\frac{2K^{*}}{\pi}\left(s + \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S + X)}} - \\
&-\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L - X)}} - \\
&-\frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L + X)}} - \\
&-\frac{i\varkappa c^2}{x} - \frac{K^{*}c^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}} - \\
&-\frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}},
\end{aligned} \tag{99}$$

în care Q şi $\varkappa$ au valorile din (98) şi (96), şi

$$K^* = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)U_\infty}{\sqrt{B^2 s^2 - 1}} \cdot \tag{100}$$

4. MIŞCAREA ÎN JURUL SISTEMULUI FUZELAJ CONIC-ARIPĂ DE GROSIME SIMETRICĂ

În cadrul acestei mişcări, vom considera că axa fuzelajului şi aripa nu au nici o incidență față de curentul neperturbat, aripa avînd grosimea simetrică dată de pantele $\pm \gamma_i$ $(i = 1, 3, 5, \ldots)$ pe diferitele porțiuni de pe segmentul A_1N_1, şi $\pm \gamma_j$ $(j = 2, 4, 6, \ldots)$ pe diferitele porțiuni de pe segmentul A_2N_2. În acest caz, în planul x, condițiile la limită pe cercul de rază c sînt aceleaşi ca şi în cazul sistemului fuzelaj-aripă subțire, fuzelajul neavînd incidență, iar pe aripă şi pe restul axei oy, în afara aripii, sînt aceleaşi ca în cazul aripii groase izolate. De asemenea, vitezele de perturbație au aceleaşi singularități la bordurile de atac şi la muchiile aripii (în care panta are un salt) ca şi în cazul aripii groase izolate.

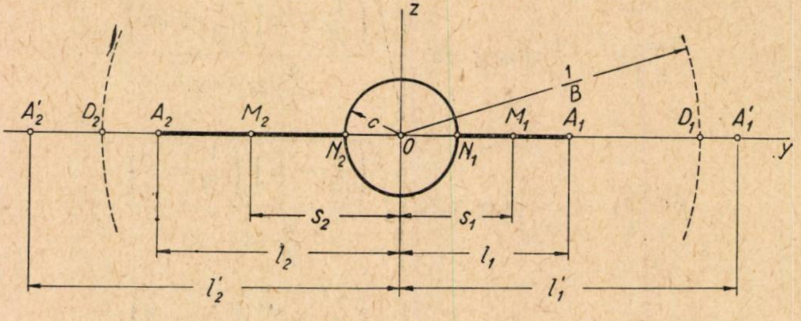


Fig. 4

Din cele de mai sus, rezultă că mişcarea din semiplanul superior în jurul sistemului fuzelaj-aripă de grosime simetrică este echivalentă cu mişcarea din semiplanul superior în jurul sistemului fuzelaj-aripă subțire în cazul cînd: a) aripa are bordurile supersonice, fie în A_1' $\left(x = l_1' > \max\left[\frac{1}{B}, l_1\right]\right)$ şi A_2' $\left(x = -l_2' < \min\left[-\frac{1}{B}, -l_2\right]\right)$ (fig. 4); b) fuzelajul are incidența nulă; c) aripa are incidențele γ_i şi γ_j pe diferitele porțiuni de pe segmentele A_1N_1 şi respectiv A_2N_2 şi incidența nulă pe porțiunile $A_2' A_2$ şi A_1A_1' (fig. 4).

Astfel, problema scurgerii în jurul sistemului fuzelaj conic-aripă groasă s-a redus la aceea a scurgerii în jurul unui sistem fuzelaj conic-aripă subțire (pentru care am indicat mai sus modul de rezolvare).

Pentru fixarea ideilor, vom da mai jos expresia vitezei axiale de perturbație în cîteva cazuri mai interesante.

a. *Dacă aripa are pantele* $\pm \gamma_1$ *pe porțiunile* A_1M_1 *și* A_2M_2 *și respectiv* $\pm \gamma_2$ *pe porțiunile* M_1N_1 *și* M_2N_2 *și dacă aripa prezintă simetrie* *geometrică față de axa fuzelajului, adică* $l_1 = l_2 = l$ *și* $s_1 = s_2 = s$ soluția este dată de umătoarele expresii :

— dacă bordurile sînt subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & -\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L - X)}} - \\
& -\frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L + X)}} - \\
& -\frac{2K}{\pi}\left(s - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S - X)}} - \\
& -\frac{2K}{\pi}\left(s + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(S + X)}} - \\
& -\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c - X)}} - \\
& -\frac{2\varkappa c}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c + X)}} - \\
& -\frac{i\varkappa c^2}{x} - \frac{Qc^2}{x}\frac{2}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}} - \\
& -\frac{Kc^2}{x}\frac{2}{\pi}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2\right)(S^2 - 4c^2)}{(S^2 - X^2)\left(\frac{1}{\mathcal{B}^2} - 4c^2\right)}},
\end{aligned} \tag{101}$$

în care

$$Q = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}, \quad K = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 s^2}}, \quad \varkappa = -\frac{\gamma_2 U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}; \tag{102}$$

— dacă bordurile sînt supersonice, iar muchiile subsonice, $l > \frac{1}{B} > s$, soluţia este aceeaşi ca în cazul similar al sistemului fuzelaj conic-aripă subţire, adică (97), în care se înlocuieşte α_1 şi α_2 prin γ_1 şi respectiv γ_2;

— dacă bordurile şi muchiile aripii sînt supersonice, soluţia este (99), în care se înlocuieşte α_1 şi α_2 prin γ_1 şi respectiv γ_2.

b. *Dacă aripa în întregime are panta* $\pm\gamma$, *neavînd simetrie faţă de axa fuzelajului*, soluţia este:

— dacă bordurile sînt subsonice, $\left(l_1 < \frac{1}{B},\ l_2 < \frac{1}{B}\right)$,

$$\mathcal{U} = -\frac{2Q_1}{\pi}\left(l_1 - \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_1 - X)}} -$$

$$-\frac{2Q_2}{\pi}\left(l_2 + \frac{c^2}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_2 + X)}} -$$

$$-\frac{2\varkappa^* c}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c - X)}} -$$

$$-\frac{2\varkappa^* c}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c + X)}} -$$

$$-\frac{i\varkappa^* c^2}{x} + \frac{Q_1}{\pi}\frac{4c^2}{x + c}\frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c}\Big\{\mathbf{K}(k) - \mathbf{F}(\varphi_1, k) +$$

$$+\frac{2c}{x - c}\Big[\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}(\varphi_1, \rho, k)\Big]\Big\} - i\,\psi_1 - \frac{Q_2}{\pi}\frac{4c^2}{x - c}\frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c}\Big\{\mathbf{K}(k) -$$

$$-\mathbf{F}(\varphi_2, k) - \frac{2c}{x + c}\left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{k^2}{\rho}, k\right) - \mathbf{\Pi}\left(\varphi_2, \frac{k^2}{\rho}, k\right)\right]\Big\} - i\psi_2, \tag{103}$$

în care

$\psi_1 = \frac{Q_1 c^2}{x}$ pe segmentul $l_1 < x = y < \frac{1}{B}$, şi $\psi_1 = 0$ în afara acestui segment,

$\psi_2 = \dfrac{Q_2 c^2}{x}$ pe segmentul $-\dfrac{1}{B} < x = y < -l_2$ şi $\psi_2 = 0$ în afara acestui segment,

şi în care

$$Q_1 = \frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{1-B^2 l_1^2}}\,, \quad Q_2 = \frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{1-B^2 l_2^2}}\,, \quad \varkappa = -\frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{1-B^2 c^2}}\,, \tag{104}$$

şi

$$k = \frac{(1-Bc)^2}{(1+Bc)^2}\,, \quad \rho = -\frac{(1-Bc)^2\,(x+c)^2}{(1+Bc)^2 (x-c)^2}\,, \tag{105 a}$$

$$\varphi_1 = \text{arc sin}, \frac{(1+Bc)\,(l_1-c)}{(1-Bc)\,(l_1+c)}\,, \quad \varphi_2 = \text{arc sin}\,\frac{(1+Bc)\,(l_2-c)}{(1-Bc)\,(l_2+c)}\,; \tag{105 b}$$

— dacă bordul A_1 este supersonic iar A_2 este subsonic, $\left(l_1 > \dfrac{1}{B} > l_2\right)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = &-\frac{2Q_1^*}{\pi}\left(l_1 - \frac{c^2}{x}\right)\text{arc cos}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_1 - X)}} - \\
&- \frac{2Q_2}{\pi}\left(l_2 + \frac{c^2}{x}\right)\text{arg ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(L_2 + X)}} - \\
&- \frac{2\varkappa^* c}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\text{arg ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c - X)}} - \\
&- \frac{2\varkappa^* c}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right)\text{arg ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\frac{2}{\mathcal{B}}(2c + X)}} - \\
&- \frac{i\varkappa^* c^2}{x} - \frac{Q_1^*}{\pi x}\,\frac{2c^2}{x-c}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c}\Bigg[2x\,\mathbf{F}(\varphi_1^*,\ k_1) + \\
&+ \frac{x+c}{X - \frac{1}{\mathcal{B}}}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)\mathbf{\Pi}(\varphi_1^*,\ \rho_1,\ k_1)\Bigg] - f_1 - \frac{Q_2}{\pi}\,\frac{4c^2}{x-c}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} - X^2}}{\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c}\Bigg\{\mathbf{K}(k) - \\
&- \mathbf{F}(\varphi_2,\ k) - \frac{2c}{x+c}\left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{k^2}{\rho},\ k\right) - \mathbf{\Pi}\left(\varphi_2, \frac{k^2}{\rho},\ k\right)\right]\Bigg\} - i\psi_2,
\end{aligned} \tag{106}$$

în care

$$f_1 = \frac{Q_1^\star c^2}{x} \text{ pe segmentul } \frac{1}{B} < x = y < l_1, \text{ şi } f_1 = 0 \text{ în afara acestui segment,}$$

$$\psi_2 = \frac{Q_2 c^2}{x} \text{ pe segmentul } -\frac{1}{B} < x = y < -l_2, \text{ şi } \psi_2 = 0 \text{ în afara acestui segment,}$$

şi în care Q_2, $\varkappa$ şi k, ρ, φ_2 sînt date de (104) şi (105 a, b) şi

$$Q_1^\star = \frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad k_1^2 = \frac{8\mathcal{B}c}{(1+2\mathcal{B}c)^2}, \tag{107a}$$

$$\rho_1 = -\frac{2\mathcal{B}(x-2c)}{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}X-1)}, \quad \varphi_1^\star = \arcsin\sqrt{\frac{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}L_1-1)}{2\mathcal{B}(L_1-2c)}}; \tag{107 b}$$

— dacă ambele borduri sînt supersonice, $l_1 > \frac{1}{B}$ şi $l_2 > \frac{1}{B}$, soluţia este aceeaşi cu cea din cazul corespunzător al sistemului fuzelaj-aripă subţire.

Primită la redacţie la 29 octombrie 1959

ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МЕЖДУ КРЫЛОМ И КОНИЧЕСКИМ ФЮЗЕЛЯЖЕМ В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается задача интерференции между крылом и коническим фюзеляжем и устанавливается общий метод решения случая, когда угол атаки или наклон крыла кусочно-постоянны.

Расчет производится в предположении малых возмущений, считая, что размеры фюзеляжа достаточно малы по сравнению с конусом Маха и что углы атаки крыла и фюзеляжа и наклон крыла также достаточно малы.

Общее обтекание рассматриваемой системы разделяется на три движения, первым из которых является симметрическое осевое обтекание изолированного фюзеляжа без угла атаки, а остальные два движения, являющиеся предметом настоящего исследования, учитывают эффект углов атаки крыла и фюзеляжа и, соответственно, эффект наклона крыла.

В рамках этих движений устанавливается общий метод сводящий задачу сверхзвукового обтекания системы крыло-фюзеляж к задаче

конического обтекания фиктивного изолированного крыла с переменным углом атаки вдоль хорды крыла.

Далее устанавливается решение задачи для различных элементарных случаев, позволяющих путем простого суммирования, записать решение общего случая, когда крыло имеет кусочно-постоянный угол атаки. Как практическое применение даются выражения осевой скорости возмущения для некоторых конкретных случаев.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER L'INTERFÉRENCE ENTRE L'AILE ET LE FUSELAGE CONIQUE EN RÉGIME SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs traitent le problème de l'interférence entre l'aile et le fuselage conique, et établissent une méthode générale pour résoudre le cas où l'incidence ou la pente est différente sur certaines portions de l'aile.

Le calcul est fondé sur l'hypothèse de petites perturbations, en considérant que les dimensions du fuselage sont assez petites par rapport au cône de Mach et que les incidences de l'aile et du fuselage sont aussi suffisamment petites.

Le mouvement général autour du système considéré est décomposé en trois mouvements, dont l'un représente l'écoulement axial symétrique autour du fuselage isolé, sans incidence, tandis que les deux autres, qui font l'objet de cette étude, tiennent compte de l'effet des incidences de l'aile et du fuselage et, respectivement, de l'effet de la pente de l'aile épaisse.

Les auteurs établissent une méthode générale, en réduisant le problème de l'écoulement supersonique autour du système aile-fuselage au problème de l'écoulement conique autour d'une aile isolée fictive, à incidence variable.

De même, on donne la solution du problème dans divers cas élémentaires, d'où il résulte, par de simples additions, la solution générale pour le cas de l'incidence différente sur certaines portions de l'aile. Comme application, on donne les expressions de la vitesse axiale de perturbation dans plusieurs cas pratiques courants.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, D. Mateescu, *Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuzelaj conic.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *2* (1959).
2. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
3. W. Gröbner, N. Hofreiter, *Integraltafel.* Springer Verlag, Wien, Innsbruck, 1949.

STUDII

AEROMECANICĂ

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPIOARELOR POLIGONALE CU ŞARNIERĂ SONICĂ AVÎND O MIŞCARE OSCILATORIE ARMONICĂ

DE

ŞERBAN SĂNDULESCU

1. NOTAŢII

$O\,x_1\,x_2\,x_3$ — sistem de coordonate ortogonal la care se raportează mişcarea oscilatorie a suprafeţei OA_1A_2 (prima mişcare oscilatorie),

$O^\star\,x_1^\star\,x_2^\star\,x_3^\star$ — sistem de coordonate ortogonal la care se raportează mişcarea oscilatorie a suprafeţei $O^\star A_3A_2$ (a doua mişcare oscilatorie),

d — distanţa dintre axele Ox_1 şi $O^\star\,x_1^\star$,

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului,

M_∞ — numărul Mach al curentului neperturbat,

$\varphi\,(x_1, x_2, x_3, t)$ — potenţialul mişcării nepermanente,

$\Omega_1 = \Omega_0\,e^{i\omega t}$ — mişcarea oscilatorie a suprafeţei OA_1A_2 în jurul axei OA_2

$\Omega_2 = -\,\Omega_0\,e^{i\omega t}$ — mişcarea oscilatorie a suprafeţei $O^\star A_3A_2$ în jurul axei $O^\star A_2$,

$\Phi\,(x_1, x_2, x_3), \Phi^\star\,(x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)$ — potenţialele reduse ale celor două mişcări oscilatorii,

$\beta = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3},\ \beta^\star = \dfrac{\partial\Phi^\star}{\partial x_3^\star}$ — vitezele verticale reduse,

$\Phi_1\,(x_1, x_2, x_3),\ \Phi_1^\star\,(x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)\cdots$ — potenţialele mişcării omogene de ordinul unu,

$\Phi_2\,(x_1, x_2, x_3),\ \Phi_2^\star\,(x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)$ — potenţialul mişcării omogene de ordinul doi,

$x = y + i\mathfrak{z}$ — plan auxiliar obținut din planul lui Busemann $\xi = \eta + i\zeta$ prin transformarea conformă $Bx = \frac{2\,\xi}{1+\xi^2}$,

$u_0, v_0, u_0^\star, v_0^\star$ — *vitezele reduse* ale mişcării omogene de ordinul unu,

$u_1, u_1^\star$ — *vitezele axiale reduse* ale mişcării omogene de ordinul doi,

ω — pulsația celor două mişcări oscilatorii,

$\lambda = \frac{\omega h}{U_\infty}$ — *pulsația redusă*,

$k = -\frac{\lambda}{h}\frac{1+B^2}{B^2}, \left(B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)$ — coeficient adimensional,

h — coarda maximă a aripioarei,

$C_p, C_p^\star$ — coeficienții de presiune,

l_1 — abscisa urmei bordului de atac OA_1, în planul $x = y + i\mathfrak{z}$,

l_3 — abscisa urmei muchiei $O^\star A_3$ în planul $x^\star = y^\star + i\mathfrak{z}^\star$,

S_1 — suprafața OA_1A_2,

$S^\star$ — suprafața $O^\star A_3A_2$,

S — suprafața aripioarei $(OA_1A_3O^\star)$,

$C_{za} = C_{z1} + C_z^\star$ — coeficientul total de portanță,

$C_{z1} = -\frac{2}{S}\iint_{S_1} C_p\, d\sigma$ — coeficientul parțial de portanță al suprafeței OA_1A_2,

$C_z^\star = -\frac{2}{S}\iint_{S^\star} C_p^\star\, d\sigma$ — coeficientul parțial de portanță al suprafeței $O^\star A_3A_2$,

$C_{xa} = C_{za}(\Theta_2 - \alpha_0) + C_{xs}$ — coeficientul de rezistență la înaintare,

α_0 — incidența aripii,

$\Theta_1 = E_1 e^{i\omega t}, (E_1 = \Omega_0 \cos\gamma)$ — mişcarea oscilatorie armonică în jurul axei Ox_1,

$\Theta_2 = E_2 e^{i\omega t}, (E_2 = -\Omega_0 \sin\gamma)$ — mişcarea oscilatorie armonică în jurul axei Ox_2,

$C_{xs} = -S_c \cos\chi_1 / \frac{\rho}{2} S U_\infty^2$ — componenta datorită forței de succiune,

S_c — forța de succiune,

M_{n1} — numărul Mach al componentei perpendiculare a vitezei pe bordul de atac OA_1,

χ_1 — unghiul făcut de bordul de atac OA_1 cu axa Ox_2,

γ — unghiul făcut de şarniera $OO^\star$ cu axa Ox_2,

$C_{la} = C_{l1} + C_l^\star - \frac{d}{b_0} C_z^\star$ — coeficientul de moment de ruliu al aripioarei luat față de axa Ox_1,

$C_{l1} = -\frac{2}{Sb_0}\iint_{S_1} C_p\, x_2\, d\sigma$ — coeficientul parțial de moment de ruliu al suprafeței OA_1A_2 în raport cu axa Ox_1,

$C_l^\star = -\frac{2}{Sb_0}\iint_{S^\star} C_p^\star\, x_2^\star\, d\sigma$ — coeficientul parțial de moment de ruliu al suprafeței $O^\star A_3A_2$ în raport cu axa $O^\star x_1^\star$,

$C_{ma} = C_{m1} + C_m^\star - \left(1 - \frac{h^\star}{h}\right) C_z^\star$ — coeficientul de moment de tangaj luat în raport cu axa ce trece la 2/3 din coarda maximă a aripioarei,

$C_{m1} = -\frac{2}{hS}\iint_{S_1} C_p\left(\frac{2}{3}h - x_1\right) d\sigma$ — coeficientul parțial de moment de tangaj al suprafeței OA_1A_2 luat în raport cu o axă paralelă cu Ox_2 ce trece printr-un punct situat la 2/3 h,

$C_m^\star = -\frac{2}{hS}\iint_{S^\star} C_p^\star\left(\frac{2}{3}h^\star - x_1^\star\right) d\sigma$ — coeficientul parțial de moment de tangaj al suprafeței $O^\star A_3A_2$ luat în raport cu o axă paralelă cu $O^\star x_2^\star$ ce trece printr-un punct situat la 2/3 $h^\star$,

$C_{mca} = C_{mc1} + C_{mc}^\star$ — coeficientul de moment de șarnieră,

$C_{mc1} = \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{C_{m1}}{C_{z1}}\right)\sin\gamma + \frac{b_0\, C_{l1}}{h\, C_{z1}}\sin\gamma\right] C_{z1}$ — coeficientul parțial de moment de șarnieră al suprafeței OA_1A_2,

$C_{mc}^\star = \left[\left(\frac{2}{3}\frac{h^\star}{h} + \frac{C_m^\star}{C_z^\star}\right)\sin\gamma + \frac{b_0\, C_l^\star}{h\, C_z^\star}\cos\gamma\right] C_z^\star$ — coeficientul parțial de moment de șarnieră al suprafeței $O^\star A_3A_2$,

b_0 — anvergura aripioarei,
$h^\star$ — coarda suprafeței $O^\star A_3A_2$.

2. INTRODUCERE

Să considerăm o mişcare supersonică nepermanentă al cărei potenţial $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ satisface în ipoteza micilor perturbaţii ecuaţia

$$-B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t}\right). \tag{1}$$

Dintre mişcările nepermanente guvernate de această ecuaţie o clasă importantă de mişcări este clasa mişcărilor oscilatorii care au aplicaţii curente în aerodinamica avioanelor de mare viteză.

Deoarece conform principiului lui Fourier toate mişcările oscilatorii pot fi obţinute prin însumarea unor mişcări oscilatorii armonice în cele ce urmează ne vom ocupa de acestea din urmă.

În acest caz potenţialul mişcării respective poate fi pus sub forma [1]

$$\varphi\,(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty\, e^{i(\omega t+k x_1)}\,\Phi\,(x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

iar ecuaţia precedentă devine

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\frac{\lambda^2}{h^2}\,\frac{1+B^2}{B^2}\,\Phi. \tag{3}$$

În cazul cînd frecvenţa mişcării oscilatorii respective este mare, pe suprafaţa portantă considerată apar desprinderi, deci iau naştere vîrtejuri, care fac ca studiul scurgerii respective să fie foarte dificil.

Dacă însă frecvenţa mişcării este mică, scurgerea în jurul suprafeţei nu suferă perturbaţii prea mari, iar studiul teoretic al problemei furnizează date în bună concordanţă cu rezultatele experimentale.

Pulsaţia mişcării fiind mică, membrul al doilea al ecuaţiei (3) poate fi neglijat şi deci potenţialul redus poate fi determinat utilizînd metodele cunoscute de la mişcările permanente.

Vom considera acum o aripioară de formă poligonală avînd o mişcare oscilatorie armonică de pulsaţie mică în jurul şarnierei $OO^\star$ (fig. 1).

Într-o lucrare anterioară [2] am arătat că mişcarea oscilatorie a suprafeţei $OA_1\,A_3O^\star$ poate rezulta din însumarea a două mişcări oscilatorii armonice avînd aceeaşi pulsaţie.

1) o mişcare oscilatorie armonică $\Omega_1 = \Omega_0\, e^{i\omega t}$ a suprafeţei OA_1A_2 în jurul axei OA_2;

2) o mişcare oscilatorie armonică $\Omega_2 = \Omega_0\, e^{i(\omega t+\pi)} = -\,\Omega_0\, e^{i\omega t}$ a suprafeţei $O^\star A_3A_2$ în jurul axei fictive $O^\star A_2$ care se află în prelungirea şarnierei $OO^\star$.

Descompunînd mişcările oscilatorii armonice în componentele după axele de coordonate şi utilizînd formulele stabilite anterior am găsit pentru viteza verticală redusă următoarele expresii [2]:

$$\beta \approx -E_2 + i\,\frac{\lambda}{h}\left(E_1\,x_2 - E_2\,x_1\,\frac{1+2B^2}{B^2}\right), \tag{4 a}$$

pentru mişcarea oscilatorie a suprafeţei OA_1A_2 şi respectiv

$$\beta^\star \approx E_2 - i\frac{\lambda}{h}\left(E_1 x_2^\star - E_2 x_1^\star \frac{1+2B^2}{B^2}\right), \qquad (4\text{ b})$$

pentru mişcarea oscilatorie a suprafeţei $O^\star A_3A_2$. În această situaţie am văzut că potenţialele reduse sînt de forma

$$\Phi \approx \Phi_1 + i\frac{\lambda}{h}\Phi_2, \qquad \Phi^\star \approx \Phi_1^\star + i\frac{\lambda}{h}\Phi_2^\star, \qquad (5)$$

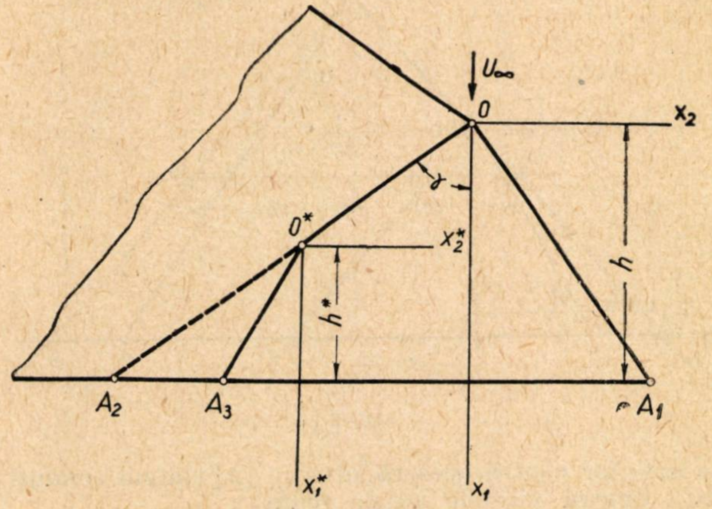


Fig. 1

deci problema oscilaţiilor armonice faţă de o axă este adusă la studiul a două mişcări omogene de ordinul unu şi doi ale căror potenţiale satisfac ecuaţia (3) fără membrul al doilea. Coeficienţii de presiune corespunzători celor două mişcări oscilatorii sînt daţi de relaţiile

$$C_p \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - i\frac{\lambda}{h}\left(\frac{1}{B^2}\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1+B^2}{B^2}x_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)\right], \qquad (6\text{ a})$$

pentru prima mişcare şi respectiv

$$C_p^\star \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial \Phi_1^\star}{\partial x_1^\star} - i\frac{\lambda}{h}\left(\frac{1}{B^2}\Phi_1^\star - \frac{\partial \Phi_2^\star}{\partial x_1^\star} + \frac{1+B^2}{B^2}x_1^\star\frac{\partial \Phi_1^\star}{\partial x_1^\star}\right)\right], \qquad (6\text{ b})$$

pentru cea de-a doua mişcare.

În această lucrare ne propunem să studiem mişcarea oscilatorie a aripioarelor pentru cazul limită cînd şarniera $OO^\star$ se află pe conul Mach. Vitezele axiale reduse şi potenţialul redus al mişcării conice, care definesc coeficienţii de presiune (6 a) şi (6 b), se deduc prin trecerea la limită în expresiile stabilite în lucrarea noastră anterioară [2] pentru cazul cînd şarniera ocupă o poziţie oarecare faţă de conul Mach.

3. ARIPIOARĂ POLIGONALĂ CU BORD DE ATAC SUBSONIC

Caracteristicile mişcării oscilatorii ale suprafeţei OA_1A_2. În cazul mişcării oscilatorii a suprafeţei OA_1A_2 (fig. 2) trecînd la limită în expresiile deduse anterior pentru această situaţie [2] sîntem conduşi la următoarele relaţii pentru vitezele axiale reduse:

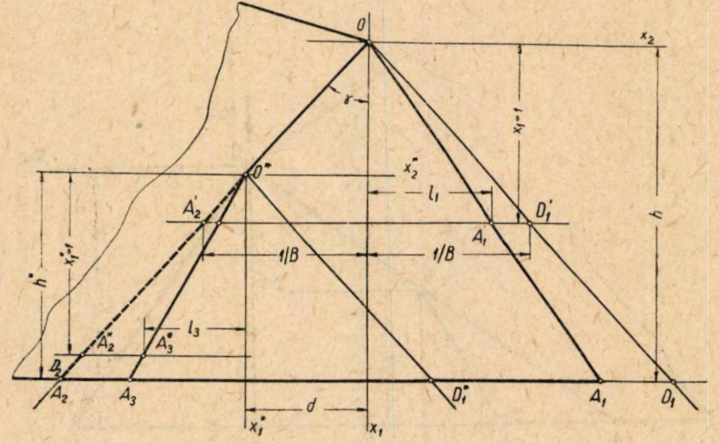


Fig. 2

$$u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\, \frac{\sqrt{2}\, E_2}{\pi B \sqrt{1+Bl_1}} \left[Bl_1 \sqrt{\frac{1+Bx}{B(l_1-x)}} + \sqrt{\frac{B(l_1-x)}{1+Bx}} \right], \tag{7}$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul unu şi respectiv

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\, x_1 \left[(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x) \sqrt{\frac{1+Bx}{B\,(l_1-x)}} + (A_0^{(2)} + A_1^{(2)} x) \sqrt{\frac{B(l_1-x)}{1+Bx}} \right], \tag{8}$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul doi, expresiile coeficienţilor care apar în relaţia (8) fiind date în anexa de la sfîrşit. Se observă imediat din formulele de mai sus că o muchie care se află pe conul Mach are o comportare analogă cu bordul de atac subsonic al unei aripi subţiri, viteza axială de perturbaţie tinzînd la înfinit ca $(1/B + x)^{-1/2}$. Trecînd la limită şi în expresia potenţialului mişcării conice se obţine expresia

$$\Phi_1 = \mathcal{R}e\, x_1 \frac{2\sqrt{2}\, E_2}{\pi B \sqrt{1+Bl_1}} \sqrt{B\,(l_1 - x)\,(1 + Bx)} \tag{9}$$

şi se vede că potenţialul nu are puncte de discontinuitate ceea ce justifică o dată în plus aproximaţia făcută în ecuaţia (3). Formulele stabilite mai sus definesc complet coeficientul de presiune C_p(6 a) şi utilizînd formulele indicate la punctul 1 sîntem conduşi la următoarele relaţii pentru coeficienţii aerodinamici parţiali ca efect al mişcării oscilatorii a suprafeţei OA_1A_2:

$$C_{z1} = \frac{4}{B}\sqrt{\frac{1+Bl_1}{2}}\,\frac{(1+Bl_1)h^2}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{\star 2}]}\left[\Theta_2 - \frac{\lambda}{3B^2\omega}\left(K_1\frac{d\Theta_1}{dt}+K_2\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{10}$$

$$C_{x1} = -\frac{8\,Bl_1}{\pi\,B}\,\frac{(1+Bl_1)h^2}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{\star 2}]}\sqrt{\frac{1-Bl_1}{1+Bl_1}}\left\{\frac{1}{2}\,\Theta_2^2 + \right.$$

$$+\frac{\lambda}{9\,\omega}\,\frac{1}{1+Bl_1}\left[\frac{1}{B}(1-4Bl_1-5B^2l_1^2)\frac{d\Theta_1}{dt}+\frac{1+2B^2}{B^2}(5+4Bl_1-B^2l_1^2)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\Theta_2 -$$

$$\left. -\frac{\lambda}{3\,\omega}\,\frac{1+B^2}{B^2}\,\frac{d\Theta_2^2}{dt}\right\}, \tag{11}$$

$$C_{l1} = -\frac{2}{3\,B}\sqrt{\frac{1+Bl_1}{2}}\,\frac{(1+Bl_1)\,h^3}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{\star 2}]\,[(1+Bl_1)h-(1-Bl_3)h^{\star}]}\left[K_3\,\Theta_2 + \right.$$

$$\left. +\frac{\lambda}{4B^2\omega}\left(K_4\frac{d\Theta_1}{dt}-K_5\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{12}$$

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\sqrt{\frac{1+Bl_1}{2}}\,\frac{(1+Bl_1)h^2}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{\star 2}]}\left(K_1\frac{d\Theta_1}{dt}+K_2\,\frac{d\Theta_2}{dt}\right). \tag{13}$$

Vom remarca că forţele şi momentele care iau naştere pe aripioară sînt de asemenea funcţii periodice de timp defazate însă faţă de mişcarea oscilatorie armonică a aripioarei.

Caracteristicile mişcării oscilatorii ale suprafeţei $O^{\star}A_3A_2$. Ca şi în cazul precedent trecînd la limită în expresiile deduse anterior [2] pentru vitezele axiale reduse şi potenţialul redus al mişcării conice se obţin relaţiile

$$u_0^{\star} = \frac{\partial\Phi_1^{\star}}{\partial x_1^{\star}} = \mathcal{R}e\left[\frac{2E_2}{\pi\,B}\,\frac{Bl_3}{\sqrt{1-B^2l_3^2}}\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+Bx^{\star})\,(1+Bl_3)}{2B(x^{\star}+l_3)}} - \frac{E_{,}}{\pi\,B}\sqrt{\frac{1-Bx^{\star}}{1+Bx^{\star}}}\right] \tag{14}$$

$$u_1^{\star} = \frac{\partial\,\Phi_2^{\star}}{\partial x_1^{\star}} = x_1^{\star}\,\mathcal{R}e\left[(A_0^{\star(1)} + A_1^{\star(1)}\,x^{\star})\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+Bx^{\star})\,(1+Bl_3)}{2B(x^{\star}+l_3)}} + \right.$$

$$\left. + (A_0^{\star(2)} + A_1^{\star(2)}\,x^{\star})\sqrt{\frac{1-Bx^{\star}}{1+Bx^{\star}}} + A_2^{\star}\sqrt{1-B^2x^{\star 2}}\right], \tag{15}$$

$$\Phi_1^{\star} = x_1^{\star}\,\mathcal{R}e\left[\frac{2\,E_2}{\pi\,B}\,\frac{Bl_3}{\sqrt{1-B^2l_3^2}}\left(1+\frac{x^{\star}}{l_3}\right)\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_3)\,(1+Bx^{\star})}{2B(x^{\star}+l_3)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{E_2}{\pi\,B}\sqrt{1-B^2x^{\star 2}}\right]. \tag{16}$$

Pentru coeficienții parțiali ca efect al celei de-a doua mișcări oscilatorii s-au găsit formulele

$$C_z^* = -\frac{4}{B}\,\frac{(1-Bl_3)h^{*2}}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{*2}]}\left\{\Theta_2+\frac{\lambda h^*}{3\,B^2\omega\,h}\left[B\,(1+Bl_3)\frac{d\Theta_1}{dt}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,(2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \qquad (17)$$

$$C_l^* = \frac{4}{3B}\,\frac{(1-B^2l_3^2)h^{*3}}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{*2}]\,[(1+Bl_1)h-(1-Bl_3)h^*]}\left[\Theta_2+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\lambda h^*}{4\,B^2\omega h}\left(R^*\frac{d\Theta_1}{dt}+(3B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \qquad (18)$$

$$C_m^* = -\frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\,\frac{(1-Bl_3)\,h^{*4}}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{*2}]h^2}\left[B\,(1+Bl_3)\frac{d\Theta_1}{dt}+(2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]. \qquad (19)$$

4. ARIPIOARĂ POLIGONALĂ CU BORD DE ATAC SUPERSONIC

În această situație pentru vitezele axiale reduse u_0^*, u_1^* și potențialul redus Φ_1^*, ale mișcării oscilatorii a suprafeței $O^*A_3A_2$ sînt valabile relațiile (14), (15) și respectiv (16) determinate mai sus. Deoarece coeficientul de presiune C_p^* rămîne de asemenea neschimbat expresiile coeficienților aerodinamici parțiali datorați mișcării oscilatorii a suprafeței $O^*A_3A_2$ nu se modifică.

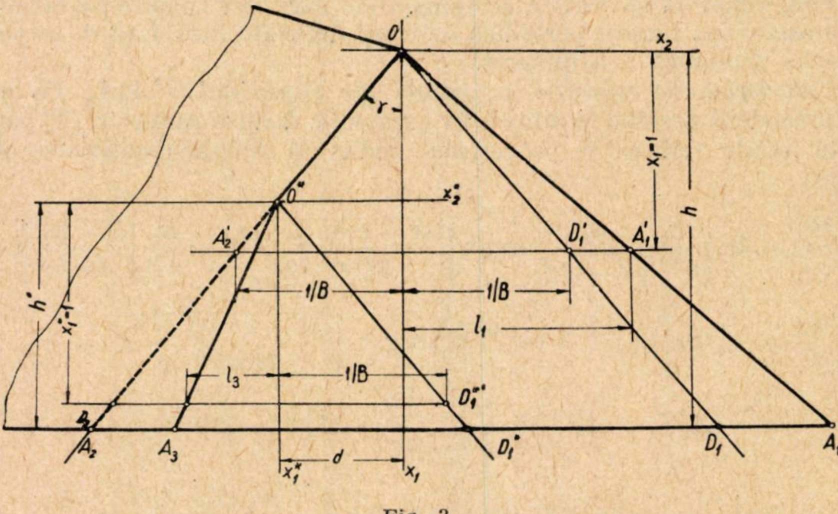


Fig. 3

În ceea ce priveşte mişcarea oscilatorie a suprafeţei OA_1A_2, trecînd la limită în expresiile vitezelor axiale reduse şi potenţialului redus deduse într-o altă lucrare [2] se obţine:

$$u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\Big[\frac{2\,E_2}{\pi B}\,\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bx)}{2B(l_1-x)}} + \frac{E_2}{\pi B}\sqrt{\frac{1-Bx}{1+Bx}}\Big], \qquad (20)$$

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = x_1\mathcal{R}e\Big[(D_0^{(1)} + D_1^{(1)}\,x)\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bx)}{2B(l_1-x)}} +$$

$$+ (D_0^{(2)} + D_1^{(2)}\,x)\sqrt{\frac{1-Bx}{1+Bx}} + D_2\sqrt{1 - B^2x^2}\Big], \qquad (21)$$

$$\Phi_1 = x_1\,\mathcal{R}e\Big[\frac{2\,E_2}{\pi B}\,\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2l_1^2-1}}\Big(1 - \frac{x}{l_1}\Big)\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bx)}{2B(l_1-x)}} +$$

$$+ \frac{E_2}{\pi B}\sqrt{1 - B^2x^2}\Big]. \qquad (22)$$

Pentru coeficienţii aerodinamici parţiali, ca efect al mişcării oscilatorii a suprafeţei OA_1A_2 s-au găsit următoarele relaţii:

$$C_{z1} = \frac{4}{B}\,\frac{(1+Bl_1)h^2}{[(1+Bl_1)h^2-(1-Bl_3)h^{*2}]}\Big\{\Theta_2 + \frac{\lambda}{3B^2\omega}\Big[B\,(1 - Bl_1)\,\frac{d\Theta_1}{dt} +$$

$$+ (2B^2 - 1]\frac{d\Theta_2}{dt}\Big]\Big\}, \qquad (23)$$

$$C_{l1} = \frac{4}{3B}\,\frac{(B^2l_1^2 - 1)h^3}{[(1+Bl_1)h^2 - (1-Bl_3)h^{*2}][(1+Bl_1)h - (1-Bl_3)h^{*}]}\Big[\Theta_2 +$$

$$+ \frac{\lambda}{4B^2\omega}\Big(R\frac{d\Theta_1}{dt} + (3\,B^2 - 1)\Big)\frac{d\Theta_2}{dt}\Big], \qquad (24)$$

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9B^3\omega}\,\frac{(1+Bl_1)h^2}{[(1+Bl_1)h^2 - (1-Bl_3)h^{*2}]}\Big[B\,(1 - Bl_1)\,\frac{d\Theta_1}{dt} + (2B^2-1)\,\frac{d\Theta_2}{dt}\Big]. \qquad (25)$$

5. ARIPIOARE TRIUNGHIULARE

Rezultatele obţinute pentru aripioarele de formă poligonală se pot aplica şi la aripioarele de formă triunghiulară. În această situaţie muchia O^*A_3 se suprapune peste muchia O^*A_2 ($l_3 = 1/B$) şi aripioara capătă forma în plan triunghiulară. În acest caz, problema se reduce la prima mişcare oscilatorie.

6. TABEL DE CONSTANTE

Constantele care apar în formulele stabilite mai sus sînt definite de relațiile

$$A_0^{(1)} = \frac{\sqrt{2}\, l_1}{6\pi B\, (1 + Bl_1)^{3/2}} \left[E_1 (9 + Bl_1) + \frac{8(1 + 2B^2)E_2}{B} (2 + Bl_1) \right], \tag{26 a}$$

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{6\pi B\, (1 + Bl_1)^{3/2}} \Bigg[& E_1 (8 + 5Bl_1 + 5B^2 l_1^2) + \\ & + \frac{(1 + 2B^2)E_2}{B} (11 + 4Bl_1 + B^2 l_1^2) \Bigg], \end{aligned} \tag{26 b}$$

$$A_0^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{6\pi B^2} \frac{1}{\sqrt{1 + Bl_1}} \left[5E_1 - 4 \frac{(1 + 2B^2)}{B} E_2 \right], \tag{26 c}$$

$$A_1^{(2)} = -\frac{3\sqrt{2}\, E_1}{2\pi B\sqrt{1 + Bl_1}}, \tag{26 d}$$

$$A_0^{\star(1)} = \frac{\sqrt{2}\, l_3}{\pi (1 - B^2 l_3^2)^{3/2}} \left[l_3 E_1 + (2 - B^2 l_3^2) \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{27 a}$$

$$A_1^{\star(1)} = \frac{2}{\pi (1 - B^2 l_3^2)^{3/2}} \left[B^2 l_3^2 .\, l_3 E_1 + \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{27 b}$$

$$A_0^{\star(2)} = \frac{1}{6\pi B^2} \left[5 E_1 - \frac{2(1 + 2B^2)}{B} E_2 \right], \tag{27 c}$$

$$A_1^{\star(2)} = \frac{3 E_1}{\pi B}, \tag{27 d}$$

$$A_2^{\star} = -\frac{1}{\pi B} \left[\left(\frac{Bl_1^2}{B^2 l_1^2 - 1} - \frac{7}{6B} \right) E_1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{Bl_1}{B^2 l_1^2 - 1} \right) \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2 \right]; \tag{27 e}$$

$$K_1 = \frac{B(Bl_1 - 1)(1 + 5Bl_1)}{4(1 + Bl_1)} \tag{28 a}$$

$$K_2 = (3 + 2B^2) - \frac{1 + 2B^2}{4(1 + Bl_1)} [Bl_1 (1 - Bl_1) + 7Bl_1 + 9], \tag{28 b}$$

$$K_3 = 3(1 - Bl_1) \tag{29 a}$$

$$\begin{aligned} K_4 = \frac{B}{4(1 + Bl_1)} \Bigg\{ & 9B^2 l_1^2 - 10 Bl_1 + 29 + \frac{1}{1 + Bl_1} [6 + 7 Bl_1 - 15B^2 l_1^2 + \\ & + 9B^3 l_1^3 + 25B^4 l_1^4] \Bigg\} \end{aligned} \tag{29 b}$$

$$K_5 = (4 + 3B^2)\,K_3 - \frac{1 + 2B^2}{4\,(1 + Bl_1)}\Big\{26 + 10Bl_1 + $$

$$+ \frac{1}{1 + Bl_1}\,(9 + 14\,Bl_1 - 30B^2l_1^2 - 30B^3l_1^3 + 5B^4l_1^4)\Big\}, \qquad (29\ \mathrm{c})$$

$$R^\star = \frac{2B\,(1 + Bl_3 + B^2l_3^2)}{1 + Bl_3}, \qquad (30\ \mathrm{a})$$

$$R = -\frac{2B(B^2l_1^2 - Bl_1 + 1)}{Bl_1 - 1}\,. \qquad (30\ \mathrm{b})$$

$$D_0^{(1)} = \frac{2l_1}{\pi\,(B^2l_1^2 - 1)^{3/2}}\left[l_1E_1 + (B^2l_1^2 - 2)\,\frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \qquad (31\ \mathrm{a})$$

$$D_1^{(1)} = -\frac{2}{\pi\,(B^2l_1^2 - 1)^{3/2}}\left[B^2l_1^2\,.\,l_1E_1 - \frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \qquad (31\ \mathrm{b})$$

$$D_0^{(2)} = -\frac{1}{6\pi B^2}\left[5\,E_1 - \frac{2\,(1 + 2B^2)}{B}\,E_2\right], \qquad (31\ \mathrm{c})$$

$$D_1^{(2)} = -\frac{3\,E_1}{\pi\,B} \qquad (31\ \mathrm{d})$$

$$D_2 = -\frac{1}{\pi\,B}\left[\left(\frac{Bl_1^2}{B^2l_1^2 - 1} - \frac{7}{6\,B}\right)E_1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{Bl_1}{B^2l_1^2 - 1}\right)\frac{1 + 2B^2}{B^2}\,E_2\right]. \qquad (31\ \mathrm{e})$$

Primită la redacţie la 19 iunie 1959

АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГОУГОЛЬНЫХ ЭЛЕРОНОВ СО ЗВУКОВЫМ ШАРНИРОМ, ИМЕЮЩИМ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

РЕЗЮМЕ

В этой работе рассматривается гармоническое колебательное движение элеронов в сверхзвуковом режиме, в случае когда шарнир находится на конусе Маха.

Определяется выражение приведенных осевых скоростей и приведенного потенциала, исходя из соотношений, установленных в одной из предыдущих работ [2] для случая, когда шарнир находится в определенном положении относительно конуса Маха.

Далее расчитываются выражения аэродинамических коэффициентов в случае сверхзвуковой или дозвуковой передней кромки элерона.

CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES DES AILERONS POLYGONAUX À CHARNIÈRE SONIQUE, AYANT UN MOUVEMENT OSCILLATOIRE HARMONIQUE

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, l'auteur étudie le mouvement oscillatoire harmonique des ailerons en régime supersonique, dans le cas où la charnière se trouve sur le cône de Mach.

On détermine les expressions des vitesses axiales réduites et du potentiel réduit, en partant des relations établies dans un travail antérieur [2] dans le cas où la charnière occupe une position quelconque par rapport au cône de Mach.

On calcule ensuite les expressions des coefficients aérodynamiques dans le cas où le bord d'attaque de l'aileron est supersonique ou subsonique.

BIBLIOGRAFIE

1. JOHN W. MILES, *On Harmonic Motion on Supersonic Speeds*. Journ. Aero. Sci, **16**, 378 (1949).
2. E. CARAFOLI, Ş. SĂNDULESCU, *Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique*. Archivum Mechaniki Stosowanej, *6* (1958).
3. E. CARAFOLI, Ş. SĂNDULESCU, *Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor avînd o mişcare oscilatorie armonică în regim supersonic*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).

STUDII

AEROMECANICĂ

DETERMINAREA CARACTERISTICILOR STRATULUI LIMITĂ TRIDIMENSIONAL. APLICAȚII LA CAZUL PALELOR DE VENTILATOR AXIAL

DE

ŞT. SĂVULESCU

1. Problema determinării caracteristicilor stratului limită tridimensional este importantă atît pentru evaluarea frecării şi transferului de căldură, cît şi pentru determinarea liniilor de curent limită $\left(\frac{dx}{dz} = \lim \left|\frac{u}{w}\right|_{y=0}\right)$ care indică zonele de desprindere. Aripa în săgeată, aripa delta, palele de ventilator axial sau palele elicei ridică astfel de probleme de interes tehnic imediat.

Pentru integrarea ecuaţiilor stratului limită pe astfel de suprafeţe trebuie cunoscute liniile de curent exterioare şi repartiţia în suprafaţă a presiunii. Într-o lucrare anterioară [1] am tratat cazul scurgerilor în care liniile de curent exterioare formează cu bună aproximaţie o reţea de linii paralele. Vom extinde în lucrarea de faţă aplicarea metodei profilelor tip de viteze şi temperaturi, cazului în care liniile de curent exterioare sînt curbe oarecare, bineînţeles cunoscute, ca şi repartiţia presiunilor, iar suprafaţa în rotaţie.

2. Să considerăm în figura 1 o paletă în rotaţie în jurul punctului O, vectorul rotaţiei $\overline{\omega} = \omega_x \overline{i} + \omega_y \overline{j} + \omega_z \overline{k}$ sistemul de axe $Oxyz$ fiind legat de această paletă. Oy este normala suprafeţei pe care o con-

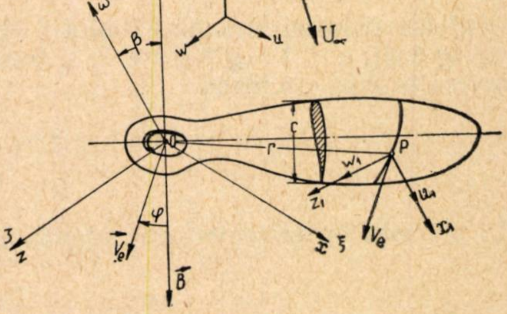


Fig. 1

siderăm plană, iar direcţia bisectoarei $\vec{B}$ a axelor de pe suprafaţa Ox, şi Oz, normală pe linia medie a acestei palete adică în planul secţiunilor ei profilate.

Într-un punct P al suprafeţei direcţia vitezei curentului exterior $\vec{V}_e = u_{1_e}\bar{i}+v_{1_e}\bar{j} + w_{1_e}\bar{k}$ face unghiul φ cu direcţia bisectoarei $\vec{B}$.

Dacă indicele 1 afectează mărimile raportate la un sistem ce are pe V_e drept bisectoare, într-un punct al stratului limită avem

$$\vec{V} = u\,\bar{i} + v\,\bar{j} + w\,\bar{k} = u_1\bar{i}_1 + v_1\,\bar{j}_1 + w_1\vec{k}_1,$$

de unde deducem relaţiile

$$\begin{aligned} u_a &= u_{1_a}\cos\varphi - w_{1_a}\sin\varphi, \quad & u_e &= u_{1_e}(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ w_a &= u_{1_a}\sin\varphi + w_{1_a}\cos\varphi, \quad & w_e &= u_{1_e}(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ v &= v_1, \quad \varphi = \varphi(x, z) & & \end{aligned} \tag{1}$$

unde

$$u_a = \frac{u}{u_{1_e}}, \quad u_{1_a} = \frac{u_1}{u_{1_e}}, \quad w_a = \frac{w}{w_{1_e}}, \quad w_{1_a} = \frac{w_1}{w_{1_e}}, \quad u_{1_e} = w_{1_e}.$$

Forţa lui Coriolis exercitată asupra particulei de volum unitar din stratul limită are expresia

$$\vec{f} = -2\,\rho\,\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{V}, \tag{2}$$

adică

$$\begin{aligned} f_x &= -2\,\rho\omega\cos\beta w\left(1 - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha\frac{v}{w}\right), \\ f_z &= 2\,\rho\,\omega\cos\beta\,u\left(1 - \operatorname{tg}\beta\sin\alpha\frac{v}{u}\right), \\ f_y &= -2\,\rho\,\omega\sin\beta\,(u\cos\alpha - w\sin\alpha). \end{aligned}$$

Conform ipotezei stratului limită $v \ll u$, $u \leqslant w$, iar $\operatorname{tg}\beta\sin\alpha < 1$; $\operatorname{tg}\beta\cos\alpha < 1$. Cum u şi w au acelaşi ordin de mărime revine în cele din urmă

$$f_x \simeq -2\,\rho\,\omega\cos\beta\,w, \quad f_z \simeq 2\,\rho\omega\cos\beta\,u, \qquad f_y \simeq 0. \tag{3}$$

În privinţa forţei centrifuge, raportată la unitatea de volum avem

$$f^{*} = -\,\rho\,\vec{\omega}\,\Lambda\,(\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{\Upsilon}) \tag{4}$$

care dă componentele corespunzătoare, punînd $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$. Dar, observînd că, pentru cazurile practice menționate, $\omega_y \gg \omega_x$, $\omega_y \gg \omega_z$ și grosimea stratului limită e mică în comparație cu coordonatele superficiale, reținem

$$f_x^\star = \rho\, \omega^2 \cos^2 \beta x ; \quad f_z^\star \approx \rho\, \omega^2 \cos^2 \beta z ; \quad f_y^\star \approx 0. \tag{5}$$

3. Ecuațiile stratului limită se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\rho \frac{du}{dt} = f_x + f_x^\star - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ &\rho \frac{dw}{dt} = f_z + f_z^\star - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ &\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau u + \tau_1 w + q_v), \qquad \operatorname{div} (\rho \vec{V}) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

unde

$$\tau = \mathcal{M} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_1 = \mathcal{M}_1 \frac{\partial W}{\partial y}, \quad q_v = \Lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad E = C_p\, T + \frac{u^2 + w^2}{2},$$

p fiind presiunea, ρ — densitatea, T — temperatura.
Condițiile la limită se scriu

$$\begin{aligned} &y = 0, \ u = w = 0, \ T = T_w (x, z) \text{ sau } q_{v_w} = q_{v_w} (x, z) \\ &y = \delta, \ u_a = \cos \varphi - \sin \varphi, \ w_a = \sin \varphi + \cos \varphi, \ E_a = 1 \\ &\qquad \tau = 0, \qquad \tau_1 = 0 \qquad q_v = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Se remarcă faptul că au intervenit forțele suplimentare f și $f^\star$ variabile într-o secțiune a stratului limită.

4. Vom transforma prima ecuație de mișcare cu ajutorul variabilelor

$$\xi = x, \quad \zeta = z, \quad \eta = \frac{\int_0^y \rho u_1 \, dy}{\int_0^\delta \rho u_1 \, dy} = \frac{\psi}{\psi_\delta}, \tag{8}$$

unde variabila transversală η este raportul debitelor calculate cu ajutorul vitezei u_1, care variază de la 0 la u_{1_e} după o curbă continuă și nu exagerat de deosebită de alura obișnuită a profilelor de viteză. Am arătat în lucrarea [1] că această ipoteză a profilelor tip ocupă un cîmp larg de aplicații practice și vom utiliza și aici aceleași observații.

Obţinem după calcule obişnuite, ecuaţia transformată

$$\frac{\partial\tau}{\partial\eta} = \cos\varphi A \frac{\partial u_{1_a}}{\partial\xi} - \sin\varphi A \frac{\partial w_{1_a}}{\partial\xi} + \cos\varphi B \frac{\partial u_{1_a}}{\partial\zeta} - \sin\varphi B \frac{\partial w_{1_a}}{\partial\zeta} + $$
$$+ \cos\varphi\, C \frac{\partial u_{1_a}}{\partial\eta} - \sin\varphi\, C \frac{\partial u_{1_a}}{\partial\eta} + D, \tag{9}$$

unde s-a notat

$$A = \psi_\delta\, u_{1_e}\left(\cos\varphi - \frac{w_{1_a}}{u_{1_a}}\sin\varphi\right),$$

$$B = \psi_\delta\, u_{1_e}\left(\frac{w_{1_a}}{u_{1_a}}\cos\varphi + \sin\varphi\right),$$

$$C = -u_{1_e}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi_\delta\int_0^\eta\left(\cos\varphi - \frac{w_{1_a}}{u_{1_a}}\sin\varphi\right)d\eta\right] -$$
$$-u_{1_e}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\psi_\delta\int_0^\eta\left(\frac{w_{1_a}}{u_{1_a}}\cos\varphi + \sin\varphi\right)d\eta\right],$$

$$D = \psi_\delta\left\{\frac{u_a}{u_{1_a}}u_a\frac{\partial u_{1_e}}{\partial\xi} + \frac{u_a}{u_{1_a}}w_a\frac{\partial u_{1_e}}{\partial\zeta} - u_{1_e}\frac{u_a}{u_{1_a}}w_a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} -\right.$$
$$\left. - w_{1_e}\frac{w_a}{u_{1_a}}w_a\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{1}{\rho u_{1_e}}\frac{1}{u_{1_a}}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho u_{1_e}}\frac{1}{u_{1_a}}(f_x + f_x^*)\right\},$$

$$f_x + f_x^* = -2\cos\beta\,\omega\,\rho\, w_1\left(\sin\varphi\frac{u_{1_a}}{w_{1_a}} + \cos\varphi\right) + \omega^2\cos^2\beta\,\rho\,\xi,$$

$$\tau = \mathscr{M}\frac{\rho u_{1_e}^2}{\psi_\delta}u_{1_a}\frac{\partial}{\partial\eta}(\cos\varphi\, u_{1_a} - \sin\varphi\, w_{1_a}).$$

În mod analog să transformăm ecuaţia a doua de mişcare cu ajutorul variabilelor

$$\xi = x, \quad \zeta = z, \quad \eta_1 = \frac{\int_0^y \rho\, w_1\, dy}{\int_0^\delta \rho\, w_1\, dy} = \frac{\psi_1}{\psi_{1_\delta}}. \tag{10}$$

Găsim în cele din urmă noua formă

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial\eta_1} = \cos\varphi A_1\frac{\partial w_{1_a}}{\partial\xi} + \sin\varphi A_1\frac{\partial u_{1_a}}{\partial\xi} + \cos\varphi B_1\frac{\partial w_{1_a}}{\partial\zeta} + \sin\varphi B_1\frac{\partial u_{1_a}}{\partial\zeta} +$$
$$+\cos\varphi\, C_1\frac{\partial w_{1_a}}{\partial\eta_1} + \sin\varphi\, C_1\frac{\partial u_{1_a}}{\partial\eta_1} + D_1, \tag{11}$$

în care s-a pus

$$A_1 = \psi_{1_\delta}\, u_{1_e}\left(\cos\varphi\,\frac{u_{1a}}{w_{1a}} - \sin\varphi\right)$$

$$B_1 = \psi_{1_\delta}\, u_{1_e}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{u_{1a}}{w_{1a}}\right)$$

$$C_1 = -\,u_{1_e}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi_{1\delta}\int_0^{\eta_1}\left(\cos\varphi\,\frac{u_{1a}}{w_{1a}} - \sin\varphi\right)d\eta_1\right] - \\ - u_{1e}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\psi_{1_\delta}\int_0^{\eta_1}\left(\cos\varphi + \frac{u_{1a}}{w_{1a}}\sin\varphi\right)d\eta_1\right]$$

$$D_1 = \psi_{1_\delta}\left\{\frac{w_a}{w_{1a}}\,w_a\,\frac{\partial w_{1e}}{\partial\zeta} + \frac{w_a}{w_{1a}}\,u_a\,\frac{\partial w_{1e}}{\partial\xi} + u_{1_e}\,\frac{u_a}{w_{1a}}\,u_a\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \right. \\ \left. + w_{1_e}\,\frac{u_a}{w_{1a}}\,w_a\,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{1}{\rho w_{1_e}}\,\frac{1}{w_{1a}}\,\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho w_{1_e}}\,\frac{1}{w_{1a}}\,(f_z + f_z^\star)\right\},$$

$$f_z + f_z^\star = 2\rho\,\omega\cos\beta u_1\left(\cos\varphi - \frac{w_{1a}}{u_{1a}}\sin\varphi\right) + \rho\,\omega^2\cos^2\beta\zeta,$$

$$\tau_1 = \frac{\mathcal{M}_1\,\rho\,w_{1_e}^2}{\psi_{1_\delta}}\,w_{1_a}\,\frac{\partial}{\partial\eta_1}(\cos\varphi\, w_{1_a} + \sin\varphi\, u_{1_a}).$$

Se observă imediat că pentru $\varphi = 0$ şi $\omega = 0$ regăsim ecuaţiile din lucrarea [1]. Pentru ecuaţia energiei vom utiliza variabilele

$$\xi = x, \qquad \zeta = z, \qquad \eta_2 = \frac{\int_0^y \rho\, E_a\, dy}{\int_0^\delta \rho\, E_a\, dy} = \frac{\psi_2}{\psi_{2\delta}}, \tag{12}$$

care conduc la următoarea expresie:

$$\frac{\partial}{\partial\eta_2}(\tau u + \tau_1 w + q_y) = A_2\,\frac{\partial E_a}{\partial\xi} + B_2\,\frac{\partial E_a}{\partial\zeta} + C_2\,\frac{\partial E_a}{\partial\eta_2} + D_2, \tag{13}$$

unde s-a notat

$$A_2 = \psi_{2_\delta}\,\Delta\,u_{1_e}\,\frac{u_a}{E_a}, \qquad B_2 = \psi_{2_\delta}\,\Delta\,w_{1_e}\,\frac{w_a}{E_a},$$

$$C_2 = -\,\Delta\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi_{2\delta}\,u_{1_e}\int_0^{\eta_2}\left(\cos\varphi\,\frac{u_{1a}}{E_a} - \sin\varphi\,\frac{w_{1a}}{E_a}\right)d\eta_2\right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\psi_{2_\delta}\,u_{1_e}\int_0^{\eta_2}\left(\cos\varphi\,\frac{w_{1a}}{E_a} + \sin\varphi\,\frac{u_{1a}}{E_a}\right)d\eta_2\right]\right\},$$

$$D_2 = \psi_{2_\delta}\left[u_{1_e}\, u_a \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} + u_{1_e} w_a \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta} + u_{1_e} \frac{u_a}{E_a} \frac{\partial E_w}{\partial \xi} + u_{1_e} \frac{w_a}{E_a} \frac{\partial E_w}{\partial \zeta}\right],$$

$$\tau u + \tau_1 w + q_y = \frac{\mathcal{M}\rho}{\psi_{2_\delta}} E_a \frac{\partial}{\partial \eta_2}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \frac{w^2}{2} + \frac{i}{P_r}\right),$$

$$E = E_a \Delta + E_w, \quad \Delta = E_e - E_w, \quad P_r = \frac{C_p \mathcal{M}}{\Lambda}, i = C_p\, T.$$

Condițiile la limită pentru aceste ecuații se scriu sub forma

$$\eta = 0,\ u_a = w_a = 0,\ E_a = 0 \text{ sau } q_{y_w} = q_{y_w}\ (\xi, \zeta),$$

$$\eta = 1,\ u_a = \cos\varphi - \sin\varphi,\ w_a = \sin\varphi + \cos\varphi,\ E_a = 1, \tag{14}$$

$$\tau \approx 0, \qquad \tau_1 \approx 0, \qquad q_y \approx 0.$$

5. Pentru determinarea caracteristicilor stratului limită, în prima aproximație, vom pune

$$\frac{\partial u_{1_a}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_{1_a}}{\partial \zeta} = \frac{\partial w_{1_a}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_{1_a}}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_a}{\partial \xi} = \frac{\partial E_a}{\partial \zeta} = 0. \tag{15}$$

De asemenea în integralele globale care intervin vom admite că

$$\lambda_a = \frac{u_{1a}}{w_{1a}} \approx 1, \qquad \lambda_b = \frac{u_{1a}}{E_a} \approx 1, \tag{16}$$

deoarece prin transformarea η, η_1, η_2, profilele de viteză şi energie adimensională se apropie suficient pentru a fi considerate profile tip. Utilizînd aproximațiile (15) şi (16) prima integrare a ecuațiilor (9), (11), (13) ne conduce la determinarea frecării şi a transferului

$$\begin{aligned}\tau_w &= \frac{\mathcal{M}_e \rho_e u_{1_e} u_e}{2\psi_\delta}\left[K - \frac{2\psi_\delta^2}{\mathcal{M}_e \rho_e u_{1_e}^2 u_e}\left(\frac{du_e}{dt} N - 2\,\omega\cos\beta\, w_e N^\star + \right.\right.\\ &\left.\left. \qquad + \omega^2\cos^2\beta\, \xi N^{\star\star}\right)\right],\\ \tau_{1_w} &= \frac{\mathcal{M}_{1_e} \rho_e u_{1_e} w_e}{2\psi_{1_\delta}}\left[K_1 - \frac{2\psi_{1\delta}^2}{\mathcal{M}_{1_e} \rho_e u_{1_e}^2 w_e}\left(\frac{dw_e}{dt} N_1 + 2\omega\cos\beta\, u_e N_1^\star + \right.\right.\\ &\left.\left. \qquad + \omega^2\cos^2\beta\, \zeta N_1^{\star\star}\right)\right],\\ q_{y_w} &= \frac{\mathcal{M}_e \Delta}{2\psi_\delta P_r}\left[K_2 - \frac{2\psi_{2\delta}^2 \rho_e P_r}{\mathcal{M}_e} \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt} N_2\right],\end{aligned} \tag{17}$$

în care s-a notat

$$K = \frac{\int_0^1 \eta\, d\, u_{1_a}}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} \cdot \int_0^1 \mathcal{M}_a\, \rho_a\, d\,(u_{1a}^2),$$

$$N = -\frac{\int_0^1 \eta\, du_{1_a}}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} \int_0^1 \eta\left(u_{1_a} - \frac{1}{\rho_a u_{1_a}}\right) d\eta + \int_0^1 \left(u_{1_a} - \frac{1}{\rho_a u_a}\right) d\eta, \tag{18}$$

$$N^{\star} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho_a u_{1a}} - 1\right) d\eta - \int_0^1 \eta \left(\frac{1}{\rho_a u_{1a}} - 1\right) d\eta \cdot \frac{\int_0^1 \eta\, du_{1_a}}{\int_0^1 \eta^2 du_{1_a}},$$

$$N^{\star\star} = -\frac{\int_0^1 \eta\, du_{1_a}}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{u_{1_a}}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right) \eta\, d\eta + \int_0^1 \frac{1}{u_{1_a}}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right) d\eta,$$

$$K_2 = \frac{\int_0^1 \eta_2\, dE_a}{\int_0^1 \eta_2^2\, dE_a} \cdot \int_0^1 \mathcal{M}_a \rho_a\, d\left[E_a^2 + \frac{2}{3}(P_r - 1)\frac{u_e^2 + w_e^2}{\Delta} E_a^3\right],$$

$$N_2 = \int_0^1 (E_a - 1)\, d\eta_2 - \frac{\int_0^1 \eta_2\, dE_a}{\int_0^1 \eta_2^2\, dE_a} \int_0^1 \eta_2 (E_a - 1)\, d\eta_2,$$

iar K_1, N_1, $N_1^{\star}$ și $N_1^{\star\star}$ au expresii identice cu $K, N, N^{\star}, N^{\star\star}$ dar în locul lui u_{1_a} apare w_{1_a} și în locul lui η, apare η_1. Parametrii ψ_δ, ψ_{1_δ} și ψ_{2_δ} se determină din condiția $\eta = 1$. $u_{1_a} = 1$, $\eta_1 = 1$, $w_{1_a} = 1$, $\eta_2 = 1$, $E_a = 1$; ecuațiile lor diferențiale au forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\psi_\delta^2) + 2\left\{u_{1_e}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{u_{1_e}}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_{1_e}}\right)\right] - \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dt} \cdot \frac{\int_0^1 \eta\left(u_{1_a} - \frac{1}{\rho_a u_{1_a}}\right) d\eta}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} + \right. \\
&\left. + \frac{\omega^2 \cos^2\beta\, \xi}{u_e} \frac{\int_0^1 \frac{1}{u_{1_a}}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right) d\eta}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} + 2 \cos\beta\, \omega \frac{w_e}{u_e} \frac{\int_0^1 \eta \left(\frac{1}{\rho_a u_{1_a}} - 1\right) d\eta}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}}\right\} \psi_\delta^2 - \\
&- \mathcal{M}_e \rho_e u_{1_e}^2 \frac{\int_0^1 \mathcal{M}_a \rho_a d(u_{1_a}^2)}{\int_0^1 \eta^2\, du_{1_a}} = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{1_\delta}^2) + 2\left\{u_{1_e}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{u_{1_e}}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_{1_e}}\right)\right] - \frac{1}{w_e}\frac{dw_e}{dt}\cdot\frac{\int_0^1 \eta_1\left(w_{1_a} - \frac{1}{\rho_a w_{1_a}}\right)d\eta_1}{\int_0^1 \eta_1^2\, dw_{1_a}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2\cos^2\beta\,\zeta}{w_e}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{1}{w_{1_a}}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right)d\eta_1}{\int_0^1 \eta_1^2\, dw_{1_a}} - 2\cos\beta\,\omega\frac{u_e}{w_e}\frac{\int_0^1 \eta_1\left(\frac{1}{\rho_a w_{1_a}} - 1\right)d\eta_1}{\int_0^1 \eta_1^2 dw_{1_a}}\right\}\psi_{1_\delta}^2 -$$

$$-\mathscr{M}_{1_e}\,\rho_e\,u_{1_e}^2\,\frac{\int_0^1 \mathscr{M}_{1a}\,\rho_a\, d(w_{1_a}^2)}{\int_0^1 \eta_1^2\, dw_{1_a}} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\psi_{2_\delta}^2) + \left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial\xi} + \frac{\partial w_e}{\partial\zeta}\right) - \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt}\frac{\int_0^1 \eta_2(E_a - 1)d\eta_1}{\int_0^1 \eta_2^2\, dE_a}\right]\psi_{2_\delta}^2 -$$

$$-\frac{\mathscr{M}_e}{\rho_e P_r}\frac{\int_0^1 \mathscr{M}_a\,\rho_a\, d\left[E_a^2 + \frac{2}{3}(P_r - 1)\frac{V_e^2}{\Delta}E_e^3\right]}{\int_0^1 \eta_2^2\, dE_a} = 0.$$

În expresiile de mai sus s-au utilizat aproximațiile (14), şi s-a considerat

$$\frac{d}{dt} = u_e\frac{\partial}{\partial\xi} + w_e\frac{\partial}{\partial\zeta} = V_e\frac{\partial}{\partial s}, \qquad V_e^2 = u_c^2 + w_e^2. \tag{20}$$

Integrarea ecuației (7) în lungul liniei de curent a punctului în care voim să determinăm caracteristicile stratului limită, cu condiția la limită

$$s = 0, \quad \psi_\delta = 0, \quad \psi_{1_\delta} = 0, \quad \psi_{2_\delta} = 0 \tag{21}$$

conduce la determinarea parametrilor ψ_δ, ψ_{1_δ}, ψ_{2_δ} ca soluții ale unei ecuații diferențiale de ordinul întîi, liniare dacă $\mathscr{M}_e$ este independent de acești parametri. Se poate observa că expresii potrivite ale lui $\mathscr{M}$ conduc la soluții ale scurgerii turbulente pentru ecuațiile de mişcare mediate corespunzător.

Liniile de curent limită, date de relația

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \lim\left|\frac{u}{w}\right|_{y=0} = \frac{\mathscr{M}_1}{\mathscr{M}}\frac{\tau_w}{\tau_{1_w}},$$

prin utilizarea relațiilor (1) și prin punerea în evidență a gradienților de presiune locală și a forțelor exterioare capătă forma

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\frac{\mathscr{M}_{1a}}{\mathscr{M}_a}\,\frac{\psi_\delta}{\psi_\delta}\,\frac{k}{k_1}\,\frac{u_e}{w_e}\,\frac{1+\dfrac{2\psi_\delta^2}{\mathscr{M}_e\rho_e u_{1e}^2 u_e k}\left[N\dfrac{1}{\rho_e}\dfrac{\partial p}{\partial\xi}+(N+N^\star)2\omega\cos\beta w_e-(N+N^{\star\star})\omega^2\cos^2\beta\,\xi\right]}{1+\dfrac{2\psi_{1\delta}^2}{\mathscr{M}_{1_e}\rho_e u_{1_e}^2 w_e k_1}\left[N_1\dfrac{1}{\rho_e}\dfrac{\partial p}{\partial\zeta}-(N_1+N_1^\star)2\omega\cos\beta u_e-(N_1+N_1^{\star\star})\omega^2\cos^2\beta\,\zeta\right]} \tag{22}$$

Această expresie arată influența termenilor adiționali datoriți forțelor Coriolis și forțelor centrifuge ale suprafeței în rotație și este o măsură a devierii curentului față de liniile de curent exterioare admise.

Menționăm că pentru scurgerea laminară compresibilă în care admitem relația $\mu_a\,\rho_a=1$, putem obține expresiile vitezelor u_{1_a}, w_{1_a}, și a energiei adimensionale E_a sub forma următoare

$$\begin{aligned}
u_{1_a}^2=u_{a_p}^2\Bigg\{1&-\left(\frac{u_{a_q}^2}{u_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_\delta^2}{\mathscr{M}_e\rho_e u_{1_e}^2}\,\frac{1}{u_e}\,\frac{du_e}{dt}\int_0^1\eta\left(u_{1_a}-\frac{1}{\rho_a u_{1_a}}\right)d\eta+\\
&+\left(\frac{u_{a_r}^2}{u_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_\delta^2}{\mathscr{M}_e\rho_e u_{1_e}^2}\,2\cos\beta\,\omega\,\frac{w_e}{u_e}\int_0^1\eta\left(\frac{1}{\rho_a u_{1_a}}-1\right)d\eta+\\
&+\left(\frac{u_{a_s}^2}{u_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_\delta^2}{\mathscr{M}_e\rho_e u_{1_e}^2 u_e}\,\omega^2\cos^2\beta\,\xi\int_0^1\frac{\eta}{u_{1_a}}\left(1-\frac{1}{\rho_a}\right)d\eta\Bigg\}\\
w_{1_a}^2=w_{a_p}^2\Bigg\{1&-\left(\frac{w_{a_q}^2}{w_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_{1\delta}^2}{\mathscr{M}_{1_e}\rho_e u_{1_e}^2}\,\frac{1}{w_e}\,\frac{dw_e}{dt}\int_0^1\eta_1\left(w_{1_a}-\frac{1}{\rho_a w_{1_a}}\right)d\eta_1+\\
&+\left(\frac{w_{a_s}^2}{w_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_{1\delta}^2}{\mathscr{M}_{1_e}\rho_e u_{1_e}^2 w_e}\,\omega^2\cos^2\beta\,\zeta\int_0^1\eta_1\frac{1}{w_{1_a}}\left(1-\frac{1}{\rho_a}\right)d\eta_1-\\
&-\left(\frac{w_{a_r}^2}{w_{a_p}^2}-1\right)\frac{2\psi_{1\delta}^2}{\mathscr{M}_{1_e}\rho_e u_{1_e}^2}\,2\cos\beta\,\omega\,\frac{u_e}{w_e}\int_0^1\eta_1\left(\frac{1}{\rho_a w_{1_a}}-1\right)d\eta_1\Bigg\}\\
E_a^2\left[1+\frac{2}{3}(P_r-1)\frac{V_e^2}{\Delta}E_a\right]&=E_{a_p}^2\Bigg\{1+\frac{2}{3}(P_r-1)\frac{V_e^2}{\Delta}-\\
&-\left(\frac{E_{a_q}^2}{E_{a_p}^2}-1\right)2P_r\,\frac{\rho_e\psi_{2\delta}^2}{\mathscr{M}_e}\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{d\Delta}{dt}\int_0^1\eta_2(E_a-1)d\eta_2\Bigg\}
\end{aligned} \tag{23}$$

în care s-au introdus notaţiile

$$
\begin{gathered}
u_{a_p}^2 = \frac{\int_0^\eta \left[\int_1^\eta \eta \, du_{1_a} \right] d\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^\eta \eta \, du_{1_a} \right] d\eta} ; \quad u_{a_q}^2 = \frac{\int_0^\eta \left[\int_1^\eta \left(u_{1_a} - \frac{1}{\rho_a u_{1_a}} \right) d\eta \right] d\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^\eta \left(u_{1_a} - \frac{1}{\rho_a u_{1_a}} \right) d\eta \right] d\eta} \\
u_{a_r}^2 = \frac{\int_0^\eta \left[\int_1^\eta \left(\frac{1}{\rho_a u_{1_a}} - 1 \right) d\eta \right] d\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^\eta \left(\frac{1}{\rho_a u_{1_a}} - 1 \right) d\eta \right] d\eta} , \quad u_{a_s}^2 = \frac{\int_0^\eta \left[\int_1^\eta \frac{1}{u_{1_a}} \left(1 - \frac{1}{\rho_a} \right) d\eta \right] d\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^\eta \frac{1}{u_{1_a}} \left(1 - \frac{1}{\rho_a} \right) d\eta \right] d\eta} .
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Expresiile mărimilor $w_{a_p}^2$, $w_{a_q}^2$, $w_{a_r}^2$, $w_{a_s}^2$ sînt identice, numai că în locul lui u_{1_a} apare w_{1_a} şi în locul lui η apare η_1. Expresia lui $E_{a_p}^2$ devine de asemenea identică după înlocuirea lui u_{1_a} cu E_a şi a lui η cu η_2. Pentru mărimea adimensională $E_{a_q}^2$ obţinem

$$
E_{a_q}^2 = \frac{\int_0^{\eta_2} \left[\int_1^{\eta_2} (E_a - 1) \, d\eta_2 \right] d\eta_2}{\int_0^1 \left[\int_1^{\eta_2} (E_a - 1) \, d\eta_2 \right] d\eta_2} . \tag{25}
$$

Se remarcă faptul că relaţiile (23) acoperă un cîmp larg de aplicaţii ale stratului limită laminar. Toate aceste expresii (18), (19), (21), (24) şi (25) pot fi uşor obţinute utilizînd profilele tip [1]

$$
u_{1_a} \simeq \eta^n , \quad w_{1_a} \simeq \eta_1^{n_1} , \quad E_a \simeq \eta_2^{n_2} , \tag{26}
$$

unde n , n_1 , n_2 sînt constante pozitive subunitare.

Ca exemplu, cu ajutorul primei relaţii (26) pentru cazul incompresibil ($\rho_a = 1$), căpătăm imediat expresiile

$$
u_{a_p}^2 = \frac{2+n}{1+n} \left(\eta - \frac{\eta^{2+n}}{2+n} \right) , \quad u_{a_s}^2 = 0 ,
$$

$$
\frac{u_{a_q}^2}{u_{a_p}^2} - 1 = \frac{2+n}{2n} \left[\frac{(2-n)(1+n)}{(2+n)(1-n)} \, \frac{1 - \frac{\eta^{1-n}}{2-n}}{1 - \frac{\eta^{1+n}}{2+n}} - 1 \right] , \tag{27}
$$

$$
\frac{u_{a_r}^2}{u_{a_p}^2} = \frac{2}{n} \, \frac{(2-n)(1+n)}{(2+n)(1-n)} \, \frac{1 - \frac{\eta^{1-n}}{2-n}}{1 - \frac{\eta^{1+n}}{2+n}} - \frac{2-n}{n} \, \frac{2(1+n)}{2+n} \, \frac{1 - \frac{\eta}{2}}{1 - \frac{\eta^{1+n}}{2+n}} .
$$

6. Ca o primă aplicație să considerăm cazul unei plăci izolată termic, cu coarda C mai mică decît distanța r la axa de rotație, în scurgerea laminară compresibilă și să punem $\mathcal{M}_a \rho_a = \mu_a \rho_a = 1$. Avem

$$\beta = 0, \quad u_e = -\omega\zeta, \quad w_e = \omega\xi, \quad V_e = r\omega, \quad s = r\theta, \quad \sin\theta = \frac{c}{r},$$

$$\frac{1}{\rho_a} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 \left(1 - \frac{u^2 + w^2}{v_e^2}\right) \approx 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 (1 - u_{1_a}^2) \approx$$

$$\approx 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 (1 - w_{1_a}^2),$$

$$M_e^2 = \frac{v_e^2}{a^2} = r^2 \frac{\omega^2}{a^2}, \quad a^2 = \varkappa \frac{p_e}{\rho_e}, \quad p = \text{const.}, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

Să remarcăm că $\frac{du_s}{ds} = -\frac{w_e}{r}$ și $\frac{dw_e}{ds} = \frac{u_e}{r}$, astfel că expresiile (19), prin utilizarea profilelor tip (26), capătă forma următoare:

$$\frac{d}{ds}(\psi_\delta^2) - \frac{2n}{2 - n} \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{ds} \psi_\delta^2 - \frac{2 + n}{2n} \mu_e \rho_e V_e = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(\psi_{1_\delta}^2) - \frac{2n_1}{2 - n_1} \frac{1}{w_e} \frac{dw_e}{ds} \psi_{1_\delta}^2 - \frac{2 + n_1}{2n_1} \mu_e \rho_e V_e = 0.$$

Soluțiile acestor ecuații, cu condițiile la limită $s = 0$, $\psi_\delta = \psi_{1_\delta} = 0$ devin

$$\psi_\delta^2 = \frac{2 + n}{2n} \mu_e \rho_e V_e \frac{\int_0^s u_e^{-\frac{2n}{2-n}} ds}{u_e^{-\frac{2n}{2-n}}} \approx \frac{2 + n}{2n} \mu_e \rho_e V_e s,$$

$$\psi_{1_\delta}^2 = \frac{2 + n_1}{2n_1} \mu_e \rho_e V_e \frac{\int_0^s w_e^{-\frac{2n_1}{2-n_1}} ds}{w_e^{-\frac{2n_1}{2-n_1}}} \approx \frac{2 + n_1}{2n_1} \mu_e \rho_e V_e s.$$

Se observă că aceste relații nu depind de numărul Mach și se poate da o justificare prin admiterea legii de variație liniară a vîscozității cu temperatura.

În acest mod, expresia liniilor de curent limită devine

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{1 + n_1}{1 + n} \sqrt{\frac{n(2 + n)}{n_1(2 + n_1)}} \frac{u_e}{w_e} \frac{1 + 2\frac{n(3 - n) + 2(\varkappa - 1)\, M_e^2}{(1 - n)(2 - n)} \frac{w_e}{u_e} \theta}{1 - 2\frac{n_1(3 - n_1) + 2(\varkappa - 1)\, M_e^2}{(1 - n_1)(2 - n_1)} \frac{u_e}{w_e} \theta}, \tag{28}$$

valoare limitată de condiția ca profilele $u_{1_a}(\eta)$ și $w_{1_a}(\eta_1)$ să fie apropiate, adică putem pune

$$1 - 2\frac{n_1(3 - n_1) + 2(\varkappa - 1) M_e^2}{(1 - n_1)(2 - n_1)} \frac{u_e}{w_e} \theta > 0.$$

Pentru valorile de primă aproximaţie $n \simeq n_1 = \frac{1}{3}$, $\varkappa = 1{,}4$ obţinem formula aproximativă

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{u_e}{w_e} \, \frac{1 + (1{,}6 + 1{,}44\, M_e^2)\, \frac{w_e}{u_e}\, \theta}{1 - (1{,}6 + 1{,}44\, M_e^2)\, \frac{u_e}{w_e}\, \theta} \tag{29}$$

a cărei reprezentare se găseşte în figura 2. Se remarcă influenţa pronunţată a numerelor Mach mari, dar astfel ca $(1{,}6 + 1{,}44\, \mathrm{Me}_e^2) \frac{u_e}{w_e}\, \theta < 1$, pentru această placă în rotaţie, izolată termic. Pentru $M_e = 0$ se obţin rezultate în bun acord cu cele ale lucrării [2].

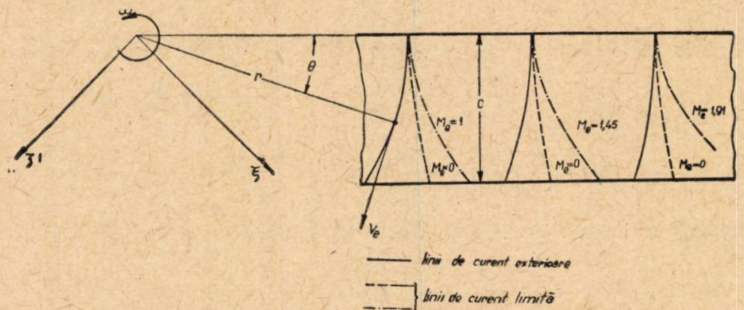


Fig. 2

7. *Pala de ventilator axial.* Se observă că pentru θ foarte mici, putem considera de la început $u_e \simeq w_e = \frac{\sqrt{2}}{2} V_e$ şi formula liniilor limită dă o valoare indicativă destul de apropiată de cea calculată exact. Vom utiliza această remarcă pentru a calcula liniile de curent limită pe pala unui ventilator axial sau pe paleta unei turbine de coardă constantă în scurgere laminară incompresibilă. Vom pune conform figurii 3

$$\zeta = -r_M \cos (45 - \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} r\, (1 + \operatorname{tg}\theta),$$

$$\xi = r_M \cos (45 + \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} r\, (1 - \operatorname{tg}\theta),$$

$$s = \frac{c}{2} - r \operatorname{tg} \theta,$$

$$\cos^2 \beta \approx \frac{r^2 \omega^2}{V_0^2 + r^2\omega^2},$$

unde V_0 = viteza axială,

$r\omega$ = viteza tangențială datorită rotației. Pentru scurgerea aerodinamică în jurul acestei palete, vom scrie

$$V_e^2 = V_{e_\infty}^2 \left(\frac{s}{c}\right)^{P(r)} \frac{1 - b(r)\left(\dfrac{s}{c}\right)^{Q(r)}}{1 - b(r)}, \quad 0 < b(r) < 1,$$

$$p + \frac{\rho}{2} V_e^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_{e_\infty}^2, \qquad V_{e_\infty}^2 = V_0^2 + r^2\omega^2.$$

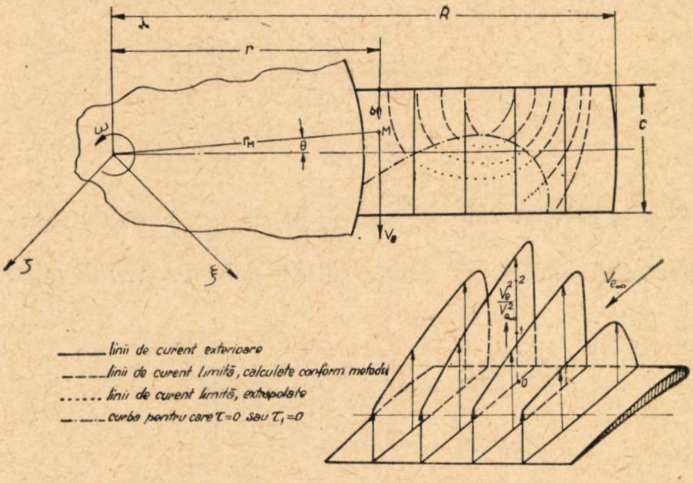

λ
R
r
ω
r_M
θ
M
c
V_0
ζ
ξ
V_{e_∞}
$\frac{V_e^2}{V_{e_\infty}^2}$
linii de curent exterioare
linii de curent limită, calculate conform metodei
linii de curent limită, extrapolate
curba pentru care τ=0 sau τ₁=0

Fig. 3

Relațiile de mai sus reprezintă aproximativ caracteristicile aerodinamice ale scurgerii exterioare tridimensionale pe extradosul paletei de anvergură finită. Prin varierea parametrilor $P(r)$, $Q(r)$, $b(r)$ se pot obține distribuții de presiuni care să modeleze destul de apropiat scurgerea reală în jurul profilelor cu incidență variabilă. În toate considerațiile ce le vom face, vom presupune că incidențele diferitelor secțiuni ale paletelor sînt mici, astfel că liniile de curent ale scurgerii exterioare se pot bine aproxima prin rețeaua r = const.

În acest mod, pentru $\rho_a = 1$, găsim

$$\frac{d\psi_\delta^2}{ds} + \left[\frac{4}{2-n}\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{ds} + 2\frac{2+n}{2-n}\cos\beta\frac{\omega}{V_e}\frac{w_e}{u_e}\right]\psi_\delta^2 - \frac{2+n}{2n}\mu_e\rho_e V_e = 0,$$

$$\frac{d\psi_{1_\delta}^2}{ds} + \left[\frac{4}{2-n_1}\frac{1}{w_e}\frac{dw_e}{ds} - 2\frac{2+n_1}{2-n_1}\cos\beta\frac{\omega}{V_e}\frac{u_e}{w_e}\right]\psi_{1_\delta}^2 - \frac{2+n_1}{2n_1}\mu_e\rho_e V_e = 0.$$

Să observăm acum că pentru $P\ (r) < 1$ şi $u_e \approx w_e = \frac{\sqrt{2}}{2} V_e$ putem scrie

$$\mathcal{J} = \int 2\,\frac{2+n}{2-n} \cos\ \beta \frac{ds}{v_e} \approx 2\,\frac{2+n}{2-n} \cos\ \beta\,\omega \frac{c}{v_{e_\infty}} (1-b)^{\frac{1}{2}} \int \left(\frac{s}{c}\right)^{-\frac{P}{2}} \Bigg[1 +$$

$$+ \frac{b}{2}\left(\frac{s}{c}\right)^Q\Bigg]\, d\left(\frac{s}{c}\right) \approx 2\,\frac{2+n}{2-n} \cos\ \beta \frac{\omega c}{v_{e_\infty}} \frac{(1-b)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{P}{2}} \left(\frac{s}{c}\right)^{1-\frac{P}{2}} \Bigg[1 +$$

$$+ \frac{b}{2}\,\frac{1-\frac{P}{2}}{1-\frac{P}{2}+Q}\left(\frac{s}{c}\right)^Q\Bigg].$$

Luînd $n \approx \frac{1}{3}$, pentru valori $\frac{c}{r} < \frac{1}{4{,}2}\left(1 + \frac{v_0^2}{r^2\omega^2}\right)$ avem $\mathcal{J} < 1$ și acest lucru permite să scriem $e^{\mathcal{J}} \approx 1 + \mathcal{J}$. În cele din urmă găsim

$$\psi_\delta^2 = \frac{2+n}{2n}\,\mu_e \rho_e V_e s \frac{1}{1+NP}\,\frac{e^{-\mathcal{J}}}{\left[1 - b\left(\frac{s}{c}\right)^Q\right]^N}\left[1 + \sum a_m \left(\frac{s}{c}\right)^m\right],$$

$$\psi_{1_\delta}^2 = \frac{2+n_1}{2n_1}\,\mu_e \rho_e V_e s \frac{1}{1-N_1 P}\,\frac{e^{-\mathcal{J}}}{\left[1 - b\left(\frac{s}{c}\right)^Q\right]^{-N_1}}\left[1 + \sum b_m \left(\frac{s}{c}\right)^m\right],$$

unde s-a notat

$$N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{2-n}\right),\ N_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{2-n_1}\right).$$

Sumele din partea dreaptă reprezintă rezultatul integrării după dezvoltare în serie a expresiilor $e^{\pm\mathcal{J}} \approx 1 \pm \mathcal{J}$ şi $(V_e^2)^N \approx V_{e_\infty}^{2N} (1-b)^{-N} \left[1 - Nb\left(\frac{s}{c}\right)^Q\right]$ şi cuprind influența parametrilor, P, Q, N.

Într-o primă aproximaţie calitativă, putem păstra doar

$$\psi_\delta^2 \simeq \psi_{1_\delta}^2 \approx \frac{2+n}{2n}\,\mu_e \rho_e V_e s,\ \text{cu}\ n \approx n_1.$$

Pentru a scrie expresiile $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial p}{\partial \zeta}$ vom alege ca variabile independente $s_a = \frac{s}{c}$ şi r, astfel că vom avea

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{c}\left[\theta - \cos^2\theta\,(1 + \mathrm{tg}\,\theta)\right]\frac{\partial p}{\partial s_a},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{c}\left[\theta + \cos^2\theta\,(1 - \mathrm{tg}\,\theta)\right]\frac{\partial p}{\partial s_a}.$$

Luînd valorile $P = \frac{1}{19}$, $Q = 1$, $b = 3\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ pentru $\frac{3}{4} \leqslant \frac{r}{R} \leqslant 1$ şi $b = \frac{r}{R}$ pentru $0 \leqslant \frac{r}{R} \leqslant \frac{3}{4}$ se găsesc curbele din figura 3 care arată calitativ influenţa scurgerii tridimensionale asupra liniilor de curent limită.

CONCLUZII

Din exemplele tratate cu ajutorul metodei profilelor tip pentru cazul stratului limită tridimensional pe suprafeţe în rotaţie, se pot desprinde următoarele concluzii :

a) Rotaţia suprafeţei nu introduce modificări esenţiale în abaterea liniilor de curent limită de la direcţia liniilor de curent exterioare pentru scurgerea laminară incompresibilă şi probabil pentru cea turbulentă. Pentru suprafeţele izolate termic însă, o dată cu creşterea numărului Mach, forţele Coriolis şi cele centrifuge au o influenţă mai pronunţată.

b) Ceea ce este important în comportarea liniilor de curent limită este distribuţia în suprafaţă a gradienţilor de presiune locali. Cum suprafeţele în rotaţie dau naştere unor scurgeri aerodinamice cu valori ale presiunii foarte diferite de la punct la punct, este clar că aici rezidă întreaga dificultate a studiului şi proiectării palelor de ventilator, de turbină, de elice etc.

c) S-a indicat în exemplul tratat linia pentru care coeficientul de frecare τ_w devine nul pe una din direcţiile a căror bisectoare este viteza curentului exterior. Se pare că această curbă poate servi drept un criteriu calitativ al desprinderii stratului limită tridimensional laminar.

d) Cu ajutorul metodei expuse se poate ataca şi problema inversă a determinării repartiţiei în suprafaţă a presiunilor, astfel ca liniile de curent limită să aibă o anumită comportare, dată dinainte, fapt important în realizarea unui paletaj de randament ridicat.

Primită la redacţie la 19 iunie 1959

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В СЛУЧАЕ ЛОПАСТЕЙ ОСЕВОГО ВЕНТИЛЯТОРА

РЕЗЮМЕ

В этой работе автор распространяет свой метод расчета, основанный на исследовании некоторых типовых профилей скоростей и температур, на случай поверхностей вращения. Оси координат на поверхности выбраны таким образом, что их биссектриса совпадает с общим направлением потока, могущего иметь малые местные отклонения, выявляемые в рассматриваемых в работе уравнениях. Применяемые безразмерные переменные построены при помощи скоростей в двух плоскостях, имеющих местами в качестве биссекторной плоскости нормальную к поверхности плоскость, определяемую скоростями внешнего потока.

Приводится решение двух задач. Первая относится к плоской пластинке, равномерно вращающейся в своей плоскости в сжимаемом ламинарном потоке. Устанавливается, что большие числа Маха имеют значительное влияние на отклонение предельных линий тока для теплоизолированной пластинки. Другая задача относится к случаю лопасти осевого вентилятора в несжимаемом ламинарном потоке, для которой рассчитываются предельные линии тока при заданном распределении поверхностного давления. Конфигурация этих линий указывает на преобладающее влияние местных градиентов давления по сравнению с эффектами центробежных и кориолисовых сил. Кривая, указывающая на равенство нулю напряжения трения τ на обеих рассматриваемых осях, может служить качественным критерием отрыва трехмерного пограничного слоя.

DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE À TROIS DIMENSIONS. APPLICATIONS AU CAS DES PALES D'UN VENTILATEUR AXIAL

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étend, au cas des surfaces en rotation, sa méthode de calcul fondée sur la considération de certains types de profiles de vitesses et de températures. Les axes de coordonnées sur la surface sont choisis de manière que leur bissectrice coïncide avec la direction générale du courant, qui peut présenter, localement, de petits écarts, mis en évidence par les équations employées dans le travail. Les variables

adimensionnelles utilisées sont construites au moyen des vitesses de deux plans, dont le plan bissecteur local est déterminé par la vitesse du courant extérieur et la normale à la surface.

L'auteur présente deux exemples. Le premier se réfère à une plaque plane en rotation uniforme dans son plan dans le cas de l'écoulement laminaire compressible. On constate que les grands nombres de Mach exercent une influence sensible sur les écarts des lignes de courant limite si la plaque est thermiquement isolée. L'autre exemple s'occupe du cas d'une pale de ventilateur axial dans le cas de l'écoulement laminaire incompressible ; on en calcule les lignes de courant limite pour une distribution donnée de la pression en surface. La configuration de ces lignes fait ressortir la prépondérance des gradients de pression locaux par rapport aux effets des forces centrifuges et de Coriolis. La courbe représentant l'annulation de la tension de frottement τ sur les deux axes considérés peut servir de critérium qualitatif du décollement de la couche limite à trois dimensions.

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. N. SĂVULESCU, *Comportarea unor soluţii ale stratului limită tridimensional în ipoteza profilelor tip de viteze şi temperaturi.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *3* (1959).
2. L. E. FOGARTY, *The laminar boundary layer on a rotating blade.* J.A.S., *18*, 247—252 (1951).

STUDII

HIDROMECANICĂ

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA SCURGERII CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ A UNUI LICHID PRINTR-UN MEDIU POROS NEOMOGEN

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere. Stabilirea ecuației problemei.* În cele ce urmează, vom considera mișcarea cu suprafață liberă a unui lichid printr-un mediu poros a cărui permeabilitate este variabilă. Ne vom mărgini la cazul mai simplu în care permeabilitatea este funcție de o singură variabilă și anume de înălțimea punctului considerat în raport cu un plan orizontal de referință. Sub acest aspect, problema a mai fost studiată de N.K. Ghirinskii [2] pentru scurgerea staționară și de P. Ia. Polubarinova-Kocina [3] pentru mișcarea nestaționară. În considerațiile noastre vom urma o cale în general diferită de aceea a autorilor menționați mai sus.

Pentru a stabili ecuația diferențială a problemei, vom recurge la un raționament analog cu acela care conduce la ecuația lui Boussinesq, utilizată pentru studiul mișcărilor de acest gen prin medii poroase cu permeabilitate constantă [3].

Ca punct de plecare, vom admite că este valabilă legea lui Darcy, astfel încît viteza de filtrare are expresia

$$\mathrm{v} = k\,\frac{\gamma}{\mu}\,\nabla\varphi = k_f\,\nabla\varphi, \tag{1}$$

în care k_f este coeficientul de filtrare, proporțional cu permeabilitatea k, deoarece greutatea specifică γ și viscozitatea μ ale lichidului sînt admise constante. Funcția φ este de forma

$$\varphi = -\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) \tag{2}$$

axa Oz fiind verticală şi cu sensul pozitiv de jos în sus. Vom presupune de asemenea, aşa cum am mai menţionat, că permeabilitatea, respectiv coeficientul de filtrare, variază numai în raport cu z.

Dacă z este un punct de pe suprafaţa liberă, pe care presiunea este constantă, din (2) rezultă

$$\varphi(x,y,z,t) + z = \text{const.} \tag{3}$$

şi în conformitate cu ipoteza cunoscută, vom admite că suprafaţa liberă are o curbură mică. Aşadar, z variază în jurul unei valori medii h, abătîndu-se destul de puţin de la aceasta şi putem pune

$$\varphi(x, y, z, t) \approx \varphi(x, y, h, t). \tag{4}$$

Luînd presiunea de pe suprafaţa liberă egală cu zero, din (3) şi (4) obţinem ecuaţia acesteia sub forma

$$z = -\varphi(x, y, h, t). \tag{5}$$

A doua ipoteză care se face în cazul cînd permeabilitatea este constantă, se referă la componentele orizontale ale vitezei de filtrare, v_x şi v_y presupuse a fi independente de z. Vom păstra această ipoteză sub o formă modificată şi anume vom admite că v_x şi v_y depind de variabila z numai prin intermediul permeabilităţii, respectiv coeficientului de filtrare. Prin urmare, dacă introducem funcţia

$$H(x, y, t) = -\varphi(x, y, h, t), \tag{6}$$

avem

$$v_x = -k_f(z)\frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k_f(z)\frac{\partial H}{\partial y} \tag{7}$$

şi din ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

rezultă

$$v_z - v_{z0} = -\int_0^z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dz = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)\int_0^z k_f(z)\, dz =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) g(z), \tag{9}$$

unde am utilizat notaţia

$$g(z) = \int_0^z k_f(z)\, dz, \tag{10}$$

iar v_{z0} este valoarea componentei v_z a vitezei la baza stratului permeabil presupus orizontal ($z = 0$).

Pe de altă parte, cu ajutorul relaţiilor (5) şi (6) ecuaţia suprafeţei libere devine

$$z = H(x, y, t) \tag{11}$$

şi dacă scriem derivata totală în raport cu timpul, obţinem

$$f\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} v_x + \frac{\partial H}{\partial y} v_y - v_z = 0, \tag{12}$$

deoarece avem

$$v_x = f\,\frac{dx}{dt}, \quad v_y = f\,\frac{dy}{dt}, \quad v_z = f\,\frac{dz}{dt}, \tag{13}$$

f fiind porozitatea.

Înlocuind în (12) componentele vitezei cu expresiile lor date de (7) şi (9) găsim

$$f\frac{\partial H}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) g(H) + k_f(H)\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] + v_{z0}, \tag{14}$$

cu observaţia că g şi k_f sînt funcţii de H deoarece ne găsim pe suprafaţa liberă.

Ecuaţia (14) se mai poate scrie

$$\frac{f}{k_f}\frac{\partial H}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \frac{v_{z0}}{k_f}, \tag{15}$$

unde

$$\varkappa = \frac{g(H)}{k_f(H)}, \tag{16}$$

este de asemenea o funcţie cunoscută de H.

Pentru cazul în care stratul permeabil se găseşte aşezat pe un strat impermeabil, ecuaţia precedentă (15) devine

$$\frac{f}{k_f}\frac{\partial H}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2, \tag{17}$$

deoarece $v_{z0} = 0$.

2. *Cazul scurgerii staţionare. Soluţia exactă pentru scurgerea plană.* Dificultăţile legate de rezolvarea ecuaţiei (17) sînt micşorate în oarecare măsură dacă scurgerea lichidului este staţionară. Avem astfel

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{18}$$

şi pentru calculele ulterioare este util să introducem în această ecuaţie mărimi adimensionale. În acest scop, vom considera o lungime de referință l care poate fi, de exemplu, grosimea stratului poros în care se produce scurgerea și vom pune

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad \overline{H} = \frac{H}{l}. \tag{19}$$

De asemenea, vom introduce o valoare de referință a coeficientului de filtrare, de pildă aceea maximă pe care o vom nota cu k_{f0} și vom scrie

$$\overline{k}_f = \frac{k_f}{k_{f0}}. \tag{20}$$

In felul acesta, obținem cu ușurință

$$g(z) = k_{f0}\, l \,\overline{g}(\zeta), \quad \varkappa(H) = l\,\overline{\varkappa}(\overline{H}), \tag{21}$$

unde

$$\overline{g}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \overline{k}_f(\zeta)\, d\zeta, \quad \overline{\varkappa}(\overline{H}) = \frac{\overline{g}(\overline{H})}{\overline{k}_f(\overline{H})} \tag{22}$$

și ecuația (18) devine

$$\overline{\varkappa}\left(\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \eta^2}\right) + \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial \eta}\right)^2 = 0. \tag{23}$$

În ceea ce privește componentele vitezei de filtrare, expresiile lor adimensionale sînt

$$\overline{v}_\xi = \frac{v_x}{k_{f0}} = -\overline{k}_f \frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}, \quad \overline{v}_\eta = \frac{v_y}{k_{f0}} = -\overline{k}_f \frac{\partial \overline{H}}{\partial \eta} \tag{24}$$

și

$$\overline{v}_\zeta = \frac{v_z}{k_{f0}} = \left(\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \eta^2}\right)\overline{g}(\zeta). \tag{25}$$

Dacă mișcarea este plană, singura variabilă independentă fiind de exemplu ξ, ecuația (23) ia forma

$$\frac{d^2 \overline{H}}{d\xi^2} + \frac{1}{\overline{\varkappa}}\left(\frac{d\overline{H}}{d\xi}\right)^2 = 0, \tag{26}$$

sau

$$\frac{\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\overline{H}}{d\xi}\right)}{\frac{d\overline{H}}{d\xi}} + \frac{1}{\overline{\varkappa}}\frac{d\overline{H}}{d\xi} = 0, \tag{27}$$

de unde rezultă

$$\log \frac{d\overline{H}}{d\xi} + \int \frac{d\overline{H}}{\overline{\varkappa}} = C_1 \tag{28}$$

și în cele din urmă

$$\xi = \int \frac{d\overline{H}}{e^{C_1 - \int \frac{d\overline{H}}{\overline{\varkappa}}}} + C_2, \tag{29}$$

relație din care deducem forma suprafeței libere a lichidului.

2.1. *Aplicații.* Ca aplicație, vom considera problema infiltrației prin corpul unui batardou (fig. 1), coeficientul de filtrare avînd diferite expresii pe care le vom indica mai departe. Ca lungime de referință, vom alege înălțimea h a batardoului. Vom admite, de asemenea, că batardoul este așezat pe un strat impermeabil.

Condițiile la limită sînt

$$\xi = 0, \overline{H} = \overline{H}_1 ; \xi = \xi_1, \overline{H} = \overline{H}_2 \tag{30}$$

unde am pus $\xi_1 = \frac{l}{h}$.

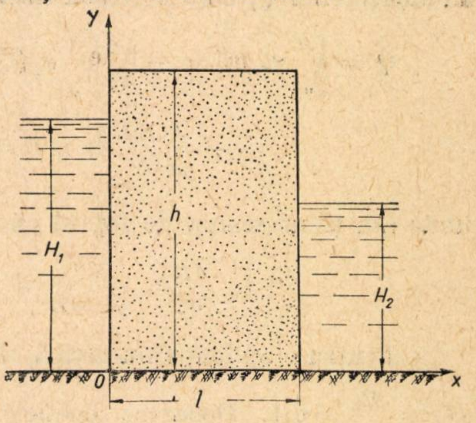


Fig. 1

a) Dacă admitem pentru coeficientul de filtrare o lege de variație de forma

$$\overline{k}_f = A \cos m\zeta \tag{31}$$

rezultă, după calcule simple

$$\overline{\varkappa} = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \overline{H} \tag{32}$$

și

$$\xi = C_2 - \frac{e^{-C_1}}{m} \cos m\overline{H}, \tag{33}$$

de unde deducem

$$\overline{H} = \frac{1}{m} \arccos \left[m e^{C_1} \left(C_2 - \xi \right) \right]. \tag{34}$$

Cu condițiile la limită (30), obținem pentru constante valorile

$$e^{C_1} = \frac{\cos m\overline{H}_1 - \cos m\overline{H}_2}{m\xi_1} \tag{35}$$

şi

$$C_2 = \frac{\xi_1 \cos m\overline{H}_1}{\cos m\overline{H}_1 - \cos m\overline{H}_2}. \tag{36}$$

În felul acesta, suprafaţa liberă este dată de relaţia

$$\overline{H} = \frac{1}{m} \arccos\left(\cos m\overline{H}_1 - \frac{\cos m\overline{H}_1 - \cos m\overline{H}_2}{\xi_1}\xi\right). \tag{37}$$

În ceea ce priveşte debitul, vom considera de asemenea valoarea adimensională $\overline{Q}$, care se calculează cu ajutorul formulei

$$\overline{Q} = \int_0^{\overline{H}} \overline{v}_\xi \, d\zeta = -\frac{d\overline{H}}{d\xi}\int_0^{\overline{H}} \overline{k}_f(\zeta)\, d\zeta = -A\frac{d\overline{H}}{d\xi}\int_0^{\overline{H}} \cos m\zeta \, d\zeta =$$

$$= -\frac{A}{m}\frac{d\overline{H}}{d\xi}\sin m\overline{H} = \frac{A}{m^2}\frac{\cos m\overline{H}_2 - \cos m\overline{H}_1}{\xi_1}, \tag{38}$$

unde am ţinut seama de faptul că din (33) şi (35) avem

$$\frac{d\overline{H}}{d\xi} = \frac{e^{C_1}}{\sin m\overline{H}} = \frac{\cos m\overline{H}_1 - \cos m\overline{H}_2}{\xi_1 \sin m\overline{H}}. \tag{39}$$

Pentru o aplicaţie numerică, alegem $\xi_1 = \frac{l}{h} = 0{,}5$, $\overline{H}_1 = \frac{H_1}{h} = 0{,}8$ şi $\overline{H}_2 = \frac{H_2}{h} = 0{,}4$. Deoarece coeficientul de filtrare dat de (31) scade atunci cînd ζ creşte, avem

$$\zeta = 0, \quad \overline{k}_f = 1 \tag{40}$$

şi prin urmare

$$\overline{k}_f = \cos m\zeta, \tag{41}$$

constanta A fiind egală cu unitatea. Se mai observă că trebuie să avem $0 < m < 1{,}5708$, deoarece $0 < \overline{k}_f \leqslant 1$, coeficientul de filtrare fiind o mărime esenţial pozitivă. Dacă luăm $m = 1{,}5$, relaţia (37) devine

$$\overline{H} = \frac{2}{3} \arccos(0{,}36236 + 0{,}92596\,\xi)$$

şi în tabela 1, am trecut valorile calculate, în comparaţie cu cele rezultate

Tabela 1

ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\overline{H}$	0,8	0,73231	0,66091	0,58407	0,49896	0,4
$\overline{H}_D$	0,8	0,73756	0,66933	0,59330	0,50596	0,4

din formula cunoscută pentru cazul coeficientului de filtrare constant ($\overline{k}_f = 1$), notate cu $\overline{H}_D$. Se știe că în acest caz avem, cu notațiile noastre

$$\overline{H}_D^2 = \overline{H}_1^2 - \frac{\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2}{\xi_1}\,\xi, \tag{42}$$

respectiv

$$\overline{H}_D^2 = 0{,}64 - 0{,}96\ \xi.$$

Se observă din examinarea datelor cuprinse în tabela 1 că diferențele sînt mici.

Debitul are valoarea $\overline{Q} = 0{,}41154$, iar dacă ne referim la cazul coeficientului de filtrare constant ($\overline{k}_f = 1$), avem formula lui Dupuit [3]

$$\overline{Q}_D = \frac{\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2}{2\xi_1}, \tag{43}$$

care ne dă $\overline{Q}_D = 0{,}48$; scăderea este prin urmare de 14,26%.

b) Rezultate la fel de simple găsim atunci cînd coeficientul de filtrare are expresia

$$\overline{k}_f = B \operatorname{ch} m\,\zeta, \tag{44}$$

crescînd prin urmare o dată cu ζ. Rezultă imediat

$$\overline{\varkappa} = \frac{1}{m} \operatorname{th} m\,\overline{H} \tag{45}$$

și

$$\xi = \frac{e^{-C_1}}{m} \operatorname{ch} m\,\overline{H} + C_2, \tag{46}$$

de unde obținem

$$\overline{H} = \frac{1}{m} \operatorname{arch} \left[m e^{C_1} (\xi - C_2) \right]. \tag{47}$$

Cu aceleași condiții la limită (30) constantele au valorile

$$e^{C_1} = \frac{\operatorname{ch} m\overline{H}_2 - \operatorname{ch} m\overline{H}_1}{m\xi_1} \tag{48}$$

și

$$C_2 = \frac{\xi_1 \operatorname{ch} m\overline{H}_1}{\operatorname{ch} m\overline{H}_1 - \operatorname{ch} m\overline{H}_2}, \tag{49}$$

astfel că forma suprafeței libere este dată de relația

$$\overline{H} = \frac{1}{m} \operatorname{arch} \left(\operatorname{ch} m\,\overline{H}_1 - \frac{\operatorname{ch} m\overline{H}_1 - \operatorname{ch} m\overline{H}_2}{\xi_1}\,\xi \right). \tag{50}$$

Pentru debit, găsim printr-un calcul analog cu cel de mai sus, expresia

$$\overline{Q} = \frac{B}{m^2}\,\frac{\operatorname{ch} m\overline{H}_1 - \operatorname{ch} m\overline{H}_2}{\xi_1}. \tag{51}$$

Pentru un exemplu numeric, vom utiliza aceleași date ca și mai înainte ($\xi_1 = 0{,}5$, $\overline{H}_1 = 0{,}8$, $\overline{H}_2 = 0{,}4$). Din condiția

$$\zeta = 1, \quad \overline{k}_f = 1, \tag{52}$$

rezultă

$$\overline{k}_f = \frac{\operatorname{ch} m\zeta}{\operatorname{ch} m}, \tag{53}$$

iar valoarea constantei m nu mai este supusă de rîndul acesta la nici un fel de restricție (cazul $m = 0$ corespunde la $\overline{k}_f = 1$). Rămînînd tot la $m = 1{,}5$, relația (50) se scrie

$$\overline{H} = \frac{2}{3} \operatorname{arch} (1{,}8107 - 1{,}25046\,\xi)$$

și în tabela 2 sînt trecute valorile calculate, de asemenea în comparație cu cele date de formula (42).

Tabela 2

ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\overline{H}$	0,8	0,74185	0,67650	0,60161	0,51265	0,4
$\overline{H}_D$	0,8	0,73756	0,66933	0,59330	0,50596	0,4

Debitul este $\overline{Q} = 0{,}35438$, față de $\overline{Q}_D = 0{,}48$ care corespunde la un coeficient de filtrare constant și egal cu valoarea maximă ($\overline{k}_f = 1$); scăderea este de data aceasta de 26,17%.

c) Un ultim exemplu pe care îl vom studia este acela al variației liniare a coeficientului de filtrare după legea

$$\overline{k}_f = a\zeta + b. \tag{54}$$

Avem în acest caz

$$\overline{\varkappa} = \frac{\frac{a}{2}\,\overline{H}^2 + b\overline{H}}{a\overline{H} + b} \tag{55}$$

și din (29) rezultă

$$\xi = e^{-C_1}\left(\frac{a}{3}\overline{H} + b\right)\frac{\overline{H}^2}{2} + C_2. \tag{56}$$

Utilizînd condițiile la limită (30), găsim

$$e^{C_1} = -\frac{a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}_2^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2\right)}{6\xi_1} \tag{57}$$

și

$$C_2 = \frac{\overline{H}_1^2\left(a\overline{H}_1 + 3b\right)}{a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}_2^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2\right)}\xi_1 \tag{58}$$

astfel că (56) devine

$$\xi = \frac{a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}^2\right)}{a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}_2^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2\right)}\xi_1 \tag{59}$$

de unde deducem

$$\left(a\overline{H} + 3b\right)\overline{H}^2 = \left(a\overline{H}_1 + 3b\right)\overline{H}_1^2 - \left[a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}_2^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2\right)\right]\frac{\xi}{\xi_1}. \tag{60}$$

Mai departe, avem

$$\overline{v}_\xi = -\overline{k}_f\frac{d\overline{H}}{d\xi} = -\frac{\overline{k}_f}{\dfrac{d\xi}{d\overline{H}}} = -\frac{\overline{k}_f\, e^{C_1}}{\left(\dfrac{a}{2}\overline{H} + b\right)\overline{H}}, \tag{61}$$

rezultat la care ajungem cu ajutorul formulei (56). Prin urmare, debitul are valoarea

$$\overline{Q} = \int_0^{\overline{H}} \overline{v}_\xi\, d\zeta = -\frac{e^{C_1}}{\left(\dfrac{a}{2}\overline{H} + b\right)\overline{H}}\int_0^{\overline{H}} \overline{k}_f(\zeta)d\zeta = -\frac{e^{C_1}}{\left(\dfrac{a}{2}\overline{H} + b\right)\overline{H}}\int_0^{\overline{H}} (a\zeta + b)d\zeta =$$

$$= -e^{C_1} = \frac{a\left(\overline{H}_1^3 - \overline{H}_2^3\right) + 3b\left(\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2\right)}{6\xi_1}. \tag{62}$$

Pentru calcule, este necesar să precizăm expresiile coeficienților din (54). Să admitem astfel că valoarea maximă a coeficientului de filtrare k_{f0} se atinge pentru $z = h$. Originea axelor găsindu-se la baza stratului, avem prin urmare

$$\zeta = 0,\ \overline{k}_f = b;\ \zeta = 1,\ \overline{k}_f = 1 \tag{63}$$

și expresia (54) devine

$$\overline{k}_f = (1 - b)\zeta + b. \tag{64}$$

Dacă alegem $b = 0,75$ şi păstrăm celelalte valori numerice pentru ξ_1, $\overline{H}_1$ şi $\overline{H}_2$ din exemplele precedente, obţinem

$$\xi = 0,65772 - 0,94379\,\overline{H}^2 - 0,10487\,\overline{H}^3$$

şi în tabela 3 sînt date valorile calculate în comparaţie cu cele obţinute din formula (42) pentru $\overline{k}_f = 1$, pe care o transcriem sub forma

$$\xi_D = \frac{\overline{H}_1^2 - \overline{H}^2}{\overline{H}_1^2 - \overline{H}_2^2}\,\xi_1 \tag{65}$$

respectiv

$$\xi_D = \frac{0,64 - \overline{H}^2}{0,96}.$$

Tabela 3

$\overline{H}$	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
ξ	0	0,15929	0,29531	0,40866	0,5
ξ_D	0	0,15625	0,29167	0,40625	0,5

Ca şi în exemplele tratate mai înainte, diferenţele în forma suprafeţei libere sînt mici.

Nu tot acelaşi lucru se întîmplă cu debitul care are valoarea $\overline{Q} = 0,39733$ faţă de $\overline{Q}_D = 0,48$, corespunzînd la $\overline{k}_f = 1$; apare deci o diminuare a debitului cu 17,22%.

2.2. *Observaţii asupra soluţiei generale.* Pe lîngă exemplele de legi de variaţie a coeficientului de filtrare tratate în cele ce preced, s-ar mai putea da şi altele, dar este mai interesant să arătăm că se poate găsi destul de uşor soluţia generală, înţelegînd prin aceasta soluţia pentru o lege oarecare de variaţie a coeficientului de filtrare. Singura condiţie este ca funcţia $\overline{k}_f(\zeta)$ să fie continuă în intervalul închis $(0, \overline{H})$. În acest caz, avem

$$\overline{k}_f(\overline{H}) = \frac{d\,[\overline{g}(\overline{H})]}{d\overline{H}} \tag{66}$$

şi

$$\overline{\varkappa} = \frac{\overline{g}(\overline{H})}{\dfrac{d\,[\overline{g}(\overline{H})]}{d\overline{H}}}, \tag{67}$$

de unde rezultă

$$\int \frac{d\overline{H}}{\overline{\varkappa}} = \int \frac{d\,[\overline{g}(\overline{H})]}{\overline{g}(\overline{H})} = \log \overline{g}(\overline{H}), \tag{68}$$

presupunînd nulă constanta de integrare. Prin urmare, formula (29) devine

$$\xi = e^{-C_1} \int \bar{g}(\bar{H})\, d\bar{H} + C_2. \tag{69}$$

Obţinem de asemenea,

$$\bar{v}_\xi = -\bar{k}_f \frac{d\bar{H}}{d\xi} = -\frac{\bar{k}_f}{\dfrac{d\xi}{d\bar{H}}} = -\frac{k_f e^{C_1}}{\bar{g}(\bar{H})} \tag{70}$$

şi debitul are expresia

$$\bar{Q} = \int_0^{\bar{H}} \bar{v}_\xi\, d\zeta = -\frac{e^{C_1}}{\bar{g}(\bar{H})} \int_0^{\bar{H}} \bar{k}_f(\zeta)\, d\zeta = -e^{C_1}. \tag{71}$$

a) Dacă legea de variaţie a coeficientului de filtrare este de forma

$$\bar{k}_f = \sum_{q=0}^{n} a_q \zeta^q, \tag{72}$$

avem

$$\bar{g}(\bar{H}) = \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{q+1} \bar{H}^{q+1} \tag{73}$$

şi

$$\xi = e^{-C_1} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} \bar{H}^{q+2} + C_2. \tag{74}$$

Cu condiţiile la limită (30) obţinem

$$e^{C_1} = -\frac{1}{\xi_1} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (\bar{H}_1^{q+2} - \bar{H}_2^{q+2}), \tag{75}$$

respectiv

$$\bar{Q} = \frac{1}{\xi_1} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (\bar{H}_1^{q+2} - \bar{H}_2^{q+2}). \tag{76}$$

Se observă cu uşurinţă că dacă punem $n = 1$, $a_0 = b$ şi $a_1 = a$, regăsim pentru debit expresia (62). Atunci cînd $n = 0$, $a_0 = 1$, rezultă formula cunoscută pentru cazul $\bar{k}_f = 1$.

b) Dacă variaţia pe verticală a coeficientului de filtrare este cunoscută sub forma unei curbe experimentale, putem ajunge la reprezentarea printr-un polinom trigonometric

$$\bar{k}_f = \sum_{q=0}^{n} (a_q \cos q\zeta + b_q \sin q\zeta), \tag{77}$$

care ne dă

$$\bar{g}(\bar{H}) = a_0 \bar{H} + \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} [a_q \sin q \bar{H} + b_q (1 - \cos q \bar{H})] \tag{78}$$

şi

$$\xi = e^{-C_1} \left\{ \frac{a_0}{2} \bar{H}^2 + \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} \left[b_q \bar{H} - \frac{1}{q} (a_q \cos q \bar{H} + b_q \sin q \bar{H}) \right] \right\} + C_2 \tag{79}$$

Tot cu ajutorul condiţiilor la limită (30) găsim valoarea constantei e^{C_1} şi aceea a debitului $\bar{Q}$ care este

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \frac{1}{\xi_1} \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} \Big\{ b_q (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) - \frac{1}{q} [a_q (\cos q \bar{H}_1 - \cos q \bar{H}_2) + \\ + b_q (\sin q \bar{H}_1 - \sin q \bar{H}_2)] \Big\} + \frac{a_0}{2\xi_1} (\bar{H}_1^2 - \bar{H}_2^2). \end{aligned} \tag{80}$$

Şi această formulă conţine drept cazuri particulare pe acele al coeficientului de filtrare constant ($n = 0$, $a_0 = 1$) precum şi pe acela tratat mai înainte (punctul 2.1 a).

3. *Soluţia exactă pentru scurgerea staţionară axial-simetrică.* O tratare riguroasă a problemei se poate face şi atunci cînd mişcarea posedă simetrie axială. Dacă punem

$$\rho = \frac{r}{l}, \tag{81}$$

r fiind raza vectoare în planul Oxy iar l lungimea de referinţă, ecuaţia (23) se scrie

$$\frac{d^2 \bar{H}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{H}}{d\rho} + \frac{1}{\bar{\varkappa}} \left(\frac{d\bar{H}}{d\rho} \right)^2 = 0, \tag{82}$$

$\bar{H}$ şi $\bar{\varkappa}$ avînd aceeaşi semnificaţie ca şi mai înainte.

Mai putem scrie însă

$$\frac{\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{d\bar{H}}{d\rho}\right)}{\dfrac{d\bar{H}}{d\rho}} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\varkappa}} \frac{d\bar{H}}{d\rho} = 0, \tag{83}$$

de unde rezultă

$$\log\left(\rho \frac{d\bar{H}}{d\rho}\right) + \int \frac{d\bar{H}}{\bar{\varkappa}} = C_1 \tag{84}$$

şi

$$\log \rho = \int \frac{d\bar{H}}{e^{C_1 - \int \frac{d\bar{H}}{\bar{\varkappa}}}} + C_2. \tag{85}$$

Dacă menţinem ipoteza că funcţia $\bar{k}_f\ (\zeta)$ este continuă în intervalul închis $(0,\ \bar{H})$, putem aplica şi aici relaţia (68) care ne dă, după calcule simple

$$\log \rho = e^{-C_1} \int \bar{g}\ (\bar{H})\ d\bar{H} + C_2. \tag{86}$$

De aici deducem

$$\bar{v}_\rho = -\bar{k}_f \frac{d\bar{H}}{d\rho} = -\frac{\bar{k}_f}{\frac{d\rho}{d\bar{H}}} = -\frac{\bar{k}_f}{\rho} \frac{e^{C_1}}{\bar{g}(\bar{H})} \tag{87}$$

şi expresia debitului este, în valoare absolută

$$\bar{Q} = 2\pi \int_0^{\bar{H}} \rho \bar{v}_\rho\, d\zeta = \frac{2\pi e^{C_1}}{\bar{g}(\bar{H})} \int_0^{\bar{H}} \bar{k}_f\, (\zeta)\, d\zeta = 2\pi e^{C_1}. \tag{88}$$

3.1. *Aplicaţii.* Vom considera problema scurgerii cu suprafaţă liberă spre un puţ de rază r_0, într-un strat permeabil orizontal aşezat pe un strat impermeabil. Vom presupune că puţul este perfect şi vom alege ca lungime de referinţă grosimea H_s a stratului permeabil.

Condiţiile la limită ale problemei sînt cunoscute ; astfel, pentru $r = r_0$, H are valoarea H_0, iar la o rază $r = r_c$ la care admitem că pierderea de sarcină din cauza scurgerii este nulă (raza de influenţă), H este egal cu grosimea H_s a stratului. Trecînd la mărimi adimensionale, avem prin urmare

$$\rho = \rho_0,\ \bar{H} = \bar{H}_0 \quad ; \quad \rho = \rho_c,\ \bar{H} = 1. \tag{89}$$

a) Dacă legea de variaţie a coeficientului de filtrare are forma (72), $\bar{g}\ (\bar{H})$ este dat de (73) şi din (86) rezultă

$$\log \rho = e^{-C_1} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)\,(q+2)} \bar{H}^{q+2} + C_2. \tag{90}$$

Cu ajutorul condiţiilor la limită (89), găsim

$$e^{C_1} = \frac{1}{\log \frac{\rho_c}{\rho_0}} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)\,(q+2)} (1 - \bar{H}_0^{q+2}) \tag{91}$$

şi

$$C_2 = \frac{\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (\log \rho_0 - \overline{H}_0^{q+2} \log \rho_c)}{\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (1 - \overline{H}_0^{q+2})}, \tag{92}$$

iar relaţia (90) devine

$$\log \rho = \frac{\log \rho_c \sum\limits_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (\overline{H}^{q+2} - \overline{H}_0^{q+2}) + \log \rho_0 \sum\limits_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (1 - \overline{H}^{q+2})}{\sum\limits_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (1 - \overline{H}_0^{q+2})}. \tag{93}$$

De asemenea, expresia debitului capătă forma

$$\overline{Q} = \frac{2\pi}{\log \frac{\rho_c}{\rho_0}} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_q}{(q+1)(q+2)} (1 - \overline{H}_0^{q+2}). \tag{94}$$

Pentru o aplicaţie numerică, vom lua cazul particular al variaţiei liniare a coeficientului de filtrare dat de (64). Avem prin urmare $n = 1$, $a_0 = b$, $a_1 = 1 - b$ şi

$$\log \rho = \frac{[(1-b)(\overline{H}^3 - \overline{H}_0^3) + 3b(\overline{H}^2 - \overline{H}_0^2)] \log \rho_c + [(1-b)(1 - \overline{H}^3) + 3b(1 - \overline{H}^2)] \log \rho_0}{(1-b)(1 - \overline{H}_0^3) + 3b(1 - \overline{H}_0^2)} \tag{95}$$

iar

$$\overline{Q} = \frac{\pi}{3 \log \frac{\rho_c}{\rho_0}} [(1-b)(1 - \overline{H}_0^3) + 3b(1 - \overline{H}_0^2)]. \tag{96}$$

Dacă punem $b = 0{,}75$ şi luăm $\overline{H}_0 = 0{,}5$, $\rho_0 = 0{,}2$ $\rho_c = 200$, obţinem

$$\log \rho = 0{,}90594\, \overline{H}^3 + 8{,}15342\, \overline{H}^2 - 3{,}76104.$$

Pe de altă parte, dacă presupunem coeficientul de filtrare constant şi egal cu valoarea maximă ($b = 1$, $\overline{k}_f = 1$) avem [3]

$$\log \rho = \frac{\overline{H}^2 - \overline{H}_0^2}{1 - \overline{H}_0^2} \log \frac{\rho_c}{\rho_0} + \log \rho_0 \tag{97}$$

iar după înlocuirea valorilor numerice

$$\log \rho = 9{,}21035\, \overline{H}^2 - 3{,}91203.$$

În tabela 4 am trecut valorile lui ρ calculate pentru mai multe valori ale lui $\overline{H}$, în cele două cazuri considerate ($b = 0{,}75$, $b = 1$).

Tabela 4

$\overline{H}$		1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
ρ	$b = 0{,}75$	200	33,76047	6,82786	1,73555	0,53250	0,2
	$b = 1$	200	34,24146	7,26864	1,82593	0,55016	0,2

Atunci cînd avem $\overline{k}_f = 1$ debitul se calculează cu formula lui Dupuit [3] care, cu notațiile noastre, are forma

$$\overline{Q}_D = \pi \frac{1 - \overline{H}_0^2}{\log \frac{\rho_c}{\rho_0}}, \tag{98}$$

și se deduce de altfel imediat din (96) punînd $b = 1$. În cazul $b = 0{,}75$, debitul, calculat cu formula (96) are valoarea $\overline{Q} = 0{,}28898$, în timp ce pentru $b = 1$, avem $\overline{Q}_D = 0{,}34109$, diferența fiind deci de 15,28%.

b) Și pentru mișcarea axial simetrică se poate considera cazul în care coeficientul de filtrare este dat de polinomul trigonometric (77). Obținem astfel din (86)

$$\log \rho = e^{-C_1}\left\{\frac{a_0}{2}\overline{H}^2 + \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left[b_q \overline{H} - \frac{1}{q}\left(a_q \cos q\overline{H} + b_q \sin q\overline{H}\right)\right]\right\} + C_2 \tag{99}$$

iar condițiile la limită (89) ne dau

$$e^{C_1} = \frac{\frac{a_0}{2}(1 - \overline{H}_0^2) + \sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left\{b_q(1 - \overline{H}_0) - \frac{1}{q}\left[a_q(\cos q - \cos q\overline{H}_0) + b_q(\sin q - \sin q\overline{H}_0)\right]\right\}}{\log \frac{\rho_c}{\rho_0}} \tag{100}$$

și

$$C_2 = \frac{\left\{\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left[b_q - \frac{1}{q}(a_q \cos q + b_q \sin q)\right]\right\} \log \rho_0}{\frac{a_0}{2}(1 - \overline{H}_0^2) + \sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left\{b_q(1 - \overline{H}_0) - \frac{1}{q}\left[a_q(\cos q - \cos q\overline{H}_0) + b_q(\sin q - \sin q\overline{H}_0)\right]\right\}} - \frac{\left\{\frac{a_0}{2}\overline{H}_0^2 + \sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left[b_q\overline{H}_0 - \frac{1}{q}(a_q \cos q\overline{H}_0 + b_q \sin q\overline{H}_0)\right]\right\} \log \rho_c}{\frac{a_0}{2}(1 - \overline{H}_0^2) + \sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{q}\left\{b_q(1 - \overline{H}_0) - \frac{1}{q}\left[a_q(\cos q - \cos q\overline{H}_0) + b_q(\sin q - \sin q\overline{H}_0)\right]\right\}}. \tag{101}$$

Cu valorile constantelor astfel determinate, formula (99) devine

$$\log \rho = \frac{\frac{a_0}{2}(1-\overline{H}^2)+\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\left\{b_q(1-\overline{H})-\frac{1}{q}\left[a_q(\cos q-\cos q\,\overline{H})+b_q(\sin q-\sin q\,\overline{H})\right]\right\}}{\frac{a_0}{2}(1-\overline{H}_0^2)+\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\left\{b_q(1-\overline{H}_0)-\frac{1}{q}\left[a_q(\cos q-\cos q\,\overline{H}_0)+b_q(\sin q-\sin q\,\overline{H}_0)\right]\right\}}\log\rho_0 +$$

$$+\frac{\frac{a_0}{2}(\overline{H}^2-\overline{H}_0^2)+\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\left\{b_q(\overline{H}-\overline{H}_0)-\frac{1}{q}\left[a_q(\cos q\,\overline{H}-\cos q\,\overline{H}_0)+b_q(\sin q\,\overline{H}-\sin q\,\overline{H}_0)\right]\right\}}{\frac{a_0}{2}(1-\overline{H}_0^2)+\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\left\{b_q(1-\overline{H}_0)-\frac{1}{q}\left[a_q(\cos q-\cos q\,\overline{H}_0)+b_q(\sin q-\sin q\,\overline{H}_0)\right]\right\}}\log\rho_c, \tag{102}$$

iar debitul are expresia

$$Q = 2\pi\frac{\frac{a_0}{2}(1-\overline{H}_0^2)+\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\left\{b_q(1-\overline{H}_0)-\frac{1}{q}\left[a_q(\cos q-\cos q\,\overline{H}_0)+b_q(\sin q-\sin q\,\overline{H}_0)\right]\right\}}{\log\frac{\rho_c}{\rho_0}}. \tag{103}$$

4. *Cazul general al mișcării staționare. O soluție aproximativă.* Dificultățile legate de rezolvarea ecuației (23), atunci cînd scurgerea lichidului nu se încadrează într-una din cele două categorii discutate mai sus, ne conduc la ideea de a găsi un procedeu de soluționare aproximativă. Vom arăta astfel că, dacă facem uz de anumite ipoteze simplificatoare, ecuația (23) poate fi liniarizată. În acest scop, vom observa că, deoarece $\overline{\varkappa}$ este funcție numai de $\overline{H}$, este posibil să facem schimbarea de funcție

$$\overline{\Phi} = \int_0^{\overline{H}} \overline{\varkappa}(\overline{H})\, d\overline{H}. \tag{104}$$

Presupunem că funcția $\overline{\varkappa}(\overline{H})$ este continuă în intervalul închis $(0, \overline{H})$. Se știe că în acest caz derivata funcției $\overline{\Phi}$ în raport cu $\overline{H}$ este $\overline{\varkappa}(\overline{H})$.

Din (104) obținem deci succesiv

$$\frac{\partial\overline{H}}{\partial\xi} = \frac{1}{\overline{\varkappa}}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\overline{H}}{\partial\eta} = \frac{1}{\overline{\varkappa}}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\eta} \tag{105}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\xi^2} &= \frac{1}{\overline{\varkappa}}\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\overline{\varkappa}^3}\frac{d\overline{\varkappa}}{d\overline{H}}\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\xi}\right)^2, \\ \frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\eta^2} &= \frac{1}{\overline{\varkappa}}\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\overline{\varkappa}^3}\frac{d\overline{\varkappa}}{d\overline{H}}\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\eta}\right)^2. \end{aligned} \tag{106}$$

După ce înlocuim aceste rezultate în ecuația (23) găsim

$$\bar{\varkappa}^2\left(\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\eta^2}\right)+\left(1-\frac{d\bar{\varkappa}}{d\bar{H}}\right)\left[\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}\right)^2\right]=0. \tag{107}$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu $\bar{k}_{fm}(\bar{H})$ valoarea medie (adimensională) a coeficientului de filtrare corespunzătoare unui anumit $\bar{H}$, avem

$$\bar{k}_{fm}(\bar{H})=\frac{\bar{g}(\bar{H})}{\bar{H}} \tag{108}$$

și

$$\bar{\varkappa}(\bar{H})=\frac{\bar{k}_{fm}(\bar{H})}{\bar{k}_f(\bar{H})}\bar{H}. \tag{109}$$

Presupunînd acum că variația coeficientului de filtrare este destul de redusă, astfel încît diferența dintre $\bar{k}_{fm}(\bar{H})$ și $\bar{k}_f(\bar{H})$ să fie mică, putem pune

$$\bar{\varkappa}\approx\bar{H} \tag{110}$$

și ecuația (107) devine

$$\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial\eta^2}=0. \tag{111}$$

Aproximația de a înlocui coeficientul de filtrare cu valoarea sa medie o facem numai pentru calculul derivatei $\frac{d\bar{\varkappa}}{d\bar{H}}$, în scopul de a obține o ecuație liniarizată. În restul calculelor, vom considera valorile efective ale coeficientului de filtrare. Rezultatele vor fi afectate de aproximația introdusă însă într-o măsură suficient de mică dacă variația coeficientului de filtrare nu este prea pronunțată.

În principiu, problema se poate rezolva destul de ușor dacă legea de variație a coeficientului de filtrare este dată. Într-adevăr, din (104) rezultă în acest caz legătura dintre funcțiile $\bar{\Phi}$ și $\bar{H}$, iar dacă sînt cunoscute condițiile la limită pentru $\bar{H}$, pot fi stabilite și acelea pentru $\bar{\Phi}$, astfel că soluția ecuației (111) este determinată pentru fiecare caz în parte. După ce s-a găsit funcția $\bar{\Phi}$, tot din (104) se obține și funcția $\bar{H}$, adică forma suprafeței libere a lichidului.

Componentele orizontale ale vitezei de filtrare se calculează la rîndul lor cu ajutorul formulelor

$$\bar{v}_\xi=-\bar{k}_f\frac{\partial\bar{H}}{\partial\xi}=-\bar{k}_f\frac{d\bar{H}}{d\bar{\Phi}}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi}=-\frac{\bar{k}_f}{\bar{\varkappa}}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi} \tag{112}$$

și

$$\bar{v}_\eta=-\bar{k}_f\frac{\partial\bar{H}}{\partial\eta}=-\bar{k}_f\frac{d\bar{H}}{d\bar{\Phi}}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}=-\frac{\bar{k}_f}{\bar{\varkappa}}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}, \tag{113}$$

la a căror stabilire s-a ținut seama de (104). Deoarece $\bar{\varkappa}$ este funcție de $\overline{\Phi}$ prin intermediul lui $\overline{H}$, valorile componentelor orizontale rezultă dacă se cunoaște funcția $\overline{\Phi}$. În ceea ce privește componenta verticală a vitezei de filtrare, aceasta are o formă mai complicată, care se obține din (25) cu ajutorul relațiilor (106). Găsim astfel

$$\bar{v}_\zeta = \left(\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \eta^2}\right) \bar{g}(\zeta) = \frac{1}{\bar{\varkappa}} \left\{\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\bar{\varkappa}} \frac{d\bar{\varkappa}}{d\overline{H}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta}\right)^2\right]\right\} \bar{g}(\zeta). \tag{114}$$

Legea de variație a coeficientului de filtrare pe verticală poate fi oarecare, cu condiția să se respecte condiția de continuitate amintită mai înainte pentru funcția $\bar{\varkappa}(\overline{H})$.

Pentru a obține un criteriu de apreciere a gradului de exactitate al soluțiilor aproximative pe care le preconizăm, vom aplica ecuația liniarizată (111) la studiul problemei de mișcare plană tratată anterior pe o cale riguroasă. În felul acesta, prin comparare cu rezultatele date de soluția exactă, vom avea indicații asupra erorii comise prin introducerea metodei aproximative de rezolvare.

4.1. *Aplicație la scurgerea plană.* Vom relua unul singur dintre cazurile particulare tratate la punctul 2.1 și anume acela în care coeficientul de filtrare este dat de (64). Deoarece funcția $\bar{\varkappa}(\overline{H})$ are expresia

$$\bar{\varkappa} = \frac{\frac{1-b}{2}\overline{H}^2 + b\overline{H}}{(1-b)\overline{H} + b}, \tag{115}$$

din (104) obținem cu ușurință

$$\overline{\Phi} = \left(\frac{\overline{H}}{2} + \frac{b}{1-b}\right)\frac{\overline{H}}{2} - \frac{b^2}{2(1-b)^2} \log\left(\frac{1-b}{b}\overline{H} + 1\right), \tag{116}$$

relația dintre $\overline{\Phi}$ și $\overline{H}$ fiind deci destul de complicată.

Alegînd ca și mai înainte $b = 0{,}75$, am calculat cu ajutorul relației (116) pe $\overline{\Phi}$ în funcție de $\overline{H}$. Prin introducerea valorilor adimensionale, calculele au fost ușurate în sensul că s-a precizat domeniul de variație al lui $\overline{H}$ între 0 și 1. Rezultatele sînt trecute în tabela 5, iar în figura 2 am trasat curba de variație a lui $\overline{\Phi}$ în funcție de $\overline{H}$, utilizînd datele din această tabelă.

Problema fiind plană, ecuația (111) devine

$$\frac{d^2 \overline{\Phi}}{d\xi^2} = 0 \tag{117}$$

cu condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad \overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1; \quad \xi = \xi_1, \quad \overline{\Phi} = \overline{\Phi}_2 \tag{118}$$

care rezultă imediat din cele corespunzătoare pentru $\overline{H}$ date de relațiile (30).

Soluția ecuației (117) are prin urmare forma

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1 - \frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\xi \quad (119)$$

Tabela 5

$\overline{H}$	$\overline{\Phi}$
0	0
0,1	0,00494
0,2	0,01817
0,3	0,04360
0,4	0,07682
0,5	0,11756
0,6	0,16956
0,7	0,22876
0,8	0,29746
0,9	0,37188
1	0,45544

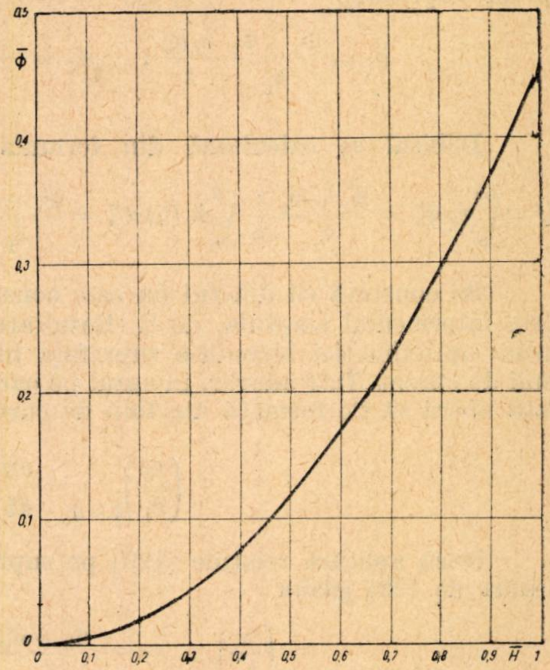


Fig. 2

și dacă eliminăm pe $\overline{\Phi}$ între această relație și (116) putem calcula pe $\overline{H}$ în funcție de ξ, determinînd astfel forma suprafeței libere. Acest calcul este relativ dificil deoarece comportă rezolvarea unei ecuații transcendente ; mai simplu este să folosim datele numerice din tabela 5 și apoi din (119) să găsim valorile corespunzătoare ale lui ξ. Dacă luăm, pentru a putea compara rezultatele, tot $\xi_1 = 0,5$, $\overline{H}_1 = 0,8$, $\overline{H}_2 = 0,4$ din tabela 5 obținem $\overline{\Phi}_1 = 0,29746$ și $\overline{\Phi}_2 = 0,07682$ astfel că avem din (119)

$$\xi = 0,67408 - 2,26613\,\overline{\Phi}.$$

În tabela 6, sînt date valorile calculate cu această relație în comparație cu cele obținute în cadrul soluției exacte extrase din tabela 3, pe care le-am notat de data aceasta cu ξ_e. Se observă că diferențele sînt destul

Tabela 6

$\overline{H}$	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
ξ	0	0,15568	0,28983	0,40767	0,5
ξ_e	0	0,15929	0,29531	0,40866	0,5

de mici, astfel că aproximaţia nu afectează decît în măsură redusă forma suprafeţei libere.

Componentele vitezei de filtrare rezultă din relaţiile (112) şi (114) şi au expresiile

$$\bar{v}_\xi = \frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\frac{\bar{k}_f(\zeta)}{\bar{\varkappa}}, \qquad \bar{v}_\zeta = -\left(\frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\right)^2 \frac{d\bar{\varkappa}}{d\overline{H}}\,\frac{\bar{g}(\zeta)}{\bar{\varkappa}^3}. \tag{120}$$

Debitul se calculează din formula

$$\overline{Q} = \int_0^{\overline{H}} \bar{v}_\xi\, d\zeta = \frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\frac{1}{\bar{\varkappa}}\int_0^{\overline{H}} \bar{k}_f(\zeta)\, d\zeta = \frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\frac{\bar{g}(\overline{H})}{\bar{\varkappa}(\overline{H})} = \frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\bar{k}_f(\overline{H}). \tag{121}$$

Se constată că debitul nu este constant deoarece depinde de $\overline{H}$ şi prin intermediul acestuia, de ξ. Rezultatul se explică prin faptul că în urma aproximaţiei introduse suprafaţa liberă nu mai este formată din linii de curent. Într-adevăr, în cazul pe care îl studiem, condiţia ca suprafaţa liberă să fie formată din linii de curent este

$$\left(\frac{\bar{v}_\zeta}{\bar{v}_\xi}\right)_{\zeta=\overline{H}} = \frac{d\overline{H}}{d\xi}. \tag{122}$$

Dacă aplicăm relaţiile (120) pe suprafaţa liberă ($\zeta = \overline{H}$) şi ţinem seama de (22) găsim

$$\left(\frac{\bar{v}_\zeta}{\bar{v}_\xi}\right)_{\zeta=\overline{H}} = -\,\frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\frac{1}{\bar{\varkappa}}\,\frac{d\bar{\varkappa}}{d\overline{H}}, \tag{123}$$

în timp ce din (104) şi (119) rezultă

$$\frac{d\overline{H}}{d\xi} = \frac{1}{\bar{\varkappa}}\,\frac{d\overline{\Phi}}{d\xi} = -\,\frac{\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2}{\xi_1}\,\frac{1}{\bar{\varkappa}}. \tag{124}$$

Aşadar, relaţia (122) nu este satisfăcută decît dacă punem $\frac{d\bar{\varkappa}}{d\overline{H}} = 1$, ceea ce reprezintă tocmai aproximaţia pe care am utilizat-o în rezolvarea problemei.

Dacă ţinem seama de formula (64), din (121) rezultă că debitul scade o dată cu $\overline{H}$. În cazul de care ne ocupăm, din (22) şi (64) obţinem însă

$$\frac{d\bar{\varkappa}}{d\overline{H}} = 1 - \frac{(1-b)\left(\frac{1-b}{2}\,\overline{H}^2 + b\,\overline{H}\right)}{[(1-b)\,\overline{H} + b]^2} \tag{125}$$

ceea ce înseamnează că $\left(\frac{\bar{v}_\zeta}{\bar{v}_\xi}\right)_{\zeta=\overline{H}} < \frac{d\overline{H}}{d\xi}$. Viteza are deci o componentă normală pe suprafaţa liberă şi îndreptată către exterior. Ajungem astfel şi pe această cale la concluzia că debitul scade o dată cu $\bar{H}$. Dacă luăm valoarea acestuia în secțiunea de intrare ($\xi = 0$)

$$\bar{Q}_i = \frac{\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2}{\xi_1} \bar{k}_f (\bar{H}_1) \tag{126}$$

şi introducem în formulă valorile numerice indicate mai înainte, găsim $\bar{Q}_i = 0{,}41922$. Față de valoarea dată de soluția exactă, eroarea este de 5,51% în plus. Remarcăm însă că dacă luăm şi debitul în secțiunea de ieşire ($\xi = \xi_1$)

$$\bar{Q}_e = \frac{\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2}{\xi_1} \bar{k}_f (\bar{H}_2), \tag{127}$$

obținem, cu aceleaşi date numerice, $\bar{Q}_e = 0{,}37509$. Media aritmetică a acestor două valori ale debitului, $\bar{Q}_m = 0{,}39715$ coincide aproape perfect cu rezultatul obținut în cadrul soluției exacte. Nu sîntem în măsură să arătăm dacă este vorba de o concluzie cu caracter general, dar menționăm că am mai verificat această constatare şi cu ajutorul altor exemple numerice, atît pentru mişcarea plană cît şi pentru aceea axial-simetrică. Într-adevăr, în afară de calculul comparativ pe care l-am prezentat mai sus, am executat şi o aplicație a metodei aproximative de rezolvare la scurgerea axial-simetrică spre un puț perfect, considerînd tot variația liniară (64) a coeficientului de filtrare. Nu am socotit că este necesar să dăm aici rezultatele obținute în acest ultim caz, deoarece concluziile sînt identice cu acelea care se degajă din exemplul tratat mai înainte pentru mişcarea plană.

Prin urmare, dacă variația coeficientului de filtrare nu este prea pronunțată, calculul comparativ expus arată că metoda aproximativă de rezolvare poate fi aplicată, erorile care afectează rezultatele fiind situate între limite acceptabile. Caracterul de generalitate al acestor afirmații nu se întemeiază pe rezultatele obținute într-un număr redus de exemple numerice tratate ci pe faptul că toate acestea conduc la constatarea că eroarea introdusă prin rezolvarea aproximativă este proporțională cu valoarea derivatei $\frac{d\bar{\varkappa}}{d\bar{H}}$.

Nu am socotit necesar să dăm şi un exemplu de aplicare a procedeului aproximativ la rezolvarea unei probleme de scurgere tridimensională deoarece fiind vorba de determinarea unei funcții armonice utilizăm metode şi soluții binecunoscute. Singurul element nou este determinarea relației între funcțiile $\bar{\Phi}$ şi $\bar{H}$ care se face aşa cum am arătat mai sus.

5. *Observații finale și concluzii.* Considerațiile precedente, prin care s-a ajuns la posibilitatea rezolvării unei categorii de probleme de scurgere prin medii poroase neomogene, au ca punct de plecare o generalizare a unei metode de studiu utilizată pentru cercetarea problemelor analoage care apar în cazul mediilor poroase omogene. De la început deci, procedeul dezvoltat face uz de aproximația referitoare la suprafața liberă care stă la baza deducerii ecuației lui Boussinesq. Forma suprafeței libere rezultată din calcule se va depărta simțitor de aceea reală, mai ales datorită faptului

că nu se ține seama de existența suprafețelor de alunecare. Pentru o determinare mai precisă ar trebui să se extindă la studiul scurgerii prin medii poroase neomogene metodele riguroase existente pentru cazul în care coeficientul de filtrare este constant. Este însă de așteptat ca dificultățile de calcul să fie destul de mari. În ceea ce privește determinarea debitului, care este în fond aspectul cel mai important al problemei, s-a demonstrat pentru mediile poroase omogene că formula lui Dupuit este riguroasă [1] așa că este de așteptat ca și rezultatele noastre să fie apropiate de realitate.

Metoda aproximativă propusă pentru scurgerile tridimensionale este desigur limitată în aplicațiile ei deoarece presupune o variație redusă a coeficientului de filtrare. Totuși prin faptul că se face posibilă introducerea în calcule a acestor variații, metoda aduce un element nou care poate conduce la o precizie mai mare a calculelor.

Primită la redacție la 8 august 1959

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

РЕЗЮМЕ

В этой работе исследуется течение жидкости со свободной поверхностью через пористую среду, коэффициент фильтрации которой изменяется по вертикали. Прежде всего дается обобщение уравнения Буссинеска для этого случая и затем рассматривается случай стационарного течения. Для плоского течения и осесимметричного течения даются точные решения. Затем указывается вид этих решений для различных законов изменения коэффициента фильтрации, причем даются и примеры численных расчетов. Далее рассматривается трехмерное движение, вводится приближение действительное в случае незначительного изменения коэффициента фильтрации, линеаризируя таким образом уравнение задачи. Приближенное решение сопоставляется с точным решением при помощи простого примера плоского движения.

CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉCOULEMENT À SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE À TRAVERS UN MILIEU POREUX NON HOMOGÈNE

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est d'indiquer une méthode pour l'étude de l'écoulement à surface libre dans un milieu poreux, dont le coefficient de filtration est variable suivant la direction verticale. On établit, d'abord,

une généralisation de l'équation de Boussinesq dans ce cas et après on passe à l'étude de l'écoulement stationnaire. En ce qui concerne les écoulements plan et à symétrie axiale, on donne les solutions exactes. On présente, ensuite, les différentes formes que prennent ces solutions pour certaines lois assez générales de variation du coefficient de filtration, accompagnées de calculs numériques. Dans le cas de l'écoulement à trois dimensions, une approximation, valable dans le cas où le coefficient de filtration varie assez peu, conduit à une équation linéaire pour le problème considéré. Cette solution approximative est comparée ensuite avec la solution exacte à l'aide d'un exemple simple tiré de l'étude de l'écoulement plan.

BIBLIOGRAFIE

1. И. А. ЧАРНЫЙ, *Строгое доказательство формулы Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высасывания.* Доклады АН СССР, **LXXIX**, *6*, (1951).
2. Н. К. ГИРИНСКИЙ, *Комплексный потенциал потока со свободной поверхностью в пласте относительно малой мощности при* $k = f(z)$. Доклады АН СССР, *5*, 337 (1946).
3. П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *Теория движения грунтовых вод.* ГТТЛ, Москва, 1952, 463, 479, 558, 604.

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

BAZELE TEORETICE ALE PRELUCRĂRII CORECTE A MELCILOR ȘI A ROȚILOR MELCATE

DE

D. MAROS [1]) și A. CSULAK [1])

Una dintre problemele actuale ale industriei noastre prelucrătoare de mașini, care necesită o mai accentuată cercetare teoretică, este modul de prelucrare a melcilor și a roților melcate, astfel ca acestea să formeze cuple conjugate la funcționare. De multe ori acestei probleme nu i se dă importanța cuvenită, ceea ce duce la rebuturi sau, în cel mai bun caz, la angrenaje cu randament foarte scăzut.

Problema se va analiza în cazul celor două tipuri de melci cilindrici utilizați în practică, adică cu suprafața flancurilor riglată și neriglată.

1. *Angrenaje compuse din melci cu suprafața flancurilor riglată.*

a. *Generarea suprafețelor elicoidale riglate și clasificarea acestora*

Fie dat un cilindru director de rază r_d cu axa orizontală și o elice directoare E cu pasul constant înfășurată pe acest cilindru (fig. 1). O dreaptă D sprijinindu-se în continuu pe elicea E se deplasează astfel în spațiu încît înclinația ei γ în raport cu axa cilindrului să nu se schimbe. Dreapta generează o suprafață riglată elicoidală deschisă. Alegînd un sistem drept de axe de coordonate, astfel ca axa oy să coincidă cu axa cilindrului, parametrul mișcării de șurub al unui punct de pe elicea E se va scrie

$$h = \frac{dy}{d\varphi}. \tag{1}$$

Acesta este pozitiv pentru elicea dreaptă și negativ pentru cea stîngă.

Dreapta D poate avea diferite înclinații în raport cu axa oy. Astfel poate coincide cu tangenta T la elice, poate avea același sens de înclinație ca tangenta, sau contrariu, ocupînd poziția D_1 în figură.

---

[1]) Institutul politehnic — Cluj.

Dacă înclinaţia ei este spre dreapta, convenim s-o notăm cu semnul + (plus), în caz contrar cu – (minus).

Notînd cu σ înclinaţia tangentei T faţă de axa oy, din triunghiul haşurat din figură se poate deduce

$$r_d \frac{d\varphi}{dy} = \mathrm{tg}\sigma. \tag{2}$$

Comparînd-o cu (1), se obţine

$$r_d = h \cdot \mathrm{tg}\sigma. \tag{3}$$

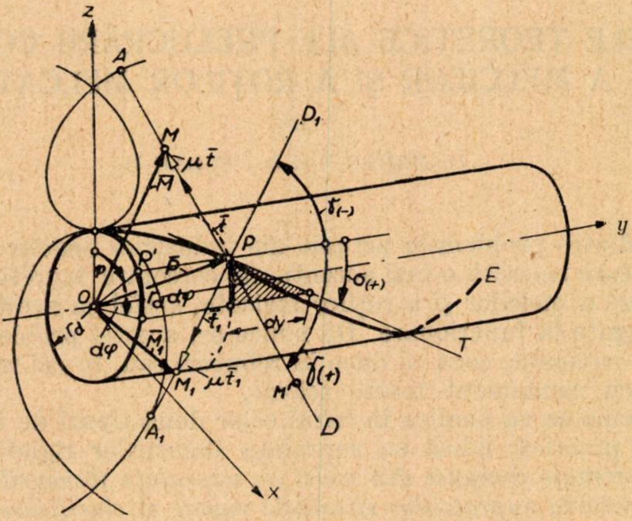

z
A
M
$\mu\bar{t}$
$\bar{M}$
D_1
$\gamma_{(-)}$
$\bar{t}$
P
y
P'
$\bar{P}$
φ
O
$r_d\,d\varphi$
$\sigma_{(+)}$
E
r_d
$d\varphi$
$\bar{M}_1$
$\bar{t}_1$
dy
T
M_1
$\mu\bar{t}_1$
M'
$\gamma_{(+)}$
A_1
D
x

Fig. 1

Notînd cu $\bar{P}$ vectorul de poziţie funcţie de φ al punctului de contact dintre dreapta D şi elicea E şi cu $\bar{t}$ vectorul unitar de pe dreapta D, astfel orientat, încît înmulţit cu valorile pozitive ale parametrului variabil μ, să indice puncte de pe flancul drept ca M, iar cu cele negative puncte de pe flancul stîng al spirei melcului ca M', ecuaţia vectorială a suprafeţei se va scrie

$$\bar{M}\ (\varphi, \mu) = \bar{P}\ (\varphi) + \mu\, \bar{t}\ (\varphi), \tag{4}$$

unde

$$\bar{P}\ (\varphi) = \bar{i}.r_d.\sin\varphi + \bar{j}h.\ \varphi + \bar{k}.r_d.\ \cos\varphi \tag{5}$$

şi

$$\bar{t}\,(\varphi) = \bar{i}_0 - \sin\gamma_0 \cdot \cos\varphi + \bar{j}_0 - \cos\gamma + \bar{k} \cdot \sin\gamma \cdot \sin\varphi \tag{6}$$

relație dedusă folosind proiecția vectorului unitar $\bar{t}$ pe planul *zox* (fig. 2). Înlocuind (5) şi (6) în (4), după ordonare se obține

$$\overline{M}(\varphi, \mu) = \bar{i}(r_d \sin\varphi - \mu.\sin\gamma\cdot\cos\varphi) + \bar{j}(h\varphi - \mu\cos\gamma) + \bar{k}(r_d\cdot$$
$$\cdot\cos\varphi + \mu\sin\gamma\cdot\sin\varphi), \tag{7}$$

sau în forma scalară parametrică

$$x = r_d\cdot\sin\varphi - \mu\cdot\sin\gamma\cdot\cos\varphi, \tag{8}$$
$$y = h\varphi - \mu\cdot\cos\gamma, \tag{9}$$
$$z = r_d\cdot\cos\varphi + \mu\cdot\sin\gamma\cdot\sin\varphi. \tag{10}$$

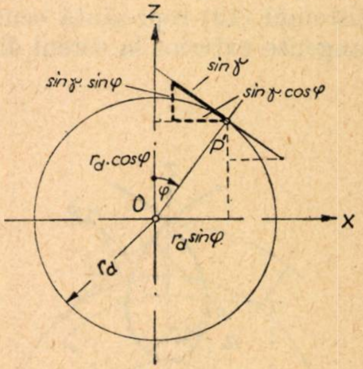


Fig. 2

Dacă înclinația dreptei D este negativă, ca în poziția D_1, adică este diferită de cea a elicei E, pentru orientarea vectorului unitar $\bar{t}_1$ după aceleaşi criterii ca mai sus, ecuația suprafeței elicoidale $\overline{M}_1(\varphi, \mu)$ se va putea deduce din relația (7), considerînd γ cu semnul — (minus).

Relația (7) reprezintă prin urmare ecuația generală a suprafeței elicoidale riglate din care se pot deduce toate variantele în funcție de semnele lui h, μ şi γ, ca în tabela 1.

Tabela 1

Suprafața elicoidală	h	Flancul	μ	Sensul de înclinație al elicei şi al dreptei generatoare	γ
Dreaptă	+	drept	+	coincide	+
				contrar	−
		sting	−	coincide	+
				contrar	−
Stîngă	−	drept	+	coincide	−
				contrar	+
		sting	−	coincide	−
				contrar	+

Se va determina în continuare ecuația curbei obținute prin intersectarea suprafeței elicoidale cu planul frontal $y = 0$. Din relația (9) se deduce în acest caz

$$\mu = \frac{h\varphi}{\cos\gamma}. \tag{11}$$

Înlocuind în (8) şi (10) se obţine

$$\begin{aligned} x &= r_d \sin\varphi - h\varphi\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\varphi, \\ z &= r_d \cos\varphi + h\varphi\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\sin\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

unde se notează

$$h\operatorname{tg}\gamma = \text{const.} = r_b. \tag{13}$$

Sistemul (12) reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei evolvente buclate tangente exterior la cercul director cu raza r_d descrisă de punctul A legat de o dreaptă d, cînd aceasta se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc de bază cu raza r_b determinat de relaţia (13) (fig. 3). Tangenta dusă din A la cercul director, mereu paralelă cu d coincide cu proiecţia dreptei D pe planul frontal $y = 0$.

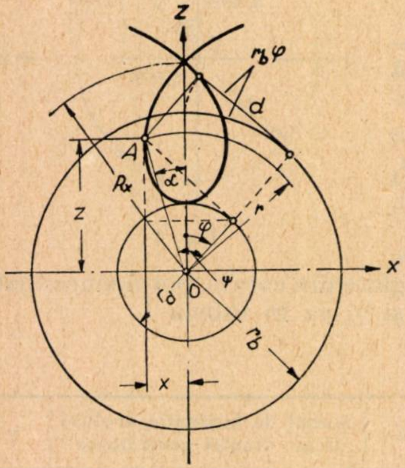


Fig. 3

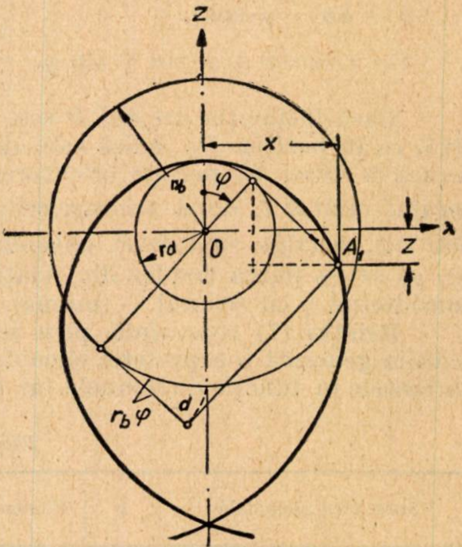


Fig. 4

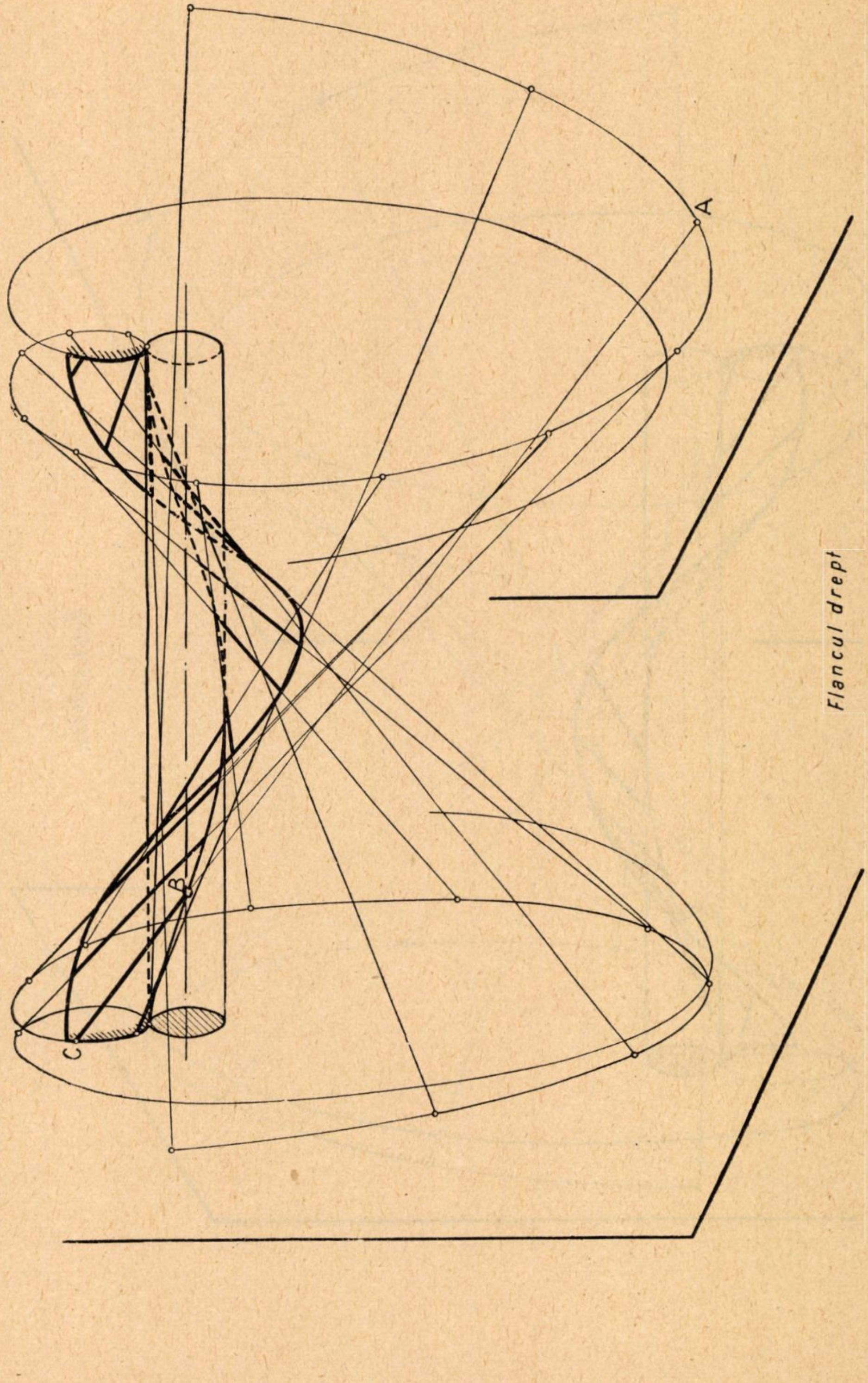
Dacă γ este negativ, adică în cazul suprafeţei elicoidale generate de dreapta D_1, relaţiile (12) vor deveni

$$\begin{aligned} x &= r_d\cdot\sin\varphi + r_b\cdot\varphi\cdot\cos\varphi, \\ z &= r_d\cdot\cos\varphi - r_b\cdot\varphi\cdot\sin\varphi. \end{aligned} \tag{14}$$

Aceasta reprezintă ecuaţia parametrică a unei evolvente buclate tangente interior la cercul director, descris de punctul A_1 legat de dreapta d (fig. 4).

În cazul elicoidului stîng se pot deduce relaţii asemănătoare.

Elicoizii reprezentaţi în secţiunea frontală ca în figura 3 şi 4, poartă denumirea de *elicoizi convoluţi înclinaţi* (fig. 5 şi 6).



Flancul drept

Fig. 5 *a*

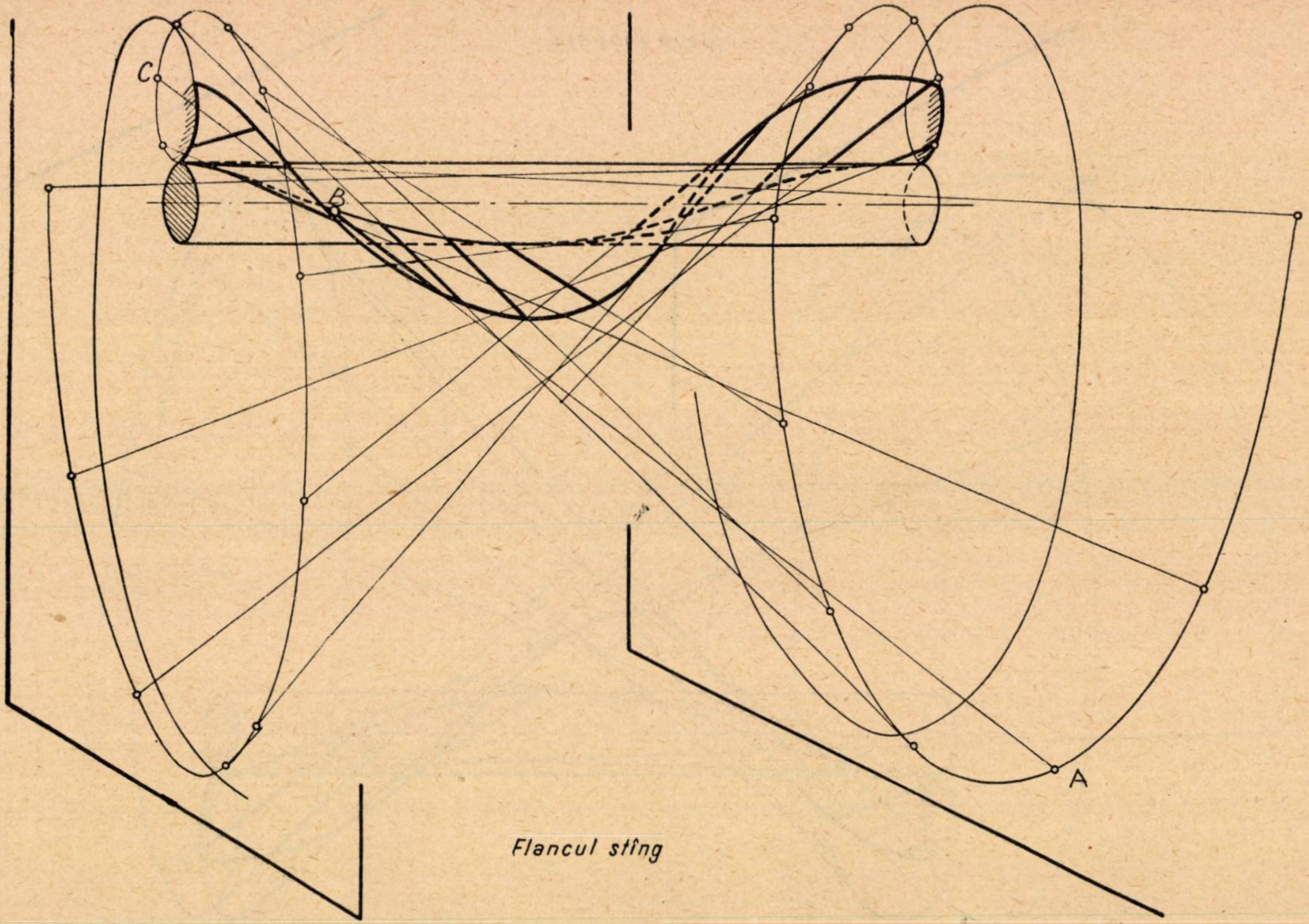

C
B
A
Flancul stîng

Fig. 5 b

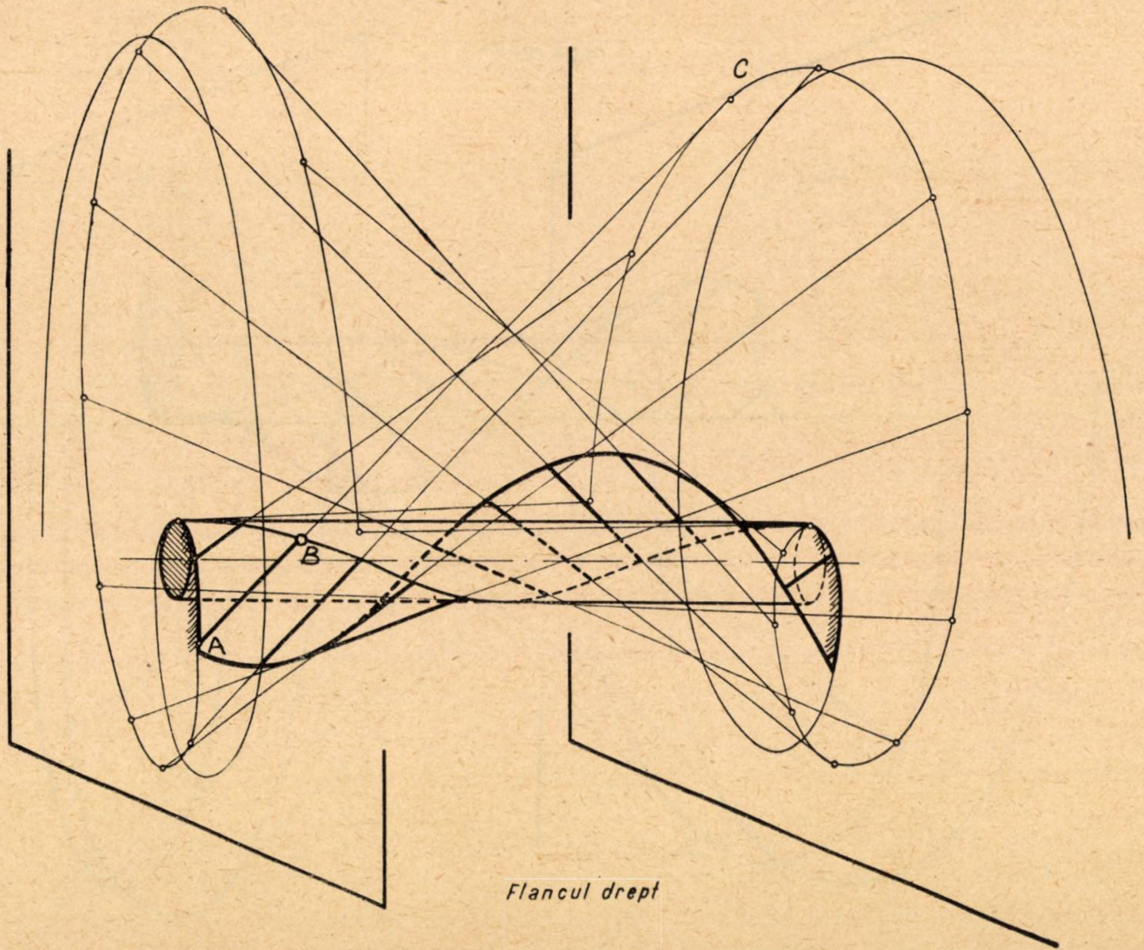
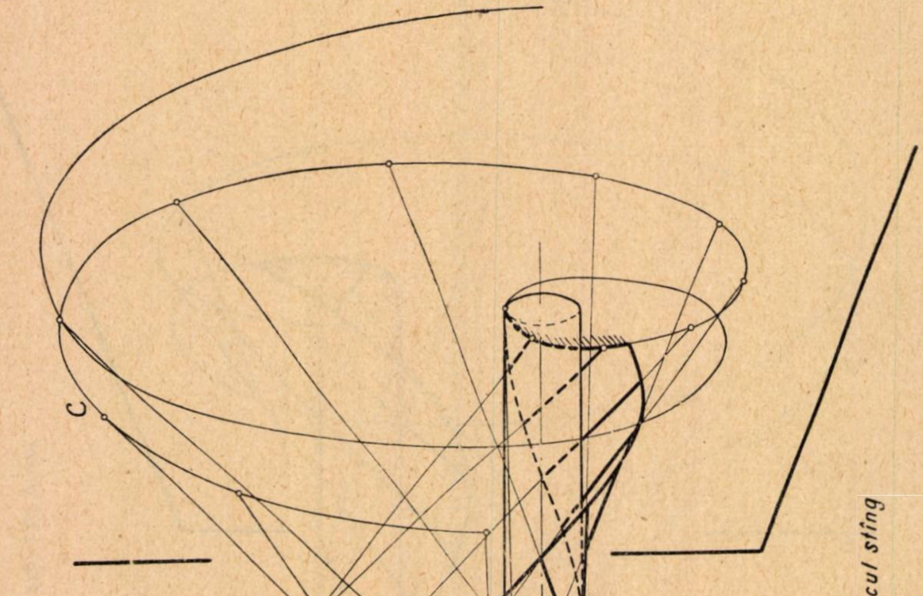

C
B
A
Flancul drept

Fig. 6 a



Flancul sting

Fig. 6 b

În concluzie, *dacă sensurile de înclinație ale elicei directoare și ale dreptei generatoare coincid, în secțiunea frontală a elicoidului convolut se obține o evolventă buclată tangentă exterior la cercul director, în caz contrar evolventa buclată este tangentă interior la cercul director.*

Cînd $\gamma = \frac{\pi}{2}$ elicoidul convolut înclinat devine drept, putîndu-se identifica cu un cilindroid elicoidal (fig. 7). În acest caz din relația (9), pentru $y = 0$ reiese că și $\varphi = 0$, adică evolventa buclată degenerează la o dreaptă tangentă la cercul director. Dacă înclinația dreptei generatoare coincide nu numai ca semn ci și ca mărime cu cea a elicei directoare, adică $\gamma = \sigma$, din relațiile (3) și (13) se pot deduce că $r_d = r_b$, adică punctul A descrie o evolventă normală (fig. 8) avînd ecuația

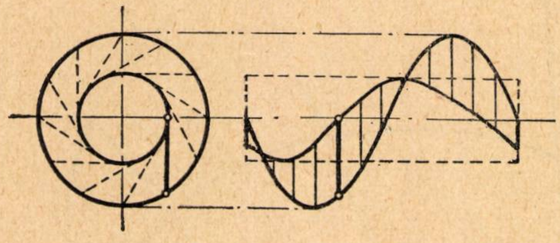


Fig. 7

$$x = r_b(\sin\varphi - \varphi\cdot\cos\varphi),$$
$$z = r_b(\cos\varphi + \varphi\cdot\sin\varphi). \tag{15}$$

Un astfel de elicoid poartă denumirea de *elicoid evolventic* (fig. 9). În sfîrșit, dacă $r_d = 0$ secțiunea frontală va fi dată, după relația (12) de ecuațiile

$$x = -r_b\cdot\varphi\cdot\cos\varphi,$$
$$z = r_b\cdot\varphi\cdot\sin\varphi. \tag{16}$$

Aceasta reprezintă o spirală arhimedică (fig. 10). Elicoidul obținut este o suprafață riglată închisă și poartă denumirea de *elicoid arhimedic înclinat* (fig. 11).

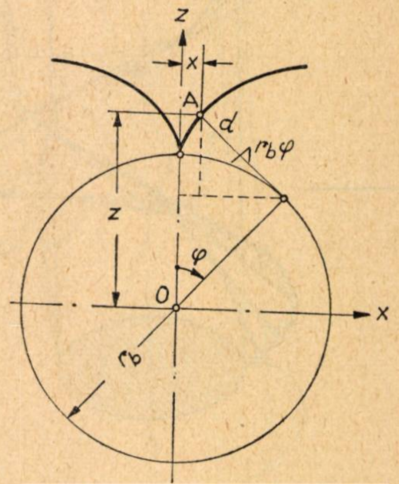
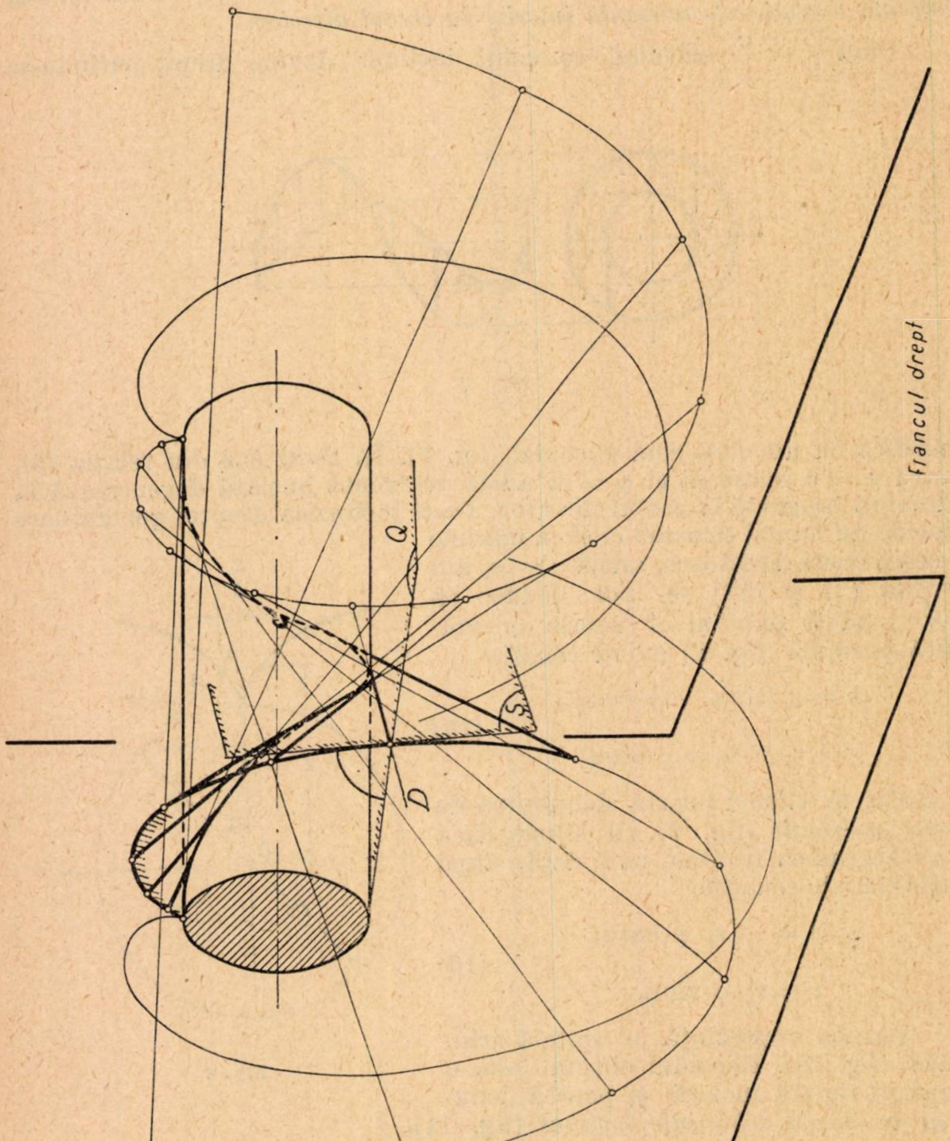


Fig. 8

Dacă $\gamma = \frac{\pi}{2}$ elicoidul arhimedic devine drept și se poate identifica cu conoidul elicoidal (fig. 12).

b. *Condiția desfășurabilității suprafețelor elicoidale riglate*



Q
D
S
flancul drept

Fig. 9

Vectorul $\overline{N}$ normal la suprafața elicoidală în punctul M (fig. 1), va fi determinat de

$$\overline{N} = \frac{\partial \overline{M}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overline{M}}{\partial \mu}. \tag{17}$$

Derivînd vectorul $\overline{M}$ dat de relația (4), (17) devine

$$\overline{N} = \left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi}\right) \times \bar{t} = \left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right) + \mu \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right). \tag{18}$$

Pentru ca vectorul $\overline{N}$ să-și păstreze aceeași direcție în toate punctele situate pe dreapta D, adică, pentru ca de-a lungul lui D să se poată așterne un plan tangent S la suprafața elicoidală, va trebui ca vectorul $\mu\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right)$ din relația (18), variabil de-a lungul lui D să fie mereu paralel cu vectorul $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t}$ fix pentru punctele de pe D.

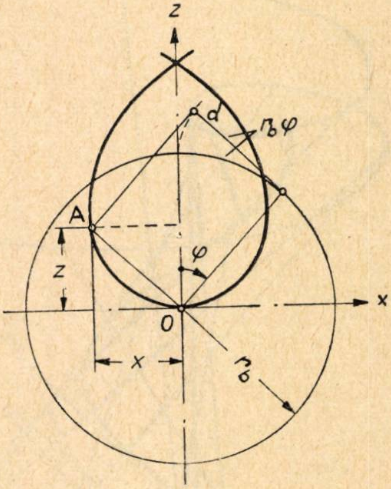


Fig. 10

Condiția de paralelism se va scrie

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right) \times \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right) = 0. \tag{19}$$

Notînd

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t} = \bar{v}_1, \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} = \bar{v}_2 \text{ și } \bar{t} = \bar{v}_3$$

și știind că

$$\bar{v}_1 \times (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3) \cdot \bar{v}_2 - (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_3,$$

relația (18) se va putea dezvolta

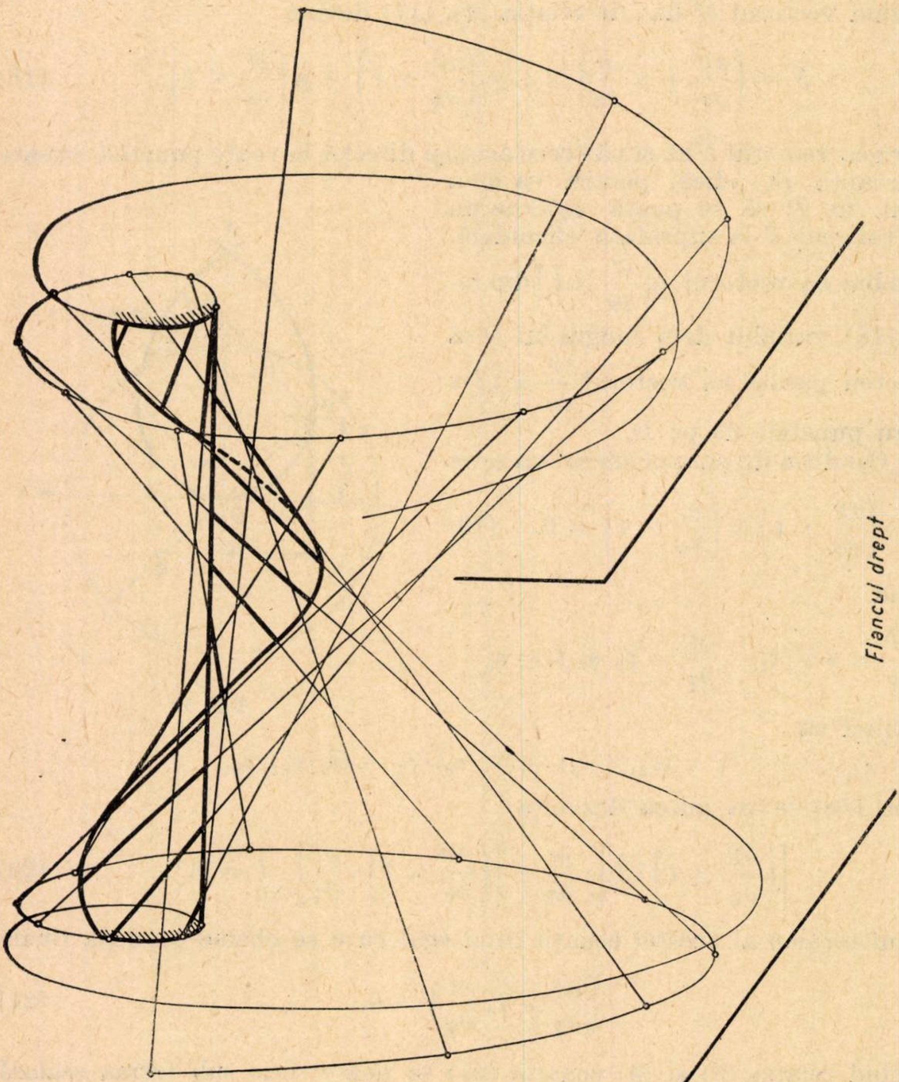
$$\left[\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right) \cdot \bar{t}\right] \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} - \left[\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi} \times \bar{t}\right) \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi}\right] \cdot \bar{t} = 0. \tag{20}$$

Primul termen al acestei ecuații fiind egal cu 0 se obține condiția finală

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial \varphi}, \ \bar{t}, \ \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi}\right) = 0. \tag{21}$$

Folosind relația (5) și (6) ecuația (21) se poate scrie sub forma scalară

$$\begin{vmatrix} r_d \cdot \cos\varphi & h & -r_d \sin\varphi \\ -\sin\gamma \cdot \cos\varphi & -\cos\gamma & \sin\gamma \cdot \sin\varphi \\ \sin\gamma \cdot \cos\varphi & 0 & \sin\gamma \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$



Flancul drept

Fig. 11

Dezvoltînd acest determinant se obține

$$r_d = h\operatorname{tg}\gamma. \tag{23}$$

Comparînd-o cu relația (13) reiese

$$r_d = r_b.$$

Această condiție este îndeplinită însă numai de suprafețele elicoidale evolventice.

În concluzie, dintre suprafețele elicoidale riglate reprezentate prin ecuația (7) *numai cele evolventice sînt desfășurabile.*

Peste aceste suprafețe, de-a lungul generatoarei D se poate așterne un plan tangent ca de exemplu planul S din figura 9. Planul tangent Q la cilindrul de bază, care conține pe D este perpendicular pe S.

De-a lungul lui D se poate așterne pe suprafața elicoidală și o suprafață cilindrică sau conică avînd axa situată în planul Q.

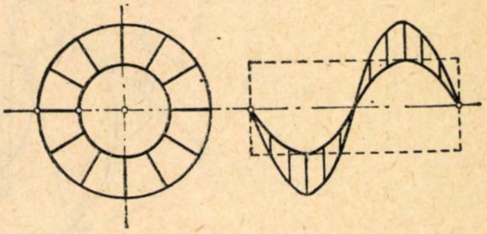


Fig. 12

c. *Realizarea spirei melcului și proprietățile sale*

Pentru a forma spira sau dantura melcului convolut trebuie să se țină seama de faptul că ea trebuie să se găsească în partea hașurată a suprafețelor elicoidale reprezentînd flancul drept și stîng ca în figura 5 și 6.

Acestea împreunate astfel încît elicele lor directoare să coincidă, adică să fie reprezentate de aceeași ecuație ca (7), la semne diferite ale lui μ, nu vor mărgini dantura melcului. Cunoscînd raza R_d a cilindrului de divizare și știind că în secțiunea frontală elicele de divizare ale celor două flancuri antiomoloage consecutive (punctele A și B) sînt decalate între ele cu unghiul $\theta = \frac{2\pi}{2z}$ [1]), unde z este numărul de începuturi, se poate stabili unghiul δ, cu care trebuie rotită spre dreapta suprafața elicoidală reprezentînd flancul stîng din figura 5*b* și 6*b* față de cea reprezentînd flancul drept pentru a cuprinde astfel exact un dinte (început) al melcului.

În cazul din figura 5, dacă $R_d < R_x$, unde R_x este raza punctului dublu al evolventei buclate, în secțiunea frontală ca în figura 13 *a*, unde $z = 1$ se stabilește

$$\delta = \frac{2\pi}{2z} - 2\alpha. \tag{24}$$

Dacă $R_d > R_x$

$$\delta = \frac{2\pi}{2z} + 2\alpha. \tag{25}$$

---

[1]) În ipoteza că lărgimea golului și grosimea plinului măsurate pe cercul de divizare în secțiunea frontală coincid.

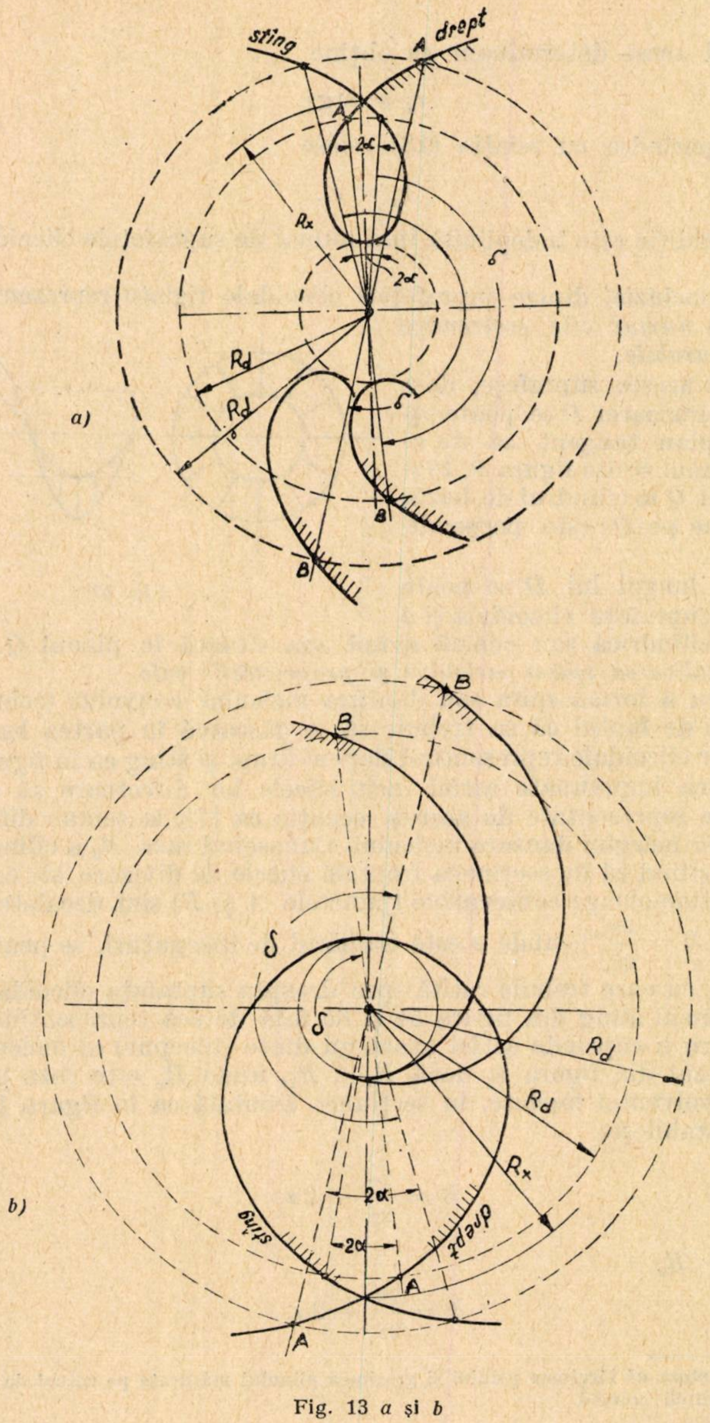

sting
drept
A
A
2α
R_x
δ
2α
R_d
R_d
a)
δ
B
B
B
B
δ
δ
R_d
R_d
R_x
b)
2α
2α
sting
drept
A
A

Fig. 13 *a* şi *b*

Din figura 3, pentru un r oarecare, care poate fi egal cu R_d se poate determina α. Astfel

$$r^2 = r_d^2 + (r_b \cdot \varphi)^2 = r_d^2 + (h \cdot \mathrm{tg} \cdot \gamma \cdot \varphi)^2 ,$$

de unde

$$\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - r_d^2}}{h \cdot \mathrm{tg} \cdot \gamma} . \tag{26}$$

La fel

$$\cos \psi = \frac{r_d}{r} \tag{27}$$

iar

$$\alpha = \psi - \varphi . \tag{28}$$

Cînd punctul A este pe axa oz, atunci se observă că

$$\frac{r_b \cdot \varphi}{r_d} = \mathrm{tg} \varphi . \tag{29}$$

Rezolvînd această ecuație transcendentă pentru φ, se poate determina R_x din

$$R_x = \frac{r_b}{\cos \varphi} . \tag{30}$$

În cazul din figura 6 reprezentat în secțiune frontală în figura 13 *b*, pe baza unui raționament analog se obține pentru rotirea flancului stîng spre dreapta aceeași valoare pentru unghiul δ ca în cazul anterior, adică dat de relațiile (24) și (25).

La formarea danturii melcilor evolventici sau arhimedici din suprafețele elicoidale reprezentate în figurile 9 și 11 problema se judecă analog ca în figura 13 *a*, specificînd că la elicoizii evolventici intervine numai cazul cînd $R_d > R_x$.

Considerînd două flancuri antiomoloage consecutive definite de cele două elice în secțiune cu cilindrul de divizare, precum și elicea medie a acestora (fig. 14), indiferent dacă este vorba de un plin sau gol, se va putea stabili :

Alegînd un punct arbitrar pe elicea medie și ducînd o normală pe axa melcului concurentă cu aceasta, la rotirea uneia dintre suprafețele elicoidale cu 180° în jurul acestei normale ea se va putea suprapune peste cealaltă.

În consecință, orice plan care conține această normală va secționa cele două flancuri după profile simetrice în raport cu normala. În orice altă secțiune, profilele obținute nu vor fi simetrice.

Se consideră că se fixează în spațiu una dintre dreptele generatoare ale unui flanc. După rotirea melcului cu 180° în jurul normalei, această dreaptă se va aștерne perfect peste flancul antiomolog consecutiv, care va ocupa locul flancului anterior de pe care s-a detașat dreapta generatoare.

Se vor analiza, în sfîrșit, cazurile cînd în secțiunea plană conținînd normala de mai sus se obțin profile simetrice drepte.

În cazul melcului arhimedic, deoarece generatoarele intersectează axa, evident că profile simetrice drepte se vor obține în secțiune axială.

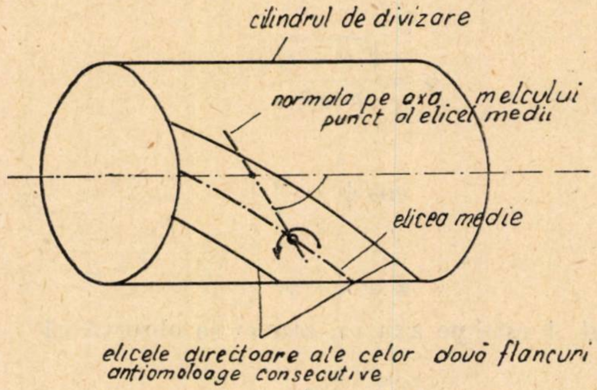

cilindrul de divizare
normala pe axa melcului într-un punct al elicei medii
elicea medie
elicele directoare ale celor două flancuri antiomoloage consecutive

Fig. 14

Ceea ce interesează din punct de vedere tehnologic este obținerea secțiunii cu profile drepte într-un plan normal pe elicea de divizare.

Se va analiza din acest punct de vedere mai întîi cazul din figura 5. Fixînd flancul drept prin generatoarea *CB* (fig. 5 *a*), printr-o rotație și translație convenabilă în jurul și de-a lungul axei melcului, flancul stîng,

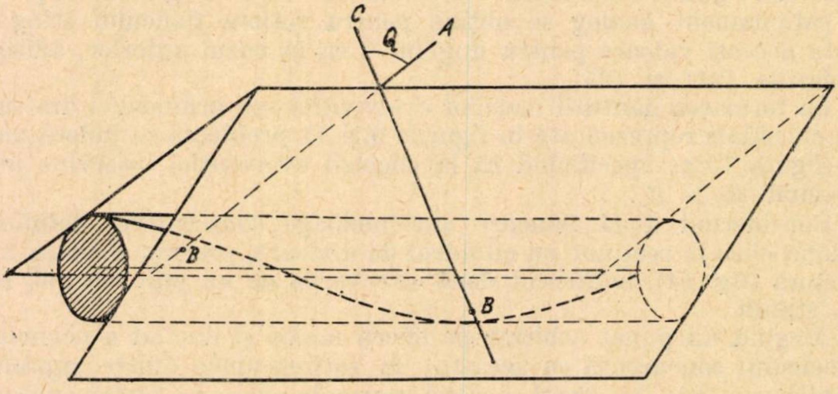


Fig. 15

prin generatoarea sa *BA* (fig. 5 *b*), poate fi dus într-o poziție, încît generatoarele, care inițial erau în prelungire, acum să se intersecteze. Planul *Q* format de cele două generatoare (fig. 15) are același sens de înclinație față de axa melcului ca și elicea directoare, prin urmare nici una dintre elicele obținute prin intersectarea suprafeței elicoidale cu cilindri concentrici cu axa melcului nu va putea să intersecteze ortogonal planul *Q*.

În cazul din figura 6, fixînd flancul stîng prin generatoarea BC şi rotind flancul drept astfel ca AB să intersecteze pe BC, planul Q va avea sensul de înclinaţie faţă de axa melcului contrar ca elicea directoare. În acest caz se va putea găsi deci un cilindru de intersecţie astfel ca elicea rezultantă să intersecteze ortogonal planul Q. Acest cilindru va fi cilindrul de divizare al melcului (fig. 16, 17).

Prin urmare, *în cazul melcului convolut cu secţiunea frontală evolventă buclată, tangentă interior la cercul de divizare, se obţin muchii drepte în secţiunea perpendiculară pe elicea de divizare.* Această elice poate fi elicea medie E_M^g a golului (fig. 16) sau a dintelui E_m^d (fig. 17). Pentru acelaşi cilindru de divizare, dacă în secţiunea normală se consideră aceeaşi grosime de dinte, respectiv lărgime de gol — s — cilindrii directori sînt diferiţi, ceea ce scoate în evidenţă deosebirea fundamentală dintre cele două cazuri. Pentru determinarea razei cilindrului director se va considera figura 18, în care s-a reprodus secţiunea eliptică cu planul Q. Aceasta se va alege astfel, încît să fie înclinat faţă de axa melcului cu unghiul $\gamma_0 = 90° - \sigma_0$ unde σ_0 este unghiul de înclinare a elicei pe cilindrul de divizare.

Ecuaţia elipsei se poate exprima în funcţie de raza r_d şi de parametrul ψ

$$x = r_d \frac{\cos\psi}{\sin\gamma_0}, \tag{31}$$

$$y = r_d \sin\psi. \tag{32}$$

Unghiul tangentei format cu axa x se va putea scrie

$$\mathrm{tg}\lambda = \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\sin\gamma_0 = -\mathrm{ctg}\psi\sin\gamma_0.$$

Cînd tangenta coincide cu BC sau AB din figura 16, se va obţine

$$\mathrm{tg}\lambda = \mathrm{tg}(90° + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha,$$

adică $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\psi \cdot \sin\,\gamma_0$ de unde unghiul ψ corespunzător se va determina din

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\,\alpha\sin\gamma_0. \tag{33}$$

Din figura 18 se poate determina

$$OO' = r_d \sin\psi + r_d \frac{\cos\psi}{\sin\gamma_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = r_d \cos\psi \left(\mathrm{tg}\psi + \frac{1}{\sin\gamma_0\,\mathrm{tg}\alpha}\right).$$

Înlocuind aci valoarea lui $\mathrm{tg}\,\psi$ din (33) şi ţinînd seama că

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\gamma_0}},$$

se obţine

$$r_d = OO' \frac{\mathrm{tg}\alpha\sin\gamma_0}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\gamma_0}}. \tag{34}$$

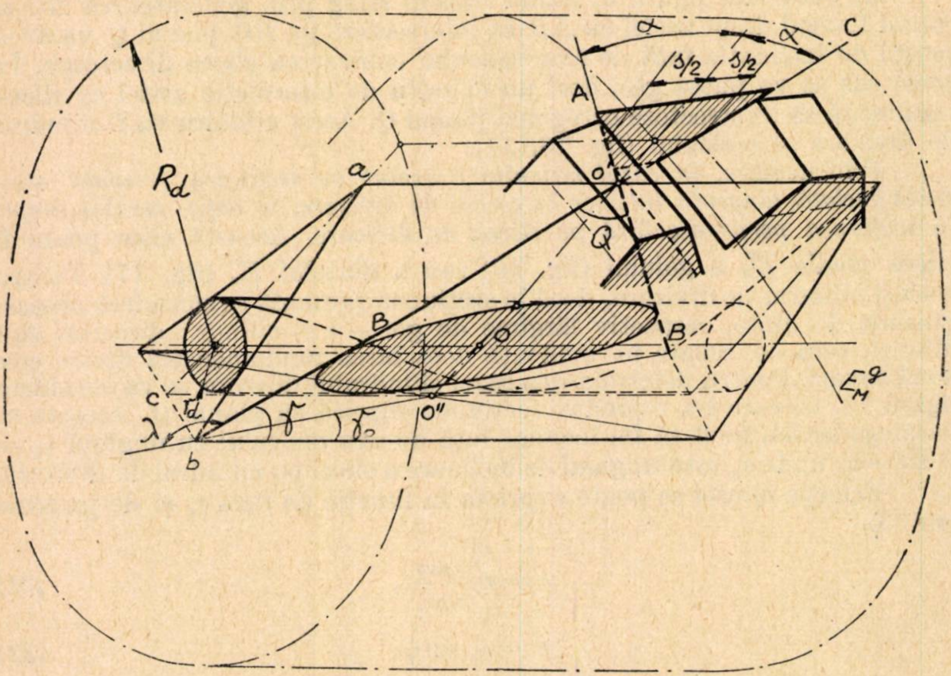

α
α
C
s/2
s/2
A
a
R_d
O'
Q
B
O
B
E_M^g
c
r_d
λ
γ
$γ_o$
O''
b

Fig. 16

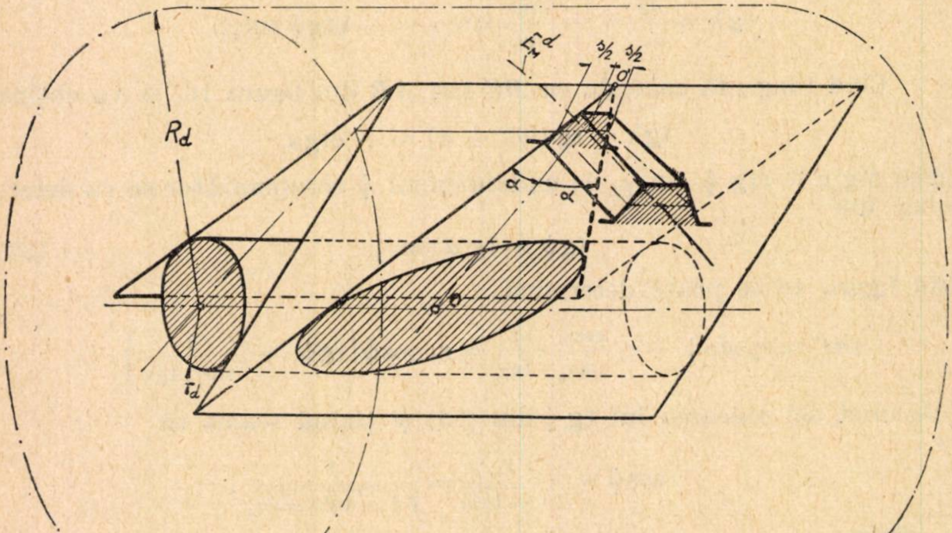

E_M^d
s/2
s/2
O'
R_d
α
α
O
r_d

Fig. 17

Înlocuind valorile lui $OO'=R_d-\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ ca în figura 16 şi $OO'=R_d+$ $+\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ ca în figura 17, se obţin razele cilindrilor directori pentru cele două variante.

Pentru determinarea unghiului γ de înclinaţie a dreptei de generare BC sau BA faţă de axa melcului se va folosi figura 16.

De aici

$$\cos\gamma=\frac{O'a}{O'b}=\frac{O''C}{O'b}=\frac{bO''\cos\gamma_0}{\frac{bO''}{\sin\alpha}}=\cos\gamma_0\cdot\sin\alpha. \tag{35}$$

d. *Prelucrarea corectă a melcului riglat şi a roţii melcate conjugate*

Finisarea melcilor riglaţi se recomandă să se facă cu cuţite avînd muchii aşchietoare drepte. Degroşarea lor poate fi făcută şi prin frezare, lăsîndu-se însă un surplus suficient de material.

Muchia aşchietoare materializează dreapta generatoare D. În acest caz însă mişcarea relativă elicoidală de parametru h este realizată printr-o translaţie a muchiei aşchietoare şi o rotaţie corespunzătoare a piesei.

Pentru poziţia muchiei aşchietoare deasupra axei piesei la cota egală cu raza cilindrului director, pe baza considerentelor din figura 5, pentru melci convoluţi cu secţiunea frontală evolventă buclată tangentă exterior la cercul director, aranjamentul trebuie să fie ca în figura 19 (trasat cu linie întreruptă) adică, planul muchiei de aşchiere şi cu flancul dintelui trebuie să formeze unghi ascuţit $\psi<90°$.

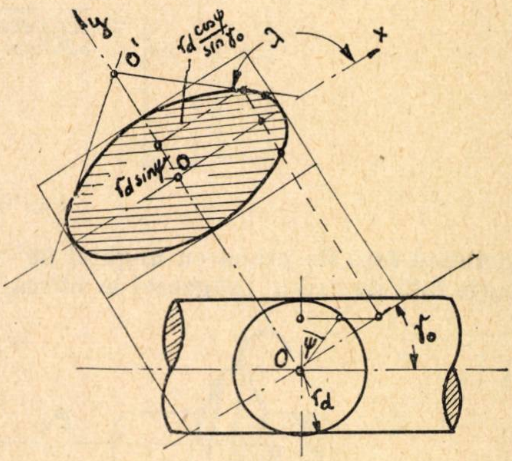


Fig. 18

Pentru melcii convoluţi ca în figura 6 cu secţiunea frontală evolventă buclată tangentă interior la cercul director aranjamentul trebuie să fie ca în figura 19 (trasat cu linie continuă) adică $\psi>90°$.

În toate cazurile, pe baza proprietăţii enunţate în punctul anterior în ceea ce priveşte poziţia generatoarei drepte la rotirea cu 180° în jurul normalei comune, flancul antiomolog consecutiv se prelucrează cu aceeaşi muchie, după ce melcul se roteşte cu 180° între vîrfurile strungului.

La melcul arhimedic, ambele flancuri se pot prelucra simultan cu un cuţit cu profile simetrice drepte aşezate în planul axial al piesei.

La melcul evolventic aranjamentul muchiei aşchietoare la distanţa R_b de axă, pe baza considerentelor din figura 9, trebuie să fie ca în figura 20. Aceasta teoretic poate fi aşezată şi sub axă (punctat în figură).

Melcul evolventic se poate rectifica pe baza celor de mai sus cu un disc abraziv plan. Aranjamentul este ca în figura 21, adică axa piesei și axa discului abraziv plan fiind în plane orizontale, ultima trebuie să fie

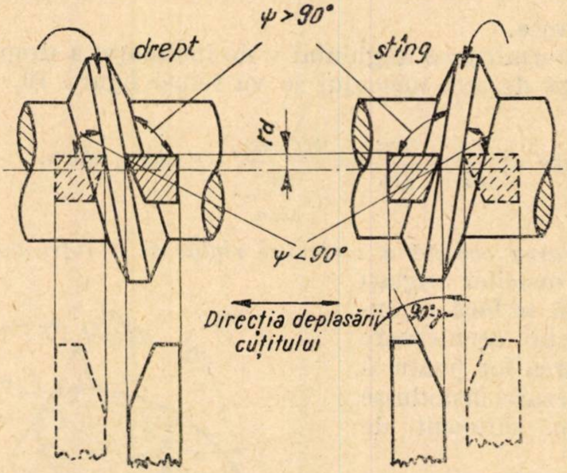


Fig. 19

înclinată față de prima cu unghiul 90° — σ, unde σ este unghiul de înclinație față de axă al tangentei la elicea de pe cilindrul de bază.

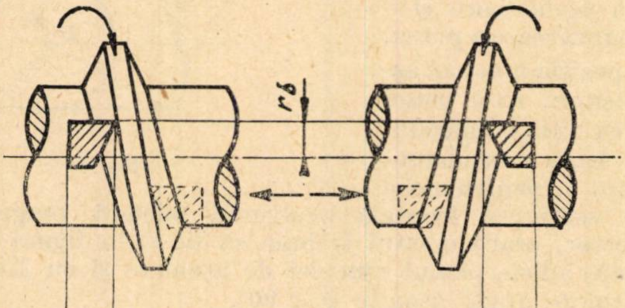


Fig. 20

La rectificarea cu abraziv conic axa conului trebuie să fie sau sub sau deasupra axei melcului la distanța R_b. Înclinația sa față de axa piesei trebuie să fie $\sigma + \alpha$ unde α este semiunghiul la vîrf al conului.

Pe baza considerentelor din figura 16 melcul convolut cu secţiunea frontală evolventă buclată tangentă interior la cercul director se poate prelucra cu un singur cuţit cu profile simetrice perpendiculare pe elicea medie a golului.

Roata melcată se poate prelucra cu o freză melcată identică cu melcul, avînd diametrul exterior mărit cu de două ori jocul de la fundul dintelui, sau cu un cuţit rotativ.

Cuţitul rotativ cu tăişul drept materializează un melc cu muchii drepte în secţiunea perpendiculară pe elicea medie a dintelui, ca în figura 17. Prin urmare melcul conjugat roţii astfel prelucrate nu poate fi decît degroşat cu un singur cuţit cu muchiile perpendiculare pe elicea medie a golului. Finisarea acestui melc trebuie făcută după metoda din figura 19 (poziţiile cuţitelor trasate cu linie continuă) cu r_a şi γ ca în figura 17.

La şeveruirea roţii melcate se foloseşte un şever identic cu melcul. Calitatea superioară a suprafeţei astfel obţinute asigură frecarea lichidă şi duce la mărirea randamentului, dacă flancurile melcului sînt rectificate. Rectificarea flancurilor este posibilă însă numai la melci evolventici.

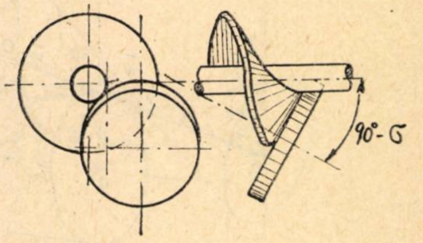


Fig. 21

2. *Angrenaje compuse din melci cu suprafaţa flancurilor neriglată.*

a. *Înfăşurătoarea conurilor în mişcare elicoidală*

Fie dată o suprafaţă conică cu axa I care execută o mişcare elicoidală de parametru h în jurul axei oy a sistemului fix de coordonate xyz (fig. 22). Conul fie fixat de sistemul de referinţă mobil XYZ, care la origine coincide cu xyz şi a cărei axă OY alunecă continuu pe oy. Sistemul XYZ se alege astfel încît OZ să coincidă cu normala comună — a — dintre I şi oy. La alegerea sensului pentru unghiul de înclinaţie γ a axei conului s-a ţinut seama de faptul, că în majoritatea cazurilor practice, axa frezei conice este perpendiculară pe direcţia de înclinaţie a spirei melcului. Astfel pentru melcul drept γ are sensul ca în figură, fiind prevăzut cu semnul + (plus). Pentru melcul stîng γ va avea semnul — (minus). Suprafaţa conică avînd două pînze, cea din dreapta înfăşoară flancul drept, iar cea din stînga flancul stîng al spirei melcului.

Punctul curent P de pe suprafaţa conului va fi determinat de vectorul de poziţie

$$\overline{P} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{u} + \overline{R}.$$

Notînd cu $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ versorii sistemului mobil de coordonate, vectorul $\overline{P}$ în acest sistem se va scrie

$$\overline{P} = \bar{e}_1 \cdot X + \bar{e}_2 \cdot Y + \bar{e}_3 \cdot Z, \tag{36}$$

unde, folosind proiecțiile pe planul XOY (fig. 23)

$$\begin{aligned} X &= a_x + b_x + u_x + R_x = b\sin\gamma - u\sin\gamma - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin v\cdot\cos\gamma, \\ Y &= a_y + b_y + u_y + R_y = -b\cos\gamma + u\cos\gamma - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin v\cdot\sin\gamma, \\ Z &= a_z + b_z + u_z + R_z = a - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos v. \end{aligned} \tag{37}$$

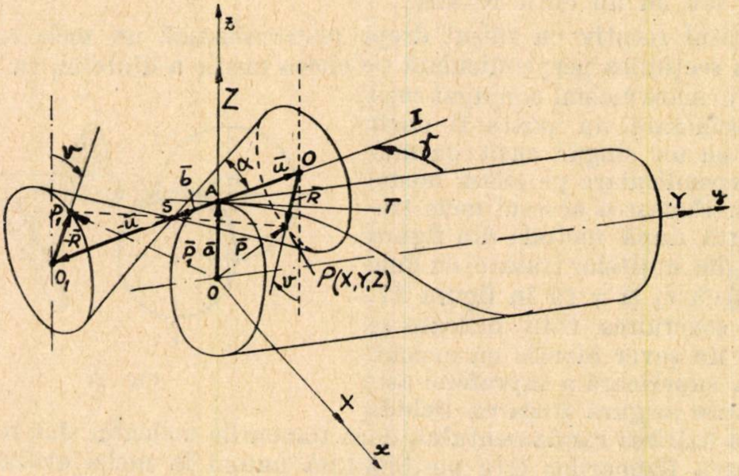


Fig. 22

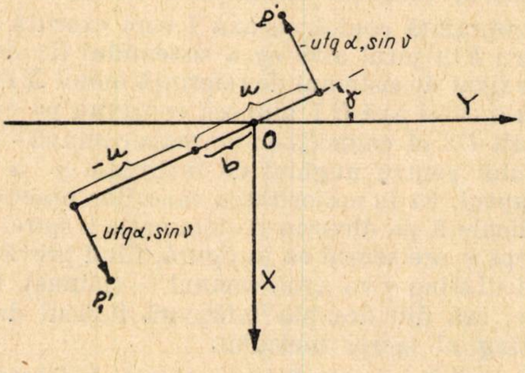


Fig. 23

Este de remarcat că sistemul (37) este valabil și pentru pînza care va înfășura flancul stîng al melcului reprezentată prin punctul curent P_1, dacă $\bar{u}$ se va considera negativ, iar v se va măsura din poziția reprezentată în figură. Aceeași ecuație este valabilă și în cazul melcului stîng cînd γ se va considera negativ.

Să presupunem că sistemul de referință XYZ legat de con în mișcarea sa elicoidală corespunzătoare unei rotații φ în jurul lui oy și unei translații

$H = h\varphi$ de-a lungul lui oy a ajuns în poziția reprezentată în figura 24. Vectorul de poziție al punctului curent P în raport cu sistemul fix de coordonate, folosind relația (36), va fi

$$\overline{M} = \overline{H} + \overline{P} = \bar{e}_2 \cdot h\varphi + \overline{P} = \bar{e}_1 X + \bar{e}_2 (h\varphi + Y) + \bar{e}_3 Z \cdot \tag{38}$$

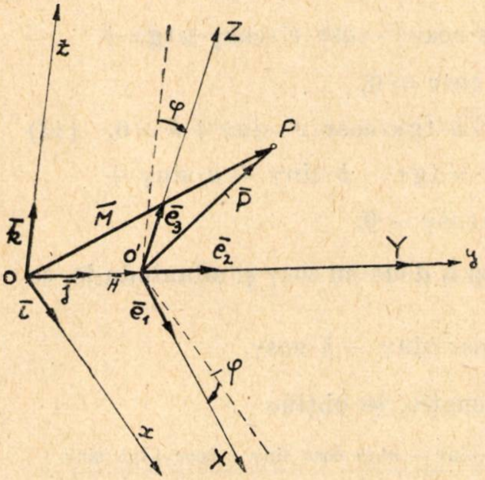


Fig. 24

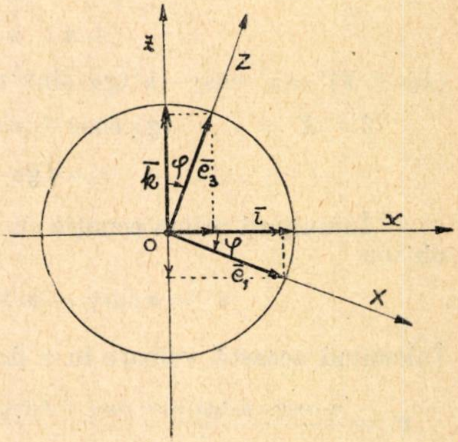


Fig. 25

După o rotație $\Delta\varphi$ conul, înfășurînd flancul melcului, va ocupa o nouă poziție. Cele două poziții se intersectează după o curbă. La limită aceasta devine curba caracteristică. Ea se bucură de proprietatea că pentru toate punctele sale variația vectorului de poziție $d\overline{M} = 0$. Va trebui deci derivată relația (38) în funcție de parametrul φ, avînd în vedere că atît versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, cît și parametrii u și v pentru punctele caracteristicei sînt funcție de φ. Astfel,

$$\overline{M}' = \bar{e}_1' X + X' \bar{e}_1 + \bar{e}_2' (h\varphi + Y) + \bar{e}_2 (h\varphi + Y)' + \bar{e}_3' Z + \bar{e}_3 Z'. \tag{39}$$

Cunoscînd relațiile dintre versorii variabili $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ și cei ficși $\bar{i}, j, k$ (fig. 25)

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{i}\cos\varphi - \bar{k}\sin\varphi, \\ \bar{e}_2 &= j, \\ \bar{e}_3 &= \bar{i}\sin\varphi + \bar{k}\cos\varphi, \end{aligned} \tag{40}$$

derivînd se obține

$$\begin{aligned} \bar{e}_1' &= -\bar{i}\sin\varphi - \bar{k}\cos\varphi = -\bar{e}_3, \\ \bar{e}_2' &= 0, \\ \bar{e}_3' &= \bar{i}\cos\varphi - \bar{k}\sin\varphi = \bar{e}_1. \end{aligned} \tag{41}$$

Înlocuind aceste valori în (39) și ordonînd după $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ se obține

$$\bar{M}' = \bar{e}_1(X' + Z) + \bar{e}_2(h\varphi + Y)' + \bar{e}_3(Z' - X) = 0. \tag{42}$$

Pentru ca această ecuație să se anuleze, trebuie ca toți coeficienții să fie nuli. Derivînd relațiile (37), se va putea scrie

$$\begin{aligned} X' + Z &= -u' \cdot \sin\gamma - u' \cdot \mathrm{tg}\alpha \sin v \cdot \cos\gamma - \cos v \cdot v' \cdot \cos\gamma \cdot u\, \mathrm{tg}\alpha + \\ &\quad + a - u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos v = 0, \\ (h\varphi + Y)' &= u' \cdot \cos\gamma - u' \mathrm{tg}\alpha \cdot \sin v \cdot \sin\gamma - u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos v \cdot v' \cdot \sin\gamma + h = 0, \qquad (43) \\ Z' - X &= -u' \cdot \mathrm{tg}\alpha \cos v + \sin v \cdot v' \cdot u \cdot \mathrm{tg}\alpha - b \cdot \sin\gamma + u \cdot \sin\gamma + \\ &\quad + u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \sin v \cdot \cos\gamma = 0. \end{aligned}$$

Înmulțind prima ecuație cu $\sin\gamma$ și a doua cu $\cos\gamma$ și adunîndu-le, se obține

$$u' = a \sin\gamma - u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos v \cdot \sin\gamma - h \cdot \cos\gamma.$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuație, se obține

$$v' = \frac{a \cdot \cos\gamma - u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos v \cdot \cos\gamma + h \sin\gamma - (a . \sin\gamma - u \mathrm{tg}\alpha \cos v \cdot \sin\gamma - h \cos\gamma)\, \mathrm{tg}\alpha \cdot \sin v}{u \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos v}.$$

Înlocuind în a treia ecuație valorile lui u' și v' astfel determinate, după simplificări și transformări se obține

$$\begin{aligned} u \cdot \sin\gamma \cdot \cos v \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) - b \sin\gamma \cdot \cos v - (a \cdot \sin\gamma - h \cos\gamma)\, \mathrm{tg}\alpha + \\ + (a \cos\gamma + h \sin\gamma) \sin v = 0, \end{aligned}$$

de unde

$$u = u(v) = \frac{b \sin\gamma \cdot \cos v + (a \sin\gamma - h \cos\gamma) .\ \mathrm{tg}\alpha - (a \cos\gamma + h \sin\gamma) \sin v}{\sin\gamma \cdot \cos v\, (1 + \mathrm{tg}^2\alpha)}. \tag{44}$$

Această ecuație reprezintă relația dintre parametrii u și v pentru punctele caracteristicei.

Ținînd seama de (44), ecuația (38) pentru o valoare dată a lui $\varphi = \varphi_0$ reprezintă ecuația caracteristicei în sistemul mobil de axe XYZ.

Exprimînd versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, și $\bar{e}_3$ în funcție de $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, ca în (40), ecuația (38) devine

$$\begin{aligned} \overline{M}(\varphi, v) = \bar{i} \cdot [X(v) \cos\varphi + Z(v) \sin\varphi] + \bar{j}[h\varphi + Y(v)] + \\ \bar{k}[Z(v) \cos\varphi - X(v) \sin\varphi]. \qquad (45) \end{aligned}$$

Ținînd seama de (44) aceasta reprezintă ecuația generală vectorială a flancului melcului în funcție de parametrii φ și v.

Înlocuind X, Y, Z, cu valorile date de sistemul (37), relaţia (45) se poate scrie sub forma scalară

$$\begin{aligned} x &= (b\sin\gamma - u\sin\gamma - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin v\cdot\cos\gamma)\cdot\cos\varphi + (a - u\,\mathrm{tg}\alpha\cos v)\sin\varphi, \\ y &= h\varphi + (-b\cos\gamma + u\cos\gamma - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin v\cdot\sin\gamma), \qquad (46) \\ z &= (a - u\cdot\mathrm{tg}\alpha\cos v)\cos\varphi - \sin\varphi\,(b\sin\gamma - u\sin\gamma - u\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin v\cdot\cos\gamma). \end{aligned}$$

Pe baza celor arătate anterior se va putea întocmi tabela 2.

Tabela 2

Suprafaţa elicoidală	h	Flancul	u	γ
Dreaptă	+	drept	+	+
		stîng	−	+
Stîngă	−	drept	+	−
		stîng	−	−

În cazul frezelor conice disc cele două flancuri se pot prelucra şi deodată. În acest caz punctul A, intersecţia perpendicularei comune cu axa conului trebuie să fie un punct de simetrie a celor două pînze, adică vîrful conului stîng trebuie să fie la cota — b (fig. 26). Tabela 2 pentru flancul stîng se va completa deci, în acest caz, prin schimbarea semnului lui b în ecuaţiile (46). Unghiul de înclinaţie γ trebuie astfel ales încît axa frezei să fie perpendiculară pe elicea medie a golului de pe cilindrul de divizare. Prin urmare $\gamma = 90° - \sigma_0$ unde σ_0, după cum s-a notat mai sus, reprezintă unghiul de înclinare a elicei pe cilindrul de divizare.

În cazul frezelor deget axa frezei intersectează perpendicular axa melcului. Ecuaţiile flancului se simplifică înlocuind $a = 0$ şi $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Este de remarcat că în acest caz acelaşi con înfăşoară ambele flancuri ale spirei melcului.

După cum reiese din formula (44), caracteristica este în general o curbă spaţială, ceea ce înseamnă că suprafaţa înfăşurată de con nu este o suprafaţă riglată. În caz particular, cînd caracteristica devine o dreaptă, ceea ce nu poate fi decît generatoarea conului, se poate înfăşura un melc riglat, dar numai de un singur fel, anume desfăşurabil — adică evolventic.

Este deci greşit a se considera că o sculă conică poate prelucra melci arhimedici sau convoluţi.

Să cercetăm în ce cazuri se pot prelucra melci evolventici. Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cînd conul degenerează la un plan, suprafaţa înfăşurată s-a văzut că este evolventică. În alte cazuri curba caracteristică se confundă cu generatoarea conului numai cînd pentru o valoare dată unghiului v, corespund o infinitate de valori pentru u. Analizînd ecuaţia (44) se observă că acesta are loc cînd $\sin\gamma = 0$ sau $\cos v = 0$.

În primul caz $\gamma = 0°$, adică axa conului este paralelă cu a melcului. Ecuația (44) devine

$$h\operatorname{tg}\alpha + a\cdot\sin v = 0\,; \quad \text{de unde } \sin v = -\frac{h\operatorname{tg}\alpha}{a}\,;$$

acest unghi determină poziția generatoarei de contact cu suprafața melcului,

$a\cdot\sin v$ reprezintă lungimea normalei comune a generatoarei G și

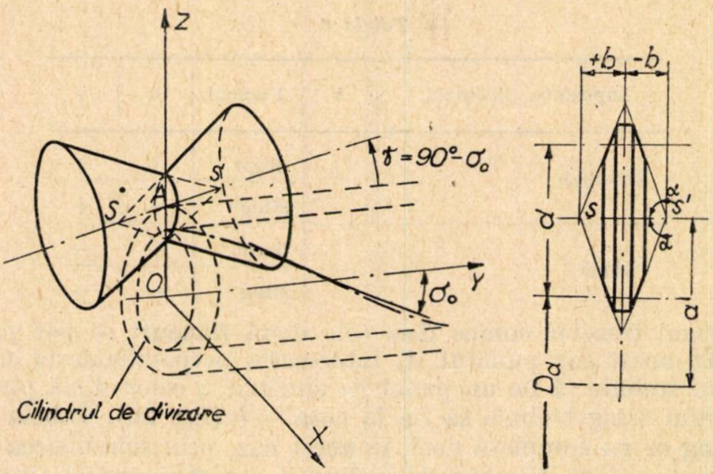


Fig. 26

a axei melcului, adică corespunde tocmai razei cilindrului de bază a melcului evolventic obținut (fig. 27).

În cazul al doilea, cînd $\cos v = 0$, înseamnă că $v = \frac{\pi}{2}$, adică generatoarea și axa conului formează un plan paralel cu planul XOY, -a- este chiar raza cilindrului de bază.

Din ecuația (13) se deduce : $h = a\operatorname{ctg}\gamma$. Cunoscînd γ, se pot deduce în acest caz parametri necesari pentru reglarea la prelucrare.

Roata melcată conjugată melcului neriglat se prelucrează cu freză melcată identică cu melcul, sau cu cuțit rotativ cu profile speciale. Pentru mărirea calității suprafeței se pot folosi și în acest caz șevere melcate identice cu melcul conjugat.

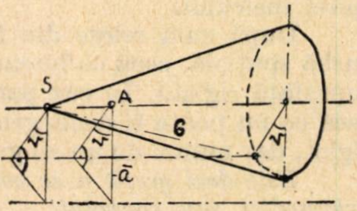


Fig. 27

În concluzie, la prelucrarea unei perechi melc-roată melcată nu trebuie să se scape din vedere că întotdeauna această pereche trebuie să formeze o cuplă conjugată la funcționare. Ca atare trebuie să se aleagă tehnologia corespunzătoare la prelucrare pe baza indicațiilor de mai sus. Ignorarea acestei probleme şi lansarea unei tehnologii nestudiate suficient sub aspectul celor de mai sus, va duce la rebuturi sau va avea ca urmare scăderea randamentului angrenajului.

Primită la redacție la data de 22 iunie 1959

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРАВИЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ЧЕРВЯКОВ И ЧЕРВЯЧНЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

РЕЗЮМЕ

Устанавливаются уравнения винтовых линейчатых поверхностей, вводится классификация по форме поперечного сечения и определяются условия развертываемости эвольвенты на плоскость.

Затем выявляются оба типичные с технологической точки зрения случая для конволютных червяков, когда закрученная эвольвента является касательной как внутри, так и снаружи к направляющему цилиндру.

На основании рассмотренных геометрических соотношений делаются практические выводы относительно обработки с тем, чтобы боковые поверхности червяка и червячного зубчатого колеса образовали при работе сопряженные пары.

Устанавливаются далее уравнения винтовых поверхностей, образуемых коническими поверхностями, причем указываются частные случаи, когда они становятся линейчатыми.

В заключение подчеркивается значение правильного выбора соответствующей технологии, основанной на выведенных геометрических принципах.

BASES THÉORIQUES DE LA FABRICATION CORRECTE DES VIS SANS FIN ET DES ROUES HÉLICOÏDALES

RÉSUMÉ

L'auteur établit les équations des surfaces hélicoïdales réglées ; il les classifie selon la forme de leur section transversale et détermine les conditions de leur développement.

Ensuite, il fait ressortir les deux cas qui sont caractéristiques, du point de vue technologique, des vis sans fin convolutées, lorsque la développante bouclée est tangente, à l'intérieur et à l'extérieur, du cylindre directeur.

En vertu des relations géométriques analysées, on tire les conclusions pratiques concernant la fabrication, qui doit être exécutée de manière que le filet de la vis forme, avec les dents de la roue hélicoïdale, des couples conjugués, pendant le fonctionnement.

L'auteur établit, ensuite, les équations des surfaces hélicoïdales engendrées par des surfaces coniques et indique les cas particuliers où celles-ci deviennent des surfaces réglées.

Il insiste, enfin, sur l'importance du choix d'une technologie appropriée, fondée sur les principes géométriques déduits.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Maros, *Cinematica roţilor dinţate*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
2. E. Buckingham,, *Analytical Mechanics of Gears.* Mc. Graw-Hill, New York, London, 1949.
3. W. Bauersfeld, *Ein Beitrag zur Theorie der Schneckengetriebe und zur Normung der Schnecken.* VDI-Forschungsheft, 427 (1949/50).
4. Н. И. Колчин, *Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений.* Машгиз, Москва, 1949.
5. L. Szeniczei, *Csigahajtomüvek.* Budapest, 1957.

DESPRE UNELE PROBLEME ALE TERMOELASTICITĂȚII

DE

VLADIMIR DERSKI (Varșovia)

INTRODUCERE

Domeniul teoriei elasticității, care se ocupă cu starea de tensiune provocată de acțiunea cîmpului temperaturilor, este relativ recent, deși prima lucrare, incontestabil lucrarea lui Duhamel [1], a fost tipărită încă din anul 1838. În această lucrare, precum și în lucrarea lui Franz Neumann [2] au fost expuse analogiile care pe baza unor stări de tensiune cunoscute, provocate de forțele de volum și cele superficiale, permiteau să se determine starea de tensiune provocată de cîmpul temperaturilor. Pentru a aplica aceste analogii era necesar să se obțină o soluție a stării de tensiune care să corespundă unei astfel de funcții a forțelor de volum încît aceasta să coincidă matematic cu derivatele funcției temperaturii. În literatură pînă în prezent nu există asemenea soluții. Cu ajutorul acestor analogii a fost posibil să se obțină soluțiile unor cazuri foarte simple și de aceea din momentul apariției celor două lucrări acest tip de stare de tensiune nu a stîrnit un interes deosebit.

Abia la începutul secolului nostru tensiunile termice s-au bucurat de atenția cuvenită. Aici trebuie să amintim lucrarea lui M.T. Huber [3] din anul 1905 *Despre tensiunile provocate de încălzirea neuniformă a pereților interior și exterior ai unei țevi*. Huber considera că lucrarea sa este o aplicație la explicarea cauzelor apariției fisurilor în coșurile de fum. El a găsit starea de tensiune care corespunde cîmpului staționar al temperaturilor.

Lucrările altor autori din această perioadă privesc și stările staționare, de pildă lucrările lui A. Leon [4] și R. Lorenz [5].

Pe cît îi este cunoscut autorului, abia în anul 1923 a apărut o lucrare a lui G. Eichelberg [6] care fundamenta explicarea corectă a problemelor termice în mod staționar. El a făcut experiențe cu o placă de oțel avînd o grosime de 35 mm. Suprafața plăcii era supusă unor variații bruște a temperaturii de ±640° C cu o frecvență de 110 cicluri pe minut. Agentul purtător de temperatură era un gaz. Rezultatele obținute de Eichelberg au arătat că salturile de temperatură pe suprafața plăcii nu depășesc ±10° C, iar la o adîncime de 5 mm acestea nu depășesc ±1/3° C. Pe baza acestor date el a ajuns la concluzia că în cazul motoarelor de mică turație chiar, deci cu atît mai mult în cazul celor de mare turație, este suficient să calculăm pistoanele numai pentru tensiunile termice staționare întrucît gradienții temperaturii sînt foarte mici.

Un capitol nou în acest domeniu a înscris lucrarea lui J. N. Goodier [7] consacrată integrării ecuațiilor termoelasticității cu ajutorul așa-numitului potențial al deplasării termoelastice. Introducerea acestui potențial s-a dovedit a fi extrem de fructuoasă. A apărut un mare număr de lucrări în care autorii au folosit potențialul menționat, însă majoritatea lor tratau problemele staționare. Sfîrșitul acestei perioade a fost marcat de lucrarea lui E. Melan și H. Parkus [8] apărută în anul 1953 tratînd despre tensiunile termoelastice provocate de cîmpuri staționare ale temperaturilor.

În acești ani în domeniul tensiunilor termice a lucrat în Polonia prof. V. Novațki, ale cărui lucrări pot fi găsite în numere ale revistelor Archiwum Mechaniki Stosowanej (Mecanică aplicată) și Rozprawy Inzynierskie (Culegere de lucrări de inginerie) din anii respectivi.

În afară de lucrările prof. Novațki a apărut în această perioadă lucrarea prof. W. Olszak [9] în care autorul a studiat mediul ortotrop și a găsit cîmpuri de temperaturi care nu provoacă o stare de tensiune.

Una din lucrările interesante din această perioadă este lucrarea prof. J. Nowinski [10] în care se ține seamă de dependența modulului de elasticitate de temperatură.

Abia în ultimii ani au apărut lucrări referitoare la tensiunile termice cvasistaționare. Prima lucrare este lucrarea lui Kazuo Yamada apărută în anul 1955 *Despre tensiunile termice nestaționare într-un tub circular subțire.*

Apoi a apărut lucrarea lui R. Trostel [12] *Despre tensiunile termice nestaționare în tuburi de secțiune circulară,* în anul 1956.

Tot în acești ani și în Polonia au început să fie tratate problemele tensiunilor termice cvasistaționare.

Aproape toate lucrările menționate, cu mici excepții, au un neajuns comun care constă în faptul că parametrii fizici se considerau constanți, ceea ce mărginește aplicabilitatea lor la un domeniu de temperaturi relativ restrîns. Pînă în prezent însă rezolvarea problemelor în care să se țină seamă de variabilitatea parametrilor fizici este împiedicată de absența unor date experimentale.

Există lucrări în care se stabilește dependența parametrilor fizici de temperatură, ca de exemplu lucrările lui A. Einstein [13] și P. Debay [14], unde această dependență este expusă conform teoriei cuantice. Tot ce s-a scris referitor la această chestiune pînă în anul 1950 se poate găsi în monografia lui F. Seitz [15] *Teoria modernă a solidului.*

Rezultatele obținute pe cale teoretică se referă numai la mediile cele mai simple pe care nu le întîlnim în practica inginerească.

După această scurtă introducere să trecem la o problemă concretă. Vom începe cu expunerea potențialului deplasării termoelastice.

1. POTENŢIALUL DEPLASĂRII TERMOELASTICE

După cum se ştie [1]) ecuaţiile termoelasticităţii în deplasări formează un sistem de trei ecuaţii în derivate parţiale

$$u_{i,ll} + \frac{1}{1-2\mu} e_{,i} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \alpha T_{,i} = 0 \quad | i, l = x, y, z |, \tag{1.1}$$

unde e reprezintă dilatarea cubică

$$e = \varepsilon_{ll},$$

u_i — deplasarea, μ — coeficientul lui Poisson, α — coeficientul liniar de dilatare termică, T — funcţia temperaturii.

Pentru a găsi soluţia fundamentală a ecuaţiilor (1.1) vom considera că deplasările pot fi exprimate prin intermediul expresiilor

$$u_i = \Phi_{,i}. \tag{1.2}$$

În felul acesta

$$u_{i,ll} = (\Phi_{,ll})_{,i}, \quad e = \Phi_{,ll}.$$

Atunci ecuaţiile (1.1) capătă forma

$$(\Phi_{,ll})_{,i} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T_{,i} = 0.$$

Integrînd această expresie în raport cu i, obţinem pentru Φ ecuaţia lui Poisson

$$\Phi_{,ll} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T. \tag{1.3}$$

Funcţia Φ se numeşte potenţial termoelastic al deplasărilor.

Conform (1.2) deformaţiile $\varepsilon_{ik} \mid i, k = x, y, z \mid$ capătă forma

$$\varepsilon_{ik} = \Phi_{,ik}.$$

După substituirea acestor expresii, tensiunile

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} e \delta_{ik} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \delta_{ik} \right]$$

se obţin sub forma

$$\sigma_{ik} = 2G [\Phi_{,ik} - \Phi_{,ll} \delta_{ik}], \tag{1.4}$$

unde G reprezintă modulul de alunecare, $\delta_{ik} \mid i, k = x, y, z \mid$ este simbolul lui Kroneker.

---

[1]) Ipotezele respective şi deducerea ecuaţiilor pot fi găsite în cartea lui S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*.

Trecem acum la integrarea ecuației (1.3). Există cîteva cazuri de cîmpuri de temperaturi pentru care această integrare este mult ușurată. Dacă ecuația conductibilității termice are forma

$$\dot{T} = \varkappa T_{,ii}$$

($\varkappa$ — coeficient de conductibilitate termică) care corespunde absenței surselor de căldură în interiorul corpului, iar condițiile la limită sînt astfel încît cîmpul temperaturilor este descris de funcția $f(m, t)$ (m reprezintă punctul, t este timpul), care tinde către zero împreună cu timpul care tinde către infinit, atunci putem rezolva ecuația (1.3) în felul următor : derivînd în raport cu timpul obținem

$$\dot{\Phi}_{,ii} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\, T.$$

Cunoscînd că $\dot{T} = \varkappa T_{,ii}$ ajungem la relația

$$\dot{\Phi}_{,ii} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\varkappa T_{,ii}.$$

De aici decurge că integrala particulară a ecuației (1.3) se obține printr-o integrare simplă 1)

$$\Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\varkappa \int T\,\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

În cazul cînd funcția $f(m, t)$ tinde către funcția $f_1(m)$ cînd timpul tinde către infinit, atunci ea poate fi reprezentată totdeauna sub forma sumei

$$f(m, t) = f_1(m) + f_2(m, t).$$

În această sumă prima funcție este integrala ecuației omogene a termoconductibilității $T_{,ii} = 0$, iar a doua funcție $f_2(m, t)$ satisface ecuația $\dot{T} = \varkappa T_{,ii}$.

În acest caz potențialul deplasării termoelastice se găsește de asemenea cel mai ușor sub forma sumei

$$\Phi(m,t) = \Phi_1(m) + \Phi_2(m,t),$$

în care $\Phi_1(m)$ corespunde funcției $f_1(m)$, iar $\Phi_2(m,t)$ funcției $f_2(m, t)$. În acest caz putem folosi formula (1.5).

Pentru Φ putem da o condiție la limită, totuși îndeplinirea celorlalte condiții este imposibilă. Aceasta se explică prin faptul că expresiile (1.2) pentru u_i cînd $T = 0$ nu reprezintă soluția cea mai generală a ecuațiilor teoriei elasticității. În afară de aceasta, la rezolvarea ecuației (1.3) nu s-a ținut seamă de condițiile la limită ; dacă, așa cum era de așteptat,

---

1) E. Melan, *Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder.* Oesterreichisches Ing.-Arch., **IX**, *2—3* (1955).

soluţia obţinută nu satisface condiţiile la limită, atunci la aceasta ataşăm soluţia ecuaţiilor teoriei elasticităţii, care corespunde la $T=0$, în scopul de a îndeplini condiţiile date pe suprafaţă.

Acum trecem la studierea detaliată a problemei tensiunilor termice într-un tub cu pereţi groşi.

2. TENSIUNILE TERMICE NESTAŢIONARE ÎNTR-UN TUB CU PEREŢI GROŞI DE LUNGIME INFINITĂ

Să considerăm cîmpul temperaturilor axial-simetric şi constant de-a lungul tubului. În această ipoteză ecuaţia conductibilităţii termice în coordonate polare capătă forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \tag{2.1}$$

Vom presupune că sursa de căldură este aplicată brusc pe suprafaţa tubului; deci condiţia iniţială capătă forma

$$T(r,0) = 0. \tag{2.2}$$

Condiţiile la limită le scriem sub forma cea mai generalizată

$$\left.\begin{aligned} a_1 \frac{\partial T}{\partial r} + a_2 T &= a_3 \qquad /r = r_1/ \\ a_1' \frac{\partial T}{\partial r} + a_2' T &= a_3' \qquad /r = r_2/ \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

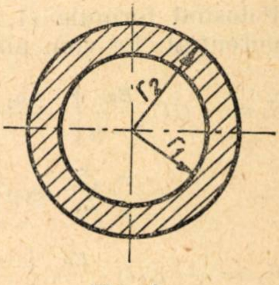


Fig. 1

Soluţia ecuaţiei (2.1) care corespunde condiţiei iniţiale (2.2) şi condiţiilor la limită (2.3) este cunoscută[1]) şi are forma

$$T(r,t) = \eta(t) \left\{ \frac{-r_1 a_3 [a_1' - a_2' r_2 \ln r/r_2] + r_2 a_3' [a_1 - a_2 r_1 \ln r/r_1]}{-r_1 a_1' a_2 + r_2 a_1 a_2' - r_1 r_2 a_2 a_2' \ln r_2/r_1} - \right.$$

$$\left. - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\varkappa \alpha_n^2 t]\, C(\alpha_n) \frac{D_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r) - D_2(\alpha_n) N_0(\alpha_n r)}{E(\alpha_n)} \right\}, \tag{2.4}$$

unde

$$C(\alpha_n) = [a_1' \alpha_n J_1(\alpha_n r_2) - a_2' J_0(\alpha_n r_2)] \{a_3 [a_1' \alpha_n J_1(\alpha_n r_2) -$$

$$- a_2' J_0(\alpha_n r_2)] - a_3' [a_1 \alpha_n J_1(\alpha_n r_1) - a_2 J_0(\alpha_n r_2)]\};$$

$$D_1(\alpha_n) = a_1 \alpha_n N_1(\alpha_n r_1) - a_2 N_0(\alpha_n r_1);$$

$$D_2(\alpha_n) = a_1 \alpha_n J_1(\alpha_n r_1) - a_2 J_0(\alpha_n r_1);$$

$$E(\alpha_n) = (a_1'^2 \alpha_n^2 + a_2'^2) [a_1 \alpha_n J_1(\alpha_n r_1) - a_2 J_0(\alpha_n r_1)]^2 +$$

$$+ (a_1^2 \alpha_n^2 + a_2^2) [a_1' \alpha_n J_1(\alpha_n r_2) - a_2' J_0(\alpha_n r_2)];$$

---

[1]) H. C. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Press, 1950.

reprezintă funcția lui Heaviside, $\eta(t)$ și $J_n(x)$, $N_n(x)$ sînt funcții Bessel de prima și a doua speță de ordinul n. Numerele α_n sînt definite de ecuația transcendentă

$$\begin{aligned}&[a_1\alpha J_1(\alpha r_1) - a_2 J_0(\alpha r_1)]\,[a_1'\alpha N_1(\alpha r_2) - a_2' N_0(\alpha r_2)] - \\ &-[a_1\alpha N_1(\alpha r_1) - a_2 N_0(\alpha r_1)]\,[a_1'\alpha J_1(\alpha r_2) - a_2' J_0(\alpha r_2)] = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Avînd funcția temperaturii putem trece la determinarea potențialului deplasării termoelastice. Folosind rezultatele din capitolul precedent, vom căuta potențialul sub forma

$$\Phi(r,t) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r,t).$$

După integrare obținem

$$\Phi_1(r) = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\,\frac{r^2}{4}\,\frac{-r_1a_3\,[a_1'-r_2a_2'(\ln r/r_2-1)]+r_2a_3'\,[a_1-r_1a_2(\ln r/r_1-1)]}{-r_1a_2a_1'+r_2a_2'a_1+r_1r_2a_2a_2'\ln r_2/r_1}, \tag{2.6}$$

$$\Phi_2(r,t) = \eta(t)\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\alpha\pi\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\varkappa\alpha_n t]\,C(\alpha_n)\,\frac{D_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r)-D_2(\alpha_n)N_0(\alpha_n r)}{\alpha_n^2 E(\alpha_n)}. \tag{2.7}$$

Folosind formula (1.4), putem scrie componentele tensiunii definite de potențial. Le vom nota cu o bară deasupra

$$\left.\begin{aligned}\bar\sigma_r = &-\eta(t)\frac{E\alpha}{1-\mu}\left\{\frac{-r_1a_3\,[a_1'-r_2a_2'(\ln r/r_2-1/2)]+r_2a_3'[a_1-r_1a_2(\ln r/r_1-1/2)]}{2\,[-r_1a_2a_1'+r_2a_2'a_1-r_1r_2a_2a_2'\ln r_2/r_1]}-\right.\\ &\left.-\frac{\pi}{r}\sum_{n=}^{\infty}\exp[-\varkappa\alpha_n^2 t]\,C(\alpha_n)\,\frac{D_1(\alpha_n)J_1(\alpha_n r)-D_2(\alpha_n)N_0(\alpha_n r)}{\alpha_n E(\alpha_n)}\right\},\\ \bar\sigma_\varphi = &-\eta(t)\,\frac{E\alpha}{1-\mu}\left\{\frac{-r_1a_3[a_1'-r_2a_2'\ln r/r_2]+r_2a_3'\,[a_1-r_1a_2\ln r/r_2]}{-r_1a_2a_1'+r_2a_2'a_1-r_1r_2a_2a_2'\ln r_2/r_1}-\right.\\ &\left.-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\varkappa\alpha_n t]\,C(\alpha_n)\,\frac{D_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r)-D_2(\alpha_n)N_0(\alpha_n r)}{E(\alpha_n)}\right\}-\bar\sigma_r.\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Considerăm că suprafețele tubului sînt libere. Atunci trebuie să fie satisfăcute următoarele condiții la limită

$$\sigma_r(r_1, t) = \sigma_r(r_2, t) = 0. \tag{2.9}$$

Tensiunile definite de formulele (2.8) nu satisfac aceste condiții la limită și pe frontiere capătă valorile $\bar\sigma_r(r_1, t)$ și $\bar\sigma_r(r_2, t)$, diferite de zero. Pentru a satisface condițiile (2.9) trebuie să adăugăm la soluția (2.8) starea de tensiune care apare sub influența aplicării pe frontiere a unor sarcini egale cu : $-\bar\sigma_r(r_1, t)$ pe frontiera $r = r_1$, și $-\bar\sigma_r(r_2, t)$ pe frontiera $r = r_2$. Această problemă este o problemă Lamé, iar soluția ei

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar\sigma}_r &= -\frac{r_1^2 r_2^2\,[\bar\sigma_r(r_1,t)-\bar\sigma_r(r_2,t)]}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{1}{r^2}+\frac{r_1^2\bar\sigma_r(r_1,t)-r_2^2\bar\sigma_r(r_2,t)}{r_2^2-r_1^2},\\ \bar{\bar\sigma}_\varphi &= \frac{r_1^2 r_2^2\,[\bar\sigma_r(r_1,t)-\bar\sigma_r(r_2,t)]}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{1}{r^2}+\frac{r_1^2\bar\sigma_r(r_1,t)-r_2^2\bar\sigma_r(r_2,t)}{r_2^2-r_1^2},\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

poate fi găsită în orice monografie consacrată teoriei elasticității. Sumele tensiunilor

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r + \bar{\bar{\sigma}}_r, \qquad \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi + \bar{\bar{\sigma}}_\varphi,$$

reprezintă soluția inițială a problemei.

Această abordare a problemei permite să se analizeze modul în care variază starea de tensiune în funcție de condițiile la limită termice. Raționamente detaliate sînt date în lucrările autorului [15]. Aici vom studia amănunțit următorul caz al condițiilor termice

$$T(r_1, t) = T_0, \qquad \frac{\partial T(r_2, t)}{\partial r} = 0;$$

ceea ce corespunde următoarelor valori constante din condițiile la limită (2.3)

$$a_2 = a_1' = 1, \quad a_3 = T_0, \quad a_1 = a_2' = a_3' = 0.$$

După introducerea acestor valori în formula temperaturii (2.4) obținem

$$T = \eta(t) T_0 \left\{ 1 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\varkappa \alpha_n^2 t] \frac{J_1^2(\alpha_n r_2)[J_0(\alpha_n r_1) N_0(\alpha_n r) - N_0(\alpha_n r_1) J_0(\alpha_n r)]}{J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)} \right\}. \quad (2.11)$$

Pe baza formulelor (2.8), (2.10) tensiunile le vom prezenta sub forma

$$\bar{\sigma}_r = -\eta(t) \frac{E\alpha T_0}{r(1-\mu)} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\varkappa \alpha_n^2 t] \frac{J_1^2(\alpha_n r_2)[J_0(\alpha_n r_1) N_1(\alpha_n r) - N_0(\alpha_n r_1) J_1(\alpha_n r)]}{\alpha_n [J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)]},$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -\eta(t) \frac{E\alpha T_0}{1-\mu} \pi \sum_{=1}^{\infty} \exp[-\varkappa \alpha_n^2 t] \frac{J_1^2(\alpha_n r_2)[J_0(\alpha_n r_1) N_0(\alpha_n r) - N_0(\alpha_n r_1) J_0(\alpha_n r)]}{J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)} - \bar{\sigma}_r, \quad (2.12)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = -\frac{r_1^2 r_2^2 - r_1^2 r^2}{r^2(r_2^2 - r_1^2)} \bar{\sigma}_r(r_1, t), \quad \bar{\bar{\sigma}}_\varphi = \frac{r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r^2}{r^2(r_2^2 - r_1^2)} \bar{\sigma}_r(r_1, t).$$

Numerele α_n sînt definite de ecuația transcendentă

$$N_0(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) - N_1(\alpha r_2) J_0(\alpha r_1) = 0. \quad (2.1$$

Pentru acest caz a fost dat un exemplu numeric. Rădăcinile ecuației transcendente sînt determinate pe baza tabelelor lui Jahnke-Emde [19]. În calcule putem ține seamă numai de primii 10 termeni. Pentru valorile mari ale argumentelor funcției Bessel pînă în prezent nu sînt elaborate tabele și de aceea pentru argumentele superioare lui 25 au fost folosite formulele asimptotice

$$J_n(x) \approx \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\pi x/2}}, \qquad N_n(x) \approx \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\pi x/2}},$$

unde

$$\varphi = x - (n + 0{,}5)\frac{\pi}{2}.$$

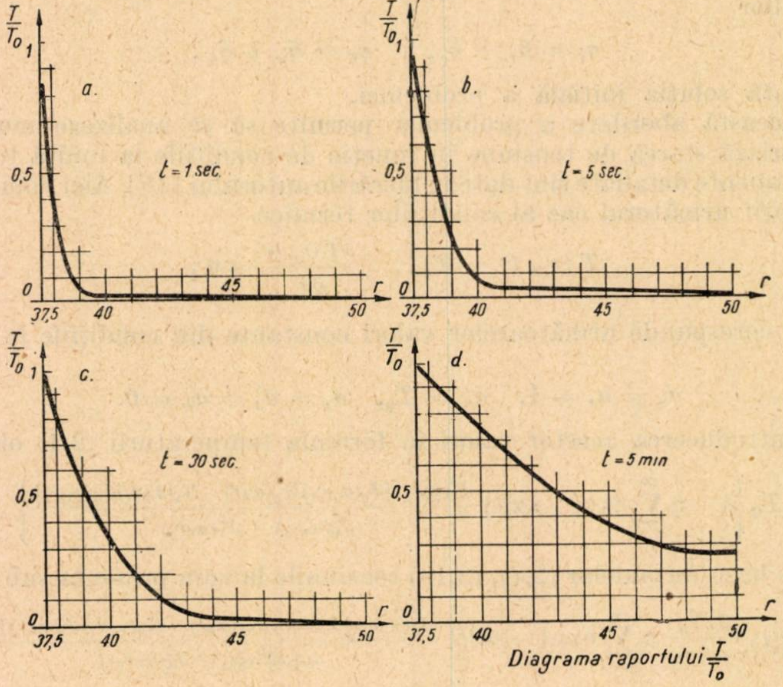

$\frac{T}{T_0}$
1
0,5
0
a.
t = 1 sec.
r
37,5
40
45
50
b.
t = 5 sec.
c.
t = 30 sec.
d.
t = 5 min
Diagrama raportului $\frac{T}{T_0}$

Fig. 2

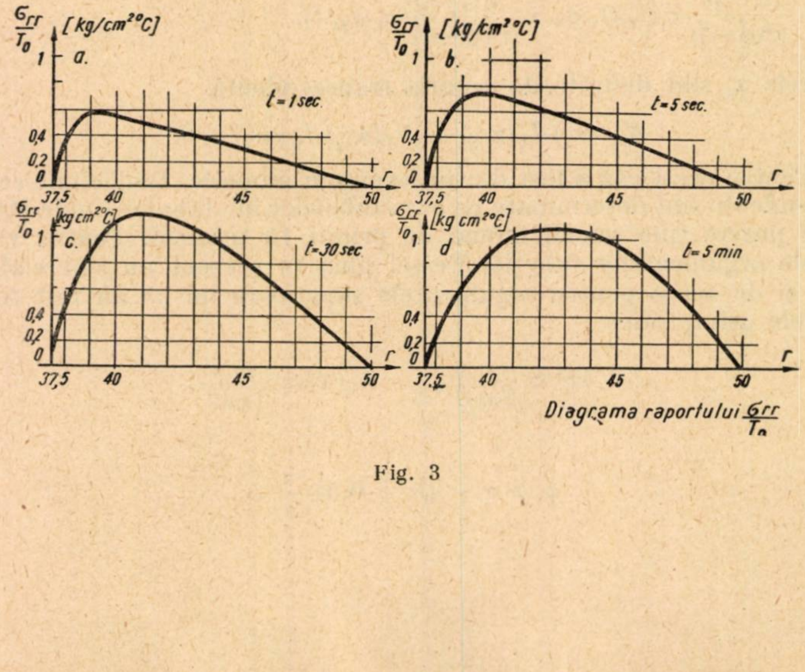

$\frac{\sigma_{rr}}{T_0}$
[kg/cm² °C]
1
0,4
0,2
0
a.
t = 1 sec.
b.
t = 5 sec.
c.
t = 30 sec
d
t = 5 min
r
37,5
40
45
50
Diagrama raportului $\frac{\sigma_{rr}}{T_0}$

Fig. 3

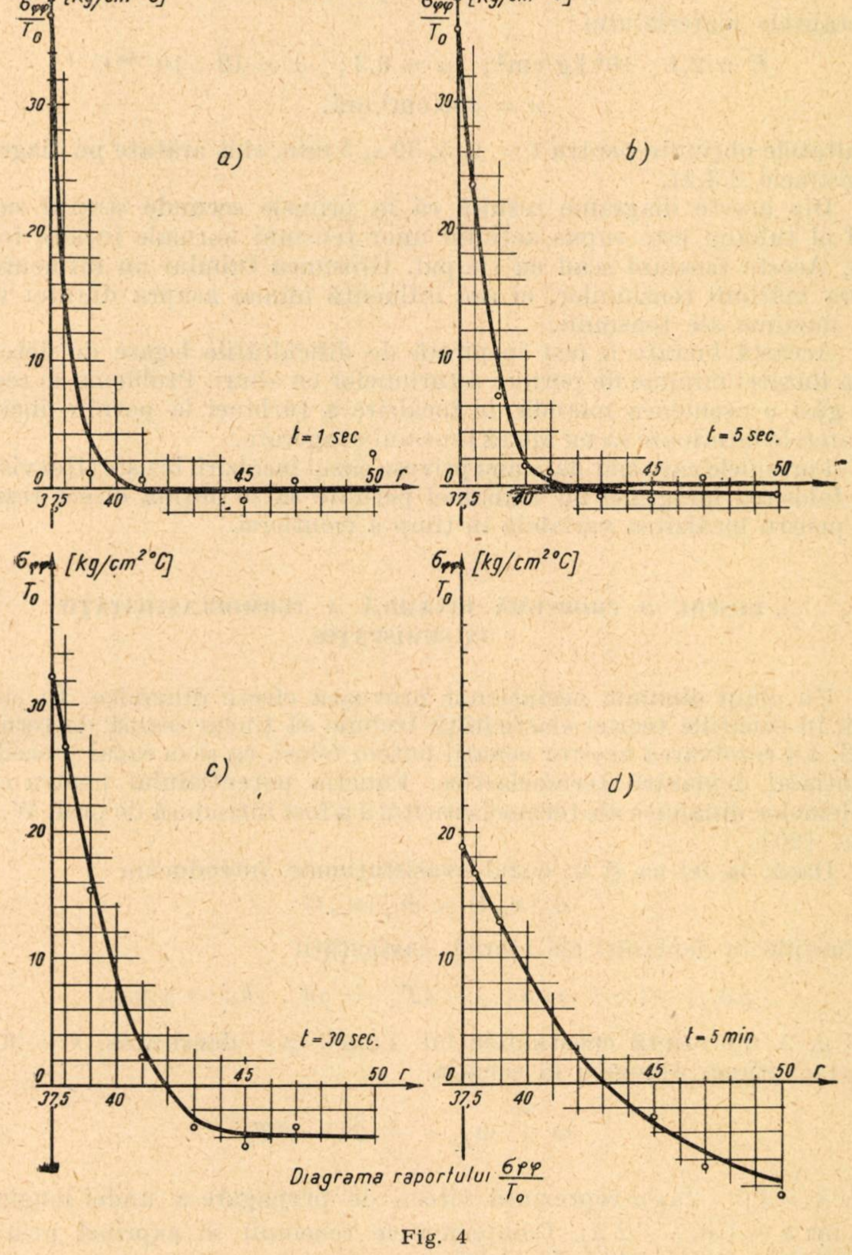


Diagrama raportului $\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{T_0}$

Fig. 4

Au fost alese următoarele dimensiuni :

$$r_1 = 37{,}5 \text{ cm și } r_2 = 50 \text{ cm}.$$

Constantele materialului :

$$E = 2{,}1 \,.\, 10^6 \text{ kg/cm}^2 ; \quad \mu = 0{,}3 ; \quad \alpha = 12 \,.\, 10^{-60}\, C^{-1}$$

$$\varkappa = 460 \text{ cm}^2\text{/oră}.$$

Rezultatele obținute pentru $t = 1, 5, 30$ s, 5 min, sînt arătate pe diagrame (diagramele 2,3,4).

Din aceste diagrame rezultă că în primele secunde stratul superficial al tubului este supus acțiunii unor tensiuni normale inelare foarte mari. Aceste tensiuni scad cu timpul. Grosimea tubului nu influențează asupra mărimii tensiunilor, ci are influență numai asupra duratei valorilor maxime ale tensiunii.

Această lucrare a fost inspirată de dificultățile legate de determinarea duratei minime de pornire a turbinelor cu aburi. Problema se reduce la a găsi o asemenea metodă de încălzire a turbinei la pornire încît pe suprafețele interioare să nu apară tensiuni exagerate.

Formulele care sînt date aici privesc cazul încălzirii bruște (Heaviside), însă folosirea integralei lui Duhamel permite să se obțină direct rezultatele pentru încălzirea variabilă în timp a frontierei.

3. DESPRE O PROBLEMĂ DINAMICĂ A TERMOELASTICITĂŢII ÎN SEMISPAŢIU

Un cîmp dinamic nestaționar provoacă efecte dinamice. În consecință, în ecuațiile teoriei elasticității trebuie să ținem seamă de termenii inerți. La rezolvarea acestor ecuații putem folosi, ca și în cazul precedent, potențialul deplasării termoelastice. Funcția potențialului pentru cazul problemelor dinamice ale termoelasticității a fost introdusă de prof. W. Nowacki [20].

Dacă, la fel ca și în cazul cvasistaționar, introducem

$$u_i\,(x_s, t) = \Phi_{,i}\,(x_s, t)$$

în ecuațiile în deplasări ale teoriei elasticității

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu)\, u_{k,ki} - s T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad /k,i = x,y,z/,$$

unde μ, λ reprezintă constantele lui Lamé, ρ — densitatea, $s = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha$, atunci ajungem la ecuația

$$\Box\, \Phi \overset{\text{def}}{=} \Phi_{,kk} - \frac{1}{c^2}\, \ddot{\Phi} = a^2 T, \tag{3.1}$$

unde $c = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ reprezintă viteza de propagare a undei longitudinale, iar $a = \sqrt{s/(\lambda + 2\,\mu)}$. Componentele tensiunii se exprimă prin potențial prin intermediul formulei

$$\sigma_{ij} = 2G\,(\,\Phi_{,ij} - \Phi_{,kk}\,\delta_{ij}) + \rho\,\ddot{\Phi}\,\delta_{ij}.$$

În cazul nostru este mai comod să se integreze direct ecuaţiile mişcării. Deoarece cîmpul temperaturilor îl considerăm unidimensional, rămîne doar o singură ecuaţie a mişcării

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = \rho\ddot{w}. \tag{3.2}$$

Folosim relaţiile lui Hooke

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ik} - \frac{v}{1+v}\,\sigma_{ll}\,\delta_{ik}\right) + \alpha T \delta_{ik}\ /i,k,l = x,y,z/. \tag{3.3}$$

După derivarea de două ori a lui (3.2) în raport cu z şi exprimarea lui $\frac{\partial w}{\partial z}$ prin σ_z cu ajutorul relaţiilor (3.3), obţinem

$$c^2\,\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2} - \ddot{\sigma}_z = \vartheta\ddot{T} \tag{3.4}$$

unde

$$\vartheta = 2G\,\frac{1+v}{1-2v}\,\alpha.$$

Presupunem că problema noastră este o problemă Cauchy, iar valorile condiţiilor la limită le considerăm nule

$$\sigma_z\,(z,0) = 0, \qquad \dot{\sigma}_z\,(z,\,0) = 0. \tag{3.5}$$

Presupunerea de mai sus nu este corectă din punct de vedere fizic, întrucît nu putem spune nimic precis despre valorile derivatei de ordinul întîi a lui $\dot{\sigma}_z\,(z,0)$. Valoarea derivatei de ordinul întîi trebuie să rezulte din proprietăţile fizice ale mediului. Ştim numai atît că valoarea ei este foarte mică. Pentru a obţine o soluţie univocă considerăm că derivata de ordinul întîi este nulă.

Pînă în prezent au fost făcute unele încercări de a aborda problema în mod corect. Ca rezultat a fost obţinută problema Dirichlet [21]. Însă această problemă este mai puţin studiată şi de aceea ne vom opri asupra problemei Cauchy.

Trecem acum la determinarea cîmpului temperaturilor. Dacă încălzim suprafaţa unui semispaţiu cu o sursă avînd o temperatură constantă, atunci, după cum se ştie, există totdeauna un strat superficial al factorului de încălzire a cărui temperatură este inferioară temperaturii sursei. Temperatura stratului limită variază cu timpul şi după trecerea unei perioade de timp infinite atinge temperatura sursei. Practic, după o perioadă de timp finită putem considera că diferenţa de temperatură este foarte mică. Perioada de timp menţionată o notăm cu τ. Influenţa stratului limită din condiţia la limită o vom înlocui cu o sursă de căldură variabilă în timp. Atunci cîmpul temperaturilor este dat de ecuaţia

$$\dot{T} = \varkappa\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{3.6}$$

de condiția inițială

$$T\,(z,0) = 0 \tag{3.7}$$

și de condiția la limită sub forma

$$T\,(0,t) = T_0 \begin{cases} f(t) & \text{dacă } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 1 & \text{dacă } t \geqslant \tau \end{cases} \tag{3.8}$$

Pentru a prezenta rezultatele sub o formă mai simplă considerăm că

$$f\,(t) = \frac{t}{\tau}. \tag{3.9}$$

Soluția ecuației (3.6) cu condițiile (3.7) și (3.8) și funcția $f\,(t)$ sub forma prezentată de formula (3.9) este cunoscută (*loc. cit.*).

$$T(z,t) = T_0 \left\{ \eta\,(t) \left(\frac{t}{\tau} \right) \left[4i^2 erfc \left(\frac{z}{\sqrt{\varkappa t}} \right) \right] - \eta(t-\tau) \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) \left[4i^2 erfc \left(\frac{z}{\sqrt{\varkappa (t-\tau)}} \right) \right] \right\}, \tag{3.10}$$

unde $\eta\,(t)$ și $\eta\,(t-\tau)$ reprezintă funcțiile lui Heaviside, iar $i^2 erfc\,(\xi)$ este integrala dublă a funcției erorilor.

Trecem acum la rezolvarea ecuației (3.4). Vom presupune că suprafața semispațiului este liberă de tensiuni, deci

$$\sigma_z\,(0,t) = 0. \tag{3.11}$$

Soluția ecuației (3.4) trebuie să fie mărginită la infinit; de aici rezultă a doua condiție la limită

$$\sigma_z(\infty, t) < \infty. \tag{3.12}$$

Pentru a rezolva această ecuație vom folosi transformarea lui Laplace definită de integralele

$$\bar{\sigma}_z = \int_0^\infty \sigma_z e^{-pt}\, dt \quad \text{și} \quad \bar{T} = \int_0^\infty T e^{-pt} dt. \tag{3.13}$$

Ecuația transformată (3.4) are forma

$$c^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dz^2} - p^2 \bar{\sigma}_z = \vartheta \frac{T_0}{\tau} (1 - e^{-p\tau})\, e^{-qz}, \qquad q = \sqrt{\frac{P}{\varkappa}}.$$

Soluția acestei ecuații care satisface condițiile (3.11) și (3.12) are forma

$$\sigma_z = \frac{\vartheta T_0 (1 - e^{-p\tau})}{\tau} \cdot \frac{e^{-\frac{P}{c} z} - e^{-qz}}{P^2 - q^2 c^2}. \tag{3.14}$$

Rezultatul inversării integralei definite

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \sigma_z e^{pt}\, dp \tag{3.15}$$

are forma

$$\begin{aligned}\sigma_z \cdot \frac{\tau c^2}{\vartheta T_0 \varkappa} = {} & \eta(t)\left\{ erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - e^{\frac{c^2 t}{\varkappa}} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{cz}{\varkappa}}\, erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}} - c\sqrt{\frac{t}{\varkappa}}\right) + \right.\right. \\ & \left.\left. + e^{\frac{cz}{\varkappa}}\, erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}} + c\sqrt{\frac{t}{\varkappa}}\right)\right]\right\} + \eta\left(t - \frac{z}{c}\right)\left[e^{\frac{c^2 t - cz}{\varkappa}} - 1\right] + \\ & + \eta\,(t-\tau)\left\{ e^{\frac{c^2(t-\tau)}{\varkappa}} \left[\frac{e^{-\frac{cz}{\varkappa}}}{2}\, erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}} - c\sqrt{\frac{t-\tau}{\varkappa}}\right) + \frac{e^{\frac{cz}{\varkappa}}}{2}\, erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}} + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + c\sqrt{\frac{t-\tau}{\varkappa}}\right)\right] - erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}}\right)\right\} + \eta\left(t - \tau - \frac{z}{c}\right)\left[1 - e^{\frac{c^2(t-\tau) - cz}{\varkappa}}\right]. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

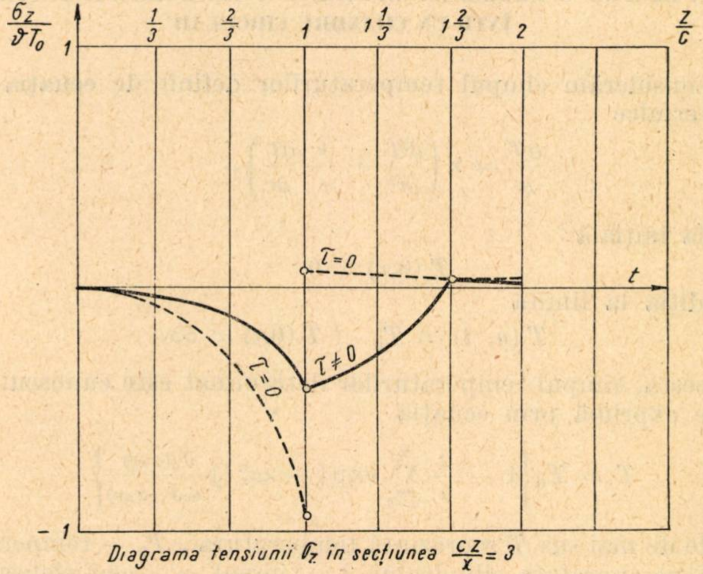


Diagrama tensiunii σ_z în secțiunea $\frac{cz}{\chi} = 3$

Fig. 5

Considerînd că $\tau = 0$, obținem cazul încălzirii bruște a suprafeței semispațiului. Operînd trecerea la limită $\tau \rightarrow 0$ în formula (3.10) obținem temperatura exprimată prin relația

$$T = \eta\,(t)\; T_0\, erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \qquad (3.17)$$

pe baza formulei (3.16) tensiunile au forma

$$\frac{\sigma_z}{\vartheta\, T_0} = e^{\frac{c^2 t}{\varkappa}} \Big\{ \eta\,(t)\, \frac{1}{2} \Big[e^{-\frac{cz}{\varkappa}} erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) - c\sqrt{\frac{t}{\varkappa}} + e^{\frac{cz}{\varkappa}} erfc\Big(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa t}} +$$

$$+ c\sqrt{\frac{t}{\varkappa}}\Big)\Big] - \eta\left(t - \frac{z}{c}\right) e^{-\frac{cz}{\varkappa}} \Big\}. \qquad (3.18)$$

Acest rezultat a fost obținut de V. I. Danilovskaia [22].
Ambele cazuri sînt arătate pe figura 5.

Din diagramă rezultă că în cazul $\tau = 0$, cînd unda elastică atinge secțiunea considerată, tensiunile σ_z variază prin salturi. În cazul cînd $\tau \neq 0$, funcția σ_z nu prezintă salturi, însă în punctul $t = \frac{z}{c}$ are un vîrf ascuțit. Saltul tensiunilor se întinde pe o durată de timp egal cu τ.

4. DESPRE O PROBLEMĂ DINAMICĂ A TERMOELASTICITĂȚII ÎNTR-UN CILINDRU CIRCULAR

Să considerăm cîmpul temperaturilor definit de ecuația conductibilității termice

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad (4.1)$$

de condiția inițială

$$T\,(0,r) = 0 \qquad (4.2)$$

și de condiția la limită

$$T\,(a,\ t) = T_0 \quad /\, T\,(0,t) < \infty /. \qquad (4.3)$$

În felul acesta, cîmpul temperaturilor determinat este cunoscut (loc. cit.) [20], și se exprimă prin ecuația

$$T = T_0 \left\{ 1 - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\,[\,-\,\varkappa\alpha_n^2\, t\,]\, \frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n J_1(\alpha_n a)} \right\}. \qquad (4.4)$$

În ecuațiile de mai sus T reprezintă temperatura , T_0 — temperatura care acționează pe suprafața cilindrului, t — timpul, $\varkappa$ — coeficientul de difuzivitate termică, r — raza, a — raza suprafeței cilindrului, $J_0(\alpha_n r)$ și $J_1\,(\alpha_n a)$ — funcții Bessel de speța întîi de ordinul zero și ordinul întîi, numerele α_n sînt rădăcinile ecuației transcendente

$$J_0\,(\alpha_n a) = 0. \qquad (4.5)$$

Ecuațiile mișcării în teoria elasticității se reduc la o singură ecuație

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4.6)$$

unde σ_r și σ_φ reprezintă tensiunile normale radială și inelară, t — densitatea, u — deplasarea radială.
Considerăm că deformația de-a lungul axei este

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{și} \quad u_z = 0. \tag{4.7}$$

Folosind relațiile lui Hooke

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ik} - \frac{v}{1+v}\sigma_{ll}\,\delta_{ik}\right) + \alpha T\,\delta_{ik} \quad (i,k,l, = x,y,z),$$

putem exprima ecuația (4.6) prin deplasări; atunci ea capătă următoarea formă:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vartheta\,\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{4.8}$$

Soluția acestei ecuații trebuie să satisfacă condițiile inițiale

$$u(r,0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = 0 \tag{4.9}$$

și condițiile la limită

$$u(0,t) = 0 \ \text{și} \ \sigma_r(a,t) = 0. \tag{4.10}$$

Pentru a rezolva ecuația (4.8) folosim transformarea lui Laplace.

Ecuația transformată (4.8) este o ecuație Bessel neomogenă

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)\bar{u} = \vartheta\,\frac{T_0\,q\,I_1(qr)}{p\,I_0(qa)} \tag{4.11}$$

a cărei soluție ce satisface prima din condițiile (4.10) are forma

$$\bar{u} = AI_1(\sigma r) + \frac{\vartheta\,T_0\,c^2 q\,I_1(qr)}{p^2\left(\frac{c^2}{\varkappa} - p\right)I_0(qa)}, \qquad \sigma = \frac{P}{c}\cdot \tag{4.12}$$

Aici $I_0(x)$ și $I_1(x)$ reprezintă funcții Bessel modificate de spața întîi de ordinul zero și ordinul întîi.

Constanta A se obține cu ajutorul celei de-a doua condiții la limită (4.10), iar după substituirea în formula (4.12) obținem

$$\bar{u} = \vartheta T_0 \varkappa c^2\,\frac{[\rho a p^2 I_0(\sigma a) - \sigma 2 G I_1(\sigma a)]\,q I_1(qr) - [\rho a p^2 I_0(qa) - q 2 G I_1(qa)]\,\sigma I_1(\sigma r)}{p^2(c^2 - \varkappa p)\,I_0(qa)\,[\rho a p^2\,I_0(\sigma a) - \sigma 2\,G I_1(\sigma a)]}, \tag{4.13}$$

formula de inversare este definită de integrala

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{u}\,e^{pt}\,dp$$

Integrînd (4.13) aplicăm teorema reziduurilor [21], [22]. Zerourile numitorului funcției (4.13) se găsesc în punctele $p = 0$ și $p = \frac{c^2}{\varkappa}$ și în punctele definite de ecuațiile

$$I_0(qa) = 0, \tag{4.14}$$

$$\rho a p^2 I_0(\sigma a) - \sigma 2 g I_1(\sigma a) = 0. \tag{4.15}$$

Ecuația (4.14) are zerouri în punctele $q = i\alpha_n$ sau $p = -\varkappa\alpha_n^2$; numerele α_n sînt rădăcinile ecuației transcendente

$$J_0(\alpha_n a) = 0.$$

Ecuația (4.15) poate fi scrisă și sub altă formă

$$KI_1(x) - xI_0(x) = 0 \text{ unde } x = \frac{p}{c}a,\ K = \frac{2g}{\rho c^2} = \frac{1-2v}{1-v} < 1,$$

verificăm dacă există rădăcini reale. Pentru aceasta ecuația de mai sus o vom scrie sub formă de serie, folosind seriile funcției Bessel modificate

$$\left(\frac{K}{2} - 1\right)x + \left(\frac{K}{2\cdot 2!} - 1\right)\frac{x^3}{2^2\cdot 1!} + \left(\frac{K}{2\cdot 3!} - \frac{1}{2!}\right)\frac{x^5}{2^4\cdot 2!} + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{K}{2\cdot n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-2}(n-1)!} + \ldots = 0.$$

Deoarece $K < 1$, fiecare din coeficienți este mai mic decît zero și de aceea seria de mai sus, cu excepția lui $x = 0$, poate avea zerouri numai pentru rădăcinile imaginare ale lui x. Prin urmare ecuația (4.15) are rădăcini în punctele $p = i\omega_n$, iar numerele ω_n sînt rădăcinile ecuației transcendente

$$KJ_1\left(\omega_n \frac{a}{c}\right) - \omega_n \frac{a}{c} J_0\left(\omega_n \frac{a}{c}\right) = 0.$$

Trebuie să demonstrăm că ecuația (4.15) nu are rădăcini complexe. Notînd argumentul funcției cu z și folosind formulele de recurență

$$vJ_v(z) + zJ'_v(z) = z\,J_{v-1}(z),$$

ecuația (4.15) o putem scrie sub forma

$$K'J_1(z) + zJ'_1(z) = 0,$$

unde $0 < K' = 1 - K < 1$.

Folosind teorema [23]: *Dacă $v > -1$, sau $v = -1, -2, -3, \ldots$, atunci ecuația $\alpha J_v(z) + \beta zJ_v(z)$ are un număr infinit de rădăcini reale și nu are rădăcini complexe cu excepția cazului $\alpha/\beta + v < 0$, cînd această ecuație are două rădăcini complexe*, putem afirma că ecuația (4.15) nu are rădăcini complexe.

Acum vom demonstra că rădăcinile ecuațiilor (4.14) și (4.15) nu coincid. Folosind formula de recurență de mai sus, putem scrie ecuația (4.14) în felul următor:

$$J_1(z) + zJ'_1(z) = 0.$$

Trebuie să observăm că făcînd această transformare am adăugat rădăcina $z = 0$, însă acest fapt nu este important deoarece punctul $z = 0$ nu ne interesează, iar toate celelalte rădăcini nu se schimbă.

Acum rămîne doar să demonstrăm că sistemul de ecuații

$$K'J_1(z) + zJ_1'(z) = 0 \quad \text{și} \quad J_1(z) + zJ_1'(z) = 0,$$

nu are rădăcini care coincid. Folosim teorema lui Dikson [24]: *Cînd* $\nu > -1$, *iar* A, B, C, D *sînt astfel de constante încît* $AD \neq BC$, *atunci rădăcinile pozitive ale ecuațiilor* $AJ_\nu(z) + BzJ_\nu'(z) = 0$, $CJ_\nu(z) + DzJ_\nu'(z) = 0$ *nu coincid, cu excepția punctului* $z = 0$.

Pe baza acestei teoreme ajungem la concluzia că rădăcinile ecuațiilor (4.14) și (4.15) nu coincid.

Trecem la calcularea reziduurilor deplasării. Reziduul în punctul $p = 0$.

$$\text{Rez}\,(p = 0) = \vartheta\, T_0\,(1 - \nu)\, r$$

în punctul $p = \dfrac{C^2}{\varkappa}$

$$\text{Rez}\left(p = \frac{C^2}{\varkappa}\right) = 0$$

în punctul $p = -\varkappa\alpha_n^2$

$$\text{Rez}\,(p = -\varkappa\alpha_n^2) = -\frac{2\,\vartheta T_0 \varkappa c^2}{a} \exp\left[-\varkappa\alpha_n^2 t\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{2GI_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\, r\right)}{\alpha_n^2\,(c^2 + \varkappa^2\alpha_n^2)\left[\rho a \varkappa^2 \alpha_n^2 I_0\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\, a\right) - 2GI_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\, a\right)\right.} + \exp\left[-\varkappa\alpha_n^2 t\right] \frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n^2\,(c^2 + \varkappa^2\alpha_n^2)\, J_1(\alpha_n a)},$$

în punctul al n-lea $p = i\omega_n$

$$\text{Re}\,[\text{Rez}\,(p = i\omega_n)] = \frac{\vartheta T_0\, \varkappa c^2}{a} \frac{\left[\rho a \omega_n^2 F_n^{0.0}(\omega_n, t) + 2G\,\beta_n \dfrac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)} F_n^{1.0}(\omega_n, a, t)\right]}{\omega_n\,(c^4 + \varkappa^2\omega_n^2)\left[2\,(c^2\rho - G)\,\delta_n J_0(\delta_n a) - \rho a\,\omega_n^2 J_1(\delta_n a)\right]};$$

în care se folosesc notațiile [25] (fig. 6)

$$M_n(x) = \sqrt{ber_n^2(x) + bei_n^2(x)},$$

$$\Theta_n(x) = \text{arctg}\, \frac{bei_n(x)}{ber_n(x)},$$

$$F_n^{1.0}(\omega_n, a, t) = \varkappa\omega_n \cos\left[\omega_n t + \Theta_1(\beta_n a) - \Theta_0(\beta_n a) - \frac{\pi}{4}\right] +$$

$$+ c^2 \sin\left[\omega_n t + \Theta_1(\beta_n a) - \Theta_0(\beta_n a) - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$F_n^{0.0}(\omega_n, t) = \varkappa\omega_n \cos(\omega_n t) + c^2 \sin(\omega_n t),$$

$$\delta_n = \frac{\omega_n}{c}, \quad \beta_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{\varkappa}}\,.$$

Funcțiile $\Theta_n(x)$ și $M_n(x)$ se găsesc în tabele. Date bibliografice amănunțite se pot găsi în ghidul cu tabele [26].

Avînd reziduurile calculate putem scrie formula care descrie deplasările radiale.

$$
\begin{aligned}
u(r,t) = \vartheta T_0 \Bigg\{ &(1-v)\,r - \frac{2c^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\,[-\varkappa\,\alpha_n^2 t]\,\frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n^2 (c^2+\varkappa^2\alpha_n^2)\,J_1(\alpha_n a)} - \\
&- \frac{2c^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\,[-\varkappa\alpha_n^2 t]\,\frac{2\,G I_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,r\right)}{\alpha_n^2(c^2+\varkappa^2\alpha_n^2)\left[\rho a\varkappa^2\alpha_n^2 I_0\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,a\right) - 2GI_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,a\right)\right]} + \\
&+ \frac{\varkappa c^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\rho a\omega_n^2 F_n^{0.0}(\omega_n,t) + 2G\,\dfrac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)}\,F_n^{1.0}(\omega_n,a,t)\right]}{\omega_n(c^4+\varkappa^2\omega_n^2)\,[2(c^2\rho-G)\,\delta_n J_0(\delta_n a) - \rho a\omega_n^2 J_1(\delta_n a)]}\,J_1(\delta_n r)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Exprimînd deplasările radiale prin deplasări, obținem formula

$$
\begin{aligned}
\sigma_r(r,t) = \vartheta T_0 c^2 \Bigg\{ &\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\,[-\varkappa\alpha_n^2 t]\,\frac{2GJ_1(\alpha_n r) + \rho\varkappa^2\alpha_n^3 rJ_0(\alpha_n r)}{r\alpha_n^2(c^2+\varkappa^2\alpha_n^2)\,J_1(\alpha_n a)} - \\
&- \frac{2}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\,[-\varkappa\alpha_n^2 t]\,\frac{2\,G\left[\rho ac\varkappa\alpha_n^2 I_0\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,r\right) - 2\,GI_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,r\right)\right]}{\alpha_n^2(c^2+\varkappa^2\alpha_n^2)\left[\rho ac\varkappa\alpha_n^2 I_0\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,a\right) - 2GI_1\left(\dfrac{\varkappa\alpha_n^2}{c}\,a\right)\right]} + \\
&+ \frac{2\,G\varkappa c}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dfrac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)}\,F_n^{1.0}(\omega_n,a,t)\,[\rho\,\omega_n^2 r\,J_0(\delta_n r) - 2GJ_1(\delta_n r)]}{\omega_n^2(c^4+\varkappa^2\omega_n^2)\,[2(c^2\rho-G)\,J_0(\delta_n a) - \rho a\omega_n^2 J_1(\delta_n a)]} + \\
&+ \frac{\rho\varkappa c}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n^{0.0}(\omega_n,t)\,[\rho\,\omega_n^2 r\,J_0(\delta_n r) - 2GJ_1(\delta_n r)]}{(c^4+\varkappa^2\omega_n^2)\,[2(c^2\rho-G)\,J_0(\delta_n a) - \rho a\,\omega_n^2 J_1(\delta_n a)]}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Din această formulă decurge că tensiunile normale satisfac a doua din condițiile (4.10), deoarece expresia din paranteză din ultimele două serii pentru $r=a$ sînt nule aceste fiind echivalente cu ecuația (4.15).

Cunoscînd deplasările $u\,(r,\,t)$, putem scrie ușor formulele respective ale tensiunilor σ_φ și σ_z și de aceea aici putem să nu le calculăm.

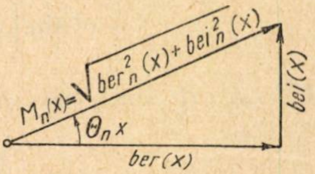


Fig. 6

În calculele numerice se poate constata (întrucît există tabele de funcții corespunzătoare) că mai avantajoasă va fi o altă formă a formulelor (4.16) și (4.17). La numărătorii seriilor apar produsele

$$\frac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)} F_n^{1.0}(\omega_n, a, t).$$

Acest produs îl vom prezenta sub formă dezvoltată

$$\frac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)} \cos\left[\Theta_1(\beta_n a) - \Theta_0(\beta_n a) - \frac{\pi}{4}\right]\left[\varkappa\omega_n \cos(\omega_n t) + c^2 \sin(\omega_n t)\right] +$$

$$+ \frac{M_1(\beta_n a)}{M_0(\beta_n a)} \sin\left[\Theta_1(\beta_n a) - \Theta_0(\beta_n a) - \frac{\pi}{4}\right]\left[c^2 \cos(\omega_n t) + \varkappa\omega_n \sin(\omega_n t)\right].$$

Dacă această sumă se înmulțește cu $\frac{2}{\beta_n a}$, atunci obținem tabele de funcții care se întîlnesc în electrotehnică (Mc Lachlan, loc. cit.)

$$W(x) = \frac{2}{x}\frac{M_1(x)}{M_0(x)} \cos\left[\Theta_1(x) - \Theta_0(x) - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{— funcție de disipare}$$

$$\Pi(x) = \frac{2}{x}\frac{M_1(x)}{M_0(x)} \sin\left[\Theta_1(x) - \Theta_0(x) - \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{— funcție de penetrare}$$

Formulele de mai sus sînt însă greoaie. În cazul cînd ne interesează soluția pentru valorile mici ale timpului, putem folosi relațiile asimptotice.

După cum se știe, cînd parametrul de transformare $p \to \infty$, timpul $t \to 0$, atunci funcțiile Bessel modificate care apar în formula (4.13) pot fi înlocuite cu formula asimptotică

$$I_0(x) \sim I_1(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x .$$

Trebuie însă să ne mărginim la straturile superficiale, deoarece în alt caz nu putem aplica această formulă asimptotică.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

РЕЗЮМЕ

В работе даются решения некоторых задач термоупругости в неустановившемся температурном режиме.

Применяя термоупругий потенциал, являющийся частным решением уравнений термоупругости, определяются напряжения в бесконечно длинной цилиндрической трубе, подверженной влиянию осесим-

метричного температурного поля, постоянного по длине трубы. Рассматриваются также динамические задачи термоупругости в полупространстве и термоупругости в кольцевом цилиндре, в которых исследуются и динамические эффекты неустановившегося температурного режима.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA THERMOÉLASTICITÉ

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur indique les solutions de certains problèmes de thermoélasticité, en régime non stationnaire de température.

En utilisant un potentiel thermoélastique constituant une solution particulière des équations de la thermoélasticité, l'auteur détermine les tensions dans un tube cylindrique de longueur infinie, soumis à un champ de température axial symétrique, constant sur toute la longueur du tube. Il traite, en outre, un problème dynamique de la thermoélasticité en semi-espace, ainsi qu'un problème dynamique de la thermoélasticité dans un cylindre circulaire, où l'on étudie également les effets dynamiques du régime non stationnaire de température.

BIBLIOGRAFIE

1. J. M. C. DUHAMEL, *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de températures dans les corps solides. Mémoires présentés par divers savants*, 1838.
2. F. NEUMANN, Abh. Akad. Wiss. Berlin (1841); *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper.* Leipzig, 1885.
3. M. T. HUBER, *O natezeniach wywolanych nierownym ograzaniem wewnetrznej i zewnestrznej sciany rury.* Czasopismo Techniczne, Lwow, 1906; *O naprezeniach wywolanych nierownym ogrzaniem wewnetrznej i zewnstrznej sciany rury.* Pisma, **II**, PWN. Warszawa, 1956.
4. A. LEON, *Zur Theorie der Wärmespannungen runder Schornsteine.* Allg. Ing. Zeitung, **8**, *12, 14* (1904); *Schornsteinwärmespannungen*, Z. V.D.I. *51*, 743 (1907).
5. R. LORENZ, *Temperaturspannungen in Hohlzylindern*, Z. V.D.I. *51*, 743 (1907).
6. G. EICHELBERG, *Forschungsarbeiten*, *263* (1923).
7. J. N. GOODIER, *On the integration of the thermo-elastic equations.* Phil. Mag. (1937).
8. E. MELAN und H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder.* Wien, Springer-Verlag, 1953.
9. W. OLSZAK, *Autocontraintes des milieux anisotropes.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Cracovie, **1**, *1* (1950).
10. J. NOWINSKI, Thermal Stresses in a Thick-Walled Cylinder of Variable Elastic Properties, AMS, V, 4 (1953).
11. KAZUC YAMADA, *On Transient Thermal Stresses in a Thin Circular Cylinder.* Proceedings of the Fifth Japan National Congress for Appl. Mech., 1955, Tokyo.
12. R. TROSTEL, *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt.* Ing.-Arch., **24**, *1* (1956).
13. A. EINSTEIN, Ann. d. Phys., **22**, *180*, 800 (1907).
14. P. DEBAY, *Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und Elektrizität*, herausgegeben von. M. Planck, Leipzig, 1914.

15. F. Seitz, *Modern theory of solids.* New York, 1940.
16. E. Melan, *Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder.* Österreichisches Ingenieur-Archiv, **IX**, *2—3* (1955).
17. H. C. Carlskaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids.* Oxford Press, 1950.
18. W. Derski, *Nieustalone naprezenia cieplne w nieskonczonej rurze gruboscienne j.* Warszawa, AIL, **IV**, 2 (1958); *The State of Stress in a Thin Circular Ring, due to a Non-Steady* Temperature Field. AMS, **X**, 3 (1958).
19. Jahnke-Emde, *Tafeln höherer Funktionen.* Leipzig, 1952.
20. W. Nowacki, *A Dynamical Problem of Thermoelasticity.* AMS, **IX**, 3 (1957).
21. D. W. Fox, C. Pucci, *The Dirichlet Problem for the Wave Equation. Annali di Matematica pura ed applicata.* **IV**, XLVI (1958).
22. В. И. Даниловская, *Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы.* ПММ, **XIV**, *3* (1950).
23. C. J. Tranter, *Integral Transforms in Mathematical Physics.* London, 1950.
24. McLachlan, *Bessel Functions.* Oxford Press, 1955.
25. W. Pogorzelski, *Analiza Matematyczna.* **IV**. Czytelnik, 1951.
26. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.*
27. А. В. Лебедев, Р. М. Федорова, *Справочник по математическим таблицам.* Москва, 1956.

STUDII

ELASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

PROBLEMA DINAMICĂ A TORSIUNII

(APLICAȚII)

DE

MIRCEA MIȘICU

Pe baza rezultatelor cu caracter general obținute într-o lucrare anterioară [1] în cele ce urmează se expun o serie de aplicații în scopul de a ilustra posibilitățile metodei stabilite și a permite comparația cu rezultatele calculului static. În vederea unor aplicații ce s-ar putea face pornind de la lucrarea [1], trimitem la bibliografia menționată în [1] care ar putea furniza un bogat material susceptibil de a fi extins în cazul dinamic.

1. BARĂ CU SECȚIUNE PLINĂ CIRCULARĂ

Vom trata întîi cazul barei cu secțiune circulară de rază R care prezintă interesul de a corespunde soluției generale folosite în cazul dinamicii barelor subțiri. Această soluție, deși valabilă numai în acest caz, este folosită în cadrul rezistenței materialelor și pentru piese cu secții diferite de cerc.

Soluția se limitează la următoarele valori

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \Phi_1 = W_1' = 0,$$

astfel că

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{T}_1 = 0,\ \mathcal{F} = \mathcal{N} = 0,\ \mathcal{M} = \mathcal{E} = 0,\ \mathfrak{D} = \mu I_0 = \mu \frac{R^2}{4i} \int \bar{\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} = \pi \mu \frac{R^4}{2},$$

$$M_t = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \cdot \pi\mu \frac{R^4}{2},\ U = -\tau y,\quad v = \tau x,\quad w = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{zx} = -\mu \frac{\partial \tau}{\partial z} y,\ \tau_{zy} = \mu \frac{\partial \tau}{\partial z} x.$$

Dacă este dat momentul M_t^0 pentru $z = L$ avem că

$$M_t = \frac{\partial \tau}{\partial z} M_t^0 / (\partial \mathfrak{T} / \partial z)_0 .$$

Raportul care apare în expresia de mai sus defineşte efectul dinamic de-a lungul barei. În cazul inelului cu gaură circulară concentrică de rază R_0 se va lua $I_0 = \pi\mu\,(R^4 - R_0^4)/2$.

2. BARĂ CU SECŢIUNE CIRCULARĂ ARMATĂ DUPĂ O SECŢIE INTERIOARĂ CIRCULARĂ NECONCENTRICĂ

Acest caz este tratat static în lucrarea citată a lui N. I. Mushelişvili (p. 555—560) după o lucrare originală a lui I. V. Vekua şi A. K. Ruhadze. Vom considera transformarea conformă pe cercul unitate

$$z = x + iy = \omega\,(\xi) = \xi/(1 - a\xi).$$

Contururile L_1, L_2 devin prin această transformare cercurile concentrice γ_1, γ_2 de rază ρ_1, ρ_2; $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{a}$ astfel că

$$r_1 = \frac{\rho_1}{1 - a^2\rho_1^2}, \quad r_2 = \frac{\rho_2}{1 - a^2\rho_2^2}, \quad c_1 = \frac{a\rho_1^2}{1 - a^2\rho_1^2}, \quad c_2 = \frac{a\rho_2^2}{1 - a^2\rho_2^2}, \quad l = c_2 - c_1,$$

relaţii din care se deduce

$$a = \frac{l}{\sqrt{(r_1^2 - r_2^2)^2 - 2\,l^2\,(r_1^2 + r_2^2) + l^4}},$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{1 + 4\,r_1^2\,a^2} - 1}{2\,r_1\,a^2}; \quad \rho_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\,r_2^2\,a^2} - 1}{2\,r_2\,a^2}.$$

Fie (φ_1, φ_2) funcţiile de torsiune în domeniile S_1 şi S_2. Vom avea condiţiile la limită

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)_2 = y\,n_x - xn_y = -\,\mathcal{Re}\,\bar{n}\,i\,\mathfrak{z}; \text{ pe } L_2.\ (\varphi_0)_1 = (\varphi_0)_2 & \text{pe } L_1 \\ \mu_2 \dfrac{\partial}{\partial n}(\varphi_0)_2 - \mu_1 \dfrac{\partial}{\partial n}(\varphi_0)_1 = (\mu_2 - \mu_1)\,(yn_x - xn_y) & \text{pe } L_1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_2 = \mathcal{Re}\left\{\frac{1 - 2\sigma}{2}\,\bar{n}g_0\,(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}}\,g_0\,(\mathfrak{z})\right\} \qquad \text{pe } L_2$$

$$(W_1')_1 + (\varphi_1)_1 = (W_1')_2 + (\varphi_1)_2 \qquad \text{pe } L_1$$

$$\mu_2 \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1)_2 - \mu_1 \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1)_1 = \mu_2 \mathcal{R}e\left\{\frac{1-2\sigma}{2}\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right\}_2 -$$

$$- \mu_1 \mathcal{R}e\left\{\frac{1-2\sigma}{2}\bar{n}\, g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right\}_1 \qquad \text{pe } L_1$$

$$g_0(\mathfrak{z}) = \int d\mathfrak{z}\, f_0(\mathfrak{z}).$$

Din problema statică se obțin următoarele valori ale funcțiilor complexe de torsiune:

$$(f_0)_1 = \frac{i c_2 \zeta}{1 - a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} a^{k-1}\cdot \zeta^k = \sum_{k=1}^{\infty} i\,(\zeta a)^k \mathfrak{A}_k;\ \ \mathfrak{A}_k = \frac{1}{a}\left(l\nu\ \frac{1+\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} + c_2\right)$$

$$(f_0)_2 = \frac{i c_2 \zeta}{1 - a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k a^{k-1}\zeta^k}{1-\nu\alpha^k} - il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2k}\cdot a^{k-1}}{1-\nu\alpha^k}\cdot\frac{1}{\zeta^k} = \sum_{k=1}^{\infty} i\,(\zeta a)^k \mathfrak{B}_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(a\zeta)^k}\mathcal{C}_k;\quad \mathcal{C}_k = \frac{l\nu}{a}\frac{(\rho_1 a)^{2k}}{1-\nu\alpha^k};\quad \mathfrak{B}_k = \frac{1}{a}\left(l\nu\frac{\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} + C_2\right)$$

$$\alpha = (\rho_1/\rho_2)^2; \qquad \nu = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$$

corespunzătoare primelor trei condiții la limită. În cazul de față, deoarece

$$d\mathfrak{z} = d\,\frac{\zeta}{1-a\zeta} = \frac{d\zeta}{(1-a\zeta)^2} = d\zeta \sum_{1}^{\infty} m\,(a\zeta)^{m-1},$$

avem

$$(g_0(\mathfrak{z}))_1 = \int d\zeta\cdot i\cdot \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m\,\mathfrak{A}_k\,(a\zeta)^{m+k-1} = \frac{i}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m\,\mathfrak{A}_k}{m+k}\cdot(a\zeta)^{m+k}.$$

De asemenea, se deduce că

$$(g_0(\mathfrak{z}))_2 = i\int d\zeta \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m\,(\mathfrak{B}_k\,(a\zeta)^{m+k-1} - \mathfrak{C}_k\,(a\zeta)^{m-k-1}) =$$

$$= \frac{i}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{m+k}\mathfrak{B}_k\,(a\zeta)^{m+k} - \frac{m}{m-k}\,\mathfrak{C}_k\,(a\zeta)^{m-k}\right].$$

Pentru obținerea funcțiilor $(\varphi_1)_1$, $(\varphi_1)_2$ vom scinda condițiile la limită în modul următor:

$$(\psi_1')_2 = \frac{1-2\sigma_2}{4}\,\mathcal{R}e\, i\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_2 \qquad \text{pe } L_2;$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[(\varphi_1'')_2 + \frac{1+2\sigma_2}{4}\,\mathcal{R}e\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_2\right] = 0 \qquad \text{pe } L_2$$

$$(\varphi_1'')_1 = (\varphi_1'')_2 \text{ pe } L_1$$

$$\frac{\partial (W_1')_1}{\partial s} + \frac{\partial (\psi_1')_1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s}(W_1')_2 + \frac{\partial}{\partial n}(\psi_1')_2 = (\varphi_1'')_1 = (\varphi_1'')_2 \qquad \text{pe } L_1$$

$$\mu_2(\psi_1')_2 - \mu_1(\psi_1')_1 = \mu_2\frac{1-2\sigma_2}{4}\,\mathcal{R}e\, i\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_2 - \mu_1\frac{1-2\sigma_1}{4}\,\mathcal{R}e\, i\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_1 \quad \text{pe } L_1$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\Bigg[\mu_2(\varphi_1'')_2 - \mu_1(\varphi_1'')_1 + \mu_2\frac{1+2\sigma_2}{4}\,\mathcal{R}e\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_2 -$$

$$- \mu_1\frac{1+2\sigma_1}{4}\,\mathcal{R}e\,\bar{\mathfrak{z}}\,(g_0(\mathfrak{z}))_1\Bigg] = 0 \qquad \text{pe } L_1.$$

Vom nota prin σ_1 cercul $|\zeta| < \rho_1$ iar prin σ_2 inelul $\rho_1 < |\zeta| < \rho_2$ și vom pune

$$(f_1'(\zeta))_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k' + iB_k')\zeta^k \qquad \text{în } \sigma_1,$$

$$(f_1''(\zeta))_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k' + iD_k')\,\zeta^k \qquad \text{în } \sigma_1,$$

$$\mathcal{R}e\,(f_1''(\zeta))_1 = (\varphi_1'')_1; \qquad J\,(f_1'(\zeta))_1 = (\psi_1')_1,$$

$$(f_1'(\zeta))_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(A_k'' + iB_k'')\,\zeta^k \qquad \text{în } \sigma_2,$$

$$(f_1''(\zeta))_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(C_k'' + iD_k'')\,\zeta^k \qquad \text{în } \sigma_2,$$

$$\mathcal{R}e\,(f_1''(\zeta))_2 = (\varphi_1'')_2; \qquad J\,(f_1'(\zeta))_2 = (\psi_1')_2,$$

$$\zeta = \rho e^{i\vartheta}.$$

Se deduce că

$$(\psi_1')_1 = B_0' + \sum_1^{\infty}\rho^k(A_k'\sin k\vartheta + B_k'\cos k\vartheta),$$

$$(\varphi_1'')_1 = C_0' + \sum_1^{\infty}\rho^k(C_k'\cos k\vartheta - D_k'\sin k\vartheta),$$

$$(\psi_1')_2 = B_0'' + \sum_1^{\infty}[\rho^k(A_k''\sin k\vartheta + B_k''\cos k\vartheta) + \rho^{-k}(-A_k''\cdot\sin k\vartheta + B_k''\cos k\vartheta)],$$

$$(\varphi_1'')_2 = C_0'' + \sum_1^{\infty}[\rho^k(C_k''\cos k\vartheta - D_k''\sin k\vartheta) + \rho^{-k}(C_{-k}''\cos k\vartheta + D_{-k}''\sin k\vartheta)].$$

Prima condiție la limită din grupul de relații de mai sus se scrie

$$(\psi_1')_2 = \frac{1-2\sigma_2}{4} \mathcal{R}e \frac{i\overline{\zeta}}{1-a\overline{\zeta}} \cdot \frac{i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m}{m+k} \mathfrak{B}_k (a\zeta)^{m+k} - \frac{m}{m-k} \mathfrak{C}_k (a\zeta)^{m-k} \right] =$$

$$= \frac{1-2\sigma_2}{4\,a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \left[-\frac{m}{m+k} \cdot \mathfrak{B}_k [(\rho_2 a)^{2(m+k)-M} + (\rho_2 a)^{2\,(m+k)+M}] + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{m-k} \mathfrak{C}_k ((\rho_2 a)^{2\,(m-k)-M} + (\rho_2 a)^{2\,(m-k)+M}) \right] \cos M\vartheta.$$

Așadar

$$A_0'' = 0, \;\; \rho_2^k A_k'' + \rho_2^{-k} A_{-k}'' = 0,$$

$$\rho_2^M B_M'' + \rho_2^{-M} B_{-M}'' = \sum_{m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-2\sigma_2}{4\,a^2} \left\{ -\frac{m}{m+k} \mathfrak{B}_k \, [(\rho_2 a)^{2\,(m+k)-M} + \right.$$

$$\left. + (\rho_2 a)^{2\,(m+k)+M}] + \frac{m}{m+k} \mathfrak{C}_k \, [(\rho_2 a)^{2\,(m-k)-M} + (\rho_2 a)^{2\,(m-k)+M}] \right\}.$$

Din condiția de continuitate L_1 avem

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\psi_1')_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} (\psi_1')_2, \qquad \rho = \rho_1,$$

și deci

$$k\rho_1^{k-1} A_k' = k\rho_1^{k-1} A_k'' + k\rho_1^{-\,(k+1)} \cdot A_{-k}'' \;\text{ sau }\; A_k' = A_k'' + \rho_1^{-2k} A_{-k}'',$$

$$k\rho_1^{k-1} B_k' = k\rho_1^{k-1} \cdot B_k'' - k\rho_1^{-(k+1)} \cdot B_{-k}'' \;\text{ sau }\; B_k' = B_k'' - \rho_1^{-2k} B_{-k}''.$$

De asemenea pe conturul L_1 mai subzistă condiția

$$\mu_2 (\psi_1')_2 - \mu_1 (\psi_1')_1 = \sum_{k=1} \left\{ \frac{\mu \cdot (1-2\sigma_2)\, \mathfrak{B}_k - \mu\,(1-2\sigma_1)\, \mathfrak{A}_k}{4\,a^2} \times \right.$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \left[-\frac{m}{m+k} ((\rho_1 a)^{2\,(m+k)-M} + (\rho_1 a)^{2\,(m+k)+M}) \right] +$$

$$\left. + \frac{\mu_2 (1-2\sigma_2)}{4\,a^2} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_k \, [(\rho_1 a)^{2\,(m-k)-M} + (\rho_1 a)^{2\,(m-k)+M}] \right\} \cos M\vartheta \cdot \frac{m}{m-k},$$

care în baza expresiilor pentru $(\psi_1')_1$ şi $(\psi_1')_2$ se mai scriu

$$A_0' = A_0'' = 0, \qquad \mu_2\left(\rho_1^k A_k'' - \rho_1^{-k} A_{-k}''\right) - \mu_1 \rho_1^k A_k' = 0,$$

$$\mu_2\left[\rho_1^M B_M'' + \rho_1^{-M} B_{-M}''\right] - \mu_1 \rho_1^M B_M' = (\mu_2 - \mu_1)\, \rho_1^M B_M'' + (\mu_1 + \mu_2)\, \rho_1^{-M} B_{-M}'' =$$

$$= \sum_{k=1} \frac{\mu_2 (1 - 2\sigma_2)\, \mathfrak{B}_k - \mu_1 (1 - 2\sigma_1)\, \mathfrak{A}_k}{4\,a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \Bigg[- \frac{m}{m+k} \left((\rho_1 a)^{2\,(m+k)-M} + \right.$$

$$\left. + (\rho_1 a)^{2\,(m+k)+M} \right) \Bigg] + \frac{\mu_2 (1 - 2\sigma_2)}{4\,a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k\, (\rho_1 a)^{2\,(M-k)-M} +$$

$$+ (\rho_1 a)^{2\,(m-k)+M}.$$

Pentru determinarea coeficienţilor B_M'', B_{-M}'' există deci sistemul de ecuaţii

$$\rho_2^{2M} B_M'' + B_{-M}'' = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ - \frac{m}{m+k}\, \mathfrak{B}_k\, (\rho_2 a)^{2\,(m+k)} \cdot \frac{1 - 2\sigma_2}{4\,a^2} \cdot \rho_2^{2M} \cdot a^M \cdot [1 +$$

$$+ (\rho_2 a)^{-2M}] + \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k\, (\rho_2 a)^{2\,(m-k)}\, \rho_2^{2M}\, a^M \cdot (1 + (\rho_2 a)^{2-M}) \Bigg\} = \mathfrak{M}_M\, \rho_2^{2M}\, a^{M-2}$$

$$\nu \rho_1^{2M} B_M'' + B_{-M}'' = \frac{\nu'}{4\,a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(- \frac{m}{m+k} \right) \mathfrak{A}_k\, (\rho_1 a)^{2\,(m+k)}\, (\rho_1)^{2M}\, a^M\, [1 + (a\rho_1)^{-2M}]$$

$$+ \frac{\nu''}{4\,a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k\, (\rho_1 a)^{2\,(m-k)} \cdot \rho_1^{2M}\, a^M\, [1 + (\rho_1 a)^{-2M}] = \mathfrak{N}_M\, \nu/(\rho_1)^{2M}\, a^{M-2},$$

unde

$$\nu' = \frac{\mu_2 (1 - 2\sigma_2)\, \mathfrak{B}_k - \mu_1 (1 - 2\sigma_1)\, \mathfrak{A}_k}{(\mu_1 + \mu_2)\, \mathfrak{A}_k} = \nu\eta'\,; \qquad \nu'' = \frac{\mu_2 (1 - 2\sigma_2)}{\mu_1 + \mu_2} = \nu\eta''$$

$$\mathfrak{M}_M = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2\sigma_2}{4} \left[- \frac{m}{m+k}\, \mathfrak{B}_k\, (\rho_2 a)^{2\,(m+k)} + \frac{m}{m+k}\, \mathfrak{C}_k\, \varphi_2^{\,2\,(m-k)} \right] (1 + (\rho_2 a)^{-2M}),$$

$$\mathfrak{N}_M = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \eta' \left[- \frac{m}{m+k}\, \mathfrak{A}_k\, (\rho_1 a)^{2\,(m+k)} \right] + \eta'' \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k\, (\rho_1 a)^{2\,(m-k)} \right\} (1 + (\rho_1 a)^{-2M}),$$

avînd soluţiile

$$B_M'' = \frac{\mathfrak{M}_M - \alpha_\nu^M\, \mathfrak{N}_M}{1 - \nu\, \alpha^M}\, a^{M-2}, \quad B_M'' = - \nu\, \rho_1^{2M} \frac{\mathfrak{M}_M - \mathfrak{N}_M}{1 - \nu\, \alpha^M}\, a^{M-2},$$

$$B_M' = B_M'' - \rho_1^{-2M}\, B_{-M}'' = \frac{\mathfrak{M}_M - \alpha_\nu^M\, \mathfrak{N}_M + \nu\, (\mathfrak{M}_M - \mathfrak{N}_M)}{1 - \nu\alpha^M}\, a^{M-2},$$

care se mai scriu sub forma

$$B''_M = \mathfrak{M}_M\, a^{M-2} + \frac{\nu \alpha^M - \mathfrak{L}_M\, a^{M-2}}{1 - \nu \alpha^M},\quad \mathfrak{L}_M = \mathfrak{M}_M - \mathfrak{N}_M,$$

$$B''_M = -\nu\, \mathfrak{L}_M \frac{\rho_1^{2M}}{1 - \nu \alpha^M}\, a^{M-2},\quad B'_M = \mathfrak{M}_M\, a^{M-2} + \nu \mathfrak{L}_M \frac{1 + \alpha^M}{1 - \nu \alpha^M}\, a^{M-2}.$$

Funcțiile de tensiune $(f'_1)_1$, $(f'_1)_2$ vor avea expresiile convergente pentru $|\zeta| \leqslant \rho_2$

$$(f'_1(\xi))_1 = i \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left(\mathfrak{M}_M + \nu\, \mathfrak{L}_M \frac{1 + \alpha^M}{1 - \nu \alpha^M} \right) (a\xi)^M,$$

$$(f'_1(\xi))_2 = i \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left(\mathfrak{M}_M + \frac{\nu \alpha^M \mathfrak{L}_M}{1 - \nu \alpha^M} \right) (a\xi)^M - i \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\, \mathfrak{L}_M \frac{\nu (\rho_1 a)^{2M}}{1 - \nu \alpha^M}\, (a\zeta)^{-M}.$$

Să rezolvăm acum problema dată de restul de condiții la limită și anume

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\varphi''_1)_2 + \frac{1+2\sigma_2}{4}\, \mathcal{R}e\, \bar{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (a\bar{\zeta})^n \frac{i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+k}\, \mathfrak{B}_k (a\zeta)^{m+k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k (a\zeta)^{m-k} \right) \right] = 0, \quad \rho = \rho_2,$$

$$(W'_1)_1 + (\varphi''_1)_1 = (w'_1)_2 + (\varphi''_1)_2, \qquad \rho = \rho_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\mu_2 (\varphi''_1)_2 - \mu_1 (\varphi''_1)_1 + \mu_2 \frac{1+2\sigma_2}{4}\, \mathcal{R}e\, \bar{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (a\bar{\zeta})^n \frac{i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{m}{m+k}\, \mathfrak{B}_k (a\zeta)^{m+k} - \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k (a\zeta)^{m-k} \right] - \mu_1 \frac{1+2\sigma_1}{4}\, \mathcal{R}e\, \bar{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (a\bar{\zeta})^n \frac{i}{a} \times$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{m+k}\, \mathfrak{A}_k (a\zeta)^{m+k} \right] = 0, \quad \rho = \rho_1.$$

Prima condiție se mai scrie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k (C''_k \cos k\vartheta - D''_k \sin k\vartheta)\, \rho_2^{k-1} + \frac{1+2\sigma_2}{4}\, \mathcal{R}e \sum_{n=1}^{\infty} (a e^{-i\vartheta})^n \frac{i}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \times$$

$$\times \left[\frac{m}{m+k}\, \mathfrak{B}_k (a e^{i\vartheta})^{m+k} (m+k+n)\, \rho_2^{m+k+n-1} - \frac{m}{m-k}\, \mathfrak{C}_k (a e^{i\vartheta})^{m-k} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (m-k+n)\, \rho_2^{m-k+n-1} \right] = 0,$$

sau

$$\sum_{=-\infty}^{\infty} k\,(C_k''\cos k\vartheta - D_k''\sin k\vartheta)\,\rho_2^{k-1} - \frac{1+2\sigma_2}{4\,a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{m}{m+k}\,\mathfrak{B}_k\,(m+k+n)\times$$

$$\times\,\rho_2^{m+k+n-1}\cdot a^{m+k+n}\cdot\sin\,(m+k-n)\vartheta - \frac{m}{m-k}\,\mathfrak{C}_k\,(m-k+n)\,\rho_2^{m-k+n-1}\cdot$$

$$\cdot\,a^{m-k+n}\cdot\sin\,(m-k+n)\vartheta\Bigg\} = 0.$$

Cu $C_k' = 0$ condiția precedentă se exprimă astfel

$$-\sum_{M=1}^{\infty} M\,(D_M''\,\rho_2^{M-1} + D_{-M}''\,\bar{\rho}_2^{(M+1)}) = \frac{1+2\sigma_2}{4a}\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{m}{m+k}\,\mathfrak{B}_k[(2(m+k)-M)\times$$

$$\times\,\rho_2^{2\,(m+k)-M-1}\cdot a^{2\,(m+k)-M-1} + (2\,(m+k)+M)\,\rho_2^{2\,(m+k)+M-1}\cdot a^{2\,(m+k)+M-1}] -$$

$$-\,\frac{m}{m-k}\,\mathfrak{C}_k\,[(2\,(m-k)-M)\,\rho_2^{2\,(m-k)-M-1}\cdot a^{2\,(m-k)-M-1} +$$

$$+\,(2\,(m-k)+M)\,\rho_2^{2(m-k)+M-1}\times a^{2\,(m-k)+M-1}]\Bigg\}\cdot\sin M\vartheta.$$

În ultima relație s-a neglijat constanta pentru $M = 0$. Condiția de continuitate pe L_1 se scrie

$$\sum_{1}^{\infty}\rho_1^M(-D_M'\sin M\vartheta) = \sum_{1}^{\infty}[\rho_1^M(-D_M'') + \rho_1^{-M}D_{-M}'']\sin M\vartheta + (W_1')_2 - (W_1')_1.$$

Luînd C_M' deoarece

$$\frac{1}{4}\,\bar{\mathfrak{z}}\,[(g_0)_2 - (g_0)_1] = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4a}\,(a\bar{\zeta})^l\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\left(-\frac{i}{a}\right)\frac{m}{m-k}\,\mathfrak{C}_k\,(a\zeta)^{m-k} +$$

$$+\,\frac{i}{a}\cdot\frac{m}{m+k}\,(\mathfrak{P}_k - \mathfrak{A}_k)\,(a\zeta)^{m+k}\Bigg] = (W_1')_2 - (W_1')_1,$$

avem

$$-\,\rho_1^{2M}\cdot D_M' = -\,\rho_1^{2M}\cdot D_M'' + D_{-M}'' + \gamma_M\cdot\rho_1^{2M}\cdot a^{M-2},$$

$$\gamma_M = \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathfrak{C}_k\,\frac{m}{m-k} + (\mathfrak{A}_k - \mathfrak{B}_k)\,\frac{m}{m+k}\right](a\rho_1)^{2l}\left(1 + \frac{1}{(a\rho_1)^{2M}}\right).$$

Ultima condiție la limită devine

$$-\sum_{M=1}^{\infty} M\,[\mu_2\,(D''_M\,\rho_1^{M-1}+D''_{-M}\,\rho_1^{-(M+1)})-\mu_1\,D'_M\,\rho_1^{M-1}]=\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu_2\,(1+2\sigma_2)\,\mathfrak{B}_k-\mu_1\,(1+2\sigma_1)\,\mathfrak{A}_k}{4a}\cdot\frac{m}{m+k}\,[(2\,(m+k)-M)\,\rho_1^{2\,(m+k)-M-1}\,\cdot\right.$$

$$\cdot\,a^{2\,(m+k)-M-1}+(2\,(m+k)+M)\,\rho_1^{2\,(m+k)+M-1}\cdot\,a^{2\,(m+k)+M-1}]-\mu_2\,\frac{1+2\sigma_2}{4a}\cdot\frac{m}{m-k}\cdot\mathfrak{C}_k\times$$

$$\times\,[(2\,(m-k)-M)\,\rho_1^{2\,(m-k)-M-1}\cdot\,a^{2\,(m-k)-M-1}+(2\,(m-k)+M)\,\rho_1^{2\,(m-k)+M-1}\,\cdot$$

$$\left.\cdot\,a^{2\,(m-k)+M-1}]\right\}.$$

Cu notațiile folosite anterior se obține în definitiv sistemul de ecuații în D''_M, D''_{-M}

$$-\,(D''_M\cdot\rho_2^{2M}+D''_{-M})=\frac{1+2\sigma_2}{4a^2M}\,\rho_2^{2M}\,a^M\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{m}{m+k}\,\mathfrak{B}_k\,(\rho_2 a)^{2\,(m+k)}\cdot\Big[(2\,(m+k)+\right.$$

$$+M)+(2\,(m+k)-M)\left(\frac{1}{\rho_2 a}\right)^{2M}\Big]-\frac{m}{m-k}\,\mathfrak{C}_k\,(\rho_2 a)^{2\,(m-k)}\cdot\Big[(2\,(m-k)+M)+$$

$$\left.+(2\,(m+k)-M)\left(\frac{1}{\rho_2 a}\right)^{2M}\Big]\right\}=\rho_2^{2M}\,a^{M-2}\,\mathfrak{P}_M-\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\,\{(\mu_2-\mu_1)\,D''_M\,\rho_1^{2M}+$$

$$+(\mu_1+\mu_2)\,D''_M\;+\mu_1\rho_1^{2M}\,\gamma_M\,a^{M-2}\}=\rho_1^{2M}\,a^{M-2}\,\nu\,\mathfrak{R}_M-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\,\rho_1^{2M}\,\gamma_M$$

$$\mathfrak{R}_M=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon'}{4}\cdot\frac{m}{m+k}\cdot\mathfrak{A}_k\,(\rho_1 a)^{2\,(m+k)}\cdot\Big[2\,(m+k)+M+\right.$$

$$+(2\,(m+k)-M)\,\frac{1}{(\rho_1 a)^{2M}}\Big]-\frac{\varepsilon''}{4}\cdot\frac{m}{m-k}\cdot\mathfrak{C}_k\Big[2\,(m-k)+M+$$

$$\left.+(2\,(m-k)-M)\,\frac{1}{(\rho_1 a)^{2M}}\Big]\right\}+\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,\frac{\gamma_M}{a^{M-2}},$$

$$\nu\,\varepsilon'=\frac{\mu_2\,(1+2\sigma_2)\,\mathfrak{B}_k-\mu_1\,(1+2\sigma_1)\,\mathfrak{A}_k}{(\mu_1+\mu_2)\,\mathfrak{A}_k},$$

$$\nu\,\varepsilon''=\frac{\mu_2\,(1+2\sigma_2)}{\mu_1+\mu_2},$$

din care se deduc soluţiile

$$D''_M = -a^{M-2}\left(\mathfrak{P}_M - \frac{\nu\alpha^M \mathfrak{Q}_M}{1+\nu\alpha^M}\right), \qquad \mathfrak{Q}_M = \mathfrak{R}_M + \mathfrak{P}_M,$$

$$D''_{-M} = -\frac{\nu\,\mathfrak{Q}_M}{1+\nu\alpha^M}\, a^{M-2}\rho_1^{2M},$$

$$D'_M = -a^{M-2}\left\{\mathfrak{P}_M - \frac{1+\alpha^M}{1+\nu\alpha^M}\,\nu\,\mathfrak{Q}_M + \gamma_M\right\}.$$

Funcţiile de tensiune $(f_1'')_1$, $(f_1'')_2$ vor avea expresia

$$(f_1''(\zeta))_1 = -\sum_{M=1}^{\infty}\frac{i}{a^2}\left(\mathfrak{P}_M - \frac{(1+\alpha^M)\,\nu\,\mathfrak{Q}_M}{1+\nu\,\alpha^M} + \gamma_M\right)(a\zeta)^M,$$

$$(f_1''(\zeta))_2 = \sum_{M=1}^{\infty} -\frac{i}{a^2}\left\{\left(\mathfrak{P}_M - \frac{\nu\alpha^M\mathfrak{Q}_M}{1+\nu\,\alpha^M}\right)(a\zeta)^{-M}(\rho_1 a)^{2M}\right\}.$$

Vom calcula acum coeficienţii care intervin în expresia eforturilor rezultante în secţia transversală a barei. Conform formulelor anterioare se deduce expresia lui D_0. N. I. Musheli$ş$vili citează următoarea exprimare a acestei mărimi (în cazul static) dedusă în lucrarea lui N. I. Vekua şi A. K. Ruhadze:

$$D_0 = \left\{\mu_2\frac{\pi r_2^4}{2} + (\mu_1-\mu_2)\left(\frac{\pi r_1^4}{2} + \pi r_1^2\, l^2\right) - (\mu_1-\mu_2)\cdot\pi l_1^2 r_1^2\,\nu - \right.$$

$$\left. - 2\mu_2\pi l^2\nu\,\rho_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha\,\nu)^k}{(1-a^2\,\rho_1^2\,\alpha^k)^2}\right..$$

Ca titlu de ilustrare, vom deduce pe I_1, D_1, K_1 care intervin în expresia rigidităţii. Vom observa întîi că, dacă în evaluarea rigidităţii la torsiune în cazul static nu interesează, în cazul dinamic aceasta trebuie precizată deoarece forţele de lunecare în secţia transversală de natură dinamică au o rezultantă nenulă.

Vom nota

$$B''_M + D''_M = \mathfrak{S}_M \,.\, a^{M-2},\ B''_{-M} + D''_{-M} = \mathfrak{T}_M\cdot a^{M-2},\ B'_M + D'_M = \mathfrak{X}_M\, a^{M-2},$$

unde ca mai sus

$$P_M = \frac{1+2\sigma_2}{4\,\mathrm{M}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{m}{m+k}\mathfrak{B}_k(\rho_2 a)^{2(m+k)}.\ [2(m+k) + M + (2(m+k) - \right.$$

$$- M)\left(\frac{1}{\rho_2 a}\right)^{2M}\Bigg] - \frac{m}{m-k}\mathfrak{C}_k(\rho_2 a)^{2(m-k)}\,.\,\Bigg[2\,(m-k) + M + (2(m+k) -$$

$$\left. - M)\left(\frac{1}{\rho_2 a}\right)^{2M}\right]\Bigg\}.$$

Se calculează funcțiile

$$(h_0(\zeta))_1 = \int d\zeta \frac{1}{(1-a\zeta)^2}(g_0(\zeta))_1 = \int d\zeta \sum_1^\infty (a\zeta)^{l-1} l \frac{i}{a} \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{m}{m+k} \mathfrak{A}_k (a\zeta)^{m+k} =$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \frac{li}{a^2} \cdot \frac{m}{m+k} \cdot \frac{\mathfrak{A}_k}{(m+k+l)} (a\zeta)^{m+k+l},$$

$$(h_0(\zeta))_2 = \int d\zeta \frac{1}{(1-a\zeta)^2}(g_0(\zeta))_2 = \int d\zeta \sum_1^\infty (a\zeta)^{l-1} \frac{li}{a} \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \left\{ \frac{m}{m+k} \mathfrak{B}_k (a\zeta)^{m+k} - \right.$$

$$\left. - \frac{m}{m-k} \mathfrak{C}_k (a\zeta)^{m-k} \right\} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \frac{li}{a} \left\{ \frac{m}{(m+k)} \cdot \frac{\mathfrak{B}_k}{(m+k+l)} (a\zeta)^{m+k+l} - \frac{m}{(m-k)} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\mathfrak{C}_k}{(m-k+l)} (a\zeta)^{m-k+l} \right. .$$

Vom putea trece la calculul efectiv al constantelor. Deoarece

$$D_1 = -\mu_1 \int_{\gamma_1} \mathcal{R}e (f_1(\zeta))_1 \, d\frac{\omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}}{2} - \mu_2 \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \mathcal{R}e (f_1(\zeta))_2 \, d\frac{\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}}{2},$$

$$d\frac{\omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}}{2} = d\frac{\rho^2}{1-a^2\rho^2} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (a\rho)^k \cos k\vartheta \right\} = -$$

$$= -\frac{\rho^2}{1-a^2\rho^2} \sum_1^\infty k (a\rho)^k \sin k\vartheta,$$

iar

$$(f_1(\zeta))_1 = \frac{1}{a^2} \sum i \mathfrak{S}_M (a\zeta)^m, \quad (f_1(\zeta))_2 = \frac{i}{a^2} \sum_1^\infty (\mathcal{T}_M (a\zeta)^m + \mathfrak{X}_m (a\zeta)^{-m}),$$

se mai obține valoarea integrată a coeficientului

$$D_1 = -\mu_1 \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^\infty \int_{\gamma_1} (a\rho_2)^m (-\sin m\vartheta) \mathfrak{S}_m \left(-\frac{\rho_1^2}{1-a^2\rho_1^2} \right) \sum_1^\infty k (a\rho)^k \sin k\vartheta \cdot d\vartheta -$$

$$- \mu_2 \frac{1}{a^2} \int_{\gamma_2-\gamma_1} ((a\rho)^m (-\sin m\vartheta) \mathcal{T}_m + \mathfrak{X}_m (a\rho)^{-m} \sin m\vartheta) \left(-\frac{\rho^2}{1-a^2\rho^2} \right) \sum_1^\infty k (a\rho)^k \sin k\vartheta .$$

$$\cdot d\vartheta = -\frac{\pi}{a^2} \sum_1^\infty k \left\{ \mu_1 (a\rho_1)^{2k} \frac{C_1}{a} \mathfrak{S}_k + \mu_2 \left[(a\rho_2)^{2k} \frac{C_2}{a} - (a\rho_1)^{2k} \frac{C_1}{a} \right] \mathcal{T}_m - \right.$$

$$\left. - \mathfrak{X}_m \left((a\rho_2)^{-2k} \frac{C^2}{a} - (a\rho_1)^{-2k} \frac{C_1}{a} \right) \right\} .$$

Coeficientul I_1 este

$$I_1 = -\frac{1-2\sigma_1}{4}\mu_1 \mathcal{R}e\int_{\gamma_1}\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}\,d\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}h_0(\zeta) - \frac{1-2\sigma_2}{4}\mu_2 \mathcal{R}e\int_{\gamma_2-\gamma_1}\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}\,d\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}h_0(\zeta).$$

Întrucît pe cercurile γ_1, γ_2; $\zeta = \rho e^{i\vartheta} = \frac{\rho}{e^{-i\vartheta}} = \frac{\rho}{\bar{\sigma}}$; $\sigma = e^{i\vartheta}$ iar singularitatea $\zeta = 1/a$ nu este atinsă în interiorul acestor cercuri, $h_0(\sigma)$ fiind olomorfă în acelaşi domeniu, avem $I_1 = 0$.

K_1 are valoarea

$$K_1 = -\frac{\mu}{4}\int_{\gamma_1} d\left(\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}\cdot\frac{\zeta}{1-a\zeta}\right)\mathcal{R}e\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}(g_0(\zeta))_1 - \frac{\mu}{4}\int_{\gamma_2-\gamma_1} d\left(\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}\cdot\frac{\zeta}{1-a\bar{\zeta}}\right)\cdot$$

$$\mathcal{R}e\frac{\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}}g_o(\zeta)_2 = \frac{\mu_1}{2}\int_{\gamma_1}\frac{\rho_1^2}{1-a^2\rho_1^2}\sum_1^{\infty}(a\rho_1)^t\, t\sin t\vartheta\cdot\mathcal{R}e\sum_1^{\infty}\frac{(a\rho_1)^s}{a}e^{-is\vartheta}\cdot$$

$$\cdot\frac{i}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m\mathfrak{A}m}{m+k}(a\rho_1)^{m+k}e^{i(m+k)\vartheta}\,d\vartheta + \frac{\mu_2}{2}\int_{\gamma_2-\gamma_1}\frac{\rho^2}{1-a^2\rho^2}\sum_1^{\infty}(a\rho_1)^t\, t\sin t\vartheta\cdot$$

$$\cdot\mathcal{R}e\sum_1^{\infty}\frac{(a\rho_1)^s}{a}e^{-is\vartheta}\cdot\frac{i}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m\mathfrak{B}k}{m+k}(a\rho)^{m+k}\cdot e^{i(m+k)\vartheta} - \right.$$

$$\left. - \frac{m}{m+k}\mathfrak{C}_k(a\rho_1)^{m-k}\cdot e^{i(m-k)\vartheta}\right]d\vartheta = -\frac{\pi\mu_1}{a}\frac{C_1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(a\rho_1)^{m+k+s+t}\cdot$$

$$\frac{mt\mathfrak{A}_k}{m+k} - \frac{\pi\mu_2}{a}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[(a\rho_2)^{m+k+s+t}\cdot\frac{C_2}{a} - (a\rho_1)^{m+k+s+t}\cdot\frac{C_1}{a}\right]\frac{tm}{m+k}\mathfrak{B}_k - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{tm}{m-k}\left[[(a\rho_2)^{m+k+s+t}\cdot\frac{C_2}{a} - (a\rho_1)^{m+k+s+t}\cdot\frac{C_1}{a}\right]\mathfrak{C}_k\right\}\right\}.$$

3. BARĂ CU SECŢIUNEA EPITROHOIDALĂ

Vom considera bara epitrohoidală tratată în cazul static de N. I. Musheli̧svili la p. 531 — 532. În cazul dinamic avem transformarea

$$z = \omega(\zeta) = b(\zeta^n + a\zeta);\ \sigma > 0;\ 0 \leqslant a \leqslant 1/n,$$

n fiind un număr întreg. Se știe că

$$f_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\zeta)\cdot\overline{\omega}(\zeta)}{\sigma - 2} d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma b^2(\sigma^n + a\,\sigma)\left(\frac{1}{\sigma^n} + \frac{a}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \text{const.} =$$

$$= \frac{ib^2}{2\pi i}\int_\gamma \left(1 + a^2 + a\,\sigma^{n-1} + \frac{a}{\sigma^{n-1}}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = ib^2 a\zeta^{n-1},$$

$$f_1'(\zeta) = \frac{1-2\sigma}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\mathcal{Re}\, i\,\overline{\omega(\sigma)}g_0(\sigma),$$

$$g_0(\zeta) = \int\omega'(\zeta)\,d\zeta\, f_0(\zeta) = \int d\zeta\, b\,(n\zeta^{n-1} + a)\, ib^2 a\zeta^{n-1} = ib^3 a\Bigg(n\,\frac{\zeta^{2n-1}}{2n-1} +$$

$$\frac{a\zeta^n}{n}\Bigg) = ib^3 a\zeta^{n-1}\left[\frac{n}{2n-1}\zeta^n + \frac{a\zeta}{n}\right] = b\left(\frac{n}{2n-1}\zeta^n + \frac{a\zeta}{n}\right)f_0(\zeta)\,.$$

Expresia integrată a funcției $f'_1(\zeta)$ este

$$f_1'(\zeta) = +\frac{1-2\sigma}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\mathcal{Re}\, ib\left(\frac{1}{\sigma^n} + a\,\frac{1}{\sigma}\right) ib^3 a\left[n\,\frac{\sigma^{2n-1}}{2n-1} + \frac{a\sigma^n}{n}\right] =$$

$$= -\frac{1-2\sigma}{2}\frac{b^4 ai}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\left[\frac{n\sigma^{n-1}}{2n-1} + an\,\frac{\sigma^{2(n-1)}}{2n-1} + \frac{a}{n} + \frac{a^2\sigma^{n-1}}{n}\right] = -$$

$$= -\frac{1-2\sigma}{2}b^2\left[\frac{n}{2\,n-1} + \frac{a^2}{n} + \frac{an}{2\,n-1}2\zeta^{n-1}\right]f_0(\zeta).$$

Deoarece

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{Re}\,\overline{\omega(\zeta)}\,g_0(\zeta)\right)\gamma = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\mathcal{Re}\, b\,(\zeta^{-n} + a\overline{\zeta})\, ib^3 a\left[n\,\frac{\zeta^{2n-1}}{2n-1} + a\,\frac{\zeta^n}{n}\right)\right]_{\rho=1} =$$

$$= b^4 a\,\mathcal{Re}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\, i\left\{\frac{\rho^{3n-1}\sigma^{n-1}}{2n+1} + \frac{an\rho^{2n}}{2n-1}\,\sigma^{2(n-1)} + \frac{a}{n}\,\rho^{2n} + \frac{a^2}{n}\,\rho^{n+1}\sigma^{n-1}\right\}_{\rho=1} =$$

$$= b^4 a\,\mathcal{Re}\, i\left\{\frac{3n-1}{2n-1}\sigma^{n-1} + \frac{a\cdot n\cdot 2n}{2n-1}\,\sigma^{2(n-1)} + 2a + \frac{n+1}{n}\,a^2\sigma^{n-1}\right\},$$

funcția $f_1''(\zeta) = \sum\limits_0^\infty b_n\zeta^n$ va satisface condiția

$$\mathcal{Re}\sum_0^\infty mb_m\sigma^m + \frac{1+2\sigma}{4}b^4 ai\Bigg(\frac{3n-1}{2n-1}\sigma^{n-1} + \frac{a2n^2}{2n-1}\sigma^{2(n-1)} + \frac{n+1}{n}a^2\sigma^{n-1}\Bigg)\Bigg\} = 0,$$

sau

$$f_1''(\zeta) = -\frac{1-2\sigma}{4}\, b^4 ai \left\{\frac{3n-1}{2n-1}\,\frac{\zeta^{n-1}}{n-1} + \frac{a2n^2}{2n-1}\cdot\frac{\zeta^{2(n-1)}}{2(n-1)} + \frac{n+1}{n(n-1)}\, a^2\zeta^{n-1}\right\}.$$

Vom putea trece la evaluarea tensiunii tangenţiale complexe, conform relaţiei

$$Q^0_{\rho\vartheta} = Q^0_\rho - iQ^0_\vartheta = \mu\,\frac{\partial\tau}{\partial z}\cdot\frac{\zeta}{\rho}\cdot\frac{1}{b_1 n\zeta^{n-1}+a_1}\Big\{ib^2a\,(n-1)\,\zeta^{n-2} - ib^2\,(\bar\zeta^n +$$

$$+\, a\bar\zeta\,)\,(n\zeta^{n-1}+a) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{C_t}\right)^2 b\,(n\zeta^{n-1}+a)\,[ib^2a\zeta^{n-1}\cdot b\,(\bar\zeta^n + a\bar\zeta\,) +$$

$$+\, 2\sigma b\left(\frac{n}{2n-1}\bar\zeta^n + a\bar\zeta\right)\cdot(-i)\, b^2a\,\bar\zeta^{n-1}]\Big\}.$$

Vom calcula rigidităţile

$$I_0 = \frac{1}{4i}\,\mu\int_j b^4(\bar\zeta^n + a\bar\zeta)^2\,(\zeta^n + a\zeta)\;\,d\,(\zeta^n + a\zeta) = \frac{\pi\mu b^4}{2}\,(n + a^4 +$$

$$+\, 2\,(n+1)a^2).$$

$$D_0 = -\frac{\mu}{2}\int_\gamma (\mathcal{R}e\, b^2ai\zeta^{n-1})\cdot db^2\,(\bar\zeta^n + a\bar\zeta)\,(\zeta^n + a\zeta) = -\,\mu b^4a^2\,\pi\,(n-1),$$

$$D_0 = \bar I_0 + D_0 = \frac{\pi\mu b^4}{4}\,(a^4 + n + 4a^2),$$

$$D_1 = -\frac{1}{2}\,\mu\int_\gamma \mathcal{R}e\left\{-\frac{1-2\sigma}{2}\, b^4ai\,\sigma^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1} + \frac{a^2}{n} + \frac{an\sigma^{n-1}}{2n-1}\right) -\right.$$

$$\left. -\,\frac{1+2\sigma}{4}\, b^4ai\cdot\left(\frac{3n-1}{2n-1}\cdot\frac{\sigma^{n-1}}{n-1} + \frac{a2n^2}{2n-1}\,\frac{\sigma^{2(n-1)}}{1(n-1)} + \frac{n+1}{n\,(n-1)}\, a^2\,\sigma^{n-1}\right)\right\}.$$

$$\cdot\,(n-1)\; ab^2\,\left(\sigma^{n-2} - \frac{1}{\sigma^n}\right)d\,\sigma = +\,\frac{\mu a^2b^6}{2}\,(n-1)\,\pi\left[(1-2\,\sigma)\left(\frac{n}{2n-1} +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\,\frac{a^2}{n}\right) + \frac{1+2\sigma}{2}\left(\frac{3n-1}{2n-1}\,\frac{1}{n-1} + \frac{n+1}{n\,(n-1)}\,a^2\right)\right],$$

$$I_1 = -\,\frac{1-2\sigma}{4}\, b^2\mu\mathcal{R}e\int_\gamma h_0\,(\sigma)\cdot\left(\frac{1}{\sigma^n} + \frac{a}{\sigma}\right)\left(-\,\frac{n}{\sigma^{n+1}} - \frac{a}{\sigma^2}\right)d\,\sigma =$$

$$= \frac{1-2\sigma}{4}\,\mu b^2\;\mathcal{R}e\int h_0\,(\sigma)\left[\frac{n}{\sigma^{2n+1}} + \frac{a\,(1+n)}{\sigma^{n+2}} + \frac{a^2}{\sigma^3}\right].$$

unde

$$h_0\,(\zeta) = \int d\zeta b\,(n\zeta^{\,n-1} + a)\, ib^3a\left[\frac{n}{2n-1}\,\zeta^{2n-1} + \frac{a\zeta^n}{n}\right] = ib^4a\,\left[\frac{n^2}{2n-1}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{\zeta^{3n-1}}{3n-1} + \frac{an\zeta^{2n}}{(2n-1)\,2n} + \frac{a\zeta^{2n}}{2n} + \frac{a^2\zeta^{n+1}}{n\,(n+1)}\right].$$

Se deduce că rigiditățile parțiale au valorile

$$I_1 = -\frac{1-2\sigma}{2}\pi\mu b^6 a^2\left[\frac{h}{2}+\frac{a^2}{n}+\frac{n}{2(2n-1)}\right],$$

$$k_1 = -\frac{\mu}{4}\int_\gamma \mathcal{Re}\,(\overline{\omega(\sigma)}\,g_0(\sigma))\,d\,[\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)}] = -\frac{\mu b^6 a^2}{2}(n-1)\left(\frac{n}{2n-1}+\frac{a^2}{n}\right),$$

cea totală fiind

$$D = I_0 + D_0 + \left(\frac{\omega}{i_t}\right)^2 (I_1 + D_1 + K_1).$$

4. BARĂ CU SECȚIUNE TRANSVERSALĂ MĂRGINITĂ DE O LEMNISCATĂ A LUI BOOTH

Torsiunea statică a barei cu secție transversală mărginită de o lemniscată a lui Booth a fost tratată de N. I. Musheлişvili şi T. J. Higgins. Ne limităm, pentru a nu da o extindere excesivă exemplificărilor la determinarea funcției $f_1^1(\zeta)$. Se utilizează transformarea

$$z = \omega(\zeta) = \frac{k\zeta}{\zeta^2+a},\ a > 1, k > 0.$$

Se deduce că

$$f_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sigma-\zeta}\,\frac{k^2}{(\sigma^2+a)\left(\dfrac{1}{\sigma^2}+a\right)}.$$

Expresia de sub integrală tinde cu $1/\sigma^3$ la zero pentru $\sigma \to \infty$ şi are polii $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ în afara conturului γ pentru $a > 1$. Aplicînd formula reziduurilor avem

$$f_0(\zeta) = -i\left\{\left[\frac{k^2}{(\sigma+i\sqrt{a})\left(\dfrac{1}{\sigma^2}+a\right)(\sigma-\zeta)}\right]_{\sigma=i\sqrt{a}} + \left[\frac{k^2}{(\sigma-i\sqrt{a})\left(\dfrac{1}{\sigma^2}+a\right)(\sigma-\zeta)}\right]_{\sigma=-i\sqrt{a}}\right\} =$$

$$= \frac{k^2\sqrt{a}}{2(1-a^2)(i\sqrt{a}-\zeta)} + \frac{k^2\sqrt{a}}{2(1-a^2)(i\sqrt{a}+\zeta)} = \frac{iak^2}{(a^2-1)(\zeta^2+a)},$$

$$g_0(\zeta) = \int d\zeta\cdot k\,\frac{(\zeta^2+a)-2\zeta^2}{(\zeta^2+a^2)}\cdot\frac{iak^2}{(a^2-1)(\zeta^2+a)} = \frac{iak^3}{a^2-1}\int d\zeta\,\frac{a-\zeta^2}{(\zeta^2+a)^3} =$$

$$\frac{iak^3}{a^2-1}\int\left[-\frac{1}{(\zeta^2+a)^2}+\frac{2a}{(\zeta^2+a)^3}\right]d\zeta.$$

În baza relaţiilor

$$\int\frac{d\zeta}{\zeta^2+a}=\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{\zeta-i\sqrt{a}}{\zeta-i\sqrt{a}},\ \int\frac{d\zeta}{(\zeta^2+a)^2}=\frac{1}{4a}\left(\frac{2\zeta}{\zeta^2+a}+\frac{1}{i\sqrt{a}}\log\frac{\zeta-i\sqrt{a}}{\zeta+i\sqrt{a}}\right),$$

$$\int\frac{d\zeta}{(\zeta^2+a)^3}=\frac{\zeta}{4a(\zeta^2+a)^2}+\frac{3}{16a^2}\left\{\frac{2\zeta}{\zeta^2+a}+\frac{1}{i\sqrt{a}}\log\frac{\zeta-i\sqrt{a}}{\zeta+i\sqrt{a}}\right\},$$

rezultă că

$$g_0(\ )=\frac{ik^3}{4(a^2-1)}\left\{\frac{3a\,\zeta+\zeta^3}{(\zeta^2+a)^2}+\frac{1}{2\,i\sqrt{a}}\log\frac{\zeta-i\sqrt{a}}{\zeta+i\sqrt{a}}\right\},$$

$$f_0'(\zeta)=\frac{1-2\sigma}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\mathcal{R}e\left[\frac{ik}{\sigma\left(\frac{1}{\sigma^2}+a\right)}-\frac{ik^3}{4(a^2-1)}\times\left(\frac{2a\sigma}{(\sigma^2+a)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sigma}{\sigma^2+a}+\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{\sigma-i\sqrt{a}}{\sigma+i\sqrt{a}}\right)\right]=\frac{1-2\sigma}{2\pi}\cdot\frac{k^4}{16(1-a^2)}\int_\gamma\frac{}{\sigma-\zeta}\left[\frac{\sigma}{1+a\sigma^2}\ \frac{2a\sigma}{(\sigma^2+a)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma}{\sigma^2+a}+\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{\sigma-i\sqrt{a}}{\sigma+i\sqrt{a}}\right)+\frac{\sigma}{a+\sigma^2}\left(\frac{2a\sigma^3}{(1+a\sigma^2)^2}+\frac{\sigma}{1+a\sigma^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{1-\sigma i\sqrt{a}}{1+\sigma i\sqrt{a}}\right)\right].$$

Expresia de sub integrală tinde către 0 la infinit şi are polii în afara cercului γ: $\sigma_1=i\sqrt{a}$, $\sigma_2=-i\sqrt{a}$ astfel că, integrînd pe exteriorul cercului

$$f_1'(\zeta)=\frac{1-2\sigma}{32\pi}\cdot\frac{k^4(-2\pi i)}{1-a^2}\cdot(B_1+B_2),$$

unde

$$B_1=\left\{\frac{\sigma-i\sqrt{a}}{(\sigma-\zeta)(\sigma^2+a)}\left[\frac{\sigma^2}{1+a\sigma^2}+\sigma\left(\frac{2a\sigma^3}{(1+a\sigma^2)^2}+\frac{\sigma}{1+a\sigma^2}+\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{1-\sigma i\sqrt{a}}{1+\sigma i\sqrt{a}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{2a\sigma^2}{(\sigma-\zeta)(1+a\sigma^2)(\sigma+i\sqrt{a})^2}\right\}_{\sigma=i\sqrt{a}}+\left[\frac{\sigma}{(\sigma-\zeta)(1+a\sigma^2)2i\sqrt{a}}\right]_{\sigma=i\sqrt{a}}$$

$$B_2=\left\{\frac{\sigma+i\sqrt{a}}{(\sigma-\zeta)(\sigma^2+a)}\left[\frac{\sigma^2}{1-a\sigma^2}+\sigma\frac{2a\sigma^3}{(1+a\sigma^2)^2}+\frac{\sigma}{1+a\sigma^2}+\frac{1}{2i\sqrt{a}}\log\frac{1-\sigma i\sqrt{a}}{1+\sigma i\sqrt{a}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{2a\sigma^2}{(\sigma-\zeta)(1+a\sigma^2)(\sigma-i\sqrt{a})^2}\right\}_{\sigma=-i\sqrt{a}}-\left[\frac{\sigma}{(\sigma-\zeta)(1+a\sigma^2)2i\sqrt{a}}\right]_{\sigma=-i\sqrt{a}}.$$

şi ţinînd seama că

$$\int_{\gamma} \log\,(\sigma-\zeta)\,d\,\sigma=\int_{0}^{2\pi}\log\,e^{i\alpha}\,de^{i\alpha}=2\pi i,$$

$$\int_{\gamma} F\,(\sigma)\log\,(\sigma-\zeta_0)\,d\sigma=-\,2\pi i F\,(\zeta_0),$$

$$|\zeta_0|>|\sigma|,\ \ \zeta_0=\pm i\sqrt{a},$$

$$B_{1,2}=\frac{1}{(i\sqrt{a}\mp\zeta)\,2i\sqrt{a}}\left\{\frac{-2a}{1-a^2}+\frac{2\,a^3}{(1-a^2)^2}+\frac{1}{2}\,\log\,\frac{1+a^2}{1-a^2}\right\}\pm\frac{1}{2(\,i\sqrt{a}\mp\zeta)\,(1-a^2)}-$$

$$-\frac{i\sqrt{a}\,(1+a^2)}{2\,(i\sqrt{a}\mp\zeta)\,(1-a^2)^2}-\frac{a}{2\,(1-a^2)\,(i\sqrt{a}\mp\zeta)^2},$$

$F\,(\sigma)$ fiind olomorfă în exteriorul lui γ şi expresia de integrat tinzînd la 0 spre infinit.

În definitiv :

$$f_1'\,(\zeta)=-\,\frac{1-2\sigma}{(4)^2}\,\frac{k^4{}_i}{1-a^2}\left\{\frac{1}{2\,(\zeta^2+a)}\left(\frac{a(1-5a^2)}{(1-a^2)^2}-\log\frac{1+a^2}{1-a^2}\right)+\frac{a^2-a\zeta^2}{(1-a^2)\,(\zeta^2+a)^2}\right\}.$$

Primită la redacţie la 5 mai 1959

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ

(Применения)

РЕЗЮМЕ

Основываясь на результатах одной из своих предыдущих работ, автор приводит ряд примеров динамического кручения армированного по неконцентрическому кругу бруса круглого сечения, эпитрохоидального и ограниченного лемнискатой Буса.

PROBLÈME DYNAMIQUE DE LA TORSION

(Applications)

RÉSUMÉ

En vertu des résultats obtenus dans un travail antérieur, l'auteur donne plusieurs exemples en ce qui concerne la torsion dynamique d'une barre à section circulaire, armée selon un cercle non concentrique, épicycloïdale et limitée par une lemniscate de Booth.

BIBLIOGRAFIE

1. АБРАМИАН Б. Л., *Кручение и изгиб призматических стержней с полным прямоугольным сечением.* ПММ, 14, 3, 265—276 (1950).
2. АБРАМИАН Б. Л., *Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением.* ПММ (1950).
3. АБРАМИАН Б. Л., АРУТЮНИАН Н. Х., *Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде трапеций.* ПММ, 15, 1, 97—102 (1951).
4. АБРАМИАН Б. Л., ДЖРБАШИАН М. М., *О кручении валов переменного сечения.* ПММ, 15, 4, 451—472 (1951).
5. АРУТЮНИАН Н. Х., *О кручении элиптического кольцевого сектора.* ПММ, 2, 5, 543—546 (1947).
6. АРУТЮНИАН Н. Х., *Приближенное решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения.* ПММ., 6, 1, 19—30 (1941).
7. АРУТИУНИАН Н. Х., *Решение задачи о кручении стержней полигонального сечения.* ПММ, 13, 1, 107—112 (1949).
8. БЛОХ В. И., *Кручение упругого стержня с поперечным сечением, имеющим форму кругового прямоугольника.* Инж. сборник, 23, 140—146 (1956).
9. БУЛЫГИН В. Я., *Об упруго-пластическом кручении призматических стержней.* ПММ, 16, 1, 107—10 (1952).
10. W. J. CARTER, I B. OLIPHANT, *Torsion of a circular Shaft with Diametrically Opposite Flat Sides.* Journal of Applied Mechanics, 19, *3* (1952).
11. ЧЕПОВА Т. К., *Приближенное решение задачи кручений некоторых призматических стержней.* ПММ, 1, 2, 255—261 (1937).
12. ETTORE FUNAIOLE, *Sulla torsione di prismi a sezione lenticolare.* L'Aerotehnica, 36, *4* (1956).
13. ГАЛИН Л. А., *Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения.* ПММ, 8, 4, 307—322 (1944).
14. ГАЛИН Л. А., *Упруго-пластическое кручение призматических стержней.* ПММ, 13, 3, 285—296 (1949).
15. ГЕОРГИДЗЕ А. Я., *Растяжение и кручение составных брусьев близких к призматическим.* Сообщение АН Груз. ССР, VIII, 9—10, 605—612 (1947).
16. — *Кручение растянутого призматического бруса, составленного из различных материалов.* Сообщения АН Груз. ССР, IX, 3, 161—165 (1948).
17. — *Вторичные эффекты кручения составного бруса.* Сообщения АН Груз. ССР, VII, 8, 515—519 (1946).
18. — *Кручение и изгиб брусьев близких к призматическим.* Труды Тбилиского мат. инст. XVI, 117—141 (1948).
19. L. HAMBURGER, F. DINCA, V. MANEA, *Asupra torsiunii unor bare cilindrice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, VIII, 4 (1957).
20. КУФАРЕВ П. П., *К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения.* ПММ, 1, 1, 43—76 (1937).
21. ЛЕХНИЦКИЙ С. Г., *Симметричная деформация и кручение анизотропного телообращения с анизотропо частного вида.* ПММ, 4, 3, 43—60 (1940).
22. — *Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения.* Инж. сборник, 23, 63—76 (1956).
23. V. MANEA, *Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, IX, 423—433 (1958).
24. — *Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, IX, 4, 1035—1048 (1958).
25. V. MANEA, E. PROCOPOVICI, *O extindere a rezolvării problemei torsiunii unor palete de turbină.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, 1, 203—209 (1959).
26. МУШТАРИ Х. М., *Об одном способе получения некоторых результатов в решении задачи Сент Венант. О кручении и в поперечном изгибе призматических тел.* ПММ, 1, 4, 427—440 (1938).
27. ПАНОВ Д. И., *О кручении стержней, поперечное сечение которых ограничено кривой* $ky(l-y)$. ПММ, 1, 133—134 (1937).
28. — *О кручении стержней, близких к призматическим.* ПММ, 2, 2, 159—180 (1938).

29. Пиноравов А. М., *Концентрация касательных напряжений при кручении призматических стержней.* ПММ, 17, 2, 253—259 (1953).
30. Polasek Jan, Spacek Ladislau, *Prispevek k vypoctu tuhosti v kroucenii a strediska smyku lopatkovych profilu.* Rozpravy ceskoslovenke Ac. ved rocnih, V, *66*,1 (1956).
31. Риз П. М., *К вопросу о кручении призматического стержня силами, распределенными по его боковой поверхности.* ПММ, 4, 2, 121—122 (1940).
32. Рухадзе А. К., *Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитрохоидами.* Труды Тбилиского ин-та, I, 125—139 (1937).
33. Сапонджиан У. М., *Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней.* ПММ, 13, 5, 501—512 (1949).
34. Шерман Д. И., *О свойствах смешанной задачи теории упругости.* ПММ, 7, 6, 413—420 (1943).
35. — *Кручения круглого цилиндра, армированного элиптическим стержнем.* Инж. сборник, 21, 79—96 (1955).
36. — *Кручение элиптического цилиндра, армированного круговым стержнем.* Инж. сборник, 10, 81—108 (1951).
37. Шерман Д. И., Народецкий М. З., *О кручении некоторых призматических полых тел.* Инж. сборник, 6, 17—46 (1950).
38. Сиряев Е. А., *О кручении круглого бруса с трещиной по дуге окружности или по радиусу.* ПММ, 20, 4, 555—558 (1956).
39. Sokolnikoff I.S., *Torsion of Regions Bounded by Circular Arcs.* Bulletin of the American Math. Soc., 44, 384—387 (1938).
40. Stepanov P.D., Serman D.I., *Torsiunea unei bare cilindrice slăbite prin 2 cavități longitudinale cilindrice circulare.* Ing. Sbornik, XI (1956).
41. Trefftz E., *Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt.* Math. Ann., *82* (1921).
42. — *Über die Wirkungeiner Abrundung auf die Torsionsspannungen in den inneren Ecken eines Winkeleisens.* ZAMM, *2* (1922).
43. Ванторин В. Д., *О кручении анизотропной призмы, поперечное сечение которой ограничено кривой* $y^2=k^2\,x(l-x)^2$. ПММ, 32, 3, 151—152 (1939).
44. Векуа И., Рухадзе А. К., *Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных конфокальными элипсами.* Изв. АН СССР.
45. — *Задача кручения круглого цилиндра армированного продольным круговым стержнем.* Изв. АН СССР, 3, 373—386 (1933).
46. Weinel E., *Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring.* Ing. Archiv, 3, *1*, 567—575 (1932).
47. Зволинский Н.В., *Кручение бруса, растянутого постоянными массовыми силами.* 3, 3, 3 (1932).

STUDII

ELASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

CÎTEVA CONSIDERAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU CALCULUL GRINZILOR DREPTE

DE

P. P. TEODORESCU[1])

1. În cele ce urmează ne vom ocupa de problema grinzilor drepte de secțiune dreptunghiulară, rezultatele obținute putîndu-se, în unele cazuri, extinde și la grinzile de secțiune oarecare.

De obicei, problema grinzii drepte se tratează prin metodele aproximative ale rezistenței materialelor, metode bazate pe ipoteza clasică a secțiunilor plane (ipoteza lui Bernoulli). Pe de altă parte, problema grinzii perete (placă plană acționată de sarcini paralele cu planul ei median, ce se consideră că acționează în acest plan) se tratează prin metodele teoriei elasticității (care nu presupun ipoteza secțiunilor plane). Mai mult, trebuie remarcat că în cazul încovoierii simple chiar, cu toate că formula lui Navier – dedusă prin metodele rezistenței materialelor pentru tensiunile normale – se verifică în cadrul ipotezelor teoriei elasticității, se constată [29] că o secțiune plană înainte de deformare nu mai rămîne plană după încovoiere, ci se transformă într-o suprafață cilindrică cu o curbă directoare parabolică.

Se constată de asemenea că, pentru o aceeași grindă, se pot obține rezultate cu aproximații diferite în ceea ce privește starea de tensiune și starea de deformație. De aceea poate fi necesar ca unele mărimi să fie calculate cu metodele teoriei elasticității, pe cînd pentru alte mărimi sînt suficiente rezultatele date de rezistența materialelor. Se pune deci problema găsirii unei limite de aplicare a rezultatelor date de rezistența materialelor și a trecerii în revistă a metodelor mai aproximative sau mai exacte care se pot folosi în teoria elasticității – precum și precizarea limitei lor de aplicabilitate.

Problemele enunțate mai sus se pun pentru grinzile de secțiune oarecare, noi însă – pentru a fixa ideile – ne vom ocupa de cazul grinzilor cu secțiune dreptunghiulară.

---

[1]) Facultatea de matematică și fizică – Universitatea „C.I. Parhon”.

2. Dacă deschiderea unei grinzi este 2 a şi înălţimea secţiunii transversale este 2 b (fig. 1), vom considera raportul $\lambda = a/b$. În cazul grinzilor pereţi avem, în mod obişnuit, $0{,}5 \leqq \lambda \leqq 2$. Dacă $\lambda > 2$ avem de-a face cu grinda dreaptă obişnuită ; dacă $\lambda < 0{,}5$ grinda se comportă tot ca un perete în care însă influenţa încovoierii devine neglijabilă în raport cu influenţa forţei tăietoare iar rigiditatea grinzii devine proporţională numai cu aria secţiunii transversale, după cum se arată în [5] şi [25].

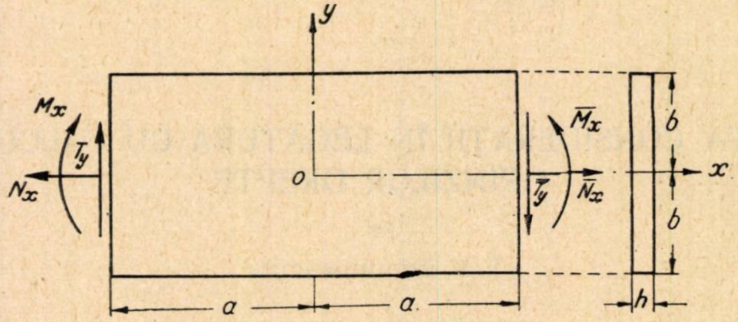


Fig. 1

În cazul grinzii perete obişnuite nu putem folosi în general metode elementare de calcul ci numai un calcul mai exact, ca cel indicat în [23], [26] şi [27]. În cazul grinzii drepte obişnuite se pot folosi cu succes asemenea metode.

Admitem că grinda are o grosime constantă $h \ll a\,;\, b$, sarcinile exterioare rămînînd sub o anumită valoare critică, astfel încît să nu se producă deformări în afara planului median. Considerăm astfel că fenomenul de valoare nu se poate produce.

Grinda dreaptă considerată este supusă la o stare de tensiune plană ; de aceea, din punct de vedere al teoriei elasticităţii, studiul se reduce la rezolvarea problemei plane a elasticităţii pentru un contur dreptunghiular, cu anumite condiţii pe contur date. Din punct de vedere matematic (în lipsa forţelor masice), problema se reduce la determinarea unei funcţii biarmonice, care verifică anumite condiţii date pe un contur dreptunghiular. Modul de rezolvare a problemei în cazul unor forţe masice oarecare a fost indicat în lucrări anterioare [24], [28].

3. Tensiunile vor fi date de [1], [2]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \tag{1}$$

funcția $F = F(x, y)$ trebuind să verifice ecuația

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{2}$$

Deplasările vor fi date de

$$\begin{aligned} Eu &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(y) + E(-\omega_0 y + u_0), \\ Ev &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} + f_2(x) + E(\omega_0 x + v_0), \end{aligned} \tag{3}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, μ coeficientul lui Poisson iar u_0, v_0, ω_0 sînt deplasările, respectiv rotirea mișcării în plan ca un corp rigid. Funcțiile $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sînt determinate de ecuația cu variabile separate

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0. \tag{4}$$

De obicei se folosesc metode de calcul numerice sau variaționale. Alte metode de calcul aproximative — care se pot folosi cu succes în unele cazuri — sînt metodele elementare.

4. Prin metode elementare se înțeleg de obicei acele metode de calcul care se bazează pe folosirea polinoamelor biarmonice. Afară de cîteva cazuri particulare, utilizarea polinoamelor biarmonice ne conduce la soluții aproximative, acceptabile din punct de vedere tehnic pentru anumite rapoarte între dimensiunile grinzii perete.

Asemenea soluții au fost date de A. Mesnager [18] și A. Timpe [33] în jurul anului 1900. Mai tîrziu au dat alte soluții R. Gran Olsson [12], I. I. Goldenblat [11] și G. Worch [36]. La noi a fost considerat un caz de încărcare al unei console cu o forță masică distribuită trapezoidal, de către Al. Cișmigiu [5]; de asemenea am prezentat și noi cîteva soluții de acest gen [30].

În lucrarea [25] am făcut un studiu general al polinoamelor biarmonice în două variabile, după proprietățile de paritate și imparitate pe care le au față de x și y; am dat forma generală a acestor polinoame precum și diferite exemple de calcul. Un studiu dezvoltat al acestor polinoame se găsește și în cartea lui K. Zweiling [37].

Dar toate studiile făcute pînă în prezent se referă la încărcări ale grinzii care se reprezintă printr-o funcție continuă și cu derivata continuă (sarcină uniform distribuită, distribuită liniar, parabolic etc.). Am arătat recent [31] cum se pot folosi aceste rezultate, cu aceeași aproximație, și în cazul unor încărcări discontinue sau cu tangenta discontinuă (sarcini concentrate, distribuite triunghiular etc.).

5. Metodele variaționale de calcul au început să fie folosite încă din 1889 de către Ribière, cu ocazia unei teze de doctorat [20]. Rezultatele date de el sînt valabile pentru grinzi lungi, pentru care se pun condiții

stricte pe laturile de sus şi de jos şi condiţii globale pe feţele de capăt. Ribière foloseşte o funcţie $F(x, y)$ de tensiune de forma

$$F(x, y) = (A\mathrm{ch}ky + B\mathrm{sh}ky + Cy\mathrm{ch}ky + Dy\mathrm{sh}ky)\cos kx. \qquad (5)$$

Filon utilizează [9] o funcţie analoagă în care înlocuieşte *cosinus* prin *sinus*. Prima soluţie corespunde mai bine grinzii dublu încastrate iar a doua grinzii simplu rezemate.

Căutînd să extindă metoda de calcul la grinzi scurte (grinzi pereţi), Ribière a ajuns [21], [22] la rezultate inadmisibile din punct de vedere fizic. Astfel el afirmă că, în dreptul încastrării, la o grindă scurtă dublu încastrată, apar numai tensiuni de compresiune într-o secţiune transversală — ceea ce nu se poate. Aceste lucrări constituie totuşi o etapă importantă în studiul grinzilor drepte.

Ulterior au apărut studii care trec de la problema grinzii lungi la problema grinzii perete pe o infinitate de reazeme. Cele mai importante rezultate, folosite curent, au fost date de Fr. Dischinger [7] în 1932. Trebuie să menţionăm că aceste rezultate nu sînt valabile pentru grinzile pereţi cu o singură deschidere decît cu totul aproximativ.

Pentru asemenea grinzi trebuie folosite metode de calcul mai puternice, de exemplu metoda diferenţelor finite [3], [35]. De asemenea, bazat pe studiile lui Girkmann [10], Parkus [19] şi Kalmanok [14], [15], [16], am elaborat recent [23], [26], [27] o metodă de calcul a grinzii perete cu o singură deschidere, valabilă pentru orice caz de rezemare (grinzi simplu rezemate sau încastrate) şi încărcare, metodă în care se folosesc dezvoltările în serie Fourier.

Alte studii au căutat să facă legătura între rezultatele date de rezistenţa materialelor şi cele date de teoria elasticităţii. Astfel Gran Olsson a calculat [12] curbura fibrei medii deformate, folosind metodele teoriei elasticităţii, sub forma

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{E}\left[\frac{\partial}{\partial y}\,\Delta F + (1+\mu)\,\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right], \qquad (6)$$

unde F este funcţia lui Airy.

Mai tîrziu, în 1949, G. Worch a întreprins [36] un studiu detaliat al stării de tensiune şi mai ales al deformaţiei grinzii drepte, comparînd unele rezultate în polinoame, date în teoria elasticităţii, cu cele date de rezistenţa materialelor ; este studiul cel mai dezvoltat pe care-l cunoaştem în prezent în legătură cu această problemă. G. Worch arată care este influenţa fiecărei solicitări : moment încovoietor (tensiune σ_x), forţă tăietoare (tensiune τ_{xy}) asupra fiecărei deformaţii (deplasare u şi v) ; de asemenea se arată şi influenţa presiunii reciproce a fibrelor (tensiune σ_y).

Acest lucru este arătat pe două cazuri particulare interesante : grinda simplu rezemată (reacţiunile fiind distribuite tangenţial pe cele două laturi) încărcată cu o sarcină uniform distribuită şi grinda în consolă, încărcată cu o sarcină concentrată la capăt. Rezultatele sînt date pentru diferite rapoarte h/l între înălţimea grinzii şi deschiderea ei. Justificarea dată de autor este valabilă pentru rapoarte $h/l \leqq 0{,}5$. Pentru valori mai mari nu se mai poate aplica principiul lui B. de St. Venant şi modul de distribuire al sarcinilor pe laturile din dreapta şi din stînga influenţează asupra stării de tensiune şi a stării de deformaţie din interior. Pentru rapoarte $h/l > 0{,}5$ ar trebui deci confruntate aceste rezultate cu altele date de metode mai exacte de calcul [1]).

Recent, în 1955, Al. Cişmigiu a prezentat [6] o propunere în legătură cu o clasificare tehnică a grinzilor drepte în : grinzi lungi (pentru care $\lambda > 5$), grinzi de lungime medie (pentru care $2 \leqq \lambda \leqq 5$) şi grinzi scurte (pentru care $\lambda < 2$). Dacă în ceea ce priveşte trecerea de la grinzi lungi (pentru care rezultatele date de rezistenţa materialelor pot fi totdeauna aplicate) la grinzi de lungime medie (pentru care se pot aplica rezultatele rezistenţei materialelor numai pentru determinarea stării de tensiune, starea de deformaţie obţinîndu-se cu ajutorul teoriei elasticităţii), metodele elementare de calcul din teoria elasticităţii (polinoame biarmonice) ne pot da rezultate foarte bune, pentru trecerea de la grinzi de lungime medie la grinzi scurte (de exemplu grinzi pereţi, pentru care se folosesc numai metodele teoriei elasticităţii) trebuie folosite instrumente de calcul mai puternice. Acest lucru se vede şi dintr-un articol publicat în 1956 de G. Grüning [13], unde se folosesc atît dezvoltări în serie cît şi metoda diferenţelor finite. De asemenea, am dat şi noi [25], în 1956, cîteva rezultate pentru grinzi pereţi, comparînd rezultatele riguroase date de teoria elasticităţii cu cele date de rezistenţa materialelor. În 1957 W. Valentin a propus [34] o metodă simplificată de calcul a grinzilor pereţi ; se utilizează rezultatele date de rezistenţa materialelor pentru grinzi drepte, împărţindu-se grinda perete în fîşii orizontale care trebuie să conlucreze.

În cele ce urmează vom face şi unele consideraţii în legătură cu trecerea de la metodele rezistenţei materialelor la metodele teoriei elasticităţii, căutînd să dăm cîteva sugestii pentru rezolvarea problemelor puse mai sus.

6. Trebuie să remarcăm de la început că problema este distinctă după modul de rezemare al grinzii. În cazul grinzilor încastrate, problema este practic rezolvată pentru grinzi lungi, parţial rezolvată pentru aşa-numitele grinzi de lungime medie şi — considerăm noi — nerezolvată pentru grinzi scurte (grinzi pereţi) ; rezultatele date de Lazarian [17], în 1936, şi cele date de Dlugaci [8], în 1956, sînt de fapt echivalente cu cele de la grinda perete de înălţime finită pe o infinitate de reazeme, încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

Pe de altă parte este foarte greu de pus condiţii în încastrare, deoarece nu cunoaştem încă bine cum se comportă grinda într-o asemenea zonă şi deoarece încastrarea depinde şi de elasticitatea elementului de construcţie în care se face această încastrare. Noi nu ne vom ocupa de această problemă deosebit de dificilă.

7. În cazul unei grinzi simplu rezemate problema este mai clară. Vom considera grinda din figura 1, luînd ca axe de coordonate axele de simetrie geometrică. În acest caz una din axele de simetrie geometrică

---

[1]) Unele rezultate în această problemă au fost prezentate în decembrie 1956 într-o comunicare făcută de noi la Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., împreună cu Y. Mihailescu.

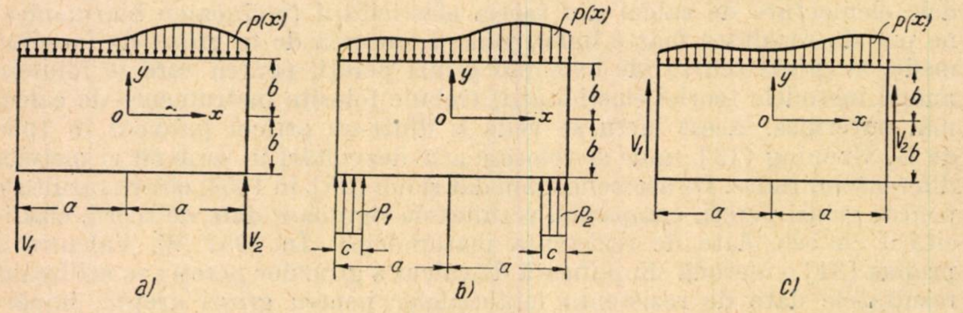
va fi şi axă de simetrie mecanică (din punct de vedere al modului de rezemare).

Pentru tensiuni folosim convenţiile de semne obişnuite din teoria elasticităţii. Pentru eforturi (forţe axiale, forţe tăietoare, momente încovoietoare) se folosesc convenţiile de semne din rezistenţa materialelor (fig. 1). Avem astfel

$$\bar{N}_x = \int_{-b}^{b} \sigma_x(a, y)\, dy, \; \bar{T}_y = -\int_{-b}^{b} \tau_{xy}(a, y)\, dy, \; \bar{M}_x = -\int_{-b}^{b} \sigma_x(a, y)\, y\, dy \qquad (7)$$

şi analog pentru N_x, T_y, M_x.

Putem realiza simpla rezemare în mai multe feluri, obţinînd astfel



a) b) c)

Fig. 2 *a*, *b*, *c*

situaţii diferite: rezemare punctuală (fig. 2 *a*), reazeme late (fig. 2 *b*) sau o rezemare tangenţială, în care sarcinile se transmit prin frecare laterală (fig. 2 *c*). Alte cazuri, în care se fac rigidizări la capete, intră în domeniul grinzilor încastrate (fig. 3).

Dacă folosim principiul lui B. de St. Venant în legătură cu modul de aplicare al reacţiunilor în dreptul reazemelor, putem calcula grinda din figura 2 *a* ca şi pe cea din figura 2 *c* (aducem reacţiunea la interpretarea ei de forţă tăietoare), pentru rapoarte $\lambda \geqq 2$.

În ceea ce priveşte cazul din figura 2 *b*, calculăm eforturile în secţiunile $x = \pm (a-c)$ şi reducem problema (fig. 4) la cea din figura 2 *c*, deschiderea grinzii fiind însă $2(a-c)$; la aceasta mai adăugăm şi influenţa unei încovoieri simple, dată de momentul $M_1^0 = M_2^0$, problemă a cărei soluţie este cunoscută şi care se poate rezolva exact (dacă $M_1^0 \neq M_2^0$, cînd sarcina $p(x)$ nu este distribuită simetric în raport cu axa Oy, se face calculul împreună cu aceste momente).

În definitiv, pentru grinzile cu $\lambda \geqq 2$, de care ne vom ocupa, vom putea lua în discuţie numai cazul din figura 2 *c*. Observăm că axa Oy este axă de simetrie geometrică şi din punctul de vedere al rezemării iar axa Ox este axă de simetrie geometrică şi axă de antisimetrie din punctul de vedere al modului de rezemare. Folosind principiul suprapunerii efectelor, vom descompune încărcarea grinzii noastre în diferite cazuri de încărcare, astfel încît să putem folosi aceste proprietăţi de simetrie şi antisimetrie.

8. Pentru a ilustra utilizarea polinoamelor biarmonice la cazuri de încărcare discontinue sau cu tangenta discontinuă, vom studia cazul unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu o sarcină distribuită triunghiular

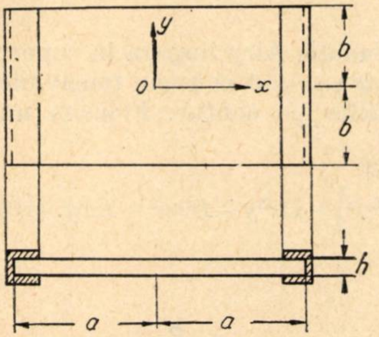


Fig. 3

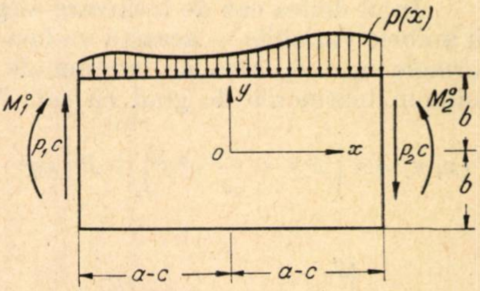
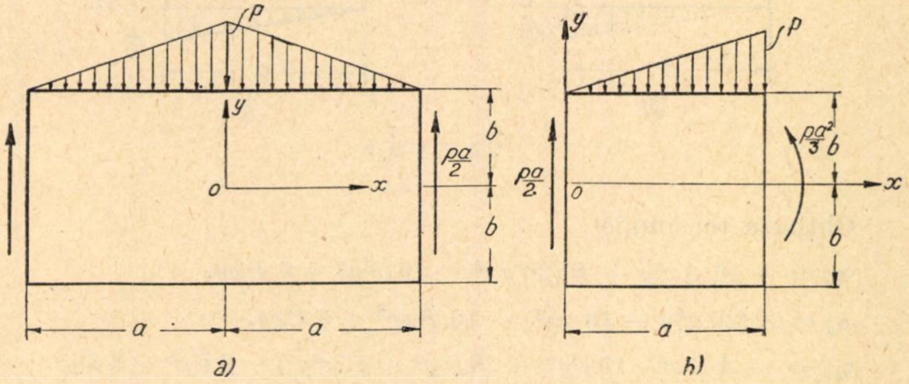


Fig. 4

(fig. 5 *a*). Făcînd o secţiune prin mijlocul grinzii, vom introduce eforturile pe secţiune şi vom studia partea din stînga a grinzii (fig. 5 *b*).

Alegem un sistem de axe de coordonate ca cel din figură. Descompunem încărcarea în două cazuri de încărcare, după proprietăţile de



a) b)

Fig. 5 *a* şi *b*

simetrie şi de antisimetrie în raport cu axa *Ox*. Obţinem astfel o compresiune excentrică (fig. 6 *a*) şi un caz de încărcare antisimetric în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 6 *b*), pe care-l vom studia.

Alegem sistemul de axe din figură. În primul caz de încărcare folosim funcţia de tensiune

$$F = -\frac{p}{12a}x^3, \tag{8}$$

ceea ce ne conduce la

$$\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y = -\frac{p}{2}\frac{x}{a}, \qquad \tau_{xy} = 0. \tag{9}$$

În al doilea caz de încărcare alegem o funcție Airy impară în raport cu ambele variabile — aceasta va face ca pentru $x = 0$ să avem tensiunile normale $\sigma_x = 0$, ceea ce corespunde condițiilor pe contur. Folosim un polinom biarmonic de grad cu soț. Alegem

$$F(x, y) = A\left(x^5 y - \frac{5}{3}x^3y^3\right) + B\left(xy^5 - \frac{5}{3}x^3y^3\right) + Cx^3y + Dxy^3 + Exy. \tag{10}$$

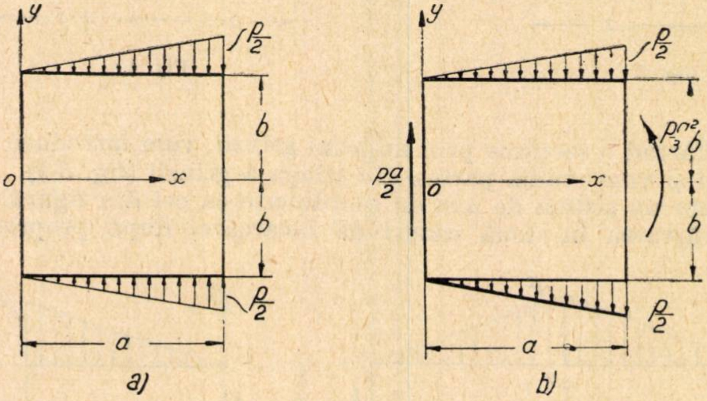


Fig. 6 *a* și *b*

Obținem tensiunile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -10\,Ax^3y + B\,(20\,xy^3 - 10\,x^3y) + 6\,Dxy, \\ \sigma_y &= A\,(20\,x^3y - 10\,xy^3) - 10\,Bxy^3 + 6\,Cxy, \\ \tau_{xy} &= -A\,(5x^4 - 15x^2y^2) - B\,(5y^4 - 15x^2y^2) - 3\,Cx^2 - 3\,Dy^2 - E. \end{aligned} \tag{11}$$

Condițiile pe contur se pot scrie

$$\begin{aligned} &x = 0: N_x = 0, && T_y = \frac{pa}{2}, && M_x = 0, \\ &x = a: \overline{N}_x = 0, && \overline{T}_y = 0, && \overline{M}_x = \frac{pa^2}{3}, \\ &y = \pm b: && \sigma_y = -\frac{p}{2}\frac{x}{a}, && \tau_{yx} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Determinăm astfel constantele

$$A = 0, \quad B = -\frac{p}{40\,ab^3}, \quad C = -\frac{p}{8ab},$$
$$D = \frac{2b^2 - 5a^2}{40\,ab^3}\,p, \quad E = \frac{15a^2 - b^2}{40ab}\,p. \tag{13}$$

Tensiunile în cel de-al doilea caz de încărcare devin

$$\sigma_x = \frac{3\,(2b^2 - 5a^2)\,p}{20ab^3}\,xy - \frac{p}{4ab^3}\,(2\,xy^3 - x^3y),$$
$$\sigma_y = -\frac{3p}{4ab}\,xy + \frac{p}{ab^3}\,xy^3, \tag{14}$$
$$\tau_{xy} = -\frac{15a^2 - b^2}{40ab}\,p + \frac{3p}{8ab}\,x^2 - \frac{3\,(2b^2 - 5a^2)\,p}{40ab^3}\,y^2 + \frac{p}{8ab^3}\,(y^4 - 3\,x^2y^2).$$

Recent Ching-Yuan Neou [4] a studiat acest caz de încărcare, folosind tot polinoame biarmonice. Calculele efectuate sînt foarte laborioase iar rezultatele obţinute au o formă mult mai complicată decît (14).

Formulele (3) şi (4) ne permit să calculăm componentele deplasării (corespunzătoare cazului de încărcare din fig. 5 *b*)

$$Eu = -\frac{px^2y}{80ab^3}\,[5\,(6a^2 - x^2) - 6\,(2 + 5\,\mu)\,b^2 + 10\,(2 + \mu)\,y^2] + \frac{p}{4a}\,(\mu\,x^2 + y^2) +$$
$$+ \frac{py}{80ab^3}\,\{(3 + 2\,\mu)\,y^4 + 2\,[(1 - 2\,\mu)\,b^2 + 5\,(2 + \mu)\,a^2]\,y^2 + 4\,(1 + \mu)\,b^4\} +$$
$$+ E\,(-\omega_0 y + u_0), \tag{15}$$
$$Ev = \frac{pxy^2}{80ab^3}\,[10\,\mu\,(3a^2 - x^2) - 6\,(5 + 2\mu)\,b^2 + 5\,(1 + 2\mu)\,y^2] - \frac{pxy}{2a} -$$
$$- \frac{px}{80ab^3}\,\{x^4 - 2\,[5a^2 + (8 + 5\mu)\,b^2]\,x^2 + 60\,(1 + \mu)\,a^2b^2\} + E\,(\omega_0\,x + v_0),$$

constantele u_0, v_0, ω_0 rămînînd de determinat.

Vom admite o simplă rezemare în centrul de greutate al secţiunii de capăt, deci pentru punctul (0, 0) vom avea deplasările $u = 0$ şi $v = 0$. De asemenea, în punctul $(a, 0)$, datorită simetriei încărcării faţă de secţiunea din mijloc, vom admite că $\partial u / \partial y = 0$ (nu putem pune această condiţie pe toată înălţimea secţiunii, ceea ce constituie o aproximaţie de calcul). Aceste condiţii ne conduc la

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0,$$
$$E\omega_0 = \frac{pa}{80b^3}\,[6\,(2 + 5\mu)\,b^2 - 25\,a^2] + \frac{(1 + \mu)\,pb}{20a}, \tag{16}$$

de unde obţinem componentele deplasării sub forma finală.

Ecuația fibrei medii deformate va fi dată de (pentru $y = 0$)

$$Ev = -\frac{px}{80ab^3}\{x^4-2\,[5a^2+(8+5\mu)\,b^2]\,x^2+a^2\,[6\,(8+5\mu)\,b^2+25a^2]- \\ -4\,(1+\mu)\,b^4\}, \tag{17}$$

iar la mijlocul grinzii ($x = a$), căpătăm mărimea săgeții maxime (considerată pozitivă)

$$f = \frac{p}{20\,Eb^3}\,[4a^4 + (8+5\mu)\,a^2b^2 - (1+\mu)\,b^4]. \tag{18}$$

Trebuie să remarcăm că studiul făcut nu este analog cu cel din cazul unei grinzi drepte în consolă, încărcată cu o sarcină triunghiulară, deoarece forța tăietoare este nulă la mijlocul deschiderii.

Pentru a putea face unele considerații în legătură cu starea de tensiune a grinzii, vom pune tensiunile (suma rezultatelor obținute în cele două cazuri de încărcare) sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^R + \Delta\sigma_x, \\ \sigma_y &= \sigma_y^R + \Delta\sigma_y, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R + \Delta\tau_{xy}, \end{aligned} \tag{19}$$

unde, la rezultatele date de rezistența materialelor, am adăugat unii termeni suplimentari. Aceste rezultate sînt

$$\begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{pxy}{4ab^3}\,(3\,a^2 - x^2), \\ \sigma_y^R &= 0, \\ \tau_{xy}^R &= -\frac{3p}{8ab^3}\,(a^2 - x^2)\,(b^2 - y^2), \end{aligned} \tag{20}$$

precum și

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_x &= \frac{pxy}{10ab^3}\,(3\,b^2 - 5\,y^2), \\ \Delta\sigma_y &= -\frac{pxy}{4ab^3}\,(3\,b^2 - y^2) - \frac{px}{2a}, \\ \Delta\tau_{xy} &= \frac{p}{40ab^3}\,(b^2 - y^2)\,(b^2 - 5\,y^2), \end{aligned} \tag{21}$$

pe care le reprezentăm grafic în figura 7 *a*, *b*, *c*.

La variația liniară a tensiunii σ_x, dată de rezistența materialelor, se adaugă un termen suplimentar, a cărui influență este maximă în secțiunea din mijloc ($x = a$). Pentru $a = 2\,b$ găsim astfel max $\sigma_x^R = 2\,p$ iar max $\Delta\sigma_x = 0{,}2\,p$, ultima mărime fiind independentă de raportul a/b. Deci, pentru această limită de valabilitate a rezultatelor obținute prin metode elementare, căpătăm o diferență de 10% față de rezultatele date de rezistența materialelor. De remarcat că, spre deosebire de alte cazuri curente studiate cu ajutorul polinoamelor biarmonice, în acest caz termenul suplimentar este variabil cu secțiunea.

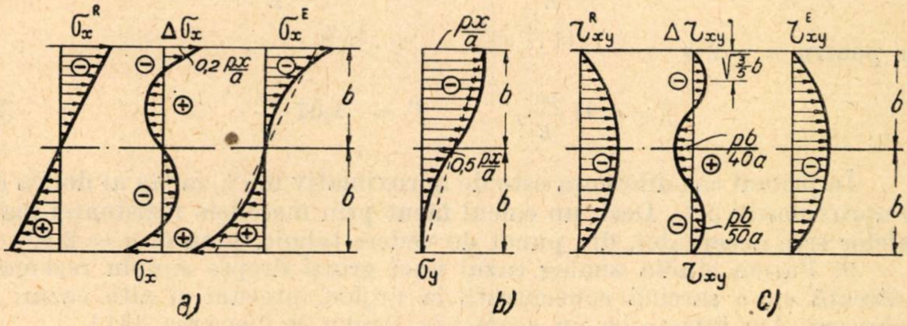


Fig. 7 *a, b, c*

Tensiunea σ_y are o variație asemănătoare cu cea care se obține în orice alt caz de încărcare.

La tensiunea τ_{xy} dată de rezistența materialelor, se adaugă un termen suplimentar independent de secțiunea considerată. O reprezentare grafică a lui $\Delta\tau_{xy}$ ne arată că acest termen are o influență neglijabilă asupra tensiunii tangențiale. Într-adevăr max τ_{xy} are loc pentru $x = 0$ (pe reazem) și pentru $a = 2\,b$ (cazul cel mai defavorabil) este egal cu $0{,}75\,p$; în acest caz max $\Delta\tau_{xy} = 0{,}0125\,p$ deci o diferență de tensiune de 1,67%. Remarcăm că tensiunea $\Delta\tau_{xy}$ se echilibrează pe înălțimea secțiunii ; pe secțiunea din mijloc, unde tensiunea tangențială trebuie să fie nulă, intensitatea acesteia este foarte mică și poate fi neglijată.

Observăm deci că rezultatele obținute mai sus sînt mai bune decît cele ce se obțin la probleme foarte cunoscute (de exemplu cazul grinzii drepte simplu rezemată, acționată de o sarcină uniform distribuită). Diferența de 10% menționată mai sus este mai mică în realitate, deoarece un calcul mai exact ne arată că max σ_x este ceva mai mic.

În ceea ce privește starea de deformație, în rezistența materialelor se calculează ecuația fibrei medii deformate. Ținînd seama de influența lui τ_{med} și a unui coeficient care corespunde faptului că tensiunea tangențială nu este distribuită uniform pe înălțimea secțiunii transversale, găsim pentru fibra medie deformată ecuația

$$Ev' = -\frac{px}{80ab^3}\{x^4-2\,[5\,a^2+8\,(1+\mu)\,b^2]\,x^2+a^2\,[25\,a^2+48\,(1+\mu)\,b^2]\}. \quad (22)$$

Sageata maximă va fi

$$f' = \frac{pa^2}{5Eb^3}\left[a^2 + 2\,(1+\mu)\,b^2\right]. \tag{23}$$

Luînd $\mu = 1/6$ putem scrie pentru $a = 5\,b$

$$f = 136\,\frac{pb}{E}, \qquad f' = 136{,}7\,\frac{pb}{E}, \tag{24}$$

iar pentru $a = 2\,b$

$$f = 4{,}91\,\frac{pb}{E}, \qquad f' = 5{,}07\,\frac{pb}{E}. \tag{25}$$

În primul caz diferența este de aproximativ 0,5% iar în al doilea caz de aproximativ 3%. Deci, un calcul făcut prin metodele rezistenței materialelor este acceptabil, din punct de vedere tehnic, pînă la $a = 2\,b$.

9. Putem studia analog cazul unei grinzi drepte simplu rezemată, încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc, precum și alte cazuri de încărcare. Am întreprins un asemenea studiu în lucrarea [31].

Probleme de genul celei expuse mai sus se studiau pînă în prezent, după cunoștința noastră, numai cu ajutorul dezvoltărilor în serie Fourier. Un studiu de genul celui întreprins de noi (bazat pe polinoame biarmonice) are avantajul că folosește metode elementare de calcul matematic, la îndemîna unui inginer proiectant. De asemenea putem face o comparație mai ușoară cu rezultatele date de rezistența materialelor.

De altfel, din studiul exemplelor de mai sus, putem trage cîteva concluzii cu un caracter mai general. Putem afirma astfel că, pentru grinzi de secțiune dreptunghiulară cu $\lambda \geqq 2$ se face un calcul suficient de exact, din punct de vedere tehnic, folosind numai metodele rezistenței materialelor, determinîndu-se astfel starea de tensiune. Acest rezultat este de altfel cunoscut și acceptat în general.

Trebuie să menționăm însă că această afirmație rămîne valabilă și în ceea ce privește determinarea stării de deformație a grinzii, după cum rezultă din exemplul de mai sus. Deci nu este necesar să folosim metodele teoriei elasticității pentru a determina starea de deformație a unei grinzi de lungime medie; ideea de grindă medie rămîne astfel legată de introducerea forței tăietoare în calculul de rezistența materialelor.

De altfel, în cele ce urmează, vom calcula deformațiile grinzii drepte — pentru un caz general de încărcare — atît prin metodele rezistenței materialelor cît și prin metodele teoriei elasticității, pentru a putea compara rezultatele, după cum s-a arătat în [32].

10. Considerăm o grindă dreaptă simplu rezemată, de deschidere 1, încărcată cu o sarcină oarecare $p = p\,(x)$ (fig. 8). Reprezentăm această încărcare cu ajutorul unei dezvoltări în serie Fourier de forma

$$p\,(x) = \sum_n p_n \sin \alpha_n x, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}\;(n = 1, 2, \ldots), \tag{26}$$

lungimea perioadei fiind $L_x = 2l$.

Încărcarea totală pe grindă va fi

$$P = \sum_n p_n \int_0^l \sin \alpha_n x dx = 2 \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{27}$$

și reacțiunile

$$V_1 = \frac{1}{l} \int_0^l p(x)(l - x)\, dx = \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n}, \tag{28}$$

$$V_2 = \frac{1}{l} \int_0^l p(x)\, x dx = \sum_n (-1)^{n+1} \frac{p_n}{\alpha_n}.$$

Putem calcula succesiv expresiile forței tăietoare și momentului încovoietor sub forma

$$T(x) = \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n} \cos \alpha_n x,$$

$$M(x) = \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x. \tag{29}$$

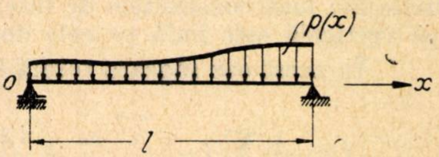


Fig. 8

Am luat constantele de integrare egale cu zero, deoarece pe reazeme momentele încovoietoare sînt nule iar forțele tăietoare sînt date de (28).

Aplicînd formula lui Mohr, ținînd seama de expresia momentului încovoietor și prin analogie cu (28), găsim rotirile secțiunilor de reazem

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n^3},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \sum_n (-1)^n \frac{p_n}{\alpha_n^3}. \tag{30}$$

Din (29) găsim, prin integrări succesive, expresiile rotirilor și deplasărilor pe verticală

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n x,$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x. \tag{31}$$

Și aici am luat constantele de integrare egale cu zero, deoarece pe reazeme deplasările sînt nule iar rotirile sînt date de (30). În acest caz săgeata la mijlocul deschiderii (foarte apropiată de săgeata maximă — coincizînd cu săgeata maximă în cazul unei sarcini simetrică în raport cu mijlocul deschiderii) va fi dată de

$$f = \frac{1}{EI} \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_n}{\alpha_n^4} = \frac{l^4}{\pi^4 EI} \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_n}{n^4} (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{32}$$

Putem introduce influenţa forţei tăietoare cu ajutorul ecuaţiei

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -k\frac{p}{GA}, \tag{33}$$

unde G este modulul de elasticitate transversală, A este aria secţiunii transversale, iar k este un coeficient care ţine seama de repartiţia neuniformă a tensiunii tangenţiale pe înălţimea secţiunii transversale; în cazul secţiunii dreptunghiulare avem $k = 1{,}2$.

Pornind de la (26) putem integra ecuaţia (33); găsim

$$v(x) = \frac{1{,}2}{GA}\sum_n \frac{p_n}{\alpha_n^2}\sin\alpha_n x, \tag{34}$$

unde am luat constantele de integrare egale cu zero, deoarece deplasarea pe verticală este nulă pe cele două reazeme.

În acest caz săgeata totală la mijlocul deschiderii va fi dată de

$$f = \frac{1}{EI}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_n}{\alpha_n^4} + \frac{1{,}2}{GA}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_n}{\alpha_n^2} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{35}$$

Dacă ţinem seama de relaţia

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu), \tag{36}$$

dintre cele trei constante elastice ale materialului, precum şi de (fig. 9)

$$A = 2b, \qquad I = \frac{2}{3}b^3, \tag{37}$$

mai putem scrie

$$f = \frac{1}{EI}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_n}{\alpha_n^2}\left[\frac{1}{\alpha_n^2} + 0{,}8(1 + \mu)b^2\right], \tag{38}$$

sau

$$E\left(\frac{f_R}{l}\right) = \frac{3}{2\pi^4}\left(\frac{l}{b}\right)\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_n}{n^2}\left[0{,}8\,\pi^2(1 + \mu) + \frac{\left(\frac{l}{b}\right)}{n^2}\right]. \tag{39}$$

Dacă introducem raportul $\lambda = l/2b$ al celor două laturi, obţinem pentru cazul betonului armat ($\mu = 1/6$)

$$E\left(\frac{f_R}{l}\right) = 0{,}284\,\lambda\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{p_n}{n^2}\left(1 + 0{,}434\frac{\lambda^2}{n^2}\right). \tag{40}$$

Dezvoltarea în serie de mai sus este rapid convergentă şi ne putem mulţumi cu număr mic de termeni (3—4 termeni).

11. Vom calcula aceste deplasări ţinînd seama de influenţa deformaţiei întregii grinzi, fără a o reduce la fibra ei medie; deci vom face un calcul prin metodele teoriei elasticităţii.

Considerăm grinda dreaptă din figura 9, încărcată cu sarcina $p = p\,(x)$ dată de (26). Alegem o funcţie de tensiune de forma

$$F = \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2}\,[A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y\,(C_n \operatorname{sh} \alpha_n y + D_n \operatorname{ch} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x. \quad (41)$$

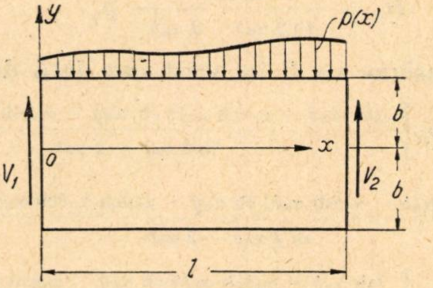


Fig. 9

Din (1) rezultă tensiunile

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_n [(A_n + 2\,C_n) \operatorname{ch} \alpha_n y + (B_n + 2\,D_n)] \operatorname{sh} \alpha_n y + \\
&\quad + \alpha_n y\,(C_n \operatorname{sh} \alpha_n y + D_n \operatorname{ch} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x, \\
\sigma_y &= -\sum_n [A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + \\
&\quad + \alpha_n y\,(C_n \operatorname{sh} \alpha_n y + D_n \operatorname{ch} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x, \\
\tau_{xy} &= -\sum_n [(A_n + C_n) \operatorname{sh} \alpha_n y + (B_n + D_n) \operatorname{ch} \alpha_n y + \\
&\quad + \alpha_n y\,(C_n \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \operatorname{sh} \alpha_n y)] \cos \alpha_n x.
\end{aligned} \quad (42)$$

Pe laturile de sus şi de jos punem condiţiile

$$\begin{aligned}
&y = \pm\, b: \qquad \tau_{xy} = 0, \\
y = b: \qquad &\sigma_y = p\,(x), \qquad y = -\,b: \qquad \sigma_y = 0,
\end{aligned} \quad (43)$$

iar pe cele două feţe de capăt

$$\begin{aligned}
x = 0: \qquad \sigma_x = 0, \qquad T_y &= V_1, \\
x = l: \qquad \sigma_x = 0, \qquad \overline{T_y} &= -\,V_2.
\end{aligned} \quad (44)$$

Obţinem constantele

$$
\begin{aligned}
A_n &= -\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b}\,p_n,\\
B_n &= -\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\,p_n,\\
C_n &= \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_n b}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b}\,p_n,\\
D_n &= \frac{\mathrm{ch}\,\alpha_n b}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\,p_n.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Starea de tensiune va fi în acest caz dată de

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_n p_n \left[\frac{(\mathrm{sh}\,\alpha_n b - \alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b)\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y + \alpha_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b} + \right.\\
&\left. + \frac{(\mathrm{ch}\,\alpha_n b - \alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b)\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y + \alpha_n y\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\right] \sin\alpha_n x,\\
\sigma_y &= \sum_n p_n \left[\frac{(\mathrm{sh}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b)\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,{}_n b + 2\,{}_n b} + \right.\\
&\left. + \frac{(\mathrm{ch}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b)\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\right] \sin\alpha_n x,\\
\tau_{xy} &= \sum_n p_n \left(\frac{\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b} + \right.\\
&\left. + \frac{\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\right) \cos\alpha_n x.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Calculăm deplasarea pe verticală cu relaţia

$$
Ev\,(x, y) = \int (\sigma_y - \mu\sigma_x)\,dy
\tag{47}
$$

şi obţinem

$$
\begin{aligned}
Ev &= \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n} \left[\frac{(2\mathrm{sh}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b)\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b} + \right.\\
&\left. + \frac{(2\mathrm{ch}\,\alpha_n b + \alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b)\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\right] \sin\alpha_n x +\\
&+ \mu \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n} \left(\frac{\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}2\,\alpha_n b + 2\,\alpha_n b} + \right.\\
&\left. + \frac{\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n b\,\mathrm{ch}\,\alpha_n y - \alpha_n y\,\mathrm{ch}\,\alpha_n b\,\mathrm{sh}\,\alpha_n y}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b}\right) \sin\alpha_n x.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Ecuația fibrei medii deformate va fi dată de (pentru $y = 0$)

$$Ev(x) = \sum_n \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{2\operatorname{ch}\alpha_n b + (1+\mu)\,\alpha_n b \operatorname{sh}\alpha_n b}{\operatorname{sh}2\,\alpha_n b - 2\,\alpha_n b} \sin \alpha_n x. \tag{49}$$

Dacă introducem raportul $\lambda = l/2\,b$ al celor două laturi, obținem pentru cazul betonului armat ($\mu \doteq 1/6$) săgeata maximă

$$E\left(\frac{f_E}{l}\right) = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_n}{n} \frac{\dfrac{0{,}318}{n} + \dfrac{0{,}291}{n} \operatorname{th} 1{,}571\,\dfrac{n}{\lambda}}{\dfrac{1}{n} \operatorname{sh} 1{,}571\,\dfrac{n}{\lambda} - \dfrac{1{,}571}{\lambda \operatorname{ch} 1{,}571\,\dfrac{n}{\lambda}}}. \tag{50}$$

Ca și dezvoltarea în serie (40), corespunzătoare metodelor rezistenței materialelor, această dezvoltare, corespunzătoare metodelor teoriei elasticității, este rapid convergentă.

12. Pentru a putea face o comparație între rezultatele date de rezistența materialelor și cele date de teoria elasticității, luăm cazul cel mai defavorabil $\lambda = 2$ (pentru $\lambda < 2$ condițiile la limită (44) nu mai corespund, deoarece nu se mai poate aplica principiul lui B. de St. Venant).

Pentru săgeata dată de rezistența materialelor obținem

$$E\left(\frac{f_R}{l}\right) = 0{,}568 \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_n}{n^2}\left(1 + \frac{1{,}736}{n^2}\right) \tag{51}$$

iar pentru săgeata dată de teoria elasticității

$$E\left(\frac{f_E}{l}\right) = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_n}{n} \frac{\dfrac{0{,}318}{n} + 0{,}145 \operatorname{th} 0{,}785n}{\dfrac{1}{n} \operatorname{sh} 0{,}785n - \dfrac{0{,}785}{\operatorname{ch} 0{,}785n}}. \tag{52}$$

Luînd primii termeni din dezvoltarea în serie putem scrie

$$E\left(\frac{f_R}{l}\right) = 1{,}554\,p_1 - 0{,}075\,p_3 + 0{,}024\,p_5 - 0{,}012\,p_7 + 0{,}007\,p_9 - \ldots, \tag{53}$$

precum și

$$E\left(\frac{f_E}{l}\right) = 1{,}496\,p_1 - 0{,}052\,p_3 + 0{,}008\,p_5 - 0{,}002\,p_7 + 0{,}000\,p_9 - \ldots \tag{54}$$

Pentru a putea aprecia diferența la care ne conduc cele două expresii (53) și (54), vom calcula săgeata maximă în cîteva cazuri particulare, cît mai diferite între ele.

În cazul unei sarcini uniform distribuite, folosim dezvoltarea în serie

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \alpha_n x, \tag{55}$$

de unde

$$p_1 = 1{,}273\,p, \quad p_3 = 0{,}418\,p, \quad p_5 = 0{,}255\,p, \quad p_7 = 0{,}182\,p, \quad p_9 = 0{,}141\,p. \tag{56}$$

Obținem

$$f_R = 1{,}953\,\frac{pl}{E}, \qquad f_E = 1{,}885\,\frac{pl}{E}, \tag{57}$$

deci o eroare (prin metodele rezistenței materialelor) de

$$\frac{1{,}953-1{,}885}{1{,}885} = 0{,}036 \approx 3{,}5\%. \tag{58}$$

Pentru o sarcină distribuită triunghiular, folosim dezvoltarea în serie

$$p(x) = \frac{8p}{\pi^2}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2}\sin \alpha_n x, \tag{59}$$

de unde

$$p_1 = 0{,}811\,p, \quad p_3 = -\,0{,}090\,p, \quad p_5 = 0{,}032\,p, \quad p_7 = -\,0{,}017\,p, \quad p_9 = 0{,}010\,p. \tag{60}$$

Căpătăm

$$f_R = 1{,}267\,\frac{pl}{E}, \qquad f_E = 1{,}219\,\frac{pl}{E}, \tag{61}$$

deci o eroare de

$$\frac{1{,}267-1{,}219}{1{,}219} = 0{,}038 \approx 4{,}0\%. \tag{62}$$

Observăm de asemenea că rezultatele obținute sînt foarte apropiate de cele date de (25). Deci metoda de calcul elementar, exemplificată la punctul 8, ne conduce la rezultate bune din punct de vedere practic.

O sarcină concentrată, acționînd la mijlocul deschiderii grinzii, poate fi reprezentată sub forma

$$p(x) = \frac{2P}{l}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \alpha_n x, \tag{63}$$

deci

$$p_1 = -\,p_3 = p_5 = -\,p_7 = p_9 = \ldots = 2\,\frac{P}{l}. \tag{64}$$

Săgeata maximă va fi

$$f_R = 3{,}344 \frac{P}{E}, \qquad f_E = 3{,}116 \frac{P}{E}, \tag{65}$$

deci o eroare de

$$\frac{3{,}344-3{,}116}{3{,}116} = 0{,}073 \approx 7{,}5\%. \tag{66}$$

13. Bazați pe cazurile de încărcare considerate mai sus (cazuri de încărcare foarte diferite între ele, încărcarea cu o sarcină concentrată fiind deosebit de defavorabilă unui calcul exact), putem afirma că pentru grinzi de secțiune dreptunghiulară, cu $\lambda = l/2\,b \geqq 2$ facem un calcul suficient de exact, din punct de vedere tehnic, folosind numai metodele rezistenței materialelor, atît în ceea ce privește starea de tensiune cît și în ceea ce privește starea de deformație.

Dacă am lua ca puncte teoretice de reazem punctele $x=0$; $l, y = -b$, s-ar adăuga la săgeata f_E, obținută prin metodele teoriei elasticității, și scurtarea pe reazem pe verticală. Deci eroarea care se face este și mai mică, putînd afirma că practic nu depășește 5%.

Deci tensiunea normală σ_y are o influență mică în exprimarea deformației grinzii.

Pentru grinzile de beton armat, eroarea care se face este cu atît mai neînsemnată cu cît acestea sînt neomogene; această neomogenitate a lor nu poate fi practic introdusă în calcul (decît în mod aproximativ, prin metodele de determinare a secțiunii de armătură), astfel încît eroarea care se face considerînd aceste grinzi ca niște corpuri omogene este de același ordin de mărime cu cea care se face folosind metodele rezistenței materialelor.

14. Rezultatele obținute mai sus sînt cu atît mai importante cu cît în cazul grinzilor de altă secțiune transversală decît cea dreptunghiulară calculele exacte sînt foarte dificile din punct de vedere practic. Putem extinde practic aceste rezultate și la grinzile de secțiune oarecare (fără a putea aprecia exact limitele aproximației pe care o facem, de la caz la caz), afară de cazul grinzilor cu pereți subțiri. Precizarea aproximației pe care o facem în acest caz necesită un studiu special.

Se pune problema găsirii raportului λ de la care nu mai este necesar să introducem influența forței tăietoare; eventual acest raport ar putea să fie $\lambda = 5$ (cifra fiind numai informativă).

În general, este bine să verificăm rezultatele date de rezistența materialelor cu ajutorul teoriei elasticității, cînd nu sîntem siguri de ele și dacă acest lucru este posibil din punct de vedere practic; totuși se recomandă să folosim metode mai simple de calcul atunci cînd acest lucru este posibil, fără erori prea mari, mai ales că metodele elementare sînt — de obicei — mai aproape de fenomenul fizic.

De asemenea, trebuie să folosim metode adecvate de calcul pentru fiecare problemă în parte. Astfel dacă va trebui să studiem anumite tensiuni locale sau traiectorii de tensiuni în care va trebui să cunoaștem intensitatea tensiunii normale σ_y — de exemplu — trebuie să folosim rezultatele date de teoria elasticității ; de asemenea, dacă ne interesează să studiem deformabilitatea întregii grinzi, ne interesează deplasarea u etc. Cu alte cuvinte rezultatele date de teoria elasticității ne sînt necesare numai pentru unele calcule speciale, în limitele stabilite mai sus pentru raportul celor două dimensiuni.

În cazul în care $\lambda < 2$ va trebui să folosim metode mai exacte de calcul. Se poate întîmpla ca rezultatele obținute pe căi mai elementare să fie suficient de bune, dar acest lucru trebuie verificat de la caz la caz și nu poate fi afirmat apriori.

15. În concluzie, este greu de făcut o delimitare precisă a grinzilor, după modul în care se comportă, făcînd astfel o clasificare a lor și arătînd metodele de calcul care ar trebui folosite.

După cum am văzut mai sus, această idee de clasificare după săgeata maximă—de exemplu—dispare. De altfel am arătat în [25] că și pentru $\lambda < 2$ se pot obține rezultate analoage.

Metodele rezistenței materialelor și ale teoriei elasticității și limitele lor de valabilitate se întrepătrund organic și nu pot fi separate în mod arbitrar. Credem că putem spune cel mult că avem de-a face cu grinzi lungi și grinzi scurte. În primul caz putem folosi metodele rezistenței materialelor pentru determinarea stării de solicitare a grinzii, cu erori de maximum 5% ; în al doilea caz folosim metodele teoriei elasticității pentru calculul tensiunilor și mai ales pentru a putea aprecia deformabilitatea întregii grinzi. Considerăm însă că această delimitare este numai informativă (raportul limită fiind $\lambda = 2$).

Primită la redacție la 8 iunie 1959

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСЧЕТЕ ПРЯМЫХ БАЛОК

РЕЗЮМЕ

Используя методы плоской теории упругости автор указывает на возможность расчета прямых балок прямоугольного сечения, при отношении пролета балки к ее высоте больше двух. В работе применяются бигармонические многочлены в случаях неравномерно распределенной нагрузки или нагрузки с прерывной касательной (сосредоточенные нагрузки с треугольным распределением и пр.). (Подобные случаи нагрузки были исследованы, до сих пор, только методом разложения в ряды Фурье).

На общем случае нагрузки показывается, что деформации балки могут быть рассчитаны по методу сопротивления материалов, получая в результате отклонения менее 5% от деформаций, рассчитанных по методу теории упругости; с этой целью используются разложения в ряды Фурье.

Таким образом устанавливается возможность практического расчета, свободно опирающихся балок, по методу сопротивления материалов.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES POUTRES DROITES

RÉSUMÉ

En utilisant les méthodes de la théorie plane de l'élasticité, on indique comment on peut calculer les poutres droites de section rectangulaire lorsque le rapport entre l'ouverture de la poutre et sa hauteur est supérieur à 2. On utilise des polynômes biharmoniques pour des cas de chargement discontinu ou à tangente discontinue (des charges concentrées, triangulaires, etc.). Des cas de chargement de ce genre n'étaient étudiés jusqu'à présent qu'à l'aide des développements en série de Fourier.

En outre, on démontre, pour un cas général de chargement, que les déformations de la poutre peuvent être calculées par les méthodes de la résistance des matériaux; on obtient ainsi des différences inférieures à 5% par rapport aux déformations calculées par les méthodes de la théorie de l'élasticité. A cette fin on utilise les développements en série de Fourier.

On démontre ainsi que les poutres simplement appuyées, mentionnées ci-dessus, peuvent être pratiquement calculées par les méthodes de la résistance des matériaux.

BIBLIOGRAFIE

1. Airy G.B., *On the Strains in the Interior of Beams.* British Assoc. Adv. Sci. Rept., 1862.
2. — *On the Strains in the Interior of Beams.* Phil. Trans., **153**, 1863, 49.
3. Bay H., *Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden.* Dissertation. Stuttgart, 1931.
4. Ching-Yuan Neou, *A Direct Method for Determining Airy Polynomial Stress Functions.* J. of Appl. Mech., **24**, *3*, 387 (1957).
5. Cișmigiu Al., *Rigiditatea consolelor plane de lungime medie, acționate de forțe orizontale de volum (masice).* Bul. științ. al Inst. de construcții, București, *1*, 79 (1954).
6. — *Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte și a bolților cilindrice.* Ind. constr. și mat. de constr., **VI**, *6*, 332 (1955).
7. Dischinger Fr., *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens.* Abh. Intern. Ver. für Brückenbau u. Hochbau, **I**, 69 (1932).
8. Длугач М. И., *Расчет защемленных балок-стенок. Вопросы прочности и устойчивости строительных конструкций.* Изд. Акад. Наук Укр. ССР, Киев, *21*, 81 (1956).
9. Filon N.G., *On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load.* Phil. Trans., A., **206**, 63 (1903).
10. Girkmann K., *Flächentragwerke.* Viena, 1946—1948—1954—1956.
11. Голденблат И. И., *Расчет и конструирование железобетонных балок-стенок.* Стройиздат наркомстроя, Москва, 1940.
12. Gran Olsson R., *Über die Grundlagen der Balkenbiegung.* Der Bauing., **21**, 27—28 (1940).
13. Grüning G., *Beitrag zum Spannungsbild des wandartigen Trägers.* Baupl. u. Bautechn., **10**, *8*, 335 (1956).
14. Калманок А. С., *К решению задачи о плоском напряженном состоянии прямоугольной пластинки.* Констр. и мат. в городском строительстве, *6*, 70 (1950).
15. — *Строительная механика пластинок.* Маштройиздат, Москва, 1950.
16. — *Расчет балок-стенок.* Москва, 1956.

17. Лазариан В. А., *Об одном случае плоского изгиба короткой балки.* Тр. Киевского инж. -строит. инст., 1936, **III**, 289.
18. Mesnager A., C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, **123**, 1475 (1901).
19. Parkus H., *Der wandartige Träger auf drei Stützen.* Dissertation Österr. Ing. Archiv, **II**, *3*, 185 (1948).
20. Ribière M., *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles.* Thèse. Paris, 1889.
21. — *Sur la flexion des pièces épaisses.* C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, **126**, 402 (1898).
22. — *Sur la résistance des massifs épais.* C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, **126**, 1190 (1898).
23. Teodorescu P. P., *Calculul grinzilor pereţi cu o singură deschidere în caz general de rezemare şi încărcare.* Ed. Min. Înv., Bucureşti, 1955.
24. — *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *2*, 285 (1956).
25. — *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a teoriei elasticităţii.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 655 (1956).
26. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere.* I. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 115 (1957).
27. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere.* II. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 451 (1957).
28. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de şt. mat. şi fiz., **IX**, *2*, 481 (1957).
29. — *Asupra ipotezei secţiunilor plane în rezistenţa materialelor.* Analele Univ. „C. I. Parhon", Bucureşti, Seria Şt. Nat., *14*, 41 (1957).
30. — *Quelques considérations concernant le problème plan de la théorie de l'élasticité.* Bull. Math., **I**, *3*, 369 (1957).
31. — *Consideraţii în legătură cu aplicarea metodelor elementare de calcul în problema plană a teoriei elasticităţii.* Analele Univ. „C. I. Parhon", Bucureşti, Seria Şt. Nat., *16*, 35 (1957).
32. — *Asupra aplicării metodelor de rezistenţa materialelor în calculul grinzilor drepte.* Analele Univ. „C. I. Parhon", Bucureşti, Seria Şt. Nat., 9, 19 (1958).
33. Timpe A., *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.* Z. math. u. Phys., Dissertation, 52, 348 (1905).
34. Valentin W., *Berechnung wandartiger Träger nach dem Zusammensetzverfahren.* Beton- u. Stahlbetonbau, **52**, *8*, 176 (1957).
35. Варвак П. М., Развитие и приложение методы сеток к расчету пластинок. II, ИАН, Укр. ССР, Киев, 1952.
36. Worch G., *Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie.* Bautechnik Archiv, Berlin, *5*, 43 (1949).
37. Zweiling K., *Biharmonische Polynome*, Berlin, 1952.

TENSIUNILE DE CREŞTERE RADIALE ŞI LONGITUDINALE ALE LEMNULUI

DE

CHR. PELECUDI şi V. PLATON

Lemnul este mult utilizat în toate ramurile industriei, fiind de multe ori de neînlocuit datorită calităţilor sale deosebite. Totuşi, el prezintă şi unele defecte cu urmări negative atît în timpul prelucrării, cît şi în timpul serviciului. Dintre defectele mai importante care se pun în evidenţă în timpul prelucrării lemnului, începînd cu doborîrea arborilor şi terminînd cu produsele finite, menţionăm crăparea şi deformarea materialului. Acestea provoacă mari pierderi de material şi rebuturi.

Pînă de curînd aceste defecte erau puse pe seama fenomenului de contragere diferită a lemnului pe cele trei direcţii de creştere. Recent, deformarea şi crăparea materialului lemnos în stare verde se atribuie tensiunilor iniţiale, care iau naştere în timpul creşterii arborelui şi care se menţin cu diverse modificări şi la piesele prelucrate. Aceste tensiuni sînt condiţionate de structura anatomică şi chimică a lemnului, de modificările ce au loc în arbore în timpul creşterii, sub efectul greutăţii proprii a trunchiului şi a coronamentului, a precipitaţiilor atmosferice sub formă de zăpadă sau ploaie, precum şi sub efectul factorilor dinamici, cum ar fi rafalele de vînt. Influenţa acestor factori se manifestă şi asupra formei trunchiului şi a coronamentului, precum şi asupra modului de înrădăcinare. În felul acesta diferitele părţi ale arborelui, pentru a se opune cît mai bine solicitărilor, tind către un solid de egală rezistenţă. Se poate menţiona în acest sens de exemplu că îngroşarea trunchiului la bază este mai pronunţată la arborii înrădăcinaţi superficial şi mai puţin evidentă la arborii profund înrădăcinaţi.

Crearea tensiunilor interne în arbori se constată din următoarea experienţă simplă : dacă se leagă crengi sau lăstari ai pomilor într-o poziţie nenaturală, atunci, după cîteva săptămîni de vegetaţie este necesară o forţă mai mare pentru a ţine aceste părţi în poziţia respectivă decît la început, deoarece aceştia creează tensiuni, care au de scop să-i aducă din nou în poziţia lor naturală.

Dacă se taie un copac cu fierăstrăul, perpendicular pe direcția fibrelor, atunci fisura de tăiere se lățește la exteriorul copacului, cu cît fierăstrăul intră mai adînc, pe cînd, în partea interioară a copacului, devine mai îngustă, astfel că fierăstrăul se înțepenește. Se presupune bineînțeles că trunchiul la tăierea transversală este sprijinit în toată lungimea sa și nu se poate îndoi. În consecință, se produce în direcția fibrelor la exterior o scurtare, iar la interior o alungire, rezultînd la periferie tensiuni iar în interior compresiuni longitudinale [1].

La prelucrarea speciilor lemnoase de la noi din țară, în special fagul, pune în evidență tensiunile interne chiar din momentul doborîrii, cînd se produc puternice crăpături și deformații. De asemenea, atît lucrările de specialitate, cît și experimentările făcute la noi în țară în cadrul I.C.E.I.L. [12], care au stabilit mărimea și repartiția acestor tensiuni în buștenii de fag, confirmă următoarele : *efortul longitudinal este de întindere la exteriorul trunchiului și de compresiune în partea centrală, celelalte două eforturi, radial și tangențial, fiind în zona centrală de întindere, iar în exterior de compresiune.*

Cauzele tensiunilor de creștere trebuie căutate în tendința naturii vii, cu care toți cercetătorii sînt de acord, de a reprezenta în organizarea sa utilul. Unii cercetători, ca J. F. Martley, M. R. Iakobs [2] au căutat să dea o explicație acestor tensiuni, bazați pe faptul că lemnul tînăr s-ar așeza pe cel bătrîn fără tensiune, asemănător zidăriei, care este tencuită și îngroșată cu mortar. Ulterior, greutatea coroanei, forța vîntului, coeziunea apei legate, presiunea osmotică etc. ar exercita forța lor asupra lemnului maturizat și l-ar pune sub tensiune. Alți cercetători S. H. Clarke [3], E. Münch au căutat cauza tensiunilor în peretele celulei însăși, bazați pe afirmația conform căreia celula maturizată se contractă în direcție longitudinală și se umflă perpendicular pe fibră. Lemnul mai bătrîn oprește aceste deformații, astfel încît celula tînără este supusă unor tensiuni de tracțiune longitudinală și presiune transversală. Contractările și umflările ar fi legate de înmagazinarea unor substanțe solide în spațiile intermicelare laterale (lignificare).

Ori care ar fi mijlocul de creare a acestor tensiuni inițiale importanța lor constă că prin pretensionarea produsă diferitelor părți ale copacului ajută la crearea unor stări de tensiuni admisibile, atunci cînd acesta este supus diferiților factori mecanici, chimici etc., al căror efect este încărcarea mecanică a trunchiului. În tehnică menționăm pretensionarea betonului cu ajutorul unor forțe exterioare sau fixarea părților de construcție la temperaturi înalte. Pretensionarea periferică longitudinală a arborilor, corespunde atît pentru a face față greutății coroanei, care ar avea tendința să încovoaie, de exemplu un sector circular separat pe înălțimea trunchiului, în spre exterior și deci să comprime longitudinal fibrele exterioare, cît și acțiunii vîntului care periclitează în general latura concavă de încovoiere, la partea neexpusă vîntului, unde lemnul este expus presiunii, deoarece rezistența la compresiunea lemnului este aproape jumătate din rezistența la tensiune, permițîndu-se deci ca tensiunea să fie mai mare pe partea expusă vîntului. Astfel ruperi de fibre pe partea de tracțiune nu se produc, în timp ce, turtirea fibrelor pe partea de presiune este foarte frecventă. Această tensionare exterioară longitudinală provoacă evident în interior compresiuni longitudinale. Arborele protejează astfel exteriorul în dauna centrului trunchiului, care este mult mai puțin important pentru el. Compresiunea tangențială exterioară, acționează în mod util, în contra fisurilor provocate de ger, uscăciune sau căldură. Aceasta însă va provoca tensiuni, radiale și tangențiale la interior, care duc uneori la fisuri centrale.

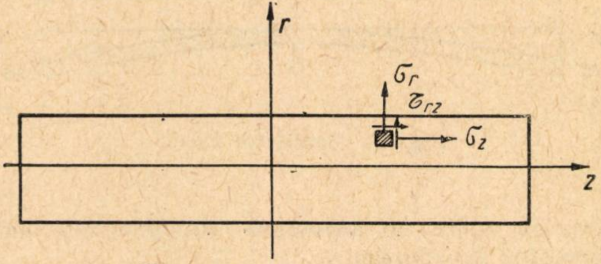


Fig. 1. — Dulap nedeformat.

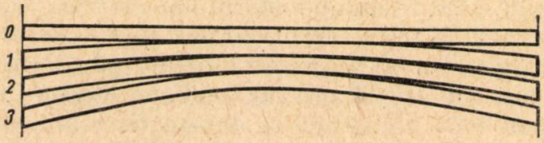


Fig. 2. — Rigle deformate.

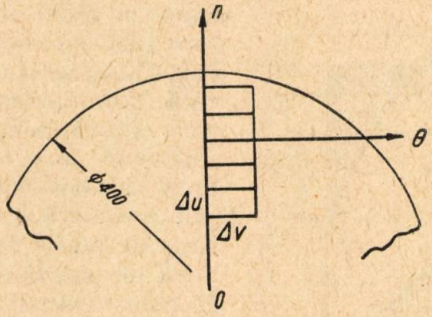


Fig. 3. — Rondelă.

Din experimentările făcute în cadrul I.C.E.I.L. s-au verificat cele afirmate mai sus. Acestea s-au realizat în primul rînd cu îngrijirea conservării umidității, care la lemnul verde este de peste 30%, limită peste care caracteristicile mecanice ale lemnului nu mai sînt influențate. Din bușteni sănătoși, fără defecte, s-au debitat la gater dulapi de inimă, avînd grosimea de 50 mm și lungimea de 2,3 și 4 m. La fierăstrăul circular dulapii au fost debitați în rigle de grosime 30,40 și 50 mm, care eliberate teoretic de toate eforturile interioare, s-au încovoiat prezentînd concavitatea spre exterior, ceea ce confirmă tensiunile longitudinale ale arborelui (fig. 1 și 2). Din studiul deformațiilor acestor rigle se poate calcula efortul unitar longitudinal în dulap.

Altă serie de experiențe au constat în separarea din bușteni de rondele de 50 mm grosime și diametrul exterior de circa 40 cm (fig. 3). Măsurînd distanțele între reperele fixate radial și tangențial, înainte și după anularea eforturilor interioare prin tăierea rondelei în piese mici dreptunghiulare, se obțin de asemenea deformațiile, care duc apoi la calcularea eforturilor interioare.

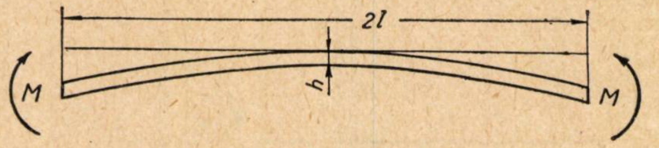


Fig. 4. — Solicitarea riglei.

Determinarea tensiunilor interne în dulapi. În primul rînd vom preconiza cazul simplu, cînd în dulap sînt numai eforturi longitudinale, care dacă s-ar menține și asupra riglei, ar păstra-o nedeformată. Dat fiind grosimea mică a riglei, variația acestor eforturi pe secțiunea transversală este liniară și cum nu există eforturi radiale, starea de eforturi corespunde aceleia unei bare solicitată la capete de momente încovoietoare. Repartiția transversală a eforturilor longitudinale se poate considera aceeași de-a lungul riglei, deci și spre capetele riglei, cu toate că în realitate aici nu există forțe exterioare (fig. 4). Această situație poate fi explicată prin principiul Saint-Venant, care afirmă că distribuția eforturilor interioare la o oarecare depărtare de locul de acționare al forțelor, este independentă de modul cum se aplică forțele, adică se poate presupune o zonă de capăt de grosime mică (δ) în care repartiția transversală a eforturilor longitudinale nu mai corespunde ipotezei inițiale dar care nu influențează sensibil în restul riglei. Zona de capăt ar putea fi considerată în prima aproximație ca o bară supusă din partea dulapului la eforturi corespunzătoare eforturilor longitudinale respective (fig. 5 și 10). În acest caz echilibrul este asigurat, dar în această bară de capăt apar pe lîngă eforturile longitudinale și eforturi importante radiale, solicitarea corespunzînd încovoierii unei bare datorită unei sarcini distribuite. Dacă această zonă este mică, aceste eforturi nu interesează și aceasta se poate

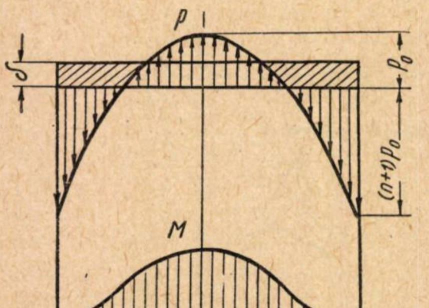


Fig. 5. — Solicitarea zonei de capăt.

confirma numai printr-o aproximaţie cît mai bună a fibrei medii deformate cu un arc de cerc. În cazul în care fibra medie deformată se depărtează de la forma unui arc de cerc, atunci repartiţia preconizată iniţial nu corespunde situaţiei reale şi am avea pe lîngă efortul longitudinal σ_z şi efortul radial σ_r precum şi efortul de lunecare τ_{rz} (s-au considerat rezultatele din rezistenţa materialelor).

Dacă se consideră lungimea $2\,l$ a riglei pe care se produce săgeata f, după un arc de cerc, atunci raza ρ a acestui cerc este

$$(2\rho - f)\,f = l^2 \quad \text{şi} \quad \rho = \frac{l^2}{2f},$$

unde s-a neglijat f în faţa mărimii 2ρ (fig. 6). Dar între momentul de încovoiere şi raza de curbură a fibrei medii deformate existînd relaţia cunoscută $1/\rho = M/EI$, se determină momentul încovoietor

$$M = \frac{EI}{\rho} = \frac{2EIf}{l^2}$$

şi efortul unitar longitudinal de încovoiere

$$\sigma_i = \frac{M}{W} = \frac{Efh}{l^2},$$

deoarece

$$I = \frac{bh^3}{12}; \quad W = \frac{bh^2}{6}.$$

Dacă se debitează $2n$ rigle pe lăţimea dulapului, numerotate de la interior către exterior, atunci efortul longitudinal maxim în rigla de ordinul k este (fig. 7)

$$\sigma_{ik} = \frac{Ehf_k}{l^2}$$

unde f_k este săgeata respectivă a riglei, săgeată care variază, după cum indică experienţa, fiind nulă în interior şi maximă pentru rigla exterioară. În ansamblu însă, diagrama tensiunilor longitudinale pe secţiunea transversală (fig. 8) apare pentru o riglă ca fiind rezultanta între diagrama eforturilor datorită unei simple tensiuni (fig. 9) peste care se suprapune o diagramă a eforturilor unitare datorită unei încovoieri, care a fost deja calculată, adică

$$\sigma_k^+ = \sigma_{tk} + \sigma_{ik} \qquad \text{sau} \qquad \sigma_{tk} = \frac{\sigma_k^+ + \sigma_k^-}{2}$$

$$\sigma_k^- = \sigma_{tk} - \sigma_{ik} \qquad \qquad \sigma_{ik} = \frac{\sigma_k^+ - \sigma_k^-}{2}$$

unde

σ_{tk} — este efortul unitar datorită unei simple tensiuni pentru rigla de ordinul k,

σ_{ik} — este efortul unitar maxim datorit încovoierii pentru aceeaşi riglă de ordinul k.

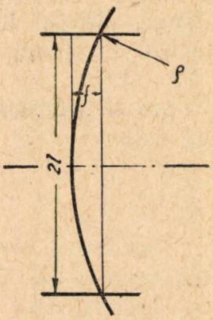


Fig. 6. — Deformaţia circulară a riglei.

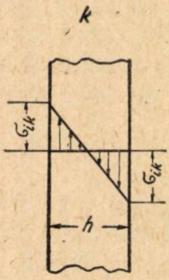


Fig. 7. — Diagrama efortului unitar longitudinal datorit încovoierii, într-o riglă k.

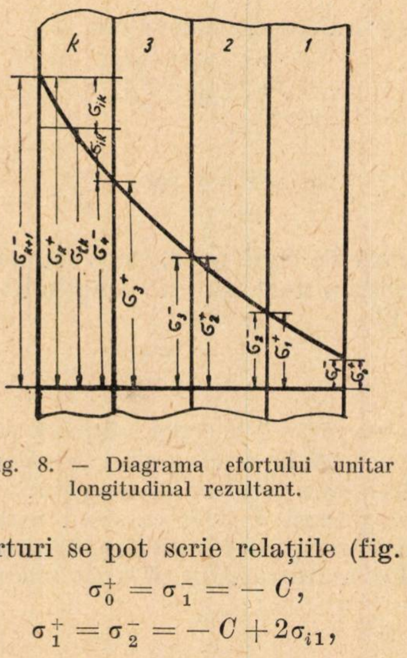

k
3
2
1
σik
σik
σ⁻k+1
σ⁺k
σtk
σ⁻k
σ⁺3
σ⁻3
σ⁺2
σ⁻2
σ⁺1
σ⁻1
σ⁺0

Fig. 8. — Diagrama efortului unitar longitudinal rezultant.

Între aceste eforturi se pot scrie relaţiile (fig. 8)

$$\sigma_0^+ = \sigma_1^- = -C,$$

$$\sigma_1^+ = \sigma_2^- = -C + 2\sigma_{i1},$$

$$\sigma_2^+ = \sigma_3^- = -C + 2\sigma_{i1} + 2\sigma_{i2},$$

. . . .

$$\sigma_k^+ = \sigma_{k+1}^- = -C + 2\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij},$$

şi

$$\sigma_{tk} = -C + 2\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} - \sigma_{ik}.$$

Întrebuințînd condiția de echilibru ca forța rezultantă longitudinală să fie nulă, momentul rezultant fiind nul prin repartiția simetrică a tensiunilor față de axa dulapului, se obține :

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_{h}.b.h = 0 \qquad \text{sau} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[-C + 2 \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \right] = 0,$$

$$C = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} (2n - 2j + 1),$$

rezultînd eforturile unitare longitudinale sub forma

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (2j - 1) \sigma_{ij} - (n - 2k + 1) \sigma_{ik} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=k+1}^{n} (2n - 2j + 1) \sigma_{ij} \right].$$

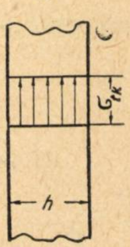


Fig. 9. — Diagrama efortului unitar longitudinal datorit unei simple tensiuni, într-o riglă k.

Dacă numărul riglelor debitate pe rază ar crește foarte mult, la limită s-ar putea considera rigla de grosime elementară, variația efortului unitar pe deplasarea $h = dr$ fiind

$$d\sigma = 2d\sigma_i = \frac{2\,Ef\,dr}{l^2},$$

unde săgeata $f(r)$ este o funcțiune de r, monoton crescătoare, aproximată destul de bine prin $f(r) = m\,r^n$, coeficienții m și n determinîndu-se din curba experimentală a săgeții.

Deci

$$d\sigma = \frac{2E\,m\,r^n\,dr}{l^2}$$

și prin integrare

$$\sigma = \frac{2E\,m\,r^{n+1}}{(n + 1)\,l^2} - C.$$

Constanta de integrare se determină la fel ca mai înainte din condiția de echilibru ca efortul total longitudinal să fie nul

$$\int_0^R \sigma\,b\,dr = 0 \qquad \text{sau} \qquad C = \frac{2E\,m\,R^{n+1}}{(n + 1)\,(n + 2)\,l^2} = +\,\sigma_0\,,$$

rezultînd pentru eforturile unitare longitudinale expresia (fig. 10)

$$\sigma = -\,\sigma_0\,[1 - (n + 2)\,\lambda^{n+1}] \qquad \text{cu} \qquad \lambda = \frac{r}{R}\,.$$

Valorile maxime se vor găsi la exterior şi interior astfel

$$\sigma_e = (n+1)\,\sigma_0 \qquad \sigma_i = -\,\sigma_0\,,$$

raportul lor fiind

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_i} = -\,(n+1)\,.$$

Efortul longitudinal se anulează pentru

$$r_0 = \frac{R}{\sqrt[n+1]{n+2}}\,.$$

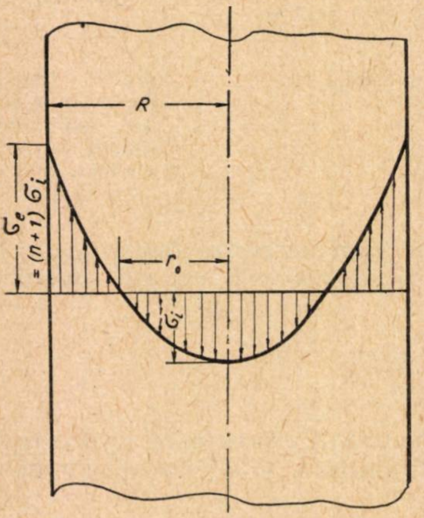


Fig. 10. — Diagrama efortului unitar longitudinal în dulap.

În cazul unei variaţii liniare a săgeţii $n = 1$ rezultă

$$\sigma = -\,\sigma_0\,[1 - 3\,\lambda^2], \qquad \sigma_0 = \frac{E\,m\,R^2}{3l^2}\,,$$

$$\sigma_e = 2\,\sigma_0\,, \qquad \sigma_i = -\,\sigma_0\,,$$

$$\sigma_e = -\,2\,\sigma_i\,,$$

efortul exterior fiind de două ori mai mare ca cel interior, iar anularea efortului, făcîndu-se la $r_0 = 0{,}58\,R$ valori care concordă cu experienţele făcute la I.C.E.I.L.

Pentru bara de capăt δ, considerăm efortul distribuit p corespunzător efortului longitudinal σ din dulap (fig. 5), acesta producînd momentul încovoietor în secţiunea x astfel

$$p = p_0\,[1 - (n+2)\,\lambda^{n+1}] \qquad \text{cu} \qquad p_0 = \frac{2E\,m\,R^{n+1}}{(n+1)\,(n+2)l^2}\,,$$

$$M_x = \int_x^R p b dr\,(r - x) = p_0\,b\,R^2\left[-\frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^{n+3}}{n+3}\right],$$

unde

$$\mu = \frac{x}{R}$$

diagrama sa este arătată în figura 5 şi valorile importante ale momentului încovoietor corespund pentru

$$\mu = 1 \quad M_1 = 0 \quad \mu = 0 \quad M_0 = -\,p_0 b R^2\,\frac{n+1}{2\,(n+3)}\ \text{(maxim)},$$

punctul de inflexiune al diagramei $\mu = \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+2}}$ corespunzînd cu punctul de anulare al efortului distribuit p. Efortul radial unitar produs la capetele dulapului va urmări aproximativ aceeaşi diagramă, dacă vom considera $W = \frac{b\delta^2}{b}$ şi deci $\sigma_r = \frac{M}{W}$. Aşa cum am şi prevăzut efortul unitar radial va fi maxim la capătul dulapului în axa dulapului, unde şi practic se constată dese fisuri. Un calcul mai exact ar fi trebuit făcut în presupunerea că dulapul este supus la capete de eforturi contrare eforturilor sale longitudinale, deci în final nesupus nici unui efort periferic, aşa cum de altfel este realitatea. Pentru această solicitare sînt metode de calcul atît aproximative cît şi exacte, în special pentru grinzile pereţi la care raportul $2 > R/l > 0{,}5$ [8], [9]. Cum în cazul dulapilor studiaţi mai sus raportul este din contra $R/l = \frac{1}{10} < 0{,}5$ influenţa acestei solicitări se resimte numai în regiunea de capăt. În cele din urmă eforturile interioare ar fi suma eforturilor datorită celor două solicitări, dar conform celor spuse mai sus, spre mijlocul dulapilor predomină eforturile longitudinale, iar spre capetele dulapilor predomină eforturile radiale.

A doua ipoteză de lucru, inspirată de faptul că trebuie să existe şi eforturi unitare radiale, măcar spre capătul dulapului, precum şi de faptul că încovoierea riglelor nu se face exact după un arc de cerc, presupune că rigla ar putea fi menţinută practic rectilinie de un efort transversal, distribuit pe lungimea riglei. Distribuţia sa trebuie să fie simetrică faţă de centrul riglei, pentru ca momentul rezultant să fie nul şi în plus trebuind ca şi efortul rezultant să fie nul, se impune efortului unitar radial sensul compresiunii la mijloc şi sensul tensiunii la capete.

Curba fibrei medii deformate a riglei se va exprima mai general printr-o funcţie de z, corectată printr-o funcţie de r corespunzînd săgeţii variabile cu poziţia r a riglei, adică

$$s = f(r) \, . \, A(z).$$

Din ecuaţia $M = EI \frac{d^2A}{dz^2}$ se deduce

$$M = EIf \frac{d^2A}{dz^2}, \qquad \sigma_i = Ef \frac{h}{2} \frac{d^2A}{dz^2}.$$

Variaţia efortului unitar longitudinal la o deplasare elementară

$$h = dr \text{ va fi } d\sigma_z = 2d\sigma_i = Efdr \frac{d^2A}{dz^2},$$

adică

$$\sigma_z = f_1(r) \frac{d^2A}{dz^2} + B(z),$$

unde

$$\frac{df_1(r)}{dr} = E\,f(r).$$

Din ecuațiile de echilibru ale elasticității în coordonate carteziene rectangulare, pentru dulap, avem

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0.$$

Derivînd în raport cu z și integrînd în raport cu r se obține

$$\tau_{rz} = -\left[f_2(r)\frac{d^3A}{dz^3} + r\frac{dB}{dz} + C(z) \right],$$

$$\sigma_r = f_3(r)\,\frac{d^4A}{dz^4} + \frac{r^2}{2}\,\frac{d^2B}{dz^2} + r\frac{dC}{dz} + D(z),$$

cu

$$\frac{df_3(r)}{dr} = f_2(r) \qquad \frac{df_2(r)}{dr} = f_1(r),$$

iar B, C, D sînt funcții numai de z.

Din cauza acestor eforturi generale, care satisfac ecuațiile de echilibru în forma dată mai sus, nu se produc nici un fel de forțe masice fictive suplimentare prin readucerea riglelor încovoiate în poziție nedeformată pentru a reconstitui dulapul. Căutînd să impunem și condițiile ca să nu avem nici forțe superficiale periferice, ceea ce corespunde realității, precum și condițiile scoase din experimentări, vom obține forma generală posibilă a curbei de încovoiere a riglelor și a eforturilor unitare.

În primul rînd suprafața exterioară nefiind supusă la sarcini

$$r = R, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_r = 0,$$

$$f_2(R)\frac{d^3A}{dz^3} + R\frac{dB}{dz} + C = 0,$$

$$f_3(R)\frac{d^4A}{dz^4} + \frac{R^2}{2}\,\frac{d^2B}{dz^2} + R\frac{dC}{dz} + D = 0.$$

De asemenea, suprafața de capăt este liberă de sarcini

$$z = l, \qquad \tau_{rz} = 0, \qquad \sigma_z = 0,$$

$$f_2(r)\,\frac{d^3A}{dz^3}\,(l) + r\,\frac{dB}{dz}(l) + C(l) = 0,$$

$$f_1(r)\frac{d^2A}{dz^2}(l) + B(l) = 0.$$

Eforturile radiale şi longitudinale sînt maxime şi minime în centrul dulapului

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}(z = 0) = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r}(r = 0) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z}(z = 0) = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}(r = 0) = 0,$$

ceea ce duce la

$$f_1(r)\frac{d^3A}{dz^3}(0) + \frac{dB}{dz}(0) = 0, \qquad f(0)\,.\,\frac{d^2A}{dz^2} = 0,$$

$$f_3(r)\frac{d^5A}{dz^5}(0) + \frac{r^2}{2}\frac{d^3B}{dz^3}(0) + r\frac{d^2C}{dz^2}(0) + \frac{dD}{dz}(0) = 0,$$

$$f_2(0)\frac{d^4A}{dz^4} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

La aceste condiţii se mai adaugă şi cele corespunzătoare fibrei medii deformate în origine

$$z = 0, \ \frac{ds}{dz} = f(r)\frac{dA}{dz}(0) = 0 \ \text{(maxim)},$$

$r = 0, \quad s = f(0) \quad A(z) = 0$ (rigla centrală nedeformată).

Pentru funcţiile $f_i(r)$ trebuie să remarcăm că $f(r) \neq$ const. ceea ce atrage $f_1(r) \neq$ const., $f_2(r) \neq$ const. şi r, $f_3(r) \neq$ const. şi r^2.

Din condiţiile de mai sus se găseşte

$$C(z) = 0,$$

$$B(z) = -\frac{f_2(R)}{R}\cdot\frac{d^2A}{dz^2},$$

$$D(z) = \left[\frac{Rf_2(R)}{2} - f_3(R)\right]\frac{d^4A}{dz^4},$$

cu următoarele condiţii :

$$f(0) = 0 \quad f_2(0) = 0$$

$$\frac{dA}{dz}(0) = 0 \quad \frac{d^3A}{dz^3}(0) = 0 \quad \frac{d^5A}{dz^5}(0) = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{d^2A}{dz^2}(l) = 0 \quad \frac{d^3A}{dz^3}(l) = 0.$$

Dacă se dezvoltă $A(z)$ în serie de puteri

$$A(z) = A_0 + A_1z^1 + A_2z^2 + \ldots + A_kz^k + \ldots$$

condiţiile de mai sus se transformă în

$$A_1 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_5 = 0,$$

$$\sum_{k=2} (k-1)\, k\, A_k\, l^{k-2} = 0, \qquad \sum_{k=3} (k-3)(k-1)\, k\, A_k\, l^{k-3} = 0,$$

adică

$$A_4 = -\frac{1}{24} \sum_{k=6}^{\infty} (k-2)(k-1)\, k\, A_k\, l^{k-4},$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=6}^{\infty} (k-4)(k-1)\, k\, A_k l^{k-2},$$

şi

$$A(z) = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \sum_{k=6}^{\infty} A_k z^k .$$

Restul coeficienţilor $A_6, A_7 \ldots A_k$ se pot determina prin aproximaţia curbei fibrei medii deformate cu aceea reprezentată de ecuaţia de mai sus. Desigur că aproximaţia este cu atît mai bună cu cît numărul termenilor este mai mare, însă practic ne putem opri la un singur termen de ordinul $(p+6)$ cu $p \geqslant 0$

$$A(z) = A_0 + A_2\, z^2 + A_4\, z^4 + A_{p+6}\, z^{p+6}$$

şi luînd

$$A_{p+6} = \frac{1}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)\,(p+4)\,(p+5)\,(p+6)} \cdot \frac{1}{l^{p+6}}$$

rezultă

$$A_2 = \frac{1}{4\,(p+1)\,(p+3)\,(p+4)\, l^2}$$

$$A_4 = -\frac{1}{24\,(p+1)\,(p+2)\,(p+3)\, l^4}$$

cu

$$\frac{A_4}{A_2} = -\frac{p+4}{6\,(p+2)} \cdot \frac{1}{l^2} \qquad \frac{A_{p+6}}{A_2} = \frac{4}{(p+2)\,(p+5)\,(p+6)} \cdot \frac{1}{l^{p+4}} .$$

Constatăm că pentru z mic, curba fibrei medii deformate se apropie de un arc de cerc şi deci primul calcul este destul de exact pentru a ne indica eforturile interioare în dulap. Condiţiile $f(0) = 0$ şi $f_2(0) = 0$ sînt satisfăcute dacă aproximăm funcţia $f(r)$ prin $f(r) = m\, r^n$ cu $n > 0$.

Eforturile interioare se pot pune sub forma produselor de două funcții, una numai de r și alta numai de z, adică

$$\sigma_z = K_z \bar{\sigma}_z \cdot \bar{\bar{\sigma}}_z \qquad \text{cu } K_z = \frac{EmR^{n+1}}{(n+1)(n+2)\, l^2 (p+1)(p+2)(p+3)},$$

$$\bar{\sigma}_z = (n+2)\,\lambda^{n+1} - 1, \qquad \lambda = \frac{r}{R},\ \nu = \frac{z}{l},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_z = l^2 \frac{d^2 A}{dz^2} = \frac{1}{(p+4)}\left[\frac{p+2}{2} - \frac{p+4}{2}\,\nu^2 + \nu^{p+4}\right],$$

$$\tau_{rz} = K_{rz}\,\bar{\tau}_{rz}\,\bar{\bar{\tau}}_{rz}, \qquad K_{rz} = K_z \left(\frac{R}{l}\right),$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \lambda\,(1 - \lambda^{n+1}),$$

$$\bar{\bar{\tau}}_{rz} = l^3 \frac{d^3 A}{dz^3} = \nu\,(\nu^{p+2} - 1),$$

$$\sigma_r = K_r\,\bar{\sigma}_r\,\bar{\bar{\sigma}}_r, \qquad K_r = K_{rz}\left(\frac{R}{l}\right),$$

$$\bar{\sigma}_r = \left[\frac{1}{n+3}\,\lambda^{n+3} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{n+1}{2\,(n+3)}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = l^4 \frac{d^4 A}{dz^4} = (p+3)\,\nu^{p+2} - 1.$$

Diagramele acestor eforturi apar în figurile 11 și 12.

În concluzie, efortul unitar longitudinal σ_z își păstrează sensul în lungul dulapului micșorîndu-se de la centru către capete și fiind de compresiune în axa dulapului și tensiune la exterior, iar efortul unitar radial σ_r își păstrează semnul pe raza dulapului, scăzînd de la interior către exterior și fiind de compresiune în centrul dulapului și de tensiune la capetele dulapului (p par, n impar).

Astfel, pentru $r = 0$, $z = l$,

$$\sigma_{r\,\max} = K_r \frac{(n+1)(p+2)}{2\,(n+3)},$$

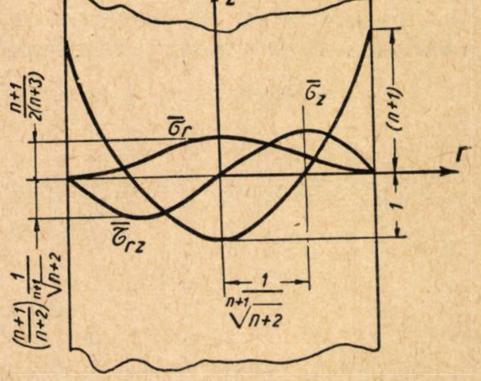


Fig. 11. — Diagramele eforturilor σ_z, τ_{rz}, σ_r pe lățimea dulapului (r).

şi pentru $r = R \quad z = 0$

$$\sigma_{z\,\max} = K_z \frac{(n+1)\,(p+2)}{2\,(p+4)}\,.$$

Urmează

$$\eta = \frac{\sigma_{z\,\max}}{\sigma_{r\,\max}} = \frac{n+3}{p+4}\left(\frac{l}{R}\right)^2 \approx 66$$

dacă se consideră $n = 1$, $p = 2$, $l = 2$ m şi $R = 20$ cm.

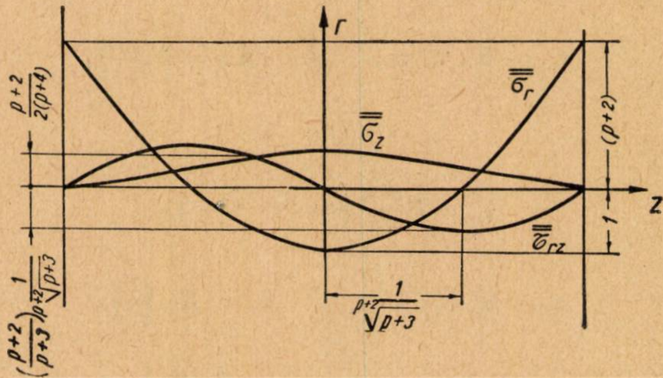

r
$\overline{\overline{\sigma}}_r$
$\overline{\overline{\sigma}}_z$
$\overline{\overline{\sigma}}_{rz}$
z
$\frac{p+2}{2(p+4)}$
$(p+2)$
1
$\frac{1}{\sqrt[p+2]{p+3}}$
$\left(\frac{p+2}{p+3}\right)\frac{1}{\sqrt[p+2]{p+3}}$

Fig. 12. — Diagramele eforturilor σ_z, τ_{rz}, σ_r pe lungimea dulapului (z).

Efortul radial maxim este mai mic decît efortul longitudinal maxim, însă şi rezistenţa lemnului la întindere perpendiculară pe fibre este mai mică decît la întindere în direcţia fibrelor; de exemplu, pentru fag $\sigma_{\parallel} = 1350$ kg/cm² şi $\sigma_{\perp} = 70$ kg/cm² pentru brad $\sigma_{\parallel} = 840$ kg/cm² şi $\sigma_{\perp} = 23$ kg/cm² (Hütte, pag. 816). Raportul eforturilor unitare de mai sus este numai indicativ, variind cu pătratul raportului (l/R). Pentru $l = 1$ m şi $R = 20$ cm se obţine $\eta = 16{,}5$, astfel că se pot găsi situaţii în care apar fisurile la capetele dulapului din cauza tensiunilor mari radiale.

Primită la redacţie la 24 octombrie 1959

РАДИАЛЬНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ РОСТА ДРЕВЕСИНЫ

РЕЗЮМЕ

В работе выявляются внутренние напряжения роста древесины и даются объяснения этого явления. Приводится экспериментальный метод, принятый Научно-исследовательским институтом деревообраба-

тывающей промышленности (I.C.E.I.L.) для определения этих напряжений в батенсах, выпиленных из сырого дерева, а также и теоретические расчеты. Эти расчеты привели к заключению, что продольные напряжения являются натяжением во внешних частях древесины и сжимающим напряжением в оси доски. Радиальные напряжения являются максимальными в оси доски у торцов, но имеют гораздо меньшие величины.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Недеформированная доска.
Рис. 2. — Деформированные брусья.
Рис. 3. — Шайба.
Рис. 4. — Нагрузка бруса.
Рис. 5. — Нагрузка конечной зоны.
Рис. 6. — Круговая деформация бруса.
Рис. 7. — Диаграмма продольного натяжения, образовавшегося вследствие продольного изгиба в брусе *к*.
Рис. 8. — Диаграмма равнодействующей силы продольного натяжения.
Рис, 9. — Диаграмма продольного натяжения, образовавшегося вследствие простого натяжения в брусе *к*.
Рис. 10. — Диаграмма продольного натяжения в батенсах.
Рис. 11. — Диаграмма поперечных усилий σ_z, τ_{rz}, σ_r батенса (*r*).
Рис. 12. — Диаграмма продольных усилий σ_z, τ_{rz}, σ_r батенса (*z*).

TENSIONS RADIALES ET LONGITUDINALES DE CROISSANCE DU BOIS

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, les auteurs mettent en évidence les tensions propres de croissance du bois et tâchent de les expliquer. Ils indiquent le mode d'expérimentation, ainsi que les calculs théoriques, employés par l'« Institut de Recherches pour l'Exploitation et l'Industrialisation du Bois », pour déterminer ces tensions dans le cas d'une poutre, provenant d'un arbre fraîchement abattu.

Ils en ont tiré la conclusion importante que le bois est soumis à des tensions longitudinales de traction vers l'extérieur et à des tensions de compression dans l'axe de la poutre. Les tensions radiales sont maxima dans l'axe de la poutre aux bouts de celle-ci, mais sont sensiblement inférieures aux tensions longitudinales.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Poutre non déformée.
Fig. 2. — Règles déformées.
Fig. 3. — Rondelle.
Fig. 4. — Sollicitation de la règle.

Fig. 5. — Sollicitation de la zone marginale.

Fig. 6. — Déformation circulaire de la règle.

Fig. 7. — Diagramme de l'effort unitaire longitudinal dû au fléchissement dans une règle *k*.

Fig. 8. — Diagramme de l'effort unitaire longitudinal résultant.

Fig. 9. — Diagramme de l'effort unitaire longitudinal dû à une simple tension, dans une règle *k*.

Fig. 10. — Diagramme de l'effort unitaire longitudinal dans la poutre.

Fig. 11. — Diagrammes des efforts σ_z, τ_{rz}, σ_r sur la largeur de la poutre (r).

Fig. 12. — Diagrammes des efforts σ_z, τ_{rz}, σ_r sur la longueur de la poutre (z).

BIBLIOGRAFIE

1. HANS KÜBLER, *Die Ursache der Wachstumsspannungen und die Spannungen quer zur Faserrichtung*. — Holz als Roh- und Werkstoff. *1*, Ian. (1959).
2. M. R. JAKOBS, *The Growth Stresses of Woody Stems*. Bull. Nr. 28 Canberra, 1945, Commonwealth Forestry Bureau.
3. S. H. CLARKE, *Stresses and Strains in Growing Timber*. Forestry, **13** (1939).
4. J. D. BOYD, *Tree Growth Stresses. I. Growth Stress Evaluation*. Austr. J. of Scientific Research. Series B. Biological Sciences, **3** (1950).
5. — *Tree Growth Stresses. II. The Development of Shakes and other Visual Failures in Timber*. Austr. J. of Applied Science. **I** (1950).
6. — *Tree Growth Stresses. III. The Origin of Growth Stresses*. Austr. J. of Scientific Research, Series B, **2** (1950).
7. M. M. FILOMENCO-BORODICI, *Teoria elasticităţii*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
8. N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticităţii şi plasticităţii*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
9. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*. Second Edition, McGraw-Hill, 1956.
10. P. P. TEODORESCU, *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* şi *2* (1957).
11. — *O metodă de aproximare a condiţiilor de contur în cazul problemei plane a elasticităţii*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3* (1956).
12. V. PLATON, *Tensiunile interne din lemnul de fag şi mijloacele de reducere a lor*. Rev. Industria Lemnului, 1959, 12.
13. А. И. КУЗНЕЦОВ, *Внутренние напряжения в древесине*. Москва, Гослесбумиздат, 1950.
14. А. И. СТРИХА, *Причины деформации деталей из древесины и способы ее уменьшения*. Деревообрабатывающая промышленность, *7* (1954).
15. А. И. СТРИХА, *Внутренние напряжения и образование трещин в древесине бука*. Деревообрабатывающая промышленность, *4—5* (1955).

STUDII

ELASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

ÎNVELITORI DE TRANSLAȚIE CALCULATE PRIN METODA RELAXĂRII

DE

MIRCEA MIHAILESCU [1]) și YVONNE MIHAILESCU [2])

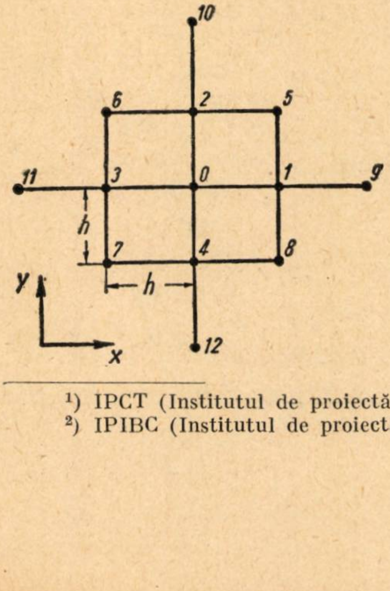
În lucrarea *Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subțiri* [1] s-a arătat cum se pot transforma ecuațiile diferențiale de echilibru ale învelitorilor subțiri în ecuații cu diferențe finite, după care s-au analizat formele pe care le iau aceste ecuații în cazul teoriei de membrană la cele trei tipuri de suprafețe, eliptic, hiperbolic și parabolic și în cazul general al teoriei de încovoiere. În continuare, s-a expus aplicarea procedeului de relaxare la rezolvarea sistemelor de ecuații obținute pentru învelitorile subțiri.

În această lucrare se particularizează aplicarea metodei relaxării la cazul *învelitorilor de translație* luînd de exemplu o suprafață cu liniile principale de curbură *arce de cerc*. S-au determinat eforturile în teoria de membrană la învelitori complete sau cu goluri, rezemate pe timpane sau contraforturi. Pentru necesitățile calculului, în tabela 1 sînt date expresiile derivatelor funcție de diferențe finite pentru rețele rectangulare, oblice și triunghiulare.

Tabela 1

Aproximarea operatorilor diferențiali obișnuiți prin ecuații cu diferențe finite la diferite sisteme de rețele

REȚEA RECTANGULARĂ



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{1}{2h}(f_1 - f_3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{1}{h^2}(f_1 + f_3 - 2f_0)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2h^3}(-f_{11} + 2f_3 - 2f_1 + f_9)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 \approx \frac{1}{h^4}(f_{11} - 4f_3 + 6f_0 - 4f_1 + f_9)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{1}{2h}(f_2 - f_4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{1}{h^2}(f_2 + f_4 - 2f_0)$$

---

[1]) IPCT (Institutul de proiectări construcții tip).

[2]) IPIBC (Institutul de proiectări industria bunurilor de larg consum).

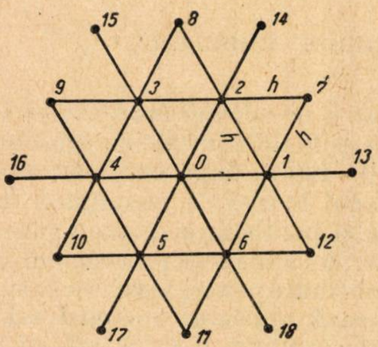
$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2h^3}(f_{10} - 2f_2 + 2f_4 - f_{12})$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 \approx \frac{1}{h^4}(f_{10} - 4f_2 + 6f_0 - 4f_4 + f_{12})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \approx \frac{1}{4h^2}(f_5 + f_7 - f_6 - f_8)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4}\,[f_9 + f_{10} - 4(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + 12 f_0 + f_{11} + f_{12}]$$

REȚEA TRIUNGHIULARĂ



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{1}{2h}(f_1 - f_4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{1}{h^2}(f_1 + f_4 - 2f_0)$$

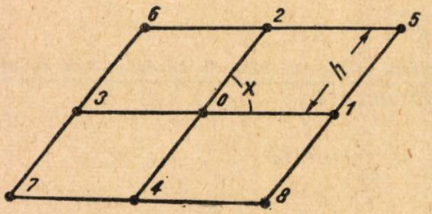
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{f_2 + f_3 - (f_5 + f_6)}{2\sqrt{3}\,h}$$

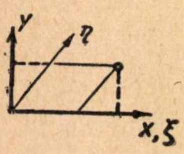
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{2(f_2 + f_3 + f_5 + f_6) - f_1 - f_4 - 6f_0}{3h^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx$$

$$\approx \frac{2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) - 12 f_0}{3h^2}$$

REȚEA OBLICĂ





$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \approx \frac{f_1 - f_3}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \approx \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = c\,\frac{\partial f}{\partial x} + s\,\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_2 - f_4}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + s^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} +$$

$$+ 2\,cs\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta} = c\,\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + s\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \approx$$

$$\approx \frac{f_5 - f_6 + f_7 - f_8}{4h^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2c\,\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^2}\left[\frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0}{h^2} - \frac{2c\,(f_5 - f_6 + f_7 - f_8)}{4h^2}\right]$$

I. CALCULUL UNEI ÎNVELITORI COMPLETE REZEMATĂ PE TIMPANE

1. *O învelitoare de translație este generată prin deplasarea unei curbe plane* (generatoare) *paralel cu ea însăși, de-a lungul a două alte curbe* (directoare). În tehnică se aleg deobicei curbele directoare situate în plane paralele, iar planul curbei generatoare, perpendicular pe ele.

În lucrare s-a considerat o suprafață de tip eliptic, la care *curba generatoare* și *curbele directoare* sînt *arce de cerc*, orientate toate cu curbura în același sens și s-au calculat eforturile pentru forme avînd raportul laturilor dreptunghiului de bază : $a/b = 2$; $a/b = 1{,}3$; $a/b = 1$. S-a preferat acest tip de suprafață pentru că are curbura totală constantă și în consecință confecționarea cofrajelor este simplă, iar în cazul prefabricării se pretează la împărțirea în elemente asemenea.

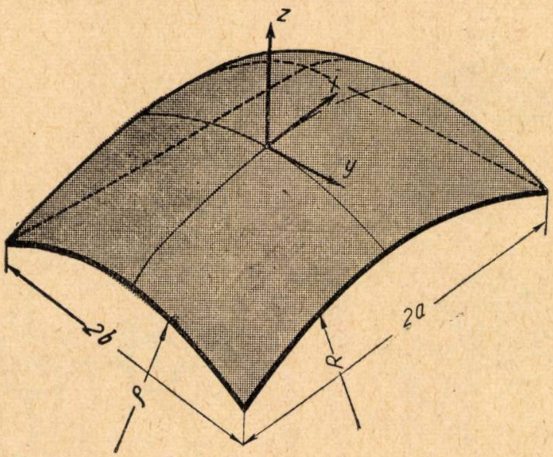


Fig. 1

Scriind ecuația suprafeței, conform figurii 1

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{\rho^2 - y^2} - R - \rho, \tag{1}$$

în care R și ρ sînt razele de curbură ale arcelor directoare și generatoare, se deduc expresiile derivatelor

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{R \cos^3 \alpha}\ ; \quad s = 0\ ; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho \cos^3 \beta}\ , \tag{2}$$

în care conform figurii 1

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}.$$

În continuare se notează

$$k = \frac{a}{b} = \frac{R}{\rho}; \quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \nu, \quad \sin\omega = \sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta}. \tag{3}$$

Dacă în ecuaţia de echilibru a învelitorii, scrisă după Pucher [2], în teoria de membrană (fig. 2)

$$r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + Z\frac{\sin\omega}{\cos\alpha\cos\beta} = 0, \tag{4}$$

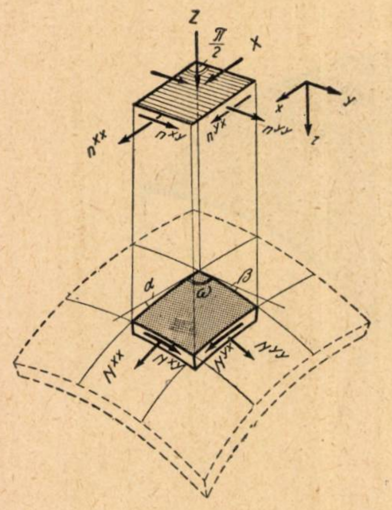


Fig. 2

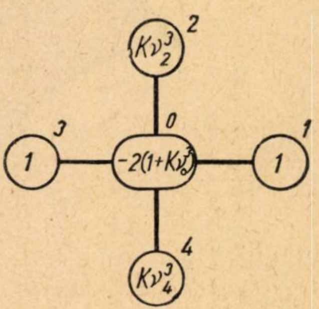


Fig. 3

în care $n^{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $n^{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$, $n^{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, se înlocuiesc expresiile derivatelor (2) şi notaţiile (3) rezultă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\nu^3}{K}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = Z\rho\nu\cos\beta\sin\omega = 0. \tag{5}$$

2. Pentru a lucra adimensional se fac, după R. Jenkins [3] substituţiile

$$x = \frac{a}{n}X, \; y = \frac{b}{n}Y, \; F = \frac{a^2}{n^2}f,$$

derivatele devenind

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{a}{b}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

În consecință, ecuația (4) se reduce la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\nu^3 \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + 1\,000\,\nu \cos\beta \sin\omega = 0, \tag{6}$$

în care pentru calcul s-a considerat o valoare unitară

$$Z\rho = -1\,000.$$

Introducînd diferențele finite, se obține

$$f_1 + f_3 + k\nu^3 (f_2 + f_4) - 2(1 + k\nu^3)\, f_0 + 1\,000\,\nu \cos\beta \sin\omega = 0, \tag{7}$$

la care corespunde schema de relaxare din figura 3.

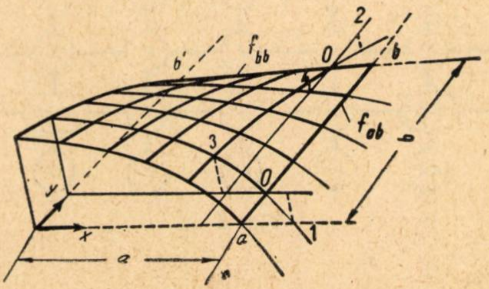


Fig. 4

3. Pentru a determina valorile pe contur ale funcției de forțe, s-a presupus învelitoarea rezemată pe arce (sau timpane) rigide în planul lor și flexibile transversal. De aici rezultă *condițiile de margini*

$$x = \pm a,\quad n^{xx} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = 0, \tag{8}$$

deci

$$y = \pm b,\quad n^{yy} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0. \tag{9}$$

Prin integrarea ecuațiilor (8) și (9) se obțin expresiile *funcției de forțe pe margini*, care au o variație liniară reprezentînd drepte

$$f_{ab} = f_{a'b'} = Ax + B,\quad f_{aa'} = f_{bb'} = Cy + D. \tag{10}$$

Deoarece pentru valorile eforturilor este indiferentă ecuația acestor drepte, se poate alege forma cea mai simplă ($f = 0$; $A = B = C = D = 0$) adică valoarea funcției de forțe pe margini egală cu zero (fig. 4).

4. Sistemul de ecuații de tipul (7) s-a rezolvat aplicînd procedeul de *relaxare* în *bloc*. Schemele de relaxare în bloc se obțin prin suprapunerea mai multor scheme de relaxare simplă, urmărind anularea sumei reziduurilor de pe rețeaua blocată. În figura 5 apare schema de relaxare pentru o rețea avînd 9 noduri blocate.

În figura 6 sînt date valorile obţinute pentru funcţia de forţe la o învelitoare, avînd raportul laturilor $\frac{a}{b} = 2$, rezemată lateral pe arce şi încărcată cu valoarea unitară $Zr = 1\,000$; calculul s-a efectuat din motive

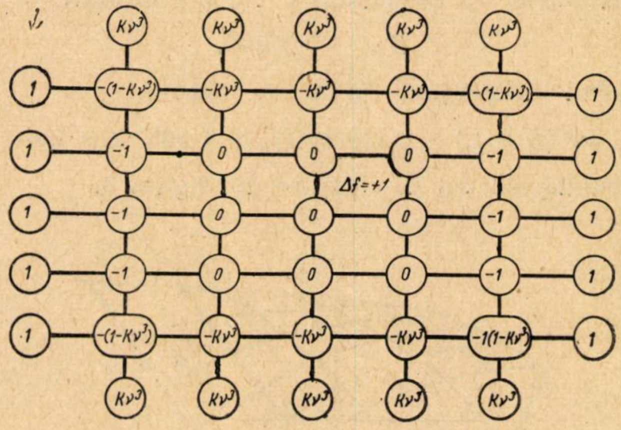

$K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$
1 $-(1-K\nu^3)$ $-K\nu^3$ $-K\nu^3$ $-K\nu^3$ $-(1-K\nu^3)$ 1
1 -1 0 0 0 -1 1
$\Delta f = +1$
1 -1 0 0 0 -1 1
1 -1 0 0 0 -1 1
1 $-(1-K\nu^3)$ $-K\nu^3$ $-K\nu^3$ $-K\nu^3$ $-1(1-K\nu^3)$ 1
$K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$ $K\nu^3$

Fig. 5

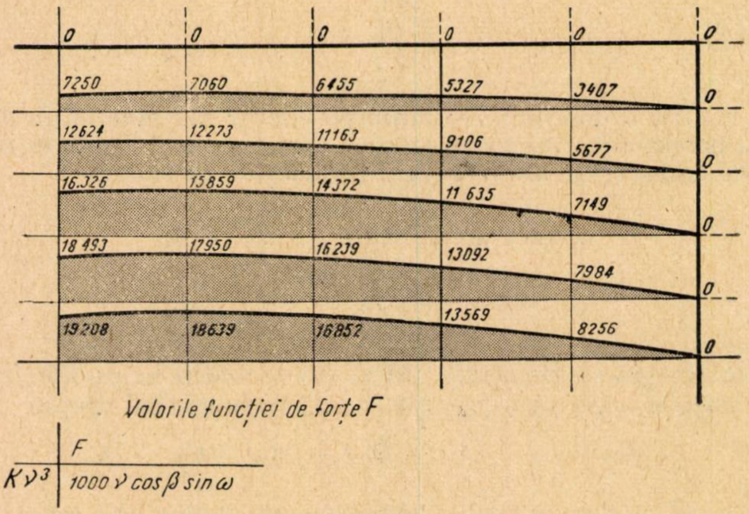


Fig. 6

de simetrie pentru un sfert de învelitoare, schema avînd 100 ochiuri pe întreaga suprafaţă.

În figurile 7, 8 şi 9 s-au calculat în aceleaşi condiţii valorile funcţiei de forţe pentru o învelitoare cu raportul laturilor $\frac{a}{b} = 1{,}3$, schema de relaxare avînd în primul caz 25 ochiuri, iar în al doilea 100 şi în al treilea 400 ochiuri pentru întreaga învelitoare.

Examinînd diferenţele de valori în tabela 2 se poate constata influenţa îndesirii reţelei de calcul asupra preciziei rezultatelor.

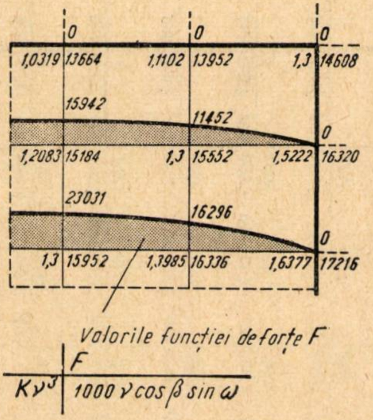

0 0 0
1,0319 13664 1,1102 13952 1,3 14608
15942
11452
0
1,2083 15184 1,3 15552 1,5222 16320
23031
16296
0
1,3 15952 1,3985 16336 1,6377 17216
Valorile funcţiei de forţe F
F
Kν³ 1000 ν cos β sin ω

Fig. 7

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

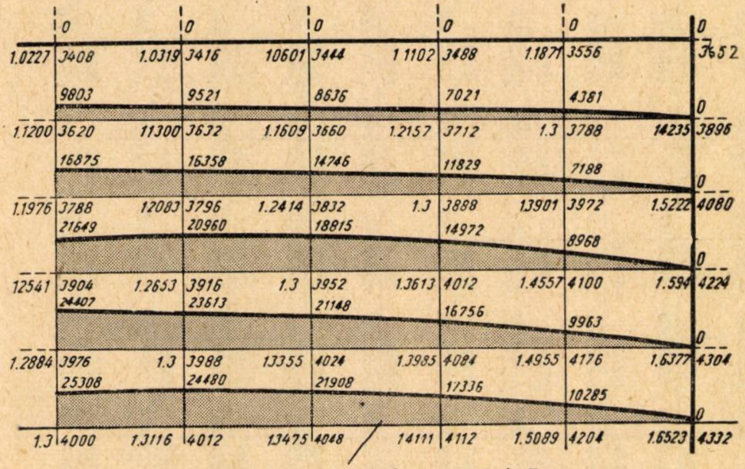

0 0 0 0 0 0
1.0227 3408 1.0319 3416 10601 3444 1 1102 3488 1.1871 3556 3552
9803 9521 8636 7021 4381
0
1.1200 3620 11300 3632 1.1609 3660 1.2157 3712 1.3 3788 14235 3896
16875 16358 14746 11829 7188
0
1.1976 3788 12083 3796 1.2414 3832 1.3 3888 13901 3972 1.5222 4080
21649 20960 18815 14972 8968
0
12541 3904 1.2653 3916 1.3 3952 1.3613 4012 1.4557 4100 1.594 4224
24407 23613 21148 16756 9963
0
1.2884 3976 1.3 3988 13355 4024 1.3985 4084 1.4955 4176 1.6377 4304
25308 24480 21908 17336 10285
0
1.3 4000 1.3116 4012 13475 4048 14111 4112 1.5089 4204 1.6523 4332
Valorile funcţiei de forţe F
F
Kν³ 1000 ν cos β sin ω

Fig. 8

În figura 10 apar valorile funcţiei de forţe pentru o învelitoare pătrată, schema de relaxare avînd 100 ochiuri. Din motive de simetrie s-a reprezentat numai o optime din suprafaţă.

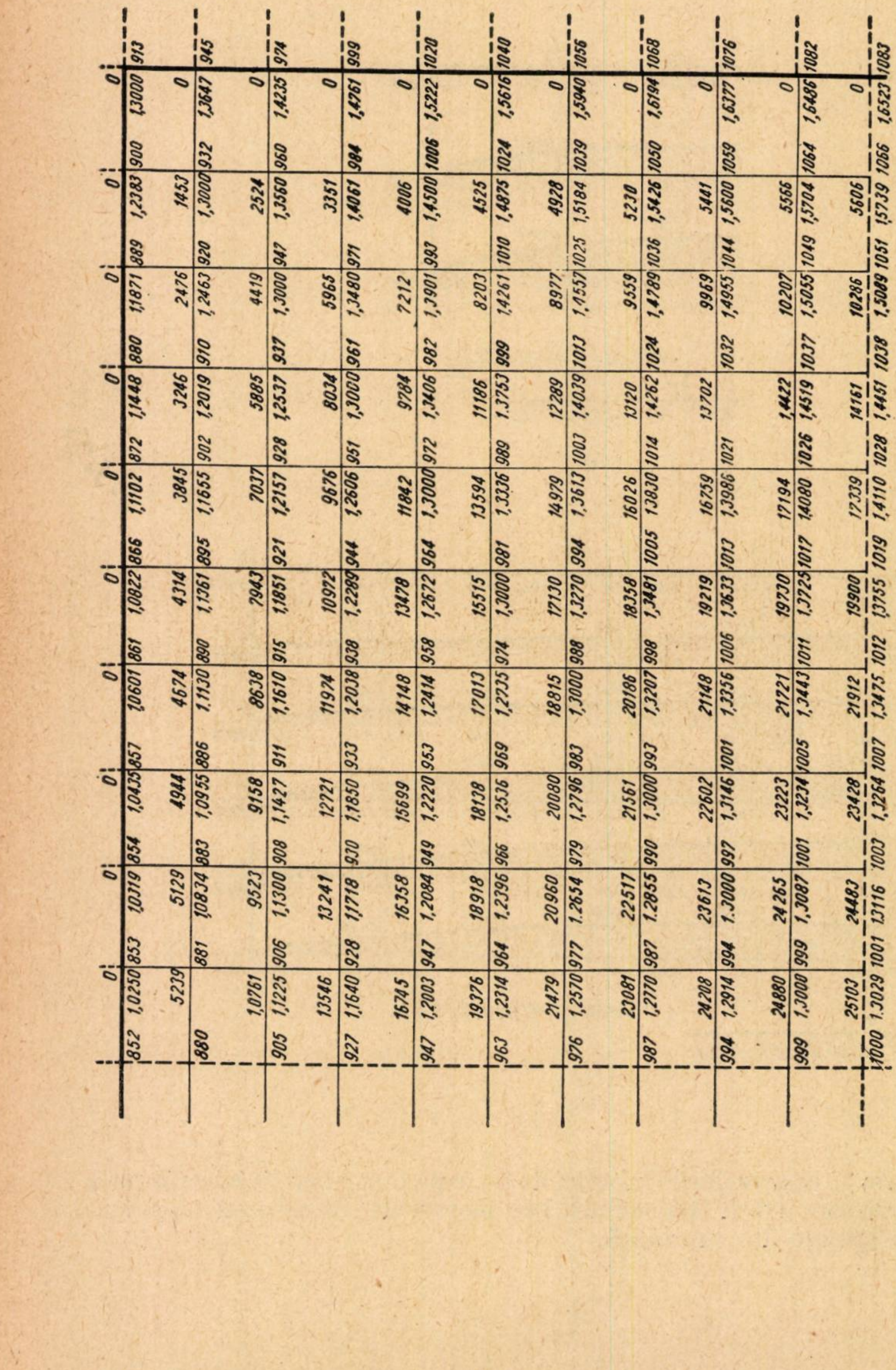
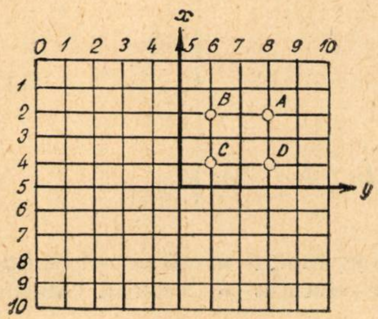

F
Kν³
1000 ν cos β sin ω

Fig. 9

Tabela 2

Valorile funcției de forțe calculate în trei trepte de aproximație

	Rețea cu		
	25 ochiuri	100 ochiuri	400 ochiuri
	F^A = 11 452	11 829	11 842
	Diferență % 3,2	0,1	0
	F^B = 15 942	16 358	16 358
	Diferență % 2,9	0,1	0
	F^D = 23 031	23 613	23 613
	Diferență % 2,6	0	0

x
y
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
A
B
C
D

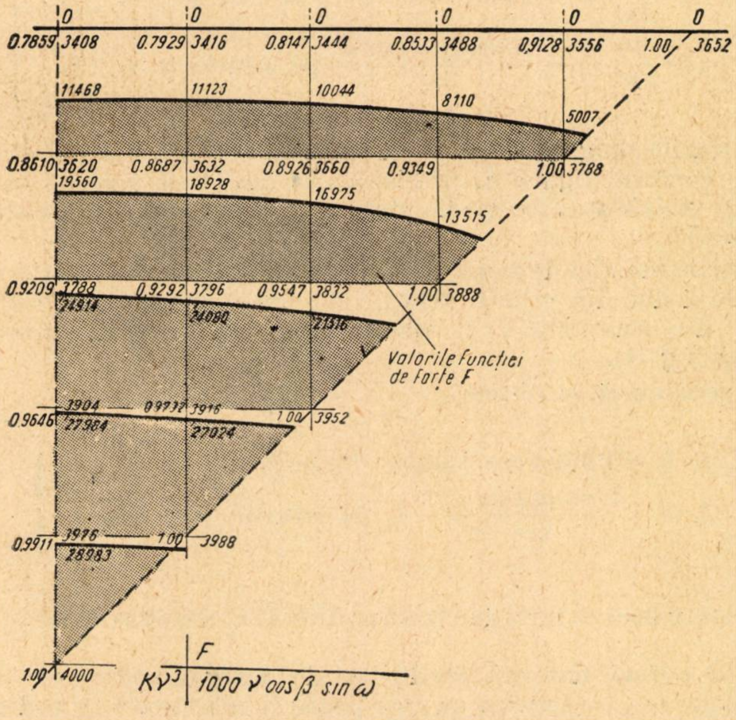


Fig. 10

Pentru *aplicații practice* se obțin *aproximații destul de bune, dacă pentru forme similare* (*avînd același* K) *se multiplică valorile din figurile 5—10 cu raportul* $\frac{Z\rho}{1\,000}$.

5. Cunoscînd valorile f, eforturile s-au calculat cu relațiile :

$$\left.\begin{aligned} n^{xx} &= k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = k^2 \, (f_2 + f_4 - 2f_0), \\ n^{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = f_1 + f_3 - 2f_0, \\ n^{xy} &= -\frac{k}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = -\frac{k}{4} (f_5 + f_7 - f_6 - f_8). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

6. Eforturile de margini se determină în modul următor : introducînd succesiv condițiile de contur (8) și (9) în ecuația (6), rezultă valorile eforturilor n^{yy} și respectiv n^{xx}

$$\left.\begin{aligned} n^{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -1\,000 \, \nu \cos\beta \sin\omega \text{ pe laturile } x = \pm a, \\ n^{xx} &= k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = -\frac{1\,000 \, k \cos\beta \sin\omega}{\nu^2} \text{ pe laturile } y = \pm b. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Eforturile tangențiale n^{xy} se determină pe baza ultimei dintre relațiile (11), conform figurii 4, precizîndu-se mai întîi valorile funcției de forțe f din vecinătatea liniilor de margini (în interiorul și exteriorul suprafeții de bază).

Valorile funcției de forțe din exteriorul laturilor $x = \pm a$ și respectiv $y = \pm b$ se deduc din primele relații (11), cunoscînd eforturile n^{yy} și respectiv n^{xx} din ecuațiile (12) și valorile funcției de forțe din interior și de pe contur (fig. 4).

În consecință se obține

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -1\,000 \, \nu \cos\beta \sin\omega - f_3 \text{ pe laturile } x = \pm a, \\ f_2 &= \frac{1\,000 \cos\beta \sin\omega}{k \nu^2} - f_4 \text{ pe laturile } y = \pm b. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Aceste valori se introduc în expresiile (11) ale eforturilor n^{xy}.

7. *La colțuri*, datorită condițiilor de margini : $n^{xx} = n^{yy} = 0$ conform ecuației (4), încărcarea nu mai poate fi echilibrată în cadrul teoriei de membrană, decît de eforturi tangențiale care ar trebui să ia valori

foarte mari (teoretic infinite) întrucît *strîmbarea* acestui tip de suprafață este nulă ($s = 0$).

Din punct de vedere fizic experiențele au arătat [4] că învelitoarea rezistă la colțuri destul de bine, ruperea efectuîndu-se de obicei în cîmp, prin cedarea arcului sau a învelitorii.

În consecință, se poate presupune că suprafața mediană a învelitorii se deformează local, pînă se creează o strîmbare corespunzătoare valorii necesare efortului n^{xy}.

Pentru a preîntîmpina aceste deformații suprafața de translație se poate racorda de la început la colțuri cu o formă avînd o strîmbare suficientă pentru asigurarea echilibrului.

În consecință, se deduce mai întîi din condițiile generale de echilibru, valoarea necesară a efortului N^{xy} la colțuri, după care se determină prin încercări strîmbarea suprafeței, folosind formula

$$s = \frac{Z \sin w}{2\, N^{xy} \cos \alpha \cos \beta}, \qquad (14)$$

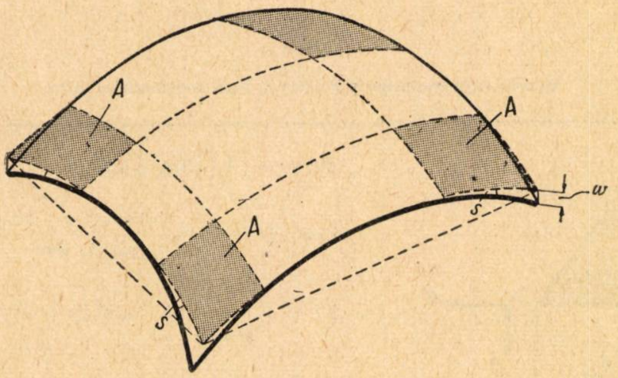


Fig. 11

raportînd această valoare la suprafața pătratului de colț cu latura $\Delta x = \Delta y = 1$, rezultă o deplasare pe normală a suprafeței mediane $w = s$ orientată spre interior; ca urmare se operează o racordare la colțuri cu arce variabile care să asigure valoarea totală $w = sA$ (fig. 11), (A — fiind suprafața de racordare).

Astfel în cazul unei învelitori avînd raportul laturilor $\frac{a}{b} = 1{,}3$ ($a = 25{,}27$, $b = 19{,}43$) încărcarea fiind $p = 440$ kg/m^2, rezultanta verticală pe 1/4 din învelitoare este : $P = 54\,100$ kg. Suma proiecțiilor eforturilor N^{xy} de pe 1/4 din contur în afara regiunii de colț este de 30 700 kg.

În punctul de colţ, $\sin \alpha = 0{,}384$, $\sin \beta = 0{,}385$, efortul N^{xy} pentru a asigura echilibrul trebuie să satisfacă egalitatea

$$(\sin \alpha + \sin \beta)\, N^{xy} = 54\,100 - 30\,700 \text{ kg}$$

în consecinţă $N^{xy} = -\,30\,400$ kg la care corespunde

$$s = -\frac{440 \times 0{,}9}{2 \times 30\,400 \times 0{,}922 \times 0{,}923} = 0{,}00725.$$

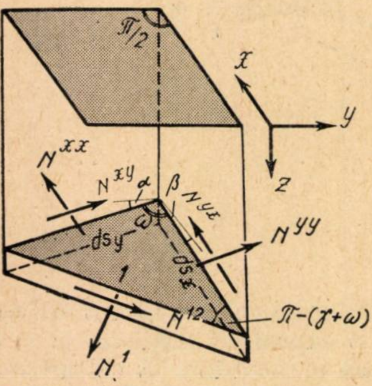
Dacă racordarea se face pe porţiuni de cîte 4 m² pe fiecare colţ, învelitoarea urmează să se curbeze spre interior astfel ca suprafaţa mediană să se deplaseze cu o valoare de aproximativ 3 cm.

8. *Eforturile principale* pe învelitoare se determină cu ajutorul valorilor N^{xx} N^{yy} şi N^{xy} obţinute prin proiectarea eforturilor n^{xx}, n^{yy}, n^{xy} pe suprafaţa învelitorii, ţinînd seama că unghiul elementului de suprafaţă a cărui proiecţie în planul de referinţă are valoarea $\frac{\pi}{2}$, pe învelitoare are valoarea ω.

În tabela 3 apar expresiile eforturilor principale pentru această situaţie.

Tabela 3

Determinarea eforturilor principale în cazul coordonatelor oblice



$$\sin \omega = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{N^{xx} \sin 2\omega + 2N^{xy} \sin \omega}{N^{xx} \cos 2\omega + N^{yy} + 2N^{xy} \cos \omega}$$

$$N^1 = \frac{1}{\sin \omega}\left[N^{xx} \sin^2(\gamma + \omega) + N^{yy} \sin^2 \alpha + 2N^{xy} \sin \gamma \,.\, \sin(\gamma + \omega)\right]$$

$$N^2 = \frac{1}{\sin \omega}\left[N^{xx} \cos^2(\gamma + \omega) + N^{yy} \cos^2 \alpha + 2N^{xy} \cos \gamma \cos(\gamma + \omega)\right]$$

În figurile 12, 13, 14 apar eforturile N^{xx}, N^{yy}, N^{xy} pentru cele trei forme de învelitori care corespund coeficienţilor $k = 2$; $k = 1{,}3$; $k = 1$; în figurile 15, 16, 17 s-au dat valorile eforturilor principale N^1, N^2 şi unghiul α al direcţiei *1* cu axa x. În figura 18 s-au desenat liniile izostatice pentru învelitoarea cu baza un pătrat.

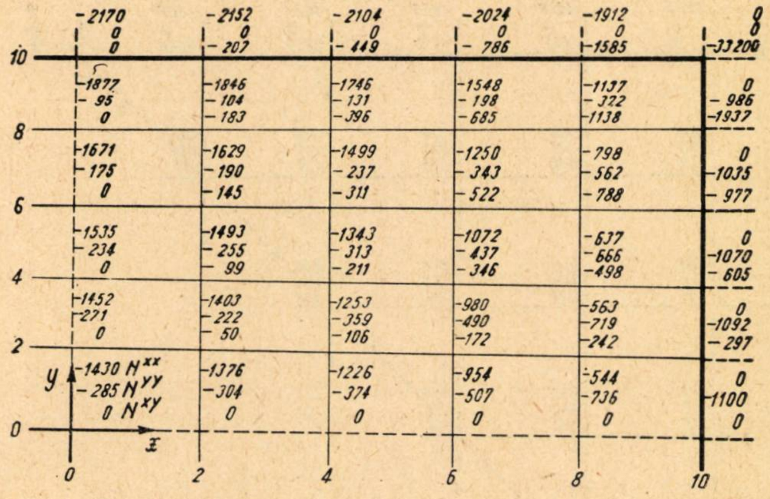

-2170 0 0
-2152 0 -207
-2104 0 -449
-2024 0 -786
-1912 0 -1585
0 0 -33200
10
-1877 -95 0
-1846 -104 -183
-1746 -131 -396
-1548 -198 -685
-1137 -322 -1138
0 -986 -1937
8
-1671 -175 0
-1629 -190 -145
-1499 -237 -311
-1250 -343 -522
-798 -562 -788
0 -1035 -977
6
-1535 -234 0
-1493 -255 -99
-1343 -313 -211
-1072 -437 -346
-637 -666 -498
0 -1070 -605
4
-1452 -271 0
-1403 -222 -50
-1253 -359 -106
-980 -490 -172
-563 -719 -242
0 -1092 -297
2
-1430 N^{xx}
-285 N^{yy}
0 N^{xy}
y
-1376 -304 0
-1226 -374 0
-954 -507 0
-544 -736 0
0 -1100 0
0
x
0
2
4
6
8
10

Fig. 12

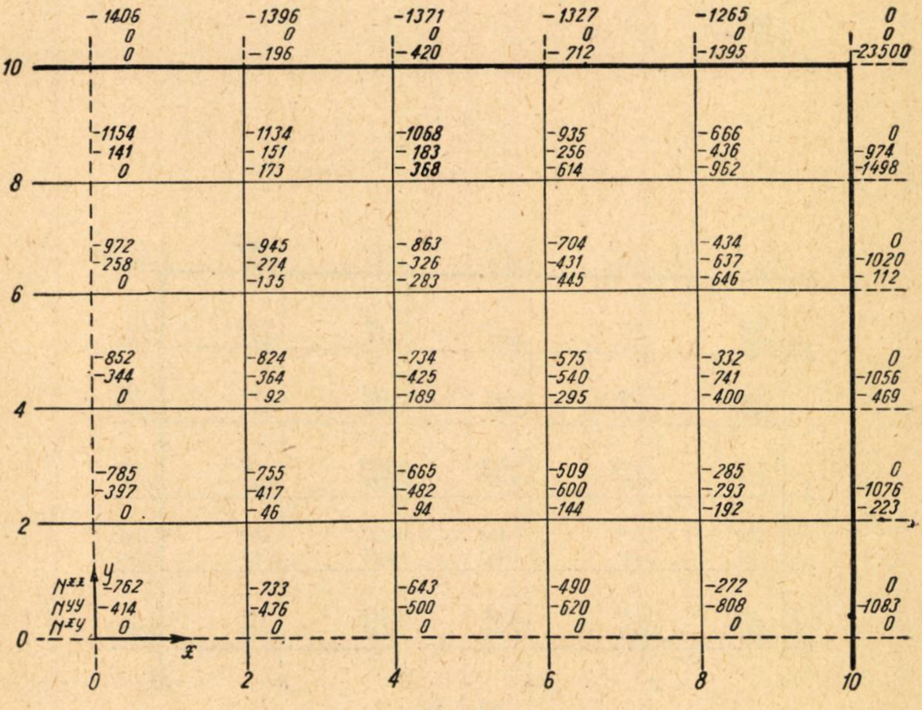

-1406 0 0
-1396 0 -196
-1371 0 -420
-1327 0 -712
-1265 0 -1395
0 0 -23500
10
-1154 -141 0
-1134 -151 -173
-1068 -183 -368
-935 -256 -614
-666 -436 -962
0 -974 -1498
8
-972 -258 0
-945 -274 -135
-863 -326 -283
-704 -431 -445
-434 -637 -646
0 -1020 -112
6
-852 -344 0
-824 -364 -92
-734 -425 -189
-575 -540 -295
-332 -741 -400
0 -1056 -469
4
-785 -397 0
-755 -417 -46
-665 -482 -94
-509 -600 -144
-285 -793 -192
0 -1076 -223
2
N^{xx} -762
N^{yy} -414
N^{xy} 0
y
-733 -436 0
-643 -500 0
-490 -620 0
-272 -808 0
0 -1083 0
0
x
0
2
4
6
8
10

Fig. 13

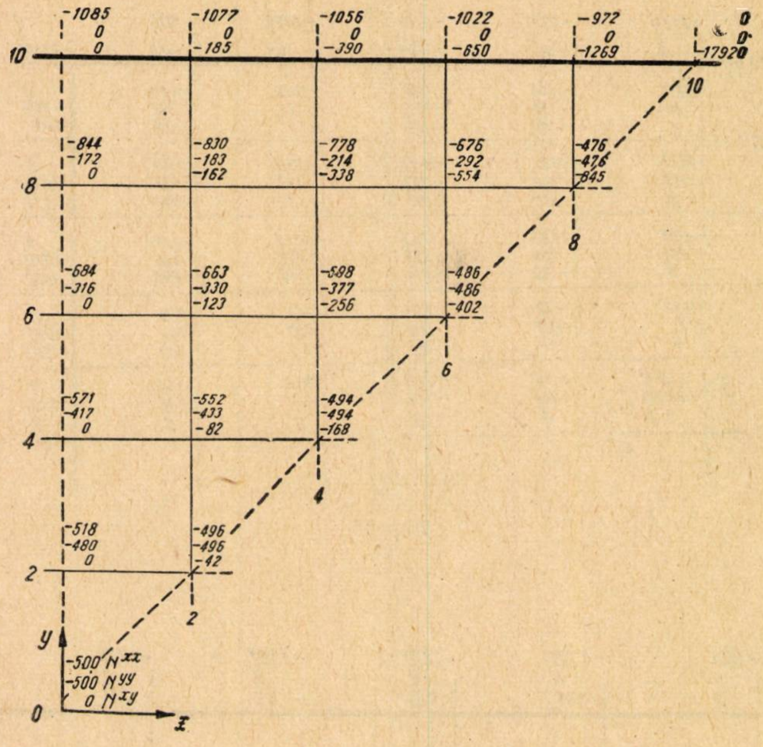

-1085
0
0
-1077
0
-185
-1056
0
-390
-1022
0
-650
-972
0
-1269
0
0
-17920
10
10
-844
-172
0
-830
-183
-162
-778
-214
-338
-676
-292
-554
-476
-476
-845
8
8
-684
-316
0
-663
-330
-123
-588
-377
-256
-486
-486
-402
6
6
-571
-417
0
-552
-433
-82
-494
-494
-168
4
4
-518
-480
0
-496
-496
-42
2
2
y
-500 N^{xx}
-500 N^{yy}
0 N^{xy}
0
x

Fig. 14

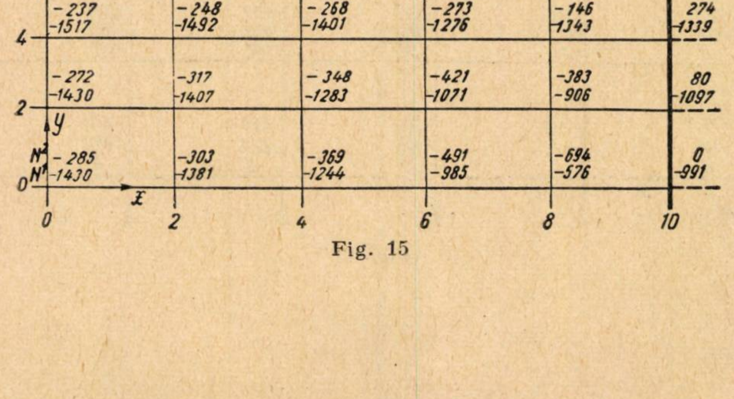

0
-2003
21
-2028
95
-2125
263
-2351
809
-3102
27730
-38470
10
-100
-1786
-88
-1793
-39
-1824
85
-1918
404
-2161
1343
-2790
8
-180
-1626
-179
-1611
-163
-1581
-100
-1559
127
-1602
556
-1237
6
-237
-1517
-248
-1492
-268
-1401
-273
-1276
-146
-1343
274
-1339
4
-272
-1430
-317
-1407
-348
-1283
-421
-1071
-383
-906
80
-1097
2
y
N^2 -285
N^1 -1430
-303
-1381
-369
-1244
-491
-985
-694
-576
0
-991
0
x
0
2
4
6
8
10

Fig. 15

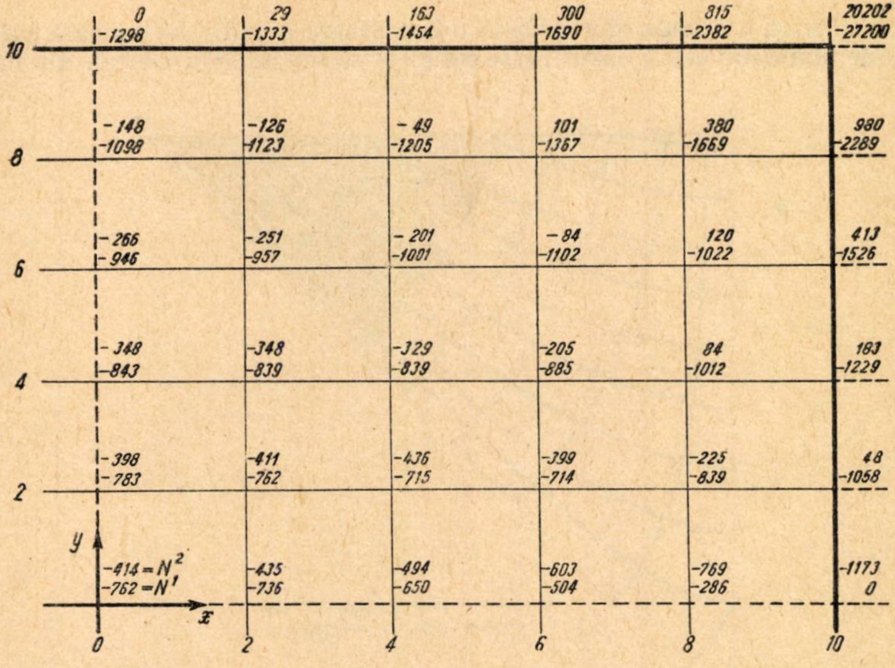

0
-1298
29
-1333
163
-1454
300
-1690
815
-2382
20202
-27200
10
-148
-1098
-126
-1123
-49
-1205
101
-1367
380
-1669
980
-2289
8
-266
-946
-251
-957
-201
-1001
-84
-1102
120
-1022
413
-1526
6
-348
-843
-348
-839
-329
-839
-205
-885
84
-1012
183
-1229
4
-398
-783
-411
-762
-436
-715
-399
-714
-225
-839
48
-1058
2
y
-414 = N²
-762 = N¹
-435
-736
-494
-650
-603
-504
-769
-286
-1173
0
x
0
2
4
6
8
10

Fig. 16

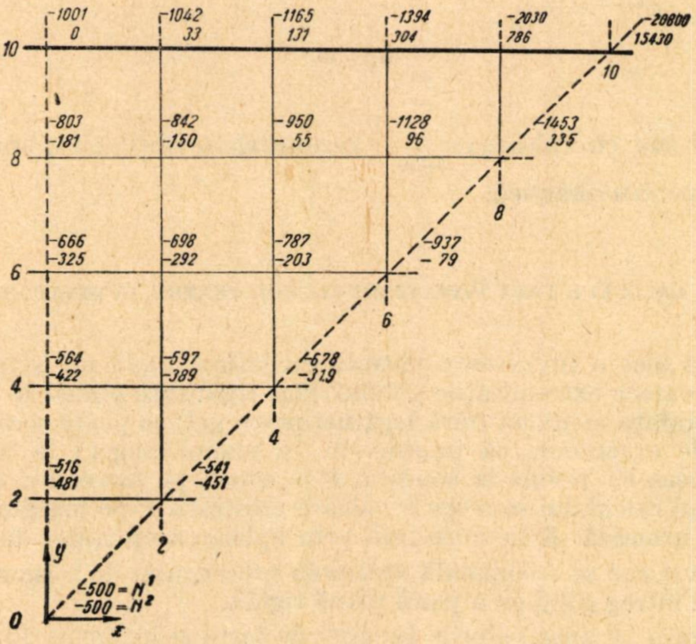

-1001
0
-1042
33
-1165
131
-1394
304
-2030
786
-20800
15430
10
10
-803
-181
-842
-150
-950
-55
-1128
96
-1453
335
8
8
-666
-325
-698
-292
-787
-203
-937
-79
6
6
-564
-422
-597
-389
-678
-319
4
4
-516
-481
-541
-451
2
2
y
-500 = N¹
-500 = N²
0
x

Fig. 17

Pentru a calcula eforturile la o învelitoare avînd o formă care corespunde unuia din cele 3 cazuri, este suficient să se multiplice datele din figu-

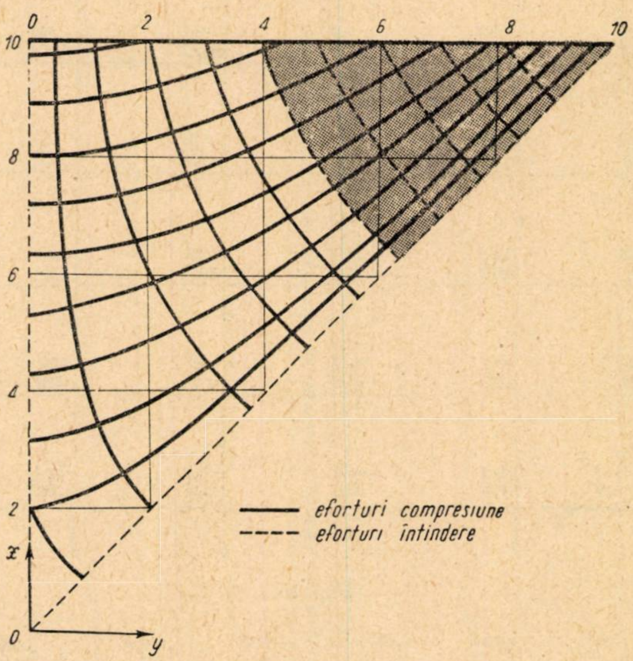


Fig. 18

rile de mai sus cu valoarea $\frac{Z\rho}{1\,000}$; rezultatele se obţin cu o aproximaţie suficientă pentru practică.

II. CALCULUL UNEI ÎNVELITORI CU GOL PENTRU LUMINATOR

9. S-a ales o învelitoare pătrată cu latura 19,43 m, avînd un gol central; deoarece extremităţile golului sînt rigidizate numai în plan normal pe suprafaţa mediană (fără legături peste gol) se poate scrie la fel ca la marginile exterioare, că împingerile în planul tangent la învelitoare sînt nule, ceea ce revine la condiţia $F =$ const. pe tot conturul golului. La începutul calculului se alege o valoare arbitrară F pe marginea conturului, care urmează să fie corectată prin aplicarea operaţiei de relaxare.

În acest caz se recomandă aplicarea procedeului de relaxare în bloc considerînd întreg golul cu o placă plană rigidă.

În figura 19 apar valorile funcţiei de forţe şi în figura 20 eforturile N^{xx}, N^{yy}, N^{xy} pentru valoarea $Z\rho = 1\,000$.

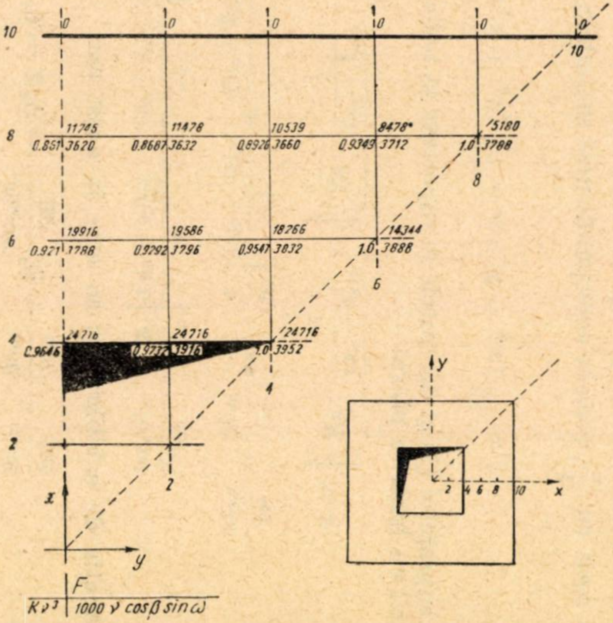

10
8
6
4
2
0
0
0
0
0
0
10
11745
11478
10539
8478*
5180
0.851
3620
0.8687
3632
0.8926
3660
0.9349
3712
1.0
3788
8
19916
19586
18266
14344
0.921
3788
0.9292
3796
0.9547
3832
1.0
3888
6
24716
24716
24716
0.9646
0.9272
3916
1.0
3952
4
2
x
y
F
Kν³
1000 ν cosβ sinω
y
2
4
6
8
10
x

Fig. 19

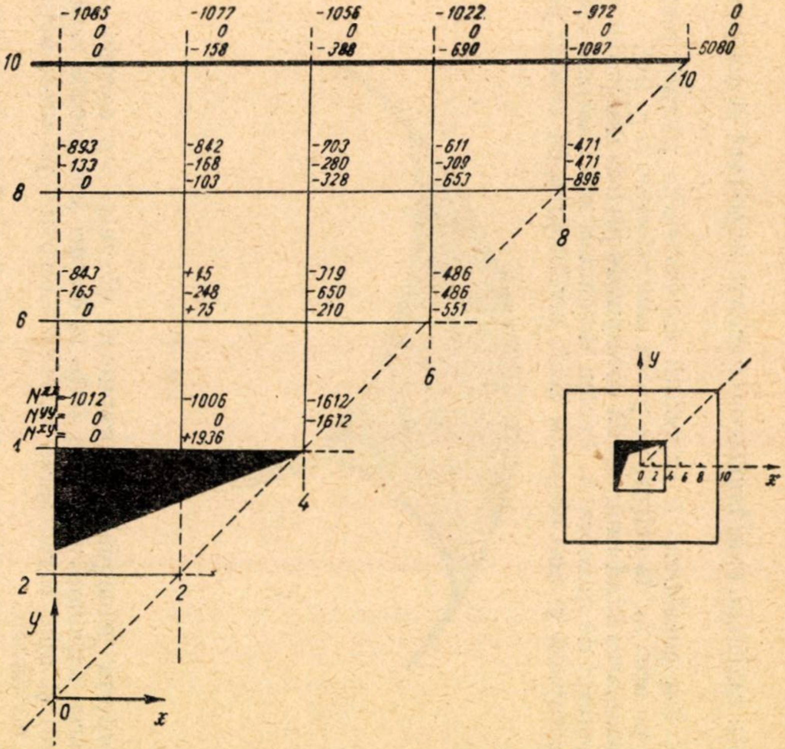

-1085
0
0
-1077
0
-158
-1056
0
-388
-1022
0
-690
-972
0
-1087
0
0
-5080
10
10
-893
-133
0
-842
-168
-103
-703
-280
-328
-611
-309
-653
-471
-471
-896
8
8
-843
-165
0
+15
-248
+75
-319
-650
-210
-486
-486
-551
6
6
$N^{xx}=$ -1012
$N^{yy}=$ 0
$N^{xy}=$ 0
-1006
0
+1936
-1612
-1612
4
4
2
2
y
0
x
y
0
2
4
6
8
10
x

Fig. 20

III. CALCULUL UNEI ÎNVELITORI PĂTRATE REZEMATĂ ÎN COLŢURI

10. S-a considerat o suprafaţă de translaţie pătrată rezemată la margini pe arce iar la colţuri pe patru contraforturi (fig. 21).

Rezemarea fiind tangenţială corespunde perfect din punct de vedere static ipotezei de membrană. Pentru deschideri mari această soluţie este mai avantajoasă şi mai elegantă decît învelitoarea cu tiranţi pe contur.

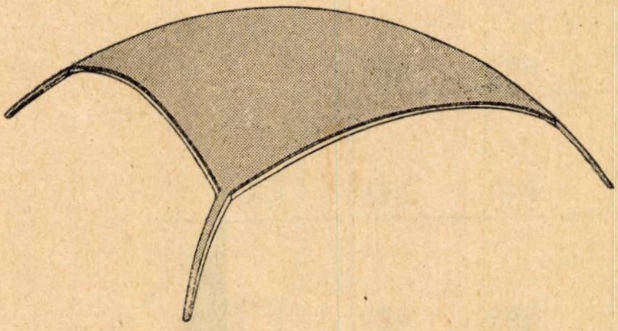


Fig. 21

Conform principiului suprapunerii efectelor s-a calculat mai întîi învelitoarea acţionată de patru forţe la colţuri (reacţiunile rezultate din încărcare) şi apoi învelitoarea rezemată obişnuit pe arce, acţionată de sarcina învelitorii.

Pentru solicitarea cu reacţiunile din contraforturi, reţeaua de relaxare s-a rotit cu $\frac{\pi}{4}$, ceea ce corespunde unei schimbări de variabile

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{\star} - y^{\star}),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{\star} + y^{\star}), \tag{15}$$

ecuaţia suprafeţei (1) şi derivatele ei raportate la noile axe devin în cazul învelitorii cu baza în pătrat

$$z = \sqrt{R^2 - \frac{(x^{\star} - y^{\star})^2}{2}} + \sqrt{R^2 - \frac{(x^{\star} + y^{\star})^2}{2}} - 2R, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^{\star 2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^{\star 2}} = -\frac{R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2 - x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 - y^2)^{3/2}}\right], \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^{\star}\partial y^{\star}} = \frac{R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 - y^2)^{3/2}}\right].$$

Ecuaţia de echilibru (5) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\star 2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{\star 2}} + \psi_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^{\star}\partial y^{\star}} - \psi_2 Z = 0, \tag{18}$$

în care

$$\psi_1 = \frac{(R^2 - y^2)^{3/2} - (R^2 - x^2)^{3/2}}{(R^2 - y^2)^{3/2} + (R^2 - x^2)^{3/2}} \text{ şi } \psi_2 = 2 \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)\, R^2 - x^2 y^2}}{R^2 \left[\dfrac{1}{(R^2 - x^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{(R^2 - y^2)^{3/2}} \right]}. \tag{19}$$

Înlocuind derivatele prin diferenţe

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{h^2} (F_1 + F_3 - 2F_0)\,; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2}{h^2} (F_2 + F_4 - 2F_0), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2h^2} (F_5 + F_7 - F_6 - F_8),$$

ecuaţia (18) devine

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0 + \Xi_1 (F_5 + F_7 - F_6 - F_8) - \Xi_2 Z = 0, \tag{21}$$

în care

$$\Xi_1 = \psi_{1/4}, \quad \Xi_2 = \frac{h^2}{2} \psi_2 .$$

Funcţia de forţe s-a considerat nulă pe tot conturul, cu excepţia colţurilor unde acţionează reacţiunile. La colţuri s-a luat iniţial pentru simplificarea operaţiilor o valoare arbitrară ($f = 10\,000$) urmînd să se precizeze ulterior din condiţia de echilibru a învelitorii valoarea reală a funcţiei de forţe şi coeficientul de multiplicare al valorilor determinate iniţial.

Schema de relaxare corespunzătoare ecuaţiei (21) este cea din figura 22.

În cazul tratat, deoarece învelitoarea s-a considerat acţionată doar de forţele din colţuri, ecuaţia cu diferenţe finite s-a redus la

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0 + \Xi_1 (F_5 + F_7 - F_6 - F_8) = 0. \tag{22}$$

Pentru nodurile din vecinătatea marginii, ecuaţia (22) se modifică devenind

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 2\ (2 + \Xi_1) F_0 + \frac{4}{3} \Xi_1 F_1 - \Xi_1 (F_6 + F_8) = 0, \tag{23}$$

sau în nodul din vecinătatea colţului

$$F_1 + F_2 + F_3 - 4F_0 + \frac{4}{3} \Xi_1 (F_7 - F_8) = 0. \tag{24}$$

Schemele de relaxare pentru diverse noduri de margine apar în figurile 23, 24, 25, 26.

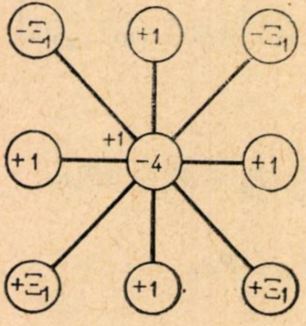

−Ξ1
+1
−Ξ1
+1
+1
−4
+1
+Ξ1
+1
+Ξ1

Fig. 22

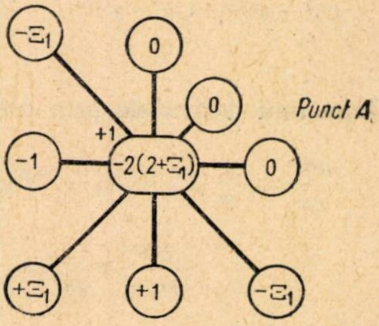

−Ξ1
0
0
Punct A
+1
−1
−2(2+Ξ1)
0
+Ξ1
+1
−Ξ1

Fig. 23

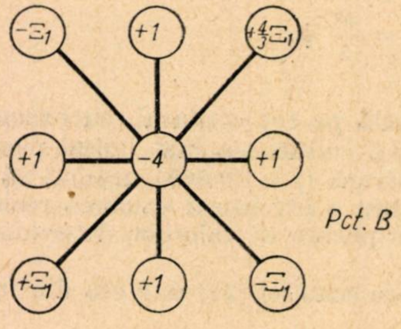

−Ξ1
+1
+4/3 Ξ1
+1
−4
+1
Pct. B
+Ξ1
+1
−Ξ1

Fig. 24

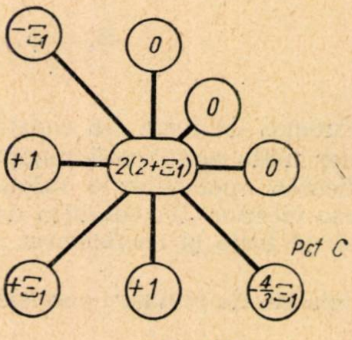

−Ξ1
0
0
+1
−2(2+Ξ1)
0
Pct C
+Ξ1
+1
−4/3 Ξ1

Fig. 25

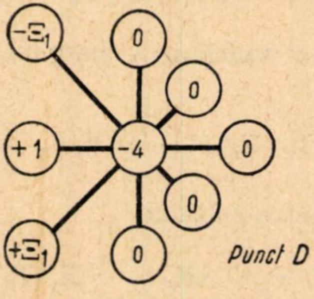

−Ξ1
0
0
+1
−4
0
0
+Ξ1
0
Punct D

Fig. 26

Valorile funcției de forțe sînt date în figurile 27, 28.

Valoarea funcției de forțe la colț s-a determinat scriind echilibrul între reacțiunile care se dezvoltă în contraforturi sub acțiunea încărcării și eforturile normale (N^{xx} respectiv N^{yy}), care apar în învelitoare pe porțiunile de racordare cu contraforții (fig. 29).

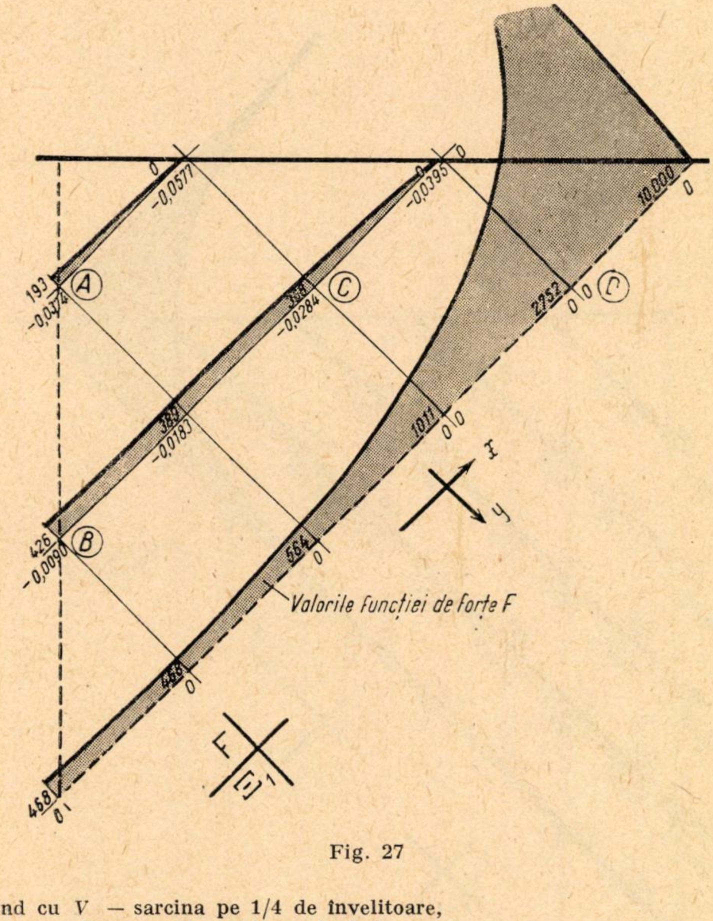

0
-0,0577
0
-0,0395
0
10,000
0
193
-0,0374
Ⓐ
-0,0284
Ⓒ
2752
0
0
Ⓖ
389
-0,0183
1011
0
0
x
y
426
-0,0090
Ⓑ
564
0
Valorile funcției de forțe F
458
0
F
Ξ
1
468
0

Fig. 27

Notînd cu V — sarcina pe 1/4 de învelitoare,

R — reacțiunea în contrafort,

γ — unghiul tangentei la suprafață format cu orizontala pe direcția contrafortului,

δ — unghiul în planul de referință al direcției contrafortului cu axa x,

se obțin următoarele valori:

$$V = \frac{1}{4} \times 440 \times 19{,}43^2 = 41{,}500 \text{ kg},$$

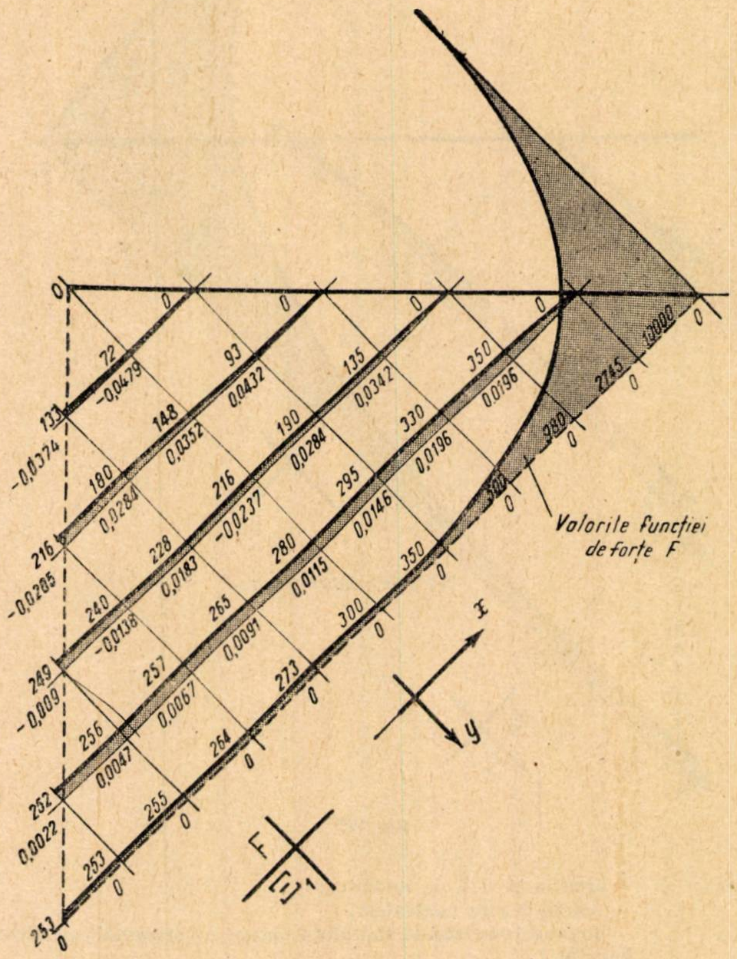
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\partial z}{\partial x^*} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \delta,$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - y^2} - 2R,$$

în cazul învelitorii pătrate

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -0{,}588,\ \gamma = 30°30',\ \sin\gamma = 0{,}507,$$

$$\frac{V}{\sin\gamma} = R = 81\,800 \text{ kg}.$$


0
0
0
0
0
0
72
-0,0479
93
0,0432
135
0,0342
350
0,0196
10000
2745
0
133
-0,0374
148
0,0352
190
0,0284
330
0,0196
980
0
180
0,0284
216
-0,0237
295
0,0146
300
0
216
-0,0285
228
0,0183
280
0,0115
350
0
240
-0,0138
265
0,0091
300
0
249
-0,009
257
0,0067
273
0
256
0,0047
264
0
252
0,0022
255
0
253
0
253
0
x
y
F
1

Valorile funcției de forțe F

Fig. 28

Rezultanta R se egalează cu suma eforturilor N^{xx} a căror diagramă pe porțiunea de racordare se presupune parabolică, avînd ordonata maximă în axul contrafortului, adică :

$$R = \frac{2}{3}\, e\, N^{xx}_{\max}\ ,$$

în cazul calculat lăţimea contrafortului este

$$e = 1{,}00\ \text{m}\ ;\ N^{xx} = 124\,000\ \text{kg/m}.$$

Valoarea funcţiei de forţe în colţ se determină conform figurii 30, din ecuaţia

$$N^{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(F_1 + F_3 - 2F_0),$$

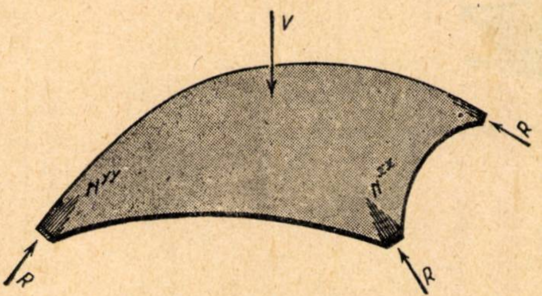


Fig. 29

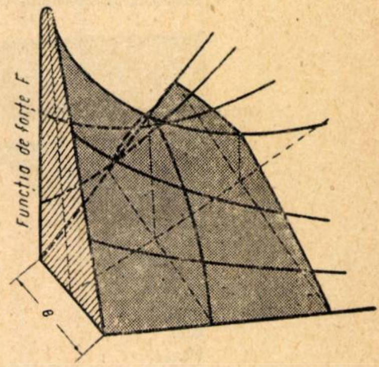


Fig. 30

în care valorile F_1 şi F_3, fiind la marginile racordării sînt nule (condiţia pe contur), iar $h = \frac{e}{2}$; în consecinţă

$$F_0 = \frac{e^2}{8} N^{xx}_{max}$$

$$F_0 = \frac{1{,}0}{8} \times 124\,000 = 15\,500\ \text{kgm}.$$

Valorile funcţiei de forţe din figura 27 sau 28 (calculate pentru $F = 10\,000$) se vor multiplica în consecinţă cu coeficientul 1,55, pentru a corespunde încărcării reale.

Suprapunînd diagrama funcţiei de forţă corespunzătoare încărcării din contrafort peste aceea a sarcinii de pe învelitoare, se obţin valorile totale care apar în figura 31.

Eforturile N^{xx}, N^{yy}, N^{xy} apar în figura 32, iar eforturile principale şi liniile izostatice pe învelitoare apar în figurile 33 şi 34.

IV. CALCULUL ÎNVELITORII CU CONTUR TRIUNGHIULAR

11. În cazul unei învelitori cu contur triunghiular, decupată dintr-o sferă de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,.$$

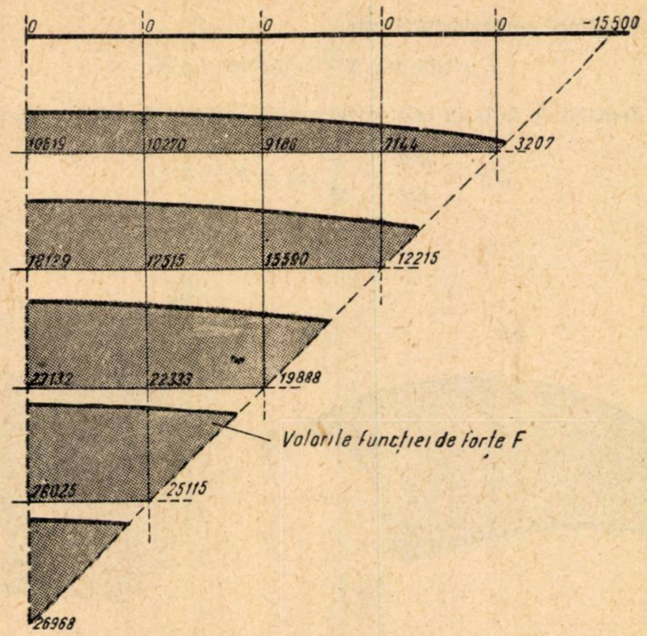

0
0
0
0
0
-15500
10519
10270
9186
7144
3207
18129
17515
15590
12215
27132
22333
19888
Valorile funcției de forțe F
26025
25115
26968

Fig. 31

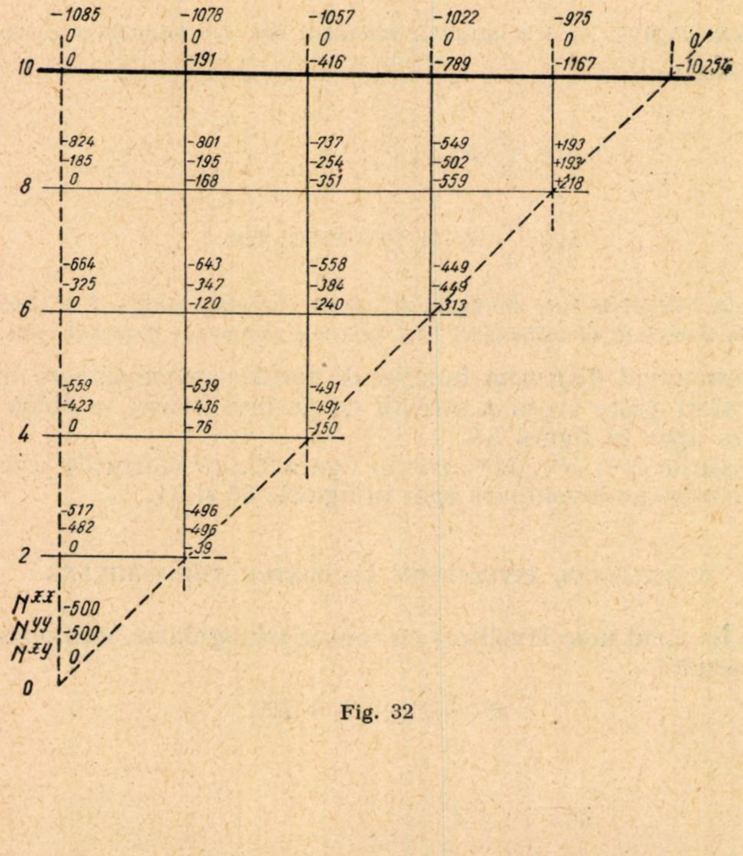

-1085
-1078
-1057
-1022
-975
0
0
0
0
0
0
0
-191
-416
-789
-1167
-1025
10
-824
-185
0
-801
-195
-168
-737
-254
-351
-549
-502
-559
+193
+193
+218
8
-664
-325
0
-643
-347
-120
-558
-384
-240
-449
-449
-313
6
-559
-423
0
-539
-436
-76
-491
-491
-150
4
-517
-482
0
-496
-496
-39
2
N^{xx} -500
N^{yy} -500
N^{xy} 0
0

Fig. 32

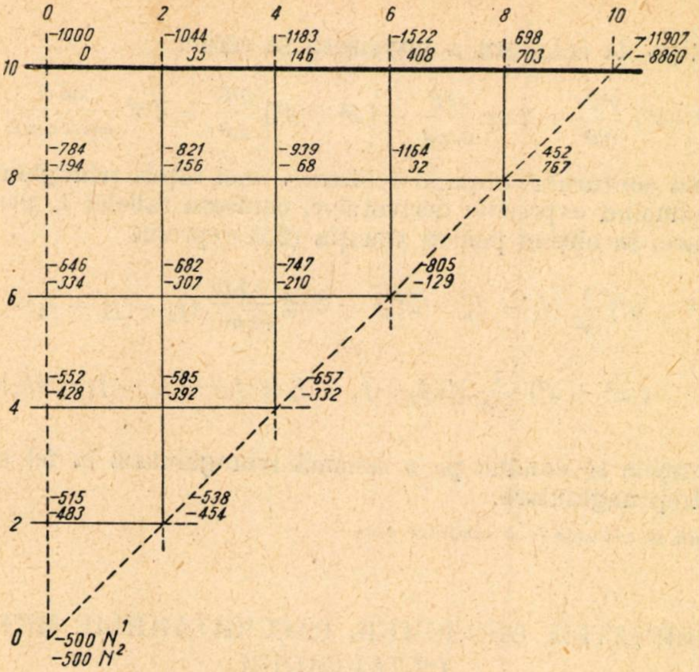

0
2
4
6
8
10
-1000
0
-1044
35
-1183
146
-1522
408
698
703
11907
-8860
10
-784
-194
-821
-156
-939
-68
-1164
32
452
767
8
-646
-334
-682
-307
-747
-210
-805
-129
6
-552
-428
-585
-392
-657
-332
4
-515
-483
-538
-454
2
0
-500 N_2^1
-500 N^2

Fig. 33

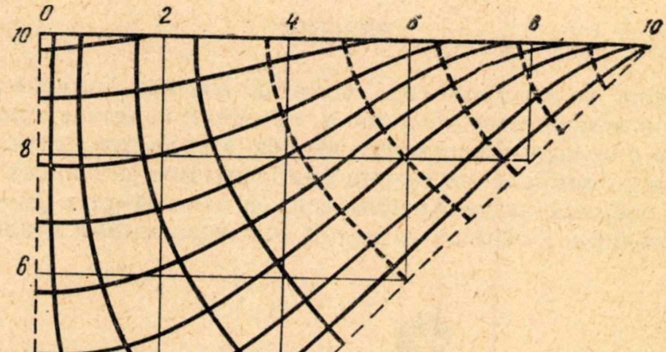

x
y
eforturi compresiune
eforturi întindere

Fig. 34

Condiția de echilibru a învelitorii se scrie:

$$-(y^2+z^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+Z z^3\frac{\sin w}{\cos\alpha\cos\beta}=0. \quad (25)$$

Forma conturului impune utilizarea unei rețele triunghiulare.

Introducînd expresiile derivatelor, conform tabelei 1, pentru rețele triunghiulare, se obține pentru ecuația (25) expresia

$$-(y^2+z^2)\frac{1}{h^2}(f_1+f_4-2f_0)+2xy\frac{1}{\sqrt{3}\,h^2}(f_2-f_3+f_5-f_6)-$$

$$-(x^2+z^2)\frac{1}{3h^2}[2(f_2+f_3+f_5+f_6)-f_1-f_4-6f_0]. \quad (26)$$

Operațiile se conduc pe o schemă triunghiulară la fel ca în cazul schemei dreptunghiulare.

Primită la redacție la 6 ianuarie 1959

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ОБОЛОЧКИ, РАССЧИТАННЫЕ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается частный случай применения метода релаксации к линейчатым оболочкам, причем в качестве примера взяты поверхности с основными линиями изгиба в виде дуг круга. Определяются усилия по мембранной теории мембраны при сплошных или полых оболочках, опертых на диафрагмы или на контрфорсы. Дается анализ краевых условий и указывается метод для определения усилий в углах.

TRANSLATION SHELLS CALCULATED THROUGH THE RELAXATION METHOD

ABSTRACT

Authors particularize the application of the relaxation method to translation shells considering for instance surfaces whose main curvature lines are arcs of circle. The stresses are determined in the membrane theory for complete shells or for shells with openings, supported on gables or counterforts. The boundary conditions are analyzed and a method for determining the stresses at the corners is given.

BIBLIOGRAFIE

1. MIRCEA MIHAILESCU, YVONNE MIHAILESCU, *Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subțiri*. Studii și cercetări de mecanică, **X**, *3* (1959).
2. A. PUCHER, *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen*. Bauingenieur, **18**, *9/10* (1937).
3. O. N. ARUP, R. S. JENKINS, *The design of a reinforced concrete factory at Brynmawr* (*South Wales*). Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, **2**, Part III, Dec. (1953).
4. M. SALVADORI, *Analysis and testing of translational shells*. Journal of American Concrete Institute, **27**, *10*, iunie (1956).

APLICAREA METODEI PLURILOCALE LA CALCULUL PLĂCILOR CURBE SUBȚIRI

DE

MIRCEA SOARE

Stabilirea ecuațiilor de echilibru și de deformații în studiul plăcilor curbe subțiri conduce la scrierea unui număr de ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale, în care funcțiile necunoscute sînt eforturile interioare, respectiv deformațiile.

În marea majoritate a cazurilor, soluțiile nu pot fi obținute cu ajutorul funcțiilor elementare. Aceasta este explicabil întrucît în cazul absolut general, cînd razele principale de curbură ale suprafeței mediane, precum și sarcinile exterioare nu sînt explicitate, tipul de ecuație diferențială sau cu derivate parțiale nu este integrabil.

Mai sînt de asemenea cazuri cînd soluția analitică fiind cunoscută, aplicarea ei este atît de laborioasă, încît devine inutilizabilă din punct de vedere practic.

În asemenea situații apar indicate soluțiile obținute prin calcul numeric. Aproximațiile calculului numeric pot deveni oricît de mici dorim, printr-o convenabilă alegere a schemei inițiale de calcul.

În mod curent, în literatura de specialitate se aplică ecuațiile cu diferențe finite bazate pe metoda trapezului sau a parabolei, pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale.

Se demonstrează că în acest caz erorile care se fac sînt de ordinul Δ^2, în care Δ reprezintă mărimea pasului rețelei.

Scopul lucrării de față este de a aplica la studiul stării de eforturi în plăcile curbe subțiri a unei metode ameliorate de calcul numeric, anume *metoda plurilocală.*

Principiul metodei a fost stabilit de Collatz ; ea a fost aplicată la calculul plăcilor plane de Collatz și Zurmühl [10] fără însă a fi fost extinsă, după cunoștința autorului, la calculul plăcilor curbe subțiri.

1. PRINCIPIUL METODEI PLURILOCALE

Metoda plurilocală reprezintă o ameliorare considerabilă a metodei clasice a diferenţelor finite. Ea se bazează pe asocierea intimă dintre dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei necunoscute şi ecuaţia diferenţială de integrat.

Fie

$$\mathcal{L}(F) = q(x, y), \tag{1a}$$

ecuaţia cu derivate parţiale a problemei şi

$$\mathcal{R}(F) = 0, \tag{1b}$$

forma de exprimare analitică a condiţiilor pe contur, în care $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ reprezintă doi operatori diferenţiali, iar F funcţia necunoscută.

Ecuaţiile cu diferenţe finite din metoda plurilocală sînt de forma [10]

$$\sum a_{i,j}\cdot F_{i,j} + \sum A_{i,j}\cdot \mathcal{L}(F_{i,j}) = 0 + \text{termeni de ordin superior din dezvoltarea în serie Taylor,} \tag{2a}$$

$$\mathcal{R}(F_{i,j}) = \sum b_{i,j} F_{i,j} + \sum B_{i,j}\cdot \mathcal{L}(F_{i,j}) + \text{termeni de ordin superior din dezvoltarea în serie Taylor.} \tag{2b}$$

Coeficienţii $a_{i,j}$, $A_{i,j}$, $b_{i,j}$, $B_{i,j}$ se determină astfel încît la dezvoltarea în serie Taylor a valorilor F şi $\mathcal{L}(F)$ în punctul i, j, din ecuaţiile (2) să dispară un număr cît mai mare de termeni suplimentari.

Pentru a lămuri mai bine principiul metodei, vom pleca de la cazul simplu al unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea, de forma

$$\frac{d^2w}{dx^2} + q(x)\cdot w = r(x), \tag{3}$$

în care $q(x)$ şi $r(x)$ se consideră funcţii necunoscute.

Procedeul obişnuit este următorul: se aproximează derivata secundă — prin metoda parabolei — conform

$$\frac{d^2w_m}{dx^2} \approx \frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

şi se introduce diferenţa precedentă în ecuaţia (3), scrisă pentru punctul $x = x_m$. Grupînd convenabil termenii, se ajunge la ecuaţia cu diferenţe finite

$$w_{m-1} - [2 - q_m(\Delta x)^2]\, w_m + w_{m+1} = r_m(\Delta x)^2. \tag{5}$$

Eroarea care se face la înlocuirea ecuaţiei (3) prin (5) va fi

$$|\mathcal{R}_m| \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{12}\cdot w^{(IV)}(\xi) \quad \text{unde} \quad x_{m-1} \leqslant \xi \leqslant x_{m+1}.$$

Pentru *aplicarea metodei plurilocale*, vom dezvolta funcția w în serie Taylor, reținînd termenii pînă la derivata de ordinul al 6-lea

$$w(x_m + \Delta x) = w_{m+1} = w_m + \Delta x\cdot w_m' + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot w_m'' + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot w_m''' +$$

$$+ \frac{(\Delta x)^4}{4!}\cdot w_m^{\mathrm{IV}} + \frac{(\Delta x)^5}{5!}\cdot w_m^{(\mathrm{V})} + \frac{(\Delta x)^6}{6!}\cdot w_m^{(\mathrm{VI})} + \ldots, \tag{6a}$$

$$w(x_m - \Delta x) = w_{m-1} = w_m - \Delta x\cdot w_m' + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot w_m'' - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot w_m''' +$$

$$+ \frac{(\Delta x)^4}{4!}\cdot w_m^{\mathrm{IV}} - \frac{(\Delta x)^5}{5!}\cdot w_m^{(\mathrm{V})} + \frac{(\Delta x)^6}{6!}\cdot w_m^{(\mathrm{VI})} + \ldots. \tag{6b}$$

Adunînd membru cu membru cele două relații și grupînd convenabil termenii, se obține

$$\frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{(\Delta x)^2} = w_m'' + \frac{(\Delta x)^2}{12}\cdot w_m^{\mathrm{IV}} + \frac{(\Delta x)^4}{360} w_m^{(\mathrm{VI})} + \ldots \tag{7}$$

Neglijînd termenii complementari, am obține expresia obișnuită (4) a lui w_m''.

Vom căuta însă, să facem să dispară în (7) și derivata w_m^{IV}, astfel încît erorile să fie proporționale cu $(\Delta x)^4$, în loc de $(\Delta x)^2$.

Pentru aceasta, se poate considera o dezvoltare în serie Taylor a derivatei secunde a funcției w. Absolut analog relației (7) se poate deci scrie

$$\frac{w_{m-1}'' - 2w_m'' + w_{m+1}''}{(\Delta x)^2} = w_m^{\mathrm{IV}} + \frac{(\Delta x)^2}{12} w_m^{(\mathrm{VI})} + \ldots \tag{8}$$

Eliminînd pe w_m^{IV} între (7) și (8), se ajunge la relația

$$\frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{w_{m-1}'' + 10\,w_m'' + w_{m+1}''}{12} - \frac{(\Delta x)^4}{240}\cdot w_m^{(\mathrm{VI})} + \ldots \tag{9}$$

Derivatele secunde din (9) se pot elimina dacă ținem seama de ecuația diferențială dată (3), scriind

$$w_m'' = r_m - q_m\cdot w_m \tag{10}$$

și încă două relații similare pentru punctele $(m-1)$ și $(m+1)$. Prin eliminarea lui w'', se obține

$$\frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{r_{m-1} + 10r_m + r_{m+1} - (q_{m-1}w_{m-1} + 10q_m w_m + q_{m+1}w_{m+1})}{12} - \varepsilon_1.$$

Neglijînd termenul complementar ε_1 şi ordonînd termenii, se obţine ecuaţia cu diferenţe finite

$$\left[1+\frac{q_{m-1}(\Delta x)^2}{12}\right]w_{m-1}-2\left[1-\frac{5q_m(\Delta x)^2}{12}\right]w_m+\left[1+\right.$$
$$\left.+\frac{q_{m+1}(\Delta x)^2}{12}\right]w_{m+1}=\frac{r_{m-1}+10r_m+r_{m+1}}{12}(\Delta x)^2, \tag{11}$$

care are aceeaşi structură cu trei termeni ca şi (5).

Similar relaţiei (9) se pot stabili pentru derivatele de ordinul întîi, al 3-lea şi al 4-lea următoarele relaţii:

$$\frac{w_{m+1}-w_{m-1}}{2\Delta x}=\frac{w'_{m-1}+4w'_m+w'_{m+1}}{6}-\frac{(\Delta x)^4}{180}w_m^{(V)}+\ldots \tag{12a}$$

$$\frac{w_{m+2}-2w_{m+1}+2w_{m-1}-w_{m-2}}{2(\Delta x)^3}=\frac{w'''_{m-1}+2w'''_m+w'''_{m+1}}{4}+$$
$$+\frac{(\Delta x)}{240}w_m^{(VII)}+\ldots \tag{12b}$$

$$\frac{w_{m+2}-4w_{m+1}+6w_m+w_{m-1}+w_{m-2}}{(\Delta x)^4}=\frac{w_{m-1}^{IV}+4w_m^{IV}+w_{m+1}^{IV}}{6}-$$
$$-\frac{(\Delta x)}{720}w_m^{(VIII)}+\ldots \tag{12c}$$

În general, metoda plurilocală se aplică foarte simplu ecuaţiilor diferenţiale de forma¹)

$$\frac{d^nw}{dx^n}+q(x)\cdot w=r(x). \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{13}$$

2. REZOLVAREA ECUAŢIEI DE TIP POISSON

Problema este mai complexă în cazul derivatelor parţiale, cînd trebuie să aplicăm relaţiile generale de forma (2).

Vom aplica metoda plurilocală ecuaţiei de tip Poisson, care se întîlneşte la studiul paraboloidului eliptic²)

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=-p(x,y), \tag{14}$$

printr-o convenabilă alegere a coordonatelor x şi y.

---

¹) Autorul a prezentat o variantă ameliorată a metodei plurilocale, aplicabilă ecuaţiilor diferenţiale liniare de orice formă.

²) Tipul de ecuaţie (14) se întîlneşte frecvent în diferitele ramuri ale mecanicii aplicate.

Vom pleca iarăşi de la dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei F, considerînd intervalele egale în fiecare direcţie, fie

$$F(x_m + \Delta x, y_n + \Delta y) = F_{m+1,\,n+1} = F_{m,\,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} F_{m,\,n}.$$

Considerînd mai departe $\Delta x = \Delta y = \Delta$, ţinînd seama de simetria sistemului (faţă de axe şi bisectoare) şi limitîndu-ne pînă la termenii cuprinzînd derivatele de ordinul al 8-lea inclusiv, rezultă

$$\Psi_1 = F_{m+1,\,n} + F_{m-1,\,n} + F_{m,\,n+1} + F_{m,\,n-1} = 4F_{m,\,n} + \Delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^4}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^6}{360}\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{\partial^6}{\partial y^6}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^8}{20\,160}\left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}\right)F_{m,\,n} + \ldots \tag{15a}$$

$$\Psi_2 = F_{m+1,\,n+1} + F_{m+1,\,n-1} + F_{m-1,\,n+1} + F_{m-1,\,n-1} = F_{m,\,n} + 2\,\Delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^4}{6}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 6\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^6}{180}\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} + 15\,\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + 15\,\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6}{\partial y^6}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^8}{10\,080}\left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 28\,\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 70\,\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 28\,\frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}\right)F_{m,\,n} + \ldots \tag{15b}$$

Se observă uşor că în membrii din dreapta ai ambelor expresii (15), derivatele de ordinul al doilea apar sub forma laplaceanului $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_{m,\,n}$, care poate fi înlocuit conform (14) prin $-p(x, y)$.

Ocupîndu-ne de (15a) şi neglijînd termenii următori, se obţine

$$F_{m+1,\,n} + F_{m-1,\,n} + F_{m,\,n+1} + F_{m,\,n-1} - 4F_{m,\,n} = -\,p_{m,\,n}\Delta^2, \tag{16}$$

care constituie ecuaţia cu diferenţe finite, relativă la punctul m, n, ce se obţine pe calea obişnuită prin metoda parabolei. Primul termen neglijat

$$\frac{\Delta^4}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)F_{m,\,n},$$

indică ordinul de mărime al erorilor, care sînt deci proporţionale cu $\frac{\Delta^4}{12}$.

O a doua ecuație cu diferențe finite se poate obține din relația (15b) procedînd pe o cale analogă, fie

$$F_{m+1,\,n+1} + F_{m+1,\,n-1} + F_{m-1,\,n+1} + F_{m-1,\,n-1} - 4F_{m,\,n} = -2p_{m,\,n}\,\Delta^2. \quad (17)$$

Primul termen neglijat

$$\frac{\Delta^4}{6}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 6\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)F_{m,\,n},$$

ndică erori proporționale cu $\frac{\Delta^4}{6}$, adică erori mai mari decît în prima variantă.

Vom căuta mai departe o combinație liniară a celor două expresii Ψ_1 și Ψ_2, astfel încît derivatele de ordinul al patrulea să se poată pune, mai puțin un factor constant, sub forma operatorului bilaplacean.

Se constată ușor că expresia $(4\Psi_1 + \Psi_2)$ satisface aceste condiții. Rezultă pe această cale

$$4\,(F_{m+1,\,n} + F_{m-1,\,n} + F_{m,\,n+1} + F_{m,\,n-1} - 4F_{m,\,n}) + (F_{m+1,\,n+1} + F_{m+1,\,n-1} +$$
$$+ F_{m-1,\,n+1} + F_{m-1,\,n-1} - 4F_{m,\,n}) = 6\,\Delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_{m,\,n} + \frac{\Delta^4}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} F_{m,\,n} + \frac{\Delta^6}{60}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(3)} F_{m,\,n} + \frac{\Delta^6}{30}\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_{m,\,n} +$$
$$+ \frac{\Delta^8}{3\,360}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(4)} F_{m,\,n} + \frac{\Delta^8}{630}\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} F_{m,\,n} +$$
$$+ \frac{\Delta^8}{504}\cdot\frac{\partial^8 F_{m,\,n}}{\partial x^4\partial y^4} + \ldots$$

Observînd că conform (14), operatorul bilaplacean se poate exprima prin intermediul termenului liber, neglijînd restul $\mathcal{R}_{m,\,n}$ și grupînd convenabil termenii, se obține în cele din urmă

$$-20\,F_{m,\,n} + 4\,(F_{m+1,\,n} + F_{m-1,\,n} + F_{m,\,n+1} + F_{m,\,n-1}) +$$
$$+ F_{m+1,\,n+1} + F_{m+1,\,n-1} + F_{m-1,\,n+1} + F_{m-1,\,n-1} = -\,6p_{m,\,n}\,\Delta^2 + \mathcal{F}_{m,\,n}, \quad (18)$$

în care s-a notat pentru simplificare

$$\mathcal{F}_{m,\,n} = -\,\frac{\Delta^4}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_{m,\,n} - \frac{\Delta^6}{60}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} p_{m,\,n} - \frac{\Delta^6}{30}\cdot\frac{\partial^4 p_{m,\,n}}{\partial x^2\partial y^2} -$$
$$- \frac{\Delta^8}{3\,360}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(3)} p_{m,\,n} - \frac{\Delta^8}{630}\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_{m,\,n}. \quad (19)$$

Restul este proporțional cu $\frac{\Delta^8}{504}$, astfel încît metoda plurilocală oferă o aproximație excepțional de bună în raport cu metoda parabolei.

Coeficienții lui F în punctele învecinate ale rețelei sînt redați în schemele din figura 1*a*, *b*, *c* pentru ecuațiile cu diferențe finite (16), (17) și (18).

Se poate observa că numărul de puncte care intervin în metoda plurilocală este acelaşi ca în metoda parabolei aplicată la suprafețele cu dublă curbură oarecare, în schimb coeficienții sînt foarte simpli.

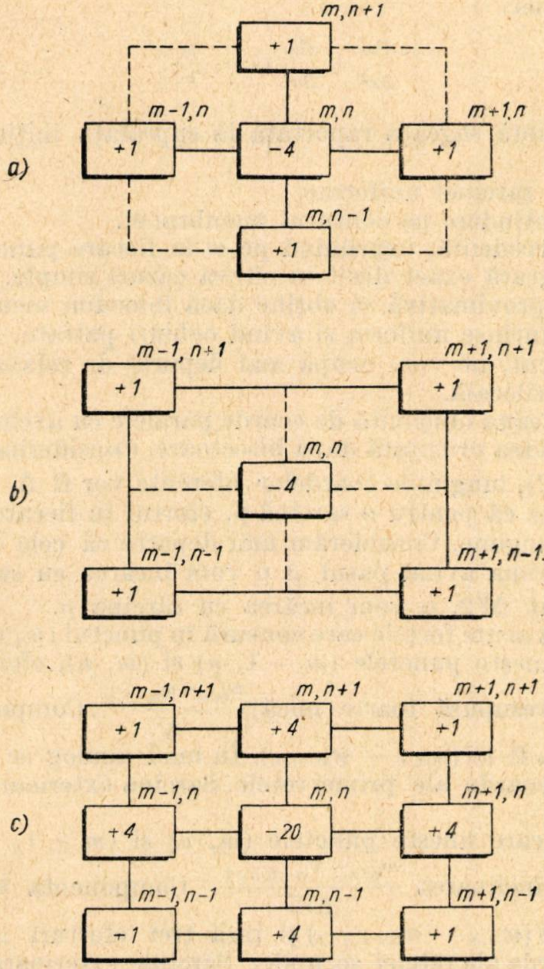

a)
m,n+1
+1
m-1,n
m,n
m+1,n
+1
-4
+1
m,n-1
+1
b)
m-1,n+1
m+1,n+1
+1
+1
m,n
-4
m-1,n-1
m+1,n-1
+1
+1
c)
m-1,n+1
m,n+1
m+1,n+1
+1
+4
+1
m-1,n
m,n
m+1,n
+4
-20
+4
m-1,n-1
m,n-1
m+1,n-1
+1
+4
+1

Fig. 1 *a*, *b*, *c*. — Coeficienţii lui *F* pentru ecuaţiile cu diferenţe finite : *a*) în metoda parabolei—formula (16) ; *b*) după formula (17) ; *c*) în metoda plurilocală—formula (18).

Pentru sarcina uniform distribuită în planul xOy, avem $\mathfrak{F}_{m,n} \equiv 0$. Sistemul de ecuații de forma (18) poate fi rezolvat şi prin procedeul relaxării, aşa cum se indică la punctul 3, dacă se presupun cunoscute condițiile pe contur. În cazul plăcilor curbe subțiri este interesant cazul cînd pe contur valoarea funcției *F* este nulă.

3. PROCEDEUL RELAXĂRII

Dacă în (14) vom înlocui pe F prin w, iar pe p prin p/S, se obține ecuația membranei

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{S}$$

în care w reprezintă săgeata raportată la suprafața inițial orizontală a membranei,
p — intensitatea sarcinii uniforme,
S — efortul de întindere pe conturul membranei.

Ecuația precedentă, exprimînd pe w în fiecare punct al suprafeței, nu poate fi integrată exact decît în cîteva cazuri simple.

O soluție aproximativă se obține dacă înlocuim membrana printr-o rețea de coarde întinse uniform și avînd ochiuri patrate. Procedeul obișnuit fiind cunoscut, ne vom ocupa mai departe de relaxarea ameliorată prin metoda plurilocală.

Față de rețeaua obișnuită de coarde paralele cu axele x, y, vom considera o a doua rețea orientată după bisectoare. Considerînd un nod (m, n) al rețelelor (fig. 2), lungimile coardelor aferente vor fi Δ, respectiv $\Delta\sqrt{2}$.

Vom admite că pentru o sarcină p, efortul în fiecare coardă este S pe unitatea de lungime. Considerăm mai departe că cele două rețele sînt independente; prima avînd pasul Δ o vom încărca cu sarcina $4p$, iar a doua avînd pasul $\Delta\sqrt{2}$, o vom încărca cu sarcina p.

Vom evalua acum forțele care concură în punctul (m, n). De exemplu, în coarda care unește punctele $(m-1, n)$ și (m, n), efortul va fi $4S\Delta$, iar înclinarea (presupusă foarte mică) $\frac{w_{m,n} - w_{m-1,n}}{\Delta}$. Componenta verticală dirijată în sus, va fi $4S(w_{m,n} - w_{m-1,n})$. În mod analog se scriu eforturile în celelalte trei coarde ale primei rețele. Sarcina exterioară aferentă este $4p\Delta^2$.

În coarda care unește punctele (m, n) și $(m+1, n+1)$, efortul va fi $S\Delta\sqrt{2}$, iar înclinarea $\frac{w_{m,n} - w_{m+1,n+1}}{\Delta\sqrt{2}}$. Componenta verticală dirijată în sus va fi $S(w_{m,n} - w_{m+1,n+1})$ și încă trei eforturi analoge pentru celelalte trei coarde ale rețelei secunde. Sarcina exterioară aferentă este $p(\Delta\sqrt{2})^2 = 2p\Delta^2$.

Suprapunînd cele două rețele, ecuația de echilibru se scrie în cele din urmă

$$S\,[20w_{m,n} - 4(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) -$$
$$-(w_{m+1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1})] - 6p\,\Delta^2 = 0. \quad (20)$$

Făcînd $S = 1$, ecuația (20) concordă cu (18) pentru cazul sarcinii uniform distribuite. Evident însă, că relația poate fi extinsă și pentru p variabil.

Pentru rezolvarea problemei, va trebui să scriem ecuații similare pentru celelalte noduri şi să determinăm valorile săgeților care satisfac aceste ecuații.

,,Ideea de bază a relaxării este să nu scriem fiecare din aceste ecuații, ci să îmbunătățim treptat nişte valori aproximative ale necunoscutelor printr-un proces de operații foarte simple, repetate sistematic, pînă ce aceste ecuații sînt verificate satisfăcător'' (op. cit. [1], p. 24).

Vom începe cu nişte valori $\overset{0}{w}_{m,n}, \overset{0}{w}_{m+1,n} \ldots$ care introduse în ecuația cu diferențe (18) sau (20), nu o vor satisface.

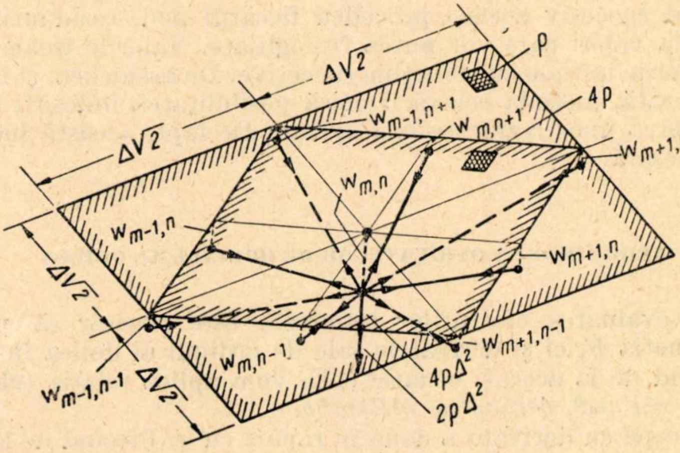


Fig. 2. — Analogia cu membrana în metoda plurilocală.

Revenind la funcția F, ecuația (18) se poate scrie

$$R_{m,n} \equiv 20F_{m,n} - 4\left(F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1}\right) - \left(F_{m+1,n+1} + \right.$$
$$\left. + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1}\right) - 6p_{m,n}\,\Delta^2 + \mathfrak{F}_{m,n}. \qquad (21)$$

Dacă introducem în (21) valorile aproximative ale necunoscutelor, ecuația de echilibru nu va fi satisfăcută, rămînînd *reziduul* $R_{m,n}^{(0)} \neq 0$. Pentru a menține echilibrul, va trebui să introducem un reazem la nod. Reacțiunea va avea valoarea $R_{m,n}^{(0)}$. În mod analog, în celelalte noduri vor apărea reacțiuni similare, pe care le vom denumi forțe reziduale sau reziduuri.

Vom presupune mai departe că aceste reazeme sînt reglabile, astfel încît deplasările corespunzătoare F să poată fi controlate. Atunci printr-o convenabilă deplasare a nodurilor se poate ajunge la stadiul final cînd toate reziduurile sînt anulate.

Procedeul de anulare a reziduurilor este analog cu cel din calculul sistemelor static nedeterminate. Deplasăm inițial un nod, păstrîndu-le pe celelalte blocate.

Din relația (21) se vede că unei deplasări $F^{(0)}_{m,n}$ îi corespunde o forță verticală $20\,F^{(0)}_{m,n}$ acționînd în nodul (m, n). Alegînd această deplasare astfel încît

$$R^{(0)}_{m,n} + 20\,F^{(0)}_{m,n} = 0, \quad \text{adică} \quad F^{(0)}_{m,n} = -\frac{1}{20}\,R^{(0)}_{m,n}, \tag{22}$$

reziduul din (m, n) va dispare, adică nu mai este necesară o reacțiune a nodului respectiv. În același timp însă, în nodurile vecine apar forțele $4F^{(0)}_{m,n}$, respectiv $F^{(0)}_{m,n}$, modificînd astfel reziduurile corespunzătoare.

Aplicînd succesiv același procedeu fiecărui nod, reziduurile se vor reduce pînă la valori care vor putea fi neglijate. Valorile finale se obțin însumînd valorile inițiale cu corecțiile succesive. De asemenea, și în această formă ameliorată, metoda relaxării oferă posibilitatea îndesirii nodurilor pentru obținerea unor rezultate mai exacte. De fapt, această îndesire nu mai este necesară.

4. APROXIMAREA DERIVATELOR DE ORDINUL AL DOILEA

Pentru evaluarea eforturilor interioare este necesar să cunoaștem nu numai funcția F, ci și derivatele sale de ordinul al doilea în punctele rețelei. Plecînd de la aceeași ecuație (14), vom aplica relația (2b) pentru evaluarea lui $\partial^2F/\partial x^2$, $\partial^2F/\partial y^2$ și $\partial^2F/\partial x\partial y$.

Vom începe cu derivata a doua în raport cu x. Plecînd de la dezvoltarea în serie Taylor a funcției $F(x_m \pm \Delta x,\ y_n \pm \Delta y)$, în care Δx, $\Delta y =$ sau $\neq 0$, se obțin cele opt puncte ale rețelei din jurul nodului m, n (fig. 1c).

O combinație liniară a valorilor F în aceste puncte ar introduce opt coeficienți nedeterminați. Ținînd însă seama de simetriile sistemului, ei pot fi reduși la numai trei, fie λ_1, λ_2, λ_3. Se poate scrie așadar

$$\lambda_1(F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}) + \lambda_2(F_{m,n+1} - 2F_{m,n} + F_{m,n-1}) + \lambda_3(F_{m+1,n+1} +$$

$$+ F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1} - 4F_{m,n}) = (\lambda_1 + 2\lambda_3)\,\Delta^2 \cdot \frac{\partial^2F_{m,n}}{\partial x^2} +$$

$$+ (\lambda_2 + 2\lambda_3)\,\Delta^2\,\frac{\partial^2F_{m,n}}{\partial y^2} + (\lambda_1 + 2\lambda_3)\frac{\Delta^4}{12}\cdot\frac{\partial^4F_{m,n}}{\partial x^4} + \lambda_3\cdot\Delta^4\cdot\frac{\partial^4F_{m,n}}{\partial x^2\,\partial y^2} +$$

$$+ (\lambda_2 + 2\lambda_3)\,\frac{\Delta^4}{12}\cdot\frac{\partial^4F_{m,n}}{\partial y^4} + \ldots \tag{23}$$

O primă condiție pentru determinarea coeficienților λ_1, λ_2, λ_3 se obține anulînd factorul lui $\partial^2F_{m,n}/\partial y^2$, fie

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\,;$$

o a doua condiție exprimă că grupul derivatelor de ordinul al 4-lea conține operatorul laplacean, fie

$$\frac{\lambda_1 + 2\lambda_3}{12} = \lambda_3 .$$

Cum coeficienții intervin doar prin raportul lor, se poate lua $\lambda_3 = 1$ și atunci din celelalte două condiții rezultă

$$\lambda_1 = 10 \text{ și } \lambda_2 = -2.$$

Ținînd seama de aceste valori, din relația (23) rezultă

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{10}{12} \cdot \frac{F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}}{\Delta^2} +$$
$$+ \frac{F_{m+1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1} - 2(F_{m,n+1} + F_{m,n-1})}{12\Delta^2} +$$
$$+ \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 p_{m,n}}{\partial x^2} . \qquad (24a)$$

Derivata a doua în raport cu y se deduce din (24a) prin analogie

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{10}{12} \cdot \frac{F_{m,n+1} - 2F_{m,n} + F_{m,n-1}}{\Delta^2} +$$
$$+ \frac{F_{m+1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1} - 2(F_{m+1,n} + F_{m-1,n})}{12\Delta^2} +$$
$$+ \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 p_{m,n}}{\partial y^2} . \qquad (24b)$$

Evident că este mult mai simplu să se utilizeze relația (14) pentru determinarea uneia dintre derivate, cînd cealaltă este cunoscută, de exemplu

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} = -p_{m,n} - \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} \qquad (24c)$$

Însumînd expresiile (24a, b) se regăsește ecuația cu diferențe finite (18), mai puțin unii termeni liberi reprezentînd derivatele de ordin superior ale lui $p(x, y)$. Explicația constă în faptul că fiecare derivată nu mai prezintă atîtea simetrii cît suma lor și în consecință, aproximația este mai mică fiind proporțională cu puterea a șasea a lui Δ ¹).

---

¹) Problema este perfect analogă cu aceea a convergenței seriilor simple și duble trigonometrice la calculul plăcilor plane, unde seria săgeților este mai convergentă decît seriile care determină momentele și forțele tăietoare.

Se constată că față de expresiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} &\approx \frac{F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}}{\Delta^2}, \\ \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} &\approx \frac{F_{m,n+1} - 2F_{m,n} + F_{m,n-1}}{\Delta^2}, \end{aligned}\right\}$$

ce se obțin prin metoda parabolei, expresiile (24 a, b) sînt ceva mai complicate.

O simplificare a relațiilor (24 a, b) se obține dacă se ține seama de ecuația cu diferențe finite (18), fie

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{F_{m+1,n} + F_{m-1,n} - F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2\Delta^2} - \frac{1}{2} p_{m,n} + \frac{1}{12}\Delta^2 \cdot \frac{\partial^2 p_{m,n}}{\partial x^2} - \\ &\qquad - \frac{1}{12\Delta^2}\mathfrak{F}_{m,n}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{F_{m,n+1} + F_{m,n-1} - F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta^2} - \frac{1}{2} p_{m,n} + \frac{1}{12}\Delta^2 \cdot \frac{\partial^2 p_{m,n}}{\partial y^2} - \\ &\qquad - \frac{1}{12\Delta^2}\mathfrak{F}_{m,n}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Pentru derivata mixtă se procedează absolut analog. Cu același ordin de aproximație rezultă relația

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{F_{m+1,n+1} - F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1}}{4\Delta^2} - \\ &\qquad - \frac{\Delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) p_{m,n} + \frac{1}{6\Delta^2}\mathfrak{F}_{m,n}, \end{aligned} \tag{26}$$

care diferă numai prin prezența ultimilor doi termeni față de expresia corespunzătoare din metoda parabolei.

O dată aceste precizări făcute, se poate trece efectiv la calculul stării de eforturi într-o placă curbă subțire de translație.

5. STUDIUL PARABOLOIDULUI ELIPTIC

Fie de determinat starea de eforturi într-un paraboloid eliptic, avînd următoarele elemente geometrice :

l_1, l_2 — deschiderile libere în sensul axei Ox_1 respectiv Oy_1,

f_1, f_2 — săgețile corespunzătoare.

Ecuația suprafeței mediane, raportată la sistemul de axe x_1Oy_1, cu originea la creștet, se scrie

$$z = \frac{4f_1}{l_1^2} \cdot x_1^2 + \frac{4f_2}{l_2^2} y_1^2 . \tag{27}$$

Derivatele succesive se scriu cu notațiile lui Monge

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{8 f_1}{l_1^2} x_1, \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{tg}\psi = \frac{8 f_2}{l_2^2} y_1, \end{aligned}\right\} \tag{28a}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8 f_1}{l_1^2}, \\ s &\equiv 0, \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8 f_2}{l_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

Se știe că proiecțiile eforturilor reale pe planul x_1Oy_1 derivă dintr-o funcție de eforturi F, conform relațiilor

$$S_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} - \int X dx_1, \tag{29a}$$

$$S_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \int Y dy_1, \tag{29b}$$

$$T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}, \tag{29c}$$

în care funcția F satisface ecuația cu derivate parțiale

$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - 2 s \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + r \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = pX + qY - Z + r \int X dx_1 + t \int Y dy_1. \tag{30}$$

Eforturile reale se deduc în cele din urmă prin relațiile

$$\left.\begin{aligned} N_x &= S_x \cdot \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = S_x \cdot \frac{1}{\lambda}, \\ N_y &= S_y \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = S_y \cdot \lambda, \\ N_{xy} &= N_{yx} = T. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

În cazul paraboloidului eliptic, r și t sînt constanți, astfel încît ecuația (30) devine

$$\frac{8 f_2}{l_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{8 f_1}{l_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = pX + qY - Z + r \int X dx_1 + t \int Y dy_1.$$

Făcînd substituția

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}\cdot x \\ y_1 &= y \end{aligned}\right\}$$

ecuația precedentă se reduce la (14)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\bar{p}\,(x, y), \tag{14'}$$

în care s-a notat

$$\left(pX + qY - Z + r\int X dx_1 + t\int Y dy_1\right)\frac{l_1^2}{8f_1} = -\bar{p}\,(x, y). \tag{32}$$

Eforturile proiectate se deduc după schimbarea variabilelor independente din relațiile

$$S_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx_1, \tag{33a}$$

$$S_y = \frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy_1, \tag{33b}$$

$$T = -\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \tag{33c}$$

Trecerea de la derivatele parțiale la diferențele finite a fost detaliată la punctele 2, 3, 4.

O altă posibilitate de tratare a problemei constă în eliminarea a două eforturi necunoscute, fie T și S_y și ajungerea la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, în raport cu S_y.

În cazul paraboloidului eliptic, această ecuație se scrie

$$\frac{l_1^2}{l_2^2}\cdot\frac{f_2}{f_1}\cdot\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} = \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{pX + qY - Z}{r}\right),$$

adică de același tip ca și precedenta.

În particular, dacă sarcina este uniform distribuită ($X = Y \equiv 0$, $Z = p$), membrul al doilea se anulează și printr-o substituție convenabilă rezultă o ecuație de tip Laplace.

Trebuie observat că în acest caz nu mai subsistă simetria față de diagonale din cauza condițiilor marginale diferite care se impun.

EXEMPLU DE CALCUL

Fie de determinat starea de eforturi într-o placă curbă subțire de beton armat, acoperind în plan o suprafață dreptunghiulară (suprafața mediană este un paraboloid eliptic). Date numerice (fig. 3) :

$$l_1 = 22{,}50 \text{ m} ; \; l_2 = 18{,}00 \text{ m} ; \; f_1 = f_2 = \frac{l_1}{7{,}5} = 3{,}00 \text{ m} ; \; \delta = 8 \text{ cm}.$$

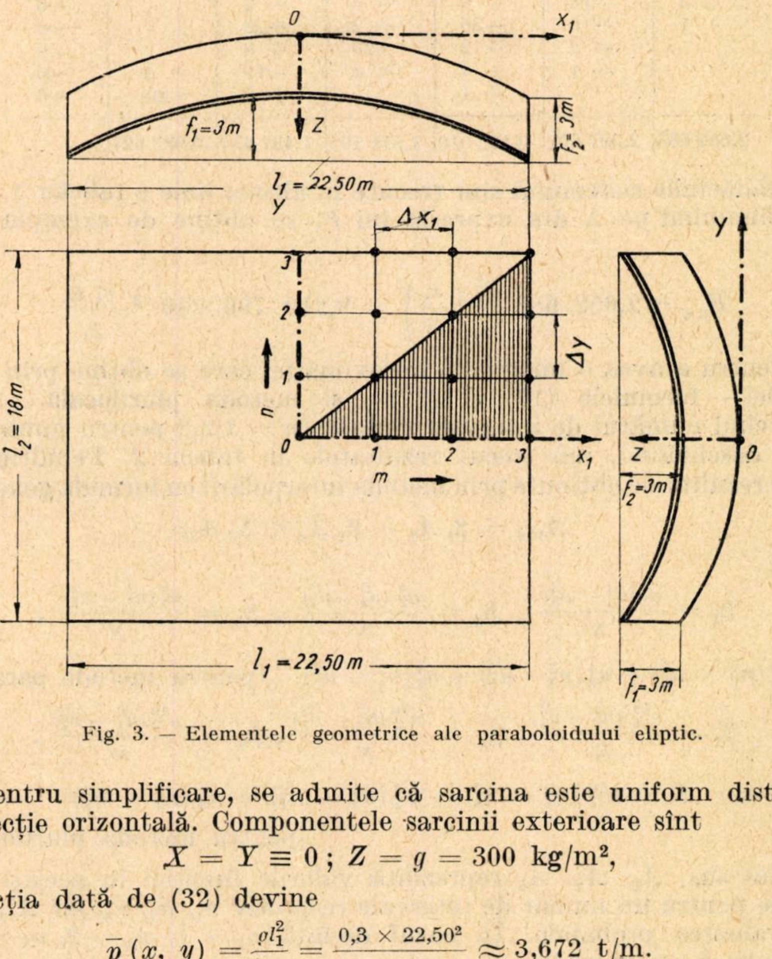


Fig. 3. — Elementele geometrice ale paraboloidului eliptic.

Pentru simplificare, se admite că sarcina este uniform distribuită în proiecție orizontală. Componentele sarcinii exterioare sînt

$$X = Y \equiv 0 ; \; Z = g = 300 \text{ kg/m}^2,$$

iar funcția dată de (32) devine

$$\overline{p}\,(x,\, y) = \frac{gl_1^2}{8\,f_1} = \frac{0{,}3 \times 22{,}50^2}{8 \times 3{,}00} \approx 3{,}672 \text{ t/m}.$$

Pentru aplicarea metodei plurilocale, vom alege un pas al rețelei $\Delta = \frac{l_2}{6}$. Deoarece este mai comod a lucra adimensional, se alege o nouă funcție de eforturi definită de relația

$$F = \Phi \cdot p\,\Delta^2 . \tag{34}$$

Cu aceste precizări, rezultă uşor sistemul de ecuaţii a cărui matrice este redată în tabela 1.

Tabela 1

$\Phi_{0.0}$	$\Phi_{1.0}$	$\Phi_{1.1}$	$\Phi_{2.0}$	$\Phi_{2.1}$	$\Phi_{2.2}$	= termen liber
−20	+16	+ 4				−6
+ 4	−18	+ 8	+ 4	+ 2		−6
+ 1	+ 8	−20	+ 2	+ 8	+ 1	−6
	+ 4	+ 2	−20	+ 8		−6
	+ 1	+ 4	+ 4	−19	+ 4	−6
		+ 1		+ 8	−20	−6
2,652 683	2,397 602	2,173 010	1,571 795	1,437 434	0,983 621	

Rădăcinile sistemului sînt trecute în ultima linie a tabelei 1.

Eliminînd pe Δ din expresia lui F, se obţine de exemplu pentru creştet

$$F_{0.0} = 2{,}652\ 683\,\frac{g l_1^2}{8 f_1}\left(\frac{l_2}{6}\right)^2 = 9{,}210\ 706 \times 10^{-3}\,\frac{g_1^2\, l_2^2}{f_1}.$$

Pentru a avea o imagine a aproximaţiei care se obţine prin metoda parabolei — formulele (16) şi (17) — şi metoda plurilocală — formula (18) — cînd numărul de intervale variază ($n = 1,2,3$ pentru jumătate din fiecare deschidere), am trecut rezultatele în tabela 2. Penultima linie conţine rezultatele obţinute prin metoda interpolării cu formula generală [7]

$$A_{123} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3,$$

în care

$$\beta_1 = \frac{n_1^4 (n_2^2 - n_3^2)}{N},\ \beta_2 = \frac{n_2^4 (n_3^2 - n_1^2)}{N},\ \beta_3 = \frac{n_3^4 (n_1^2 - n_2^2)}{N},$$

$$N = n_1^4(n_2^2 - n_3^2) + n_2^4(n_3^2 - n_1^2) + n_3^4(n_1^2 - n_2^2) \quad \text{(pentru metoda parabolei)};$$

$$\beta_1 = \frac{n_1^{10} (n_2^2 - n_3^2)}{N},\ \beta_2 = \frac{n_2^{10} (n_3^2 - n_1^2)}{N},\ \beta_3 = \frac{n_3^{10} (n_1^2 - n_2^2)}{N},$$

$$N = n_1^{10} (n_2^2 - n_3^2) + n_2^2 (n_3^2 - n_1^2) + n_3^2 (n_1^2 - n_2^2)$$

(pentru metoda plurilocală).

Mai sus, A_1, A_2, A_3 reprezintă valorile funcţiei în acelaşi punct, obţinute pentru un număr de intervale respectiv n_1, n_2, n_3, iar A_{123} reprezintă valoarea probabilă. În cazul de faţă $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, iar coeficienţii β au valorile

$$\beta_1 = \frac{1}{24},\ \beta_2 = -\frac{16}{15},\ \beta_3 = \frac{81}{40} \quad \text{(pentru metoda parabolei)};$$

$$\beta_1 = \frac{5}{168\ 960},\ \beta_2 = \frac{-8\ 192}{168\ 960},\ \beta_3 = \frac{177\ 147}{168\ 960} \quad \text{(pentru metoda plurilocală)}.$$

Ultima linie conține rezultatul exact care se obține cu ajutorul seriilor simple trigonometrice

$$F_{0,0} = \frac{gl_1^2\ l_2^2}{2\,\pi^3 f_1} \sum_{m} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3 \cdot \operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}} \approx 9{,}20950 \times 10^{-3} \cdot \frac{gl_1^2\ l_2^2}{f_1}$$

$$(m = 1,3,5, \ldots)$$

Tabela 2

Valorile $F_{0,0}$ $\left(\text{multiplicator } 10^{-3}. \ \frac{gl_1^2\ l_2^2}{f_1}\right)$

n	Metoda parabolei		Metoda plurilocală
	Formula (16)	Formula (17)	Formula (18)
1	7,812 500	15,625 000	9,375 000
2	8,789 063	10,416 667	9,218 460
3	9,014 423	9,672 619	9,210 706
∞	9,204 731	9,126 970	9,210 328
exact	9,2095		

Se vede deci ce aproximație bună se obține cu această metodă (sub $0{,}1^0/_{00}$). Variația funcției de eforturi în planul x_1Oy_1 este redată în figura 4.

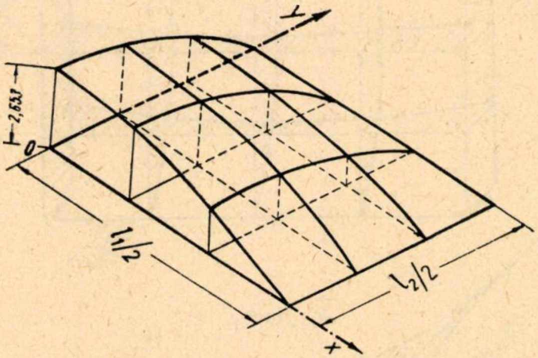


Fig. 4. — Variația funcției de eforturi F.

Eforturile se obțin la fel de simplu. În particular, la creștet rezultă direct

$$\left.\begin{aligned} S_{x,0,0} &= -\frac{gl_1^2}{16\,f_1} = -\,0{,}0625\,\frac{gl_1^2}{f_1}, \\ S_{y,0,0} &= -\frac{f_1}{f_2}\,\frac{l_2^2}{l_1^2}\,\frac{gl_1^2}{16\,f_1} = -\,0{,}0625\,\frac{gl_2^2}{f_2} = -\,0{,}0400\,\frac{gl_1^2}{f_1},\ \ T_{0,0} = 0. \end{aligned}\right\}$$

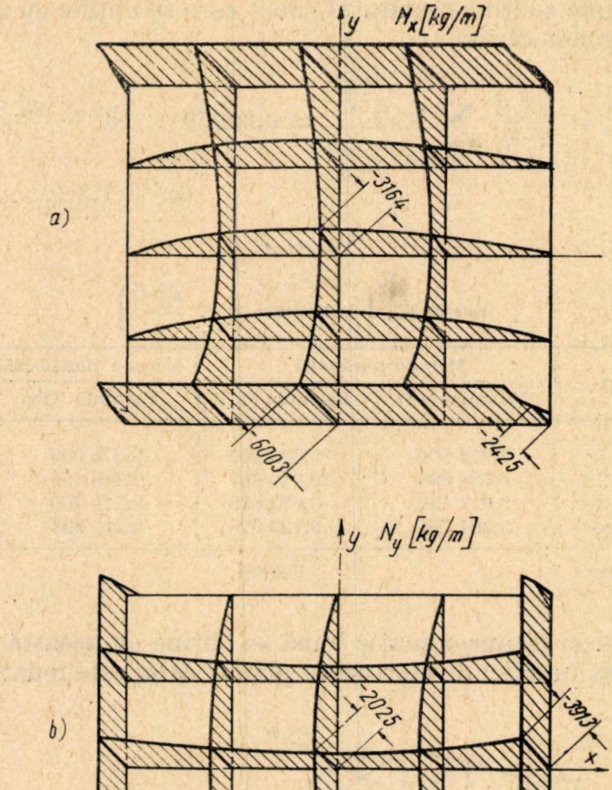

y
N_x [kg/m]
a)
-3164
-6003
-2425
y
N_y [kg/m]
b)
-2025
-3913
x
-2516
24 430
N_{xy} [kg/m]
y
c)
x

Fig. 5.—Eforturile de membrană în paraboloidul eliptic: a) variaţia lui N_x; b) variaţia lui N_y; c) variaţia lui N_{xy}.

Vom mai calcula, de exemplu, valoarea efortului S_x în punctul (2,1):

$$S_{x,2.1} = \frac{(\Phi_{2.2} + \Phi_{2.0} - \Phi_{3.1} - \Phi_{1.1})\,p\Delta^2}{2\Delta^2} - \frac{1}{2}p = \frac{p}{2}(\Phi_{2.2} + \Phi_{2.0} - \Phi_{1.1} - 1) =$$

$$= \frac{gl_1^2}{16\,f_1}(0{,}983621 + 1{,}571795 - 2{,}173010 - 1) = -0\,{,}0386\,\frac{gl_1^2}{f_1}.$$

Analog pentru efortul S_y rezultă

$$S_{y,2.1} = \frac{p}{2}(\Phi_{3.1} + \Phi_{1.1} - \Phi_{2.2} - \Phi_{2.0} - 1) = \frac{gl_1^2}{16\,f_1}(2{,}173010 -$$

$$- 0{,}983621 - 1{,}571795 - 1) \times \frac{18^2}{2\;215^2} = -0{,}0553\,\frac{gl_1^2}{f_1}.$$

Eforturile reale se deduc cu ajutorul relațiilor (31). Astfel, pentru punctul (2.1)

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{2.1} = \frac{8f_1}{3\,l_1} = \frac{8 \times 3{,}00}{3 \times 22{,}50} = 0{,}35555,$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_{2.1} = \frac{4f_2}{3l_2} = \frac{4 \times 3{,}00}{3 \times 18{,}00} = 0{,}22222,$$

$$\lambda_{2.1} = \frac{\cos\varphi_{2.1}}{\cos\psi_{2.1}} = \frac{0{,}3350}{0{,}2169} = 1{,}5445,$$

$$N_{x.2.1} = -\frac{0{,}0386}{1{,}5445}\,\frac{gl_1^2}{f_1} = -0{,}024992\,\frac{gl_1^2}{f_1} = -1{,}265 \text{ t/m},$$

$$N_{y.2.1} = -0{,}0553 \times 1{,}5445\,\frac{gl_1^2}{f_1} = -0{,}08541\,\frac{gl_1^2}{f_1} = -4{,}324 \text{ t/m}.$$

Determinarea eforturilor de lunecare în punctele interioare ale rețelei nu prezintă nici o dificultate. Pentru punctele de pe contur este necesar să cunoaștem în prealabil valorile funcției de eforturi în punctele exterioare. Acestea se obțin pe o cale absolut analogă cu aceea utilizată în metoda parabolei, astfel încît nu vom mai insista asupra ei. Singularitatea colțurilor se poate trata așa cum am indicat în [9]. Variația eforturilor N_x, N_y și N_{xy} este redată în figura 5 *a*, *b*, *c*.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1959; completată la 11 septembrie 1959

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОПОЗИЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ РАСЧЕТЕ ТОНКИХ ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИН

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается применение улучшенного метода численного расчета, а именно многопозиционного метода для определения напряженного состояния тонких изогнутых пластин.

Подробно исследуется случай эллиптического параболоида в мембранной теории. В работе приводится пример расчета.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1 *a*, *b*, *c*. — Коэффициенты F для уравнений с конечными разностями: *a*) по методу параболы-формула (16); *b*) по формуле (17); *c*) по многоточечному методу-формула (18).

Рис. 2. — Аналогия с мембраной по многоточечному методу.

Рис. 3. — Геометрические элементы эллиптического параболоида.

Рис. 4. — Изменение функции усилия F.

Рис. 5 *a*, *b*, *c*. — Мембранные напряжения в эллиптическом параболоиде: *a*) изменение N_x ; *b*) изменение N_y; *c*) изменение N_{xy}.

APPLICATION DE LA MÉTHODE PLURILOCALE AU CALCUL DES COQUES

RÉSUMÉ

Dans cette étude, on analyse l'application d'une méthode améliorée de calcul numérique — la méthode plurilocale — à la détermination de l'état de contrainte dans les coques.

Le cas du paraboloïde elliptique est étudié en détail, dans la théorie de la membrane. Un exemple de calcul complète l'étude.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. *a,b,c*. — Coefficients de F pour les équations aux différences finies : *a*) par la méthode de la parabole — formule (16) ; *b*) selon la formule (17) ; *c*) par la méthode plurilocale — formule (18).

Fig. 2. — Analogie avec la membrane, dans la méthode plurilocale.

Fig. 3. — Eléments géométriques du paraboloïde elliptique.

Fig. 4. — Variation de la fonction des efforts F.

Fig. 5. *a,b,c*. — Les efforts de membrane dans le paraboloïde elliptique : *a*) variation de N_x ; *b*) variation de N_y ; *c*) variation de N_{xy}.

BIBLIOGRAFIE

1. W. FLÜGGE, *Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik.* Federhofer-Girkmann-Festschrift, Fr. Deuticke Verlag, Wien, 1950.
2. L. V. KANTOROVICI, V. I. KRÎLOV, *Metode de aproximație ale analizei superioare.* II, I.S.R.S., 1956.
3. M. MIHAILESCU, Y. MIHAILESCU, *Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subțiri.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, X, *3*, 819 (1959).
4. A. PARME, *Hyperbolic Paraboloids and other Shells of Double Curvature.* Proceedings of the American Society of Civil Engineering, Journal of the Structural Division, Paper 1081, **82**, Sept. (1956).
5. A. PUCHER *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen.* Der Bauingenieur, *18*, 118 (1937).
6. A. P. RJANITZIN, *Teoria fără momente a pînzelor cu curbură mică*, din *Calculul construcțiilor spațiale*, **III**, I.S.R.S., 1955.
7. M. G. SALVADORI, *Analysis and Testing of Translational Shells.* Journal of the American Concrete Institute, Title 52–64, June (1956).
9. M. SOARE, *Unele aspecte ale calculului numeric în proiectarea plăcilor curbe subțiri.* Industria Construcțiilor, *9* și *10* (1957).
10. R. ZURMÜHL, *Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren* Z.A.M.M., *1/2*, 1–16 (1957).

GRINZI CU INIMĂ PLINĂ RIGIDIZATE TRANSVERSAL, UNILATERAL

DE

STELIAN CETĂȚEANU *)

În scopul măririi tensiunii critice de voalare, inima grinzilor metalice trebuie să fie întărită cu rigidizări transversale sau longitudinale.

Rigidizările pot fi dispuse simetric (fig. 1 *a*) sau unilateral (fig. 1*b*) față de planul median al inimii.

Rigidizările unilaterale pot fi prevăzute pe o singură parte a inimii (fig. 2 *a*) sau alternativ pe ambele fețe (fig. 2 *b*).

Este avantajos din punct de vedere teoretic, estetic și economic de a folosi rigidizările unilaterale, în locul rigidizărilor dispuse simetric față de planul median al inimii.

În cazul folosirii rigidizărilor simetrice, pentru a evita posibilitatea slăbirii inimii prin executarea în aceeași secțiune transversală a două cordoane de sudură, este recomandabil ca rigidizările de pe cele două fețe ale inimii să fie puțin decalate una față de cealaltă. Adeseori, în atelier, această decalare nu se execută deoarece necesită manoperă suplimentară și în acest caz se reduce rezistența inimii. La elementele construcțiilor metalice întărite cu rigidizări dispuse unilateral această dificultate este înlăturată.

Bazîndu-se pe faptul că la podurile metalice existența rigidizărilor, pe fața exterioară a grinzilor marginale, prezintă mari dificultăți de ordin estetic, arhitecții recomandă ca acestea să fie suprimate. Prin dispunerea rigidizărilor numai pe fața interioară a grinzilor marginale se respectă aceste necesități de ordin estetic [1] [2].

Economia pe care o prezintă grinzile metalice rigidizate unilateral, față de cele rigidizate simetric, se referă atît la metalul folosit cît și la timpul de lucru. Se economisește aproximativ 50% din cantitatea de metal și de electrozi de sudură necesară pentru confecționarea rigidizărilor și pentru sudarea lor pe ambele feţe ale inimii, iar timpul de lucru necesar executării cordoanelor de sudură, care fixează rigidizările pe inimă, se reduce la jumătate.

---

*) Institutul de construcții, Facultatea de construcții civile și industriale — București.

Economia realizată prin dispunerea unilaterală a rigidizărilor este

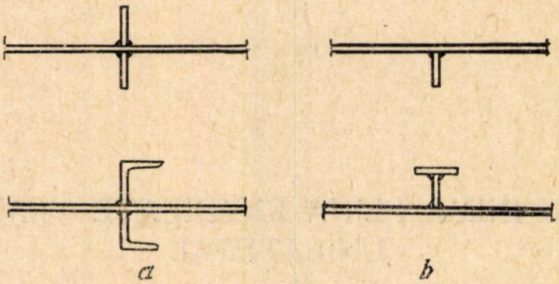


Fig. 1

cu atît mai mare cu cît deschiderea construcţiei şi deci înălţimea inimii, este mai importantă. Avînd în vedere că în ultimii 20 de ani deschiderea podurilor metalice cu inimă plină aproape s-a triplat — spre exemplu traveea centrală a podului sudat peste Sava, la Belgrad [3], are deschiderea 261 m, înălţimea inimii fiind 9,2 m, în timp ce înainte de anul 1940 deschiderea podurilor de-abia ajungea la 100 m — se poate deduce importanta economie de metal şi manoperă care se poate realiza consolidînd inimile grinzilor podurilor metalice prin rigidizări dispuse unilateral.

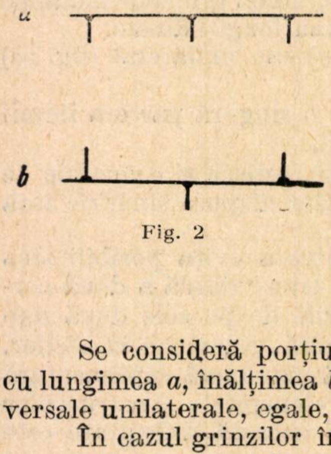


Fig. 2

1. ENUNŢAREA PROBLEMEI

Se consideră porţiunea de inimă de formă dreptunghiulară (fig. 3) cu lungimea a, înălţimea b şi grosimea t, întărită cu $(p-1)$ rigidizări transversale unilaterale, egale, echidistante care o împart în p panouri identice.

În cazul grinzilor întărite numai cu rigidizări verticale, porţiunea de inimă considerată reprezintă întreaga lungime a inimii grinzii sau numai o porţiune din aceasta, mărginită de rigidizări rigide dispuse pe ambele feţe ale inimii.

În cazul grinzilor întărite şi cu rigidizări orizontale, porţiunea de inimă considerată reprezintă porţiunea de inimă situată între talpa comprimată şi rigidizarea orizontală alăturată ei sau între două rigidizări orizontale consecutive.

Porţiunea de inimă se consideră articulată pe contur şi solicitată în planul median de eforturi unitare normale, distribuite liniar pe înălţimea acesteia, după legea

$$f(y) = N_0\left(1 - \frac{d}{b}\, y\right) \tag{1}$$

unde s-a notat cu

$N_0 = t\,\sigma_0$ — rezultanta eforturilor unitare normale pe grosimea t a inimii, la marginea inferioară — comprimată — a acesteia.

d — coeficient a cărui valoare variază după natura solicitării inimii. La inimile uniform comprimate $d = 0$, iar la cele încovoiate $d = 2$.

b — înălțimea porțiunii de inimă.

y — distanța de la marginea inferioară a inimii pînă la secțiunea considerată.

Se va studia asigurarea stabilității locale a acestei porțiuni de inimă, întărită cu rigidizări transversale unilaterale dispuse pe o singură parte și se va arăta că în cazul inimii întărită cu rigidizări unilaterale, dispuse alternativ pe ambele fețe, se ajunge la aceleași rezultate.

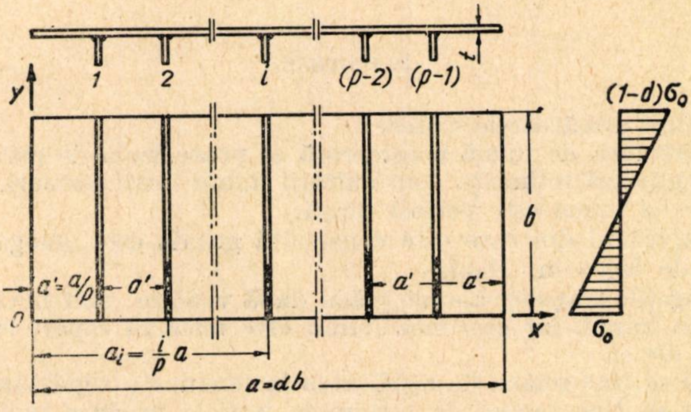


Fig. 3

Rigidizările transversale unilaterale se consideră alcătuite din profile laminate care au secțiunea transversală simetrică față de axa principală normală pe planul median al inimii—profile **⊥**, oțel lat etc. Cînd se prevăd rigidizări unilaterale, nesimetrice în raport cu această axă principală — alcătuite din profile **L**, **[**, **Z** etc. — în timpul voalării, în rigidizări se produc tensiuni suplimentare de torsiune, care pot să nu fie luate în considerare la calculul tensiunilor critice, influența lor fiind neglijabilă¹).

Determinarea tensiunii critice de voalare a porțiunii de inimă considerată se face prin metoda energetică.

2. ISTORICUL STUDIULUI PROBLEMEI

Problema întăririi inimilor cu rigidizări unilaterale a fost pusă prima oară de Chwalla și Novak [4] care au studiat comportarea unei porțiuni

---

¹) În cazul rigidizărilor dispuse simetric, pe ambele fețe ale inimii, rezultatele încercărilor executate de Erlemann [9] justifică această ipoteză.

de inimă solicitată pe contur de eforturi unitare tangenţiale şi întărită cu o singură rigidizare unilaterală situată la mijlocul deschiderii.

În acelaşi timp Schleicher şi Barbré [5] au studiat problema consolidării prin rigidizări longitudinale dispuse unilateral a panourilor de inimă care posedă săgeţi iniţiale.

Bornscheuer în lucrarea [7] a studiat comportarea unui panou de inimă, uniform comprimat, întărit cu o rigidizare orizontală unilaterală.

În 1955, Massonnet a expus planul de lucru al Comisiei belgiene pentru studiul construcţiilor metalice, pe anii următori [8], în care figurează şi studiul experimental al comportării rigidizărilor transversale dispuse numai pe o parte a inimii.

3. IPOTEZE

Se admit următoarele ipoteze :

a) Porţiunea de inimă considerată se poate izola de restul grinzii, adică se neglijează influenţa continuităţii inimii între panouri.

b) Iniţial inima este perfect plană.

c) Materialul din care este construită grinda este omogen, izotrop şi ascultă de legea lui Hooke.

d) Săgeţile transversale ale plăcii după voalare sînt mici în raport cu grosimea inimii, iar grosimea inimii este mică în raport cu celelalte dimensiuni ale ei.

e) Nu se ţine seama de rigiditatea la torsiune a rigidizărilor.

f) Nu se ţine seama de tensiunile iniţiale produse în inimă prin sudarea acesteia de tălpi sau prin sudarea pe ea a rigidizărilor.

g) Studiul este valabil numai în domeniul comportării elastice a materialului.

4. PRINCIPII DE CALCUL

Legătura rezistentă dintre rigidizare şi inimă, realizată prin două cordoane de sudură continue (fig. 4 *a*), se consideră realizată în calcul de-a lungul a două linii drepte — denumite linii de contact — care reprezintă proiecţia pe planul median al inimii a rădăcinilor cordoanelor de sudură care leagă rigidizarea de inimă (fig. 4 *b*). Ca acest mod de legătură să corespundă realităţii trebuie ca rigidizarea să fie completată cu fîşia paralelipipedică din inimă alăturată ei sau cu alte cuvinte în calcul să se considere ca suprafaţă transversală a rigidizării, suprafaţa obţinută prin însumarea suprafeţei transversală reală a rigidizării cu suprafaţa acestei fîşii paralelipipedice de inimă, care îi corespunde.

Pentru a calcula tensiunea critică de voalare a porţiunii de inimă rigidizată unilateral, se va considera că sarcina exterioară reprezintă sarcina critică de voalare. În acest caz, inima rigidizată trece din starea de echilibru stabil în starea de echilibru indiferent, în care pe lîngă forma plană de echilibru, poate căpăta o infinitate de poziţii de echilibru puţin curbate.

Întrucît rigidizările care întăresc porţiunea de inimă considerată sînt dispuse unilateral, axa lor de simetrie este situată la distanţa s de planul median al inimii (fig. 4 *b* şi fig. 5 *a*). Admiţînd că rigidizarea este legată de inimă de-a lungul liniilor de contact printr-o conducere fără frecare, în timpul voalării într-o secţiune y a liniei de contact se vor căpăta alungiri diferite în fibrele vecine ale inimii şi rigidizării (fig. 5 *b*).

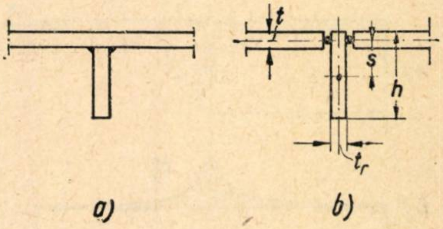


Fig. 4

În realitate, aceste alungiri diferite nu sînt posibile întrucît rigidizările sînt fixate de inimă prin cordoane rigide. Împiedicarea alungirii diferite a fibrelor de-a lungul liniilor de contact, dă naştere la forţe de lunecare T_y (fig. 5 *c*) care acţionează în sens contrar asupra inimii şi rigidizării, producînd în acestea, tensiuni plane suplimentare de care trebuie să se ţină seama la calculul tensiunii critice de voalare a inimii rigidizată unilateral.

Mărimea acestor forţe T_y trebuie determinată astfel încît deplasarea dintre rigidizare şi inimă să fie interzisă. Această condiţie se scrie egalînd alungirile fibrelor vecine ale inimii şi rigidizării, produse prin voalare sub acţiunea curbării şi a forţelor de lunecare T_y.

Avînd în vedere simetria deformării inimii în timpul voalării în raport cu axa $y = \frac{b}{2}$ se deduce că mărimea forţelor de lunecare T_y variază de-a lungul liniei de contact, avînd valoarea maximă la mijlocul porţiunii de inimă, iar în două secţiuni egal depărtate de această axă forţele de lunecare T_y sînt egale şi de sens contrar.

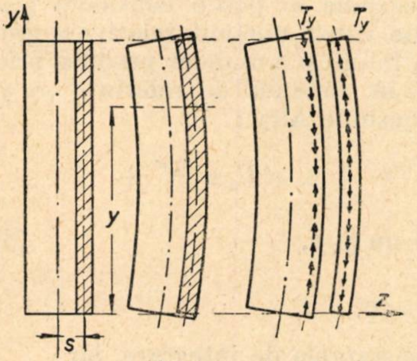


Fig. 5

Înainte de a se evalua valoarea tensiunii critice de voalare, se va determina starea de tensiune care se produce în porţiunea de inimă considerată, rigidizată transversal, unilateral, de aceste forţe de lunecare T_y care iau naştere între rigidizare şi inimă ca urmare a faptului că în timpul voalării este împiedicată alungirea liberă, diferită a fibrelor vecine ale acestor două elemente de construcţie.

5. STAREA DE TENSIUNE PRODUSĂ DE FORŢELE T_y ÎN INIMĂ

a. *Inima cu rigidizări transversale dese* ($b > a'$). Se va determina valoarea forţelor de lunecare T_y pentru rigidizarea a_i şi starea de tensiune σ_x, σ_y şi τ_{xy} produsă de ele în inimă (fig. 6).

Deoarece grosimea rigidizării este mică în raport cu dimensiunile panoului inimii, pentru simplificarea calculelor se consideră că cele două linii de contact obținute prin proiectarea pe planul median al inimii a rădăcinilor cordoanelor de sudură care leagă rigidizarea de inimă se suprapun proiecției axei rigidizării — liniei de intersecție a planului median al inimii cu planul de simetrie al rigidizării.

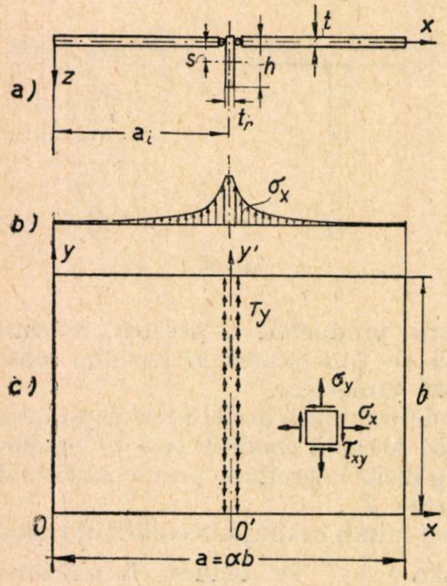


Fig. 6

Se admite că suprafața elastică a inimii rigidizată, voalată are forma generală [1])

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (2)$$

Avînd în vedere că tensiunile produse în inimă de forțele de lunecare T_y scad repede pe măsură ce secțiunea considerată se depărtează de axa rigidizării (fig. 6) și că starea de tensiune se poate considera plană din cauza micimii relative a grosimii inimii și a undelor produse prin voalare, aceasta se poate reprezenta — în sistemul de referințe $xo'y'$ (fig. 6 c) — prin următoarea funcție de tensiune Airy :

$$F'(x', y) = \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n^2} \left(e^{-\beta_n x'} + B_n e^{+\beta_n x'} + \beta_n x' C_n e^{-\beta_n x'} + \right.$$
$$\left. + \beta_n x' D_n e^{+\beta_n x'}\right) \sin \beta_n y, \quad (3)$$

care îndeplinește condiția

$$\nabla \nabla F'(x', y) = 0.$$

S-a notat prin A_{ni}, B_n, C_n și D_n constantele de integrare, iar

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (4)$$

În sistemul de coordonate xoy, funcția Airy (3) se scrie

$$F(x, y) = \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n^2} \left[e^{-\beta_n (x - a_i)} + B_n e^{+\beta_n (x - a_i)} + \beta_n (x - a_i) C_n e^{-\beta_n (x - a_i)} + \right.$$
$$\left. + \beta_n (x - a_i) D_n e^{+\beta_n (x - a_i)}\right] \sin \beta_n y. \quad (5)$$

---

[1]) Se va nota simplificat $\sum_{k=1}^{\infty}$ prin $\sum_{k}$. Numai în cazul unei însumări finite se vor indica limitele.

Dacă se notează prin $(u,\ v)$ componentele deplasării elastice a unui punct (x, y) din planul inimii, sub acțiunea forțelor de lunecare T_y, atunci componentele stării de tensiune produsă în inimă se pot scrie

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \tag{6}$$

fiind legate de componentele stării de deformație prin relațiile

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \tag{7}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \tag{8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{9}$$

Se remarcă faptul că u și v nu reprezintă componentele deplasării unui punct (x, y) al inimii obținută sub acțiunea atît a sarcinilor exterioare cît și a forțelor de lunecare T_y, ci reprezintă componentele deplasării relative a inimii obținută numai sub acțiunea forțelor T_y. Se consideră deci ca origine situația cînd inima este solicitată de sarcinile exterioare care au ajuns la sarcina critică, dar nu este voalată.

Se calculează derivatele funcției de tensiune Airy (5) în raport cu x și y

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} = -\sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}\Big[&e^{-\beta_n(x-a_i)} - B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} - \\ &-\beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)} - C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} - D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\Big]\sin\beta_n y,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}\Big[&e^{-\beta_n(x-a_i)} + B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + \\ &+\beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\Big]\cos\beta_n y,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x = -\sum_n A_{ni}\Big[&e^{-\beta_n(x-a_i)} + B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + \\ &+\beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\Big]\sin\beta_n y,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = \sum_n A_{ni}\Big[&e^{-\beta_n(x-a_i)} + \mathrm{B}_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + \\ &+\beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)} - 2C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + 2D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\Big]\sin\beta_n y,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \sum_n A_{ni}\Big[&e^{-\beta_n(x-a_i)} - B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} - \\ &-\beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)} - C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} - D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\Big]\cos\beta_n y.\end{aligned} \tag{14}$$

Condiţiile de margine la care trebuie să corespundă aceste componente ale stării de tensiune cer ca la marginile $y = 0$ şi $y = b$ ale inimii să existe

$$\sigma_y = 0. \tag{15}$$

Întrucît expresia lui σ_y (13) conţine ca factor comun termenul $\sin \beta_n y$, condiţia impusă este îndeplinită.

Se observă că la marginile $y = 0$ şi $y = b$ ale inimii tensiunea tangenţială τ_{xy} (14) nu se anulează. Ea formează pentru două panouri ale inimii — separate prin rigidizare — un sistem de eforturi în echilibru care poate fi neglijat, mai ales avînd în vedere că aceste eforturi scad repede pe măsură ce secţiunea considerată se depărtează de rigidizare [10].

Din relaţiile (8), (12) şi (13) se obţine

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu\sigma_x = \sum_n A_{ni}\{[e^{-\beta_n(x-a_i)} + B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} + \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} +$$

$$+ \beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}](1+\mu) - 2C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + 2D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}\}\sin \beta_n y. \tag{16}$$

Alungirea ε_y a unei fibre a inimii, sub acţiunea forţelor de lunecare T_y, de-a lungul liniei de contact a rigidizării a_i, se scrie

$$\varepsilon_y\Big|_{x=a_i} = \frac{1}{E}\sum_n A_{ni}\,[(1+B_n)(1+\mu) - 2C_n + 2D_n]\sin \beta_n y. \tag{17}$$

Din (7) se deduc valorile deplasării u, a unui punct (x, y) al inimii

$$Eu = \int \sigma_x\,dx - \mu \int \sigma_y\,dx + \Phi(y)^{1)} = \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}\{[e^{-\beta_n(x-a_i)} - B_n e^{+\beta_n(x-a_i)} +$$

$$+ \beta_n(x-a_i)\,C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} - \beta_n(x-a_i)\,D_n e^{+\beta_n(x-a_i)}](1+\mu) + \tag{18}$$

$$+[C_n e^{-\beta_n(x-a_i)} + D_n e^{-\beta_n(x-a_i)}](1-\mu)\}\sin \beta_n y + K_1^i(y) + K_0^i.$$

Deoarece la marginile $y = 0$ şi $y = b$ ale panoului de inimă deplasarea orizontală a punctelor este împiedicată prin faptul că inima este sudată de tălpi, componenta u a stării de deplasare este nulă. Întrucît starea de deformare produsă în inimă de forţele T_y este simetrică faţă de axa rigidizării a_i, pentru toate punctele acestei inimi se poate scrie condiţia

$$u\Big|_{x=a_i} = \frac{1+\mu}{E}\sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}[1 - B_n + \delta(C_n + D_n)]\sin \beta_n y +$$

$$+ K_1^i(y) + K_0^i = 0, \tag{19}$$

unde s-a înlocuit

$$\delta = \frac{1-\mu}{1+\mu}. \tag{20}$$

---

[1] [11], p. 26.

Pentru ca această condiție să fie îndeplinită, trebuie ca

$$K_0^i = K_1^i = 0 \tag{21}$$

şi

$$1 - B_n + \delta(C_n + D_n) = 0. \tag{22}$$

Deoarece tensiunile σ_x şi τ_{xy} scad foarte repede cu depărtarea de rigidizare (fig. 6 *b*), la mijlocul distanței între două rigidizări consecutive valorile lor sînt foarte mici. Pentru simplificarea calculului se presupune că sînt egale cu zero, adică

$$\sigma_x \Big|_{x=a_i+\frac{a}{2p}} = 0 \tag{23}$$

şi

$$\tau_{xy} \Big|_{x=a_i+\frac{a}{2p}} = 0. \tag{24}$$

Pentru secțiunea care împarte în două părți egale panoul *i* — dintre rigidizările x_i şi x_{i+1} (fig. 7) — se poate nota

$$\beta_n(x - a_i) = \beta_n\left(a_i + \frac{a}{2p} - a_i\right) = \frac{n\pi}{b} \cdot \frac{a}{2p} = \frac{n\pi}{2p}\,\alpha = \alpha_n. \tag{25}$$

Avînd în vedere relațiile (12) şi (14), condițiile (23) şi (24) sînt îndeplinite cînd

$$e^{-\alpha_n} + B_n e^{+\alpha_n} + \alpha_n C_n e^{-\alpha_n} + \alpha_n D_n e^{+\alpha_n} = 0, \tag{26}$$

$$e^{-\alpha_n} - B_n e^{+\alpha_n} + \alpha_n C_n e^{-\alpha_n} - \alpha_n D_n e^{+\alpha_n} - C_n e^{-\alpha_n} - D_n e^{+\alpha_n} = 0. \tag{27}$$

Din ecuațiile (22), (26) şi (27) se obțin valorile constantelor B_n, C_n şi D_n

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2\alpha_n(\alpha_n - \delta) - \delta(1 - e^{-2\alpha_n})}{\delta(e^{+2\alpha_n} - 1) + 2\alpha_n(\alpha_n + \delta)}, \\ C_n &= -\frac{(e^{+2\alpha_n} + 1) + 2(\alpha_n + \delta)}{\delta(e^{+2\alpha_n} - 1) + 2\alpha_n(\alpha_n + \delta)}, \\ D_n &= \frac{(e^{-2\alpha_n} + 1) - 2(\alpha_n - \delta)}{\delta(e^{+2\alpha_n} - 1) + 2\alpha_n(\alpha_n + \delta)}, \end{aligned} \tag{28}$$

unde conform (20) şi (25) s-a notat

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1 - \mu}{1 + \mu} = \frac{7}{13}, \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{2p}\,\alpha, \\ e &= 2{,}7183\ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Pentru a se determina valoarea constantei A_{ni} se va folosi condiția menționată mai sus și anume : într-o secțiune y a liniei de contact alungirile produse în timpul voalării în fibrele vecine ale inimii și rigidizării — sub acțiunea curbării și a forțelor de lunecare T_y — trebuie să fie egale.

Considerînd că în timpul voalării fibra marginală a rigidizării — vecină liniei de contact — este întinsă (fig. 8) condiția de mai sus se poate scrie sub forma :

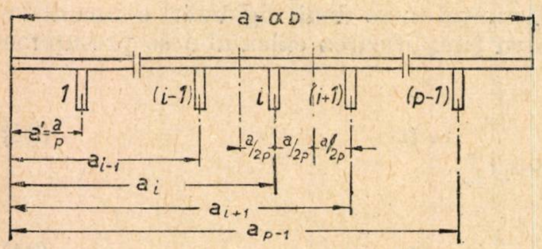


Fig. 7

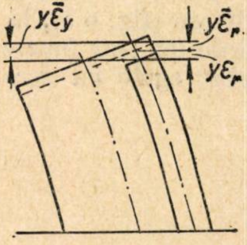


Fig. 8

$$\varepsilon_T = \bar{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}_T , \tag{30}$$

unde s-a notat cu

ε_T = lungirea specifică a fibrei planului median al inimii sub acțiunea forțelor de lunecare T_y,

$\bar{\varepsilon}_y$ = lungirea specifică a fibrei rigidizării, vecină liniei de contact, sub influența curbării prin voalare și a momentului încovoietor produs prin acționarea excentrică a forțelor T_y,

$\bar{\varepsilon}_T$ = scurtarea specifică a fibrelor rigidizării sub acțiunea forțelor T_y.

Lungirea specifică ε_T a fibrei planului median al inimii sub acțiunea forțelor de lunecare T_y este exprimată în relația (17).

Se izolează, din porțiunea de inimă considerată, partea care aparține rigidizării transversale a_i (fig. 9) — cuprinsă între secțiunile $x = a_i - \frac{a}{2p}$ și $x = a_i + \frac{a}{2p}$ (fig. 7) — și se limitează la secțiunea y (fig. 5 *b*). S-a presupus că de-a lungul secțiunilor verticale, care împart în două părți egale panourile vecine rigidizării a_i, tensiunile tangențiale sînt nule (24). Asupra părții de inimă care a fost izolată acționează pe direcția y numai tensiunile normale σ_y și forțele de lunecare T_y.

Avînd în vedere simetria — față de axa rigidizării a_i — a tensiunilor normale σ_y produse de forțele de lunecare T_y, rezultanta acestora în secțiunea y, pe grosimea t a părții de inimă izolată, se poate scrie

$$\begin{aligned} Y = 2t\int_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}} \sigma_y\,dx = 2t\,\frac{dF}{dx}\Bigg|_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}} &= 2t\sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}(1-B_n-C_n-D_n)\sin\beta_n y - \\ - 2t\sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n}\left(e^{-\alpha_n}-B_n e^{+\alpha_n}+\alpha_n C_n e^{-\alpha_n}-\alpha_n D_n e^{+\alpha_n}-C_n e^{-\alpha_n}-D_n e^{+\alpha_n}\right)&\sin\beta_n y. \end{aligned} \tag{31}$$

Întrucît conform relației (27) a doua sumă a expresiei (31) este egală cu zero, se deduce

$$Y = 2t \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n} (1 - B_n - C_n - D_n) \sin \beta_n y. \tag{32}$$

Din condiția de echilibru pe direcția y în partea de inimă izolată (fig. 9) se obține valoarea rezultantei

$$Y = \int_0^y T_y \, dy, \tag{33}$$

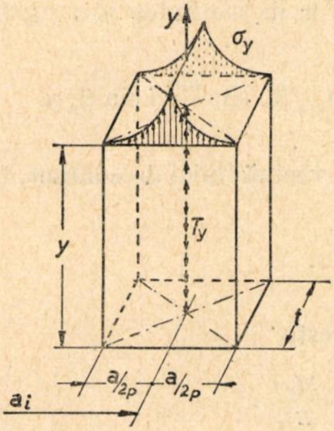


Fig. 9

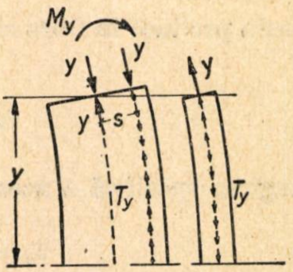


Fig. 10

care întinde inima și comprimă excentric rigidizarea a_i în secțiunea y (fig. 10).

Compresiunea excentrică a rigidizării se poate reduce la o compresiune axială Y și la un moment de încovoiere suplimentar

$$\Delta M_y = Y_s. \tag{34}$$

La același rezultat se ajunge dacă se scrie că forțele de lunecare T_y sînt egale cu rezultanta tensiunilor tangențiale care se produc pe grosimea t a părții de inimă izolată, de-a lungul celor două linii de contact — considerate suprapuse de-a lungul axei $x = a_i$

$$T_y = 2t \, \tau_{xy} \Big|_{x=a_i} = 2t \sum_n A_{ni} (1 - B_n - C_n - D_n) \cos \beta_n y, \tag{35}$$

$$\int_0^y T_y \, dy = 2t \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n} (1 - B_n - C_n - D_n) \sin \beta_n y = Y. \tag{36}$$

Fiecare rigidizare transversală separată de inimă printr-un sistem de conducere fără frecare, este alcătuită — în mod teoretic — dintr-un profil laminat, la care se adaugă fîşia de inimă paralelipipedică corespunzătoare (fig. 4 *b*). În acest studiu s-a presupus că toate cele $(p-1)$ rigidizări sînt identice.

Se notează cu

S — suprafaţa transversală teoretică a rigidizării,

I_r — momentul de inerţie al rigidizării în raport cu axa principală paralelă cu planul median al inimii,

s — distanţa de la centrul de greutate al rigidizării teoretice la planul median al inimii.

Rigidizarea unilaterală solitară cu inima se curbează atît sub influenţa voalării cît şi a compresiunii excentrice.

Momentul încovoietor corespunzător în secţiunea y a rigidizării a_i, este

$$M_y = -EI_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = EI_r \sum_m \sum_n a_{mn} \beta_n^2 \sin \frac{m\pi}{p} i \sin \beta_n y. \tag{37}$$

Acesta produce în fibra rigidizării, vecină liniei de contact, tensiunea normală

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{M_y}{I_r} s. \tag{38}$$

Lungirea specifică a acestei fibre este

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{E} = -\frac{M_y s}{EI_r}. \tag{39}$$

Forţa axială de compresiune Y, care solicită rigidizarea a_i în secţiunea y, produce scurtarea specifică

$$\bar{\varepsilon}_Y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{Y}{ES}. \tag{40}$$

Înlocuind în (30) valorile alungirilor obţinute în (37), (39) şi (40) se obţine o ecuaţie din care se deduce valoarea lui A_{ni}

$$A_{ni} = -\frac{s}{2N_n} E \beta_n^2 \sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i, \tag{41}$$

unde s-a notat cu

$$N_n = \left[(1+\beta_n)\frac{1+\mu}{2} - C_n + D_n + \frac{t}{\beta_n S}(1 - B_n - C_n - D_n)\right]. \tag{42}$$

Se observă că dacă rigidizarea este aşezată simetric pe ambele părţi ale inimii, atunci centrul ei de greutate coincide cu planul medial al grinzii, deci

$$s = 0 \text{ şi } A_{ni} = 0, \tag{43}$$

de unde

$$T_y = 0 \text{ şi } F(x, y) = 0. \tag{44}$$

b. *Inima cu rigidizări transversale distanțate* ($a' > b$). Se va estima valoarea forțelor de lunecare T_y pentru rigidizarea a_i (fig. 6) şi starea de tensiune produsă de ele în inimă.

Modul de conducere al calculului este identic cu cel expus mai sus — în cazul rigidizărilor dese—cu singura deosebire că funcția de tensiune Airy are o formă mai simplă, conținînd numai două constante de integrare.

Avînd în vedere că valoarea tensiunilor σ_x, σ_y şi τ_{xy} scade foarte repede cu depărtarea de la rigidizare (fig. 6 *b*) se poate considera că starea de tensiune produsă în inimă de forțele de lunecare T_y, în cazul panoului de inimă cu rigidizări distanțate, nu este cu mult diferită de starea de tensiune produsă de aceleaşi forțe T_y într-un panou de inimă infinit lung separat de rigidizarea a_i în două semiplane [12]. Deci în locul condițiilor marginale (24) trebuie impusă condiția

$$\sigma_x \Big|_{x \to \infty} = 0. \qquad (45$$

Deoarece

$$e^{+\infty} = \infty \text{ şi } e^{-\infty} = 0, \tag{46}$$

din relația (12) se observă că condiția de margine (45) nu poate fi satisfăcută decît dacă coeficienții puterilor pozitive ale numărului e sînt nuli, adică

$$B_n = D_n = 0. \tag{47}$$

În acest caz funcția de tensiunea Airy (5) devine

$$F(x, y) = \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n^2} [1 + \beta_n (x - a_i) C_n] e^{-\beta_n (x - a_i)} \sin \beta_n y, \tag{48}$$

iar componentele stării de tensiune

$$\sigma_x = - \sum_n A_{ni} [1 + \beta_n (x - a_i) C_n] e^{-\beta_n (x - a_i)} \sin \beta_n y, \tag{49}$$

$$\sigma_y = \sum_n A_{ni} [1 + \beta_n (x - a_i) C_n - 2C_n] e^{-\beta_n (x - a_i)} \sin \beta_n y, \tag{50}$$

$$\tau_{xy} = \sum_n A_{ni} [1 + \beta_n (x - a_i) C_n - C_n] e^{-\beta_n (x - a_i)} \cos \beta_n y. \tag{51}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_n se scrie condiția (20), adică deplasarea u în secțiunea a_i trebuie să fie nulă

$$u \Big|_{x = a_i} = \frac{1 + \mu}{E} \sum_n \frac{A_{ni}}{\beta_n} (1 + \delta C_n) \sin \beta_n y + K_1^i(y) + K_0^i = 0, \tag{52}$$

din care se deduce

$$C_n = - \frac{1}{\delta} = - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} = - \frac{13}{7}. \tag{53}$$

Constanta A_{ni} se determină din (41)

$$A_{ni} = -\frac{s}{2N_n} E\,\beta_n^2 \sum_m a_{mn} \sin\frac{m\pi}{p}\, i \tag{54}$$

unde

$$N_n = \left[\frac{1+\mu}{2} + \frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{t}{\beta_n S}\left(1 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\right] = \frac{1}{0{,}7}\left(1{,}76 + \frac{2t}{\beta_n S}\right). \tag{55}$$

6. ENERGIA POTENŢIALĂ TOTALĂ

S-a calculat starea de tensiune produsă de forţele de lunecare T_v în inima întărită cu rigidizări transversale unilaterale. Cunoscînd eforturile unitare normale care solicită porţiunea de inimă considerată — produse de sarcina exterioară —, prin metoda energetică se poate determina valoarea tensiunii critice de voalare.

Expresia variaţiei energiei potenţiale totale a inimii rigidizată, ca urmare a voalării, este alcătuită din următoarele componente:

a) Energia de deformare prin încovoierea panoului de inimă

$$(\Delta A_i)_{pl} = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2\,(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy \tag{56}$$

în care D reprezintă rigiditatea la încovoiere a unei fîşii de inimă cu lăţimea 1 cm.

Integrala termenului cu coeficient $2\,(1-\mu)$ al expresiei (56) este egală cu zero în cazul inimilor cu grosime constantă, articulate pe contur[1]).

Derivînd legea (2) şi înlocuind-o în (56) se obţine

$$(\Delta A_i)_{pl} = \frac{D}{2}\pi^4 \sum_m \sum_n a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \int_0^a\int_0^b \sin^2\frac{m\pi}{a}\, x\, \sin^2\frac{n\pi}{b}\, y\, dx\, dy. \tag{57}$$

Avînd în vedere că [2])

$$\int_0^a \sin^2\frac{m\pi}{a}\, x\, dx = \frac{a}{2}, \tag{58}$$

$$\int_0^b \sin^2\frac{n\pi}{b}\, y\, dy = \frac{b}{2}, \tag{59}$$

relaţia (57) devine

$$(\Delta A_i)_{pl} = \frac{b\pi^4}{8a^3} D \sum_m \sum_n a_{mn}^2 (m^2 + \alpha^2 n^2)^2. \tag{60}$$

---

[1]) [11], p. 276.

[2]) [15], partea I, p. 30 şi [13], p. 339.

b) Lucrul efectuat în timpul curbării – voalării – de forțele de compresiune $N_x = N_0 \left(1 - \frac{d}{b} y\right)$ care acționează asupra porțiunii de inimă considerată

$$(\Delta A_a)_{pl} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = \frac{N_0}{2} \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{d}{b} y\right)$$

$$\left(\sum_m \sum_n m\, a_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y\right)^2 dx\, dy. \qquad (61)$$

Deoarece[1])

$$\int_0^a \cos \frac{j\pi}{a} x \cos \frac{k\pi}{a} x\, dx = \frac{a}{2} \qquad \text{dacă } j = k, \qquad (62)$$

$$\int_0^a \cos \frac{j\pi}{a} x \cos \frac{k\pi}{a} x\, dx = 0 \qquad \text{dacă } j \neq k, \qquad (63)$$

$$\int_0^b y \sin \frac{j\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b} y\, dy = \frac{b^2}{4} \qquad \text{dacă } j = k, \qquad (64)$$

$$\int_0^b y \sin \frac{j\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b} y\, dy = 0 \quad \text{dacă } j \neq k \quad \text{și} \quad j \pm k = \text{par}, \qquad (65)$$

și

$$\int_0^b y \sin \frac{j\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b} y\, dy = -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{jk}{(j^2 - k^2)^2} \text{dacă } j \neq k \text{ și } j \pm k = \text{impar}, \qquad (66)$$

relația (61) devine

$$(\Delta A_a)_{pl} = \frac{N_0}{8} \frac{\pi^2}{\alpha} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 m^2 - \frac{N_0}{4} \frac{d\pi^2}{\alpha} \sum_m m^2 \left[\frac{1}{4} \sum_n a_{mn}^2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_n \sum_k \frac{nk a_{mn} a_{mk}}{(n^2 - k^2)^2}\right], \qquad (67)$$

unde se acceptă pentru K orice număr întreg astfel încît $n + k$ să fie impar.

c) Energia de deformare prin încovoierea unei singure rigidizări, se scrie sub forma

$$(\Delta A_i)_{r=a_i}^{w} = \frac{EI_r}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dy = \frac{EI_r}{2} \frac{\pi^4}{b^4} \int_0^b \left(\sum_m \sum_n n^2 a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \sin \frac{n\pi}{b} y\right)^2 dy, \qquad (68)$$

deoarece

$$\int_0^b \sin \frac{j\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b} y\, dy = 0 \qquad \text{dacă } j \neq k, \qquad (69)$$

se obține din (69)

$$(\Delta A_i)_{r=a_i}^{w} = \frac{\pi^4 EI_r}{4b^3} \sum_n n^4 \left(\sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i\right)^2. \qquad (70)$$

---

[1]) [15], partea I, p. 30 și [13], p. 339.

Energia de deformare totală acumulată prin încovoierea celor $(p-1)$ rigidizări transversale, unilaterale, care întăresc porţiunea de inimă considerată, este

$$(\Delta A_i)_r^w = \frac{\pi^4 E I_r}{4b^3} \sum_n n^4 \sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \right)^2 . \qquad (71)$$

d) Energia de deformare înmagazinată de cele $(p-1)$ rigidizări prin scurtare sub acţiunea sarcinilor axiale Y, este

$$(\Delta A_i)_r^y = \sum_{i=1}^{p-1} \int_0^b \frac{Y^2}{2ES} dy = \frac{\pi s^2 t^2}{4bS} E \sum_n \frac{1}{N_n^2} n^2 (1 - B_n - C_n - D_n)^2$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \right)^2 . \qquad (72)$$

e) Energia de deformare acumulată în inimă prin starea de tensiune produsă de forţele de lunecare T_y — corespunzătoare rigidizării a_i — este egală cu¹)

$$(\Delta A_i)_{pl}^{r=a_i} = \frac{t}{2} \int_{a_i - \frac{a}{2p}}^{a_i + \frac{a}{2p}} \int_0^b (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \, dx \, dy . \qquad (73)$$

Deoarece starea de tensiune produsă de forţele de lunecare T_y este simetrică faţă de axa rigidizării a_i şi ţinînd seama de relaţiile (8) şi (9) se poate scrie

$$(\Delta A_i)_{pl}^{r=a_i} = \frac{t}{E} \int_{a_i}^{a_i + \frac{a}{2p}} \int_0^b (\sigma_x + \sigma_y)^2 \, dx \, dy + \frac{t}{G} \int_{a_i}^{a_i + \frac{a}{2p}} \int_0^b (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y) \, dx \, dy . \qquad (74)$$

Energia totală de deformare corespunzătoare stării de tensiune produsă de forţele T_y de-a lungul celor $(p-1)$ rigidizări, este

$$(\Delta A_i)_{pl}^r = \frac{t}{E} \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{a_i + \frac{a}{2p}} \int_0^b (\sigma_x + \sigma_y)^2 \, dx \, dy +$$

$$+ \frac{t}{G} \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{a_i + \frac{a}{2p}} \int_0^b (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y) \, dx \, dy . \qquad (75)$$

Din (12) şi (13) se deduce :

$$(\sigma_x + \sigma_y) = - \sum_n \frac{s}{N_n} E \beta_n^2 \sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \left[D_n e^{+\beta_n (x - a_i)} - C_n e^{-\beta_n (x - a_i)} \right] \sin \beta_n y . \qquad (76)$$

---

¹) [14], p. 269.

Ținînd seama de (59) și (62) prima integrală dublă a expresiei (75) se scrie

$$\frac{t}{E}\sum_{i=1}^{p-1}\int_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}}\frac{b}{2}\sum_n\frac{s^2E^2}{N_n^2}\beta_n^4\left(\sum_m a_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}i\right)^2\left[D_n^2\,e^{+2\beta_n(x-a_i)}+\right.$$

$$\left.+\,C_n^2\,e^{-2\beta_n(x-a_i)}-2C_nD_n\right]dx=$$

$$=\frac{\pi^4s^2t}{2b^3}E\sum_n\frac{n^4}{N_n^2}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}i\right)^2$$

$$\frac{1}{2\beta_n}\left|D_n^2\,e^{+2\beta_n(x-a_i)}-4\beta_n(x-a_i)\,C_nD_n\right|_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}}=$$

$$=\frac{\pi^3s^2t}{4b^2}E\sum_n\frac{n^3}{N_n^2}\left[D_n^2\left(e^{2\alpha_n}-1\right)-C_n^2\left(e^{-2\alpha_n}-1\right)-4\alpha_nC_nD_n\right]\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}i\right)^2. \tag{77}$$

Din (12), (13) și (14) ținînd seama de (59), (62), (63) și (69) și făcînd înlocuirile

$$1+\beta_n(x-a_i)\,C_n-C_n=P, \tag{78}$$

$$B_n+\beta_n(x-a_i)\,D_n+D_n=R, \tag{79}$$

se deduce

$$\int_0^b\left(\tau_{xy}^2-\sigma_x\sigma_y\right)dy=\int_0^b\sum_n A_{ni}^2\left[Pe^{-\beta_n(x-a_i)}-Re^{+\beta_n(x-a_i)}\right]^2\cos^2\beta_n y\,dy+$$

$$+\int_0^b\sum_n A_{ni}^2\left[(P+C_n)\,e^{-\beta_n(x-a_i)}+(R-D_n)\,e^{+\beta_n(x-a_i)}\right]\left[(P-C_n)\,e^{-\beta_n(x-a_i)}+\right.$$

$$\left.+\,(R+D_n)^{+\beta_n(x-a_i)}\right]\sin^2\beta_n y\,dy=\frac{b}{2}\sum_n A_{ni}^2\left[(2P^2-C_n^2)\,e^{-2\beta_n(x-a_i)}+\right.$$

$$\left.+\,(2R^2-D_n^2)\,e^{+2\beta_n(x-a_i)}+C_nD_n\right], \tag{80}$$

iar a doua integrală dublă a expresiei (75) se scrie

$$\frac{t}{G}\sum_{i=1}^{p-1}\int_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}}\frac{b}{2}\sum_n\frac{s^2}{4N_n^2}E^2\beta_n^4\left(\sum_m a_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}i\right)^2\left[(2P^2-C_n^2)\,e^{-2\beta_n(x-a_i)}+\right.$$

$$\left.+\,(2R^2-D_n^2)\,e^{+2\beta_n(x-a_i)}+2C_nD_n\right]dy. \tag{81}$$

Deoarece P și R sînt funcții liniare de x, pentru a efectua integrarea (81) se ține seama de relația

$$\int p^2(x)\,e^{2cx}\,dx=\frac{e^{2cx}}{2c}\left[p^2(x)-\frac{p(x)\,p'(x)}{c}+\frac{[p'(x)]^2}{2c^2}\right] \tag{82}$$

şi se obţine

$$\frac{\pi^4 s^2 t}{8b^3}\frac{E^2}{G}\sum_n \frac{n^4}{N_n^2}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\ \sin\ \frac{m\pi}{p}\,i\right)^2\frac{1}{\beta_n}\Big|(R^2 - RD_n)\,e^{+2\beta_n(x-a_i)} -$$

$$-(P^2 + PC_n)\,e^{-2\beta_n(x-a_i)} + 4\beta_n\,(x - a_i)\,C_n D_n\Big|_{a_i}^{a_i+\frac{a}{2p}} =$$

$$= \frac{\pi^3 s^2 t}{8b^2}\frac{E^2}{G}\sum_n \frac{n^3}{N_n^2}\big[(B_n + \alpha_n D_n + D_n)\,(B_n + \alpha_n D_n)\,e^{+2\alpha_n} -$$

$$-(1 + \alpha_n C_n - C_n)\,(1 + \alpha_n C_n)\,e^{-2\alpha_n} + 4\alpha_n C_n D_n - (B_n + D_n)\,B_n +$$

$$+ (1 - C_n)\big]\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\ \sin\ \frac{m\pi}{p}\,i\right)^2. \tag{83}$$

Expresia energiei totale de deformare corespunzătoare stării de tensiune produsă în inimă de forţele T_y (77) are forma

$$(\Delta A_i)_{pl}^r = \frac{\pi^3 s^2 t}{4b^2}\,E\sum_n \frac{n^3}{N_n^2}\big\{\big[D_n^2(e^{+2\alpha_n} - 1) + C_n^2(1 - e^{-2\alpha_n}) - 4\alpha_n C_n D_n\big] +$$

$$+ (1 + \mu)\big[(B_n + \alpha_n D_n + D_n)\,(B_n + \alpha_n D_n)\,e^{+2\alpha_n} - (1 + \alpha_n C_n - C_n)$$

$$(1 + \alpha_n C_n)\,e^{-2\alpha_n} + 4\alpha_n C_n D_n - (B_n + D_n)\,B_n + (1 - C_n)\big]\big\}$$

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\ \sin\ \frac{m\pi}{p}\,i\right)^2. \tag{84}$$

În cazul inimilor întărite prin rigidizări transversale distanţate ($\alpha' > p$), deoarece valoarea tensiunilor σ_x, σ_y şi τ_{xy} scade foarte repede cu depărtarea de la rigidizarea a_i, se poate presupune că în afara secţiunilor $x = a_i \pm \frac{a}{2p}$ (considerînd numai rigidizarea a_i) aceste tensiuni sînt foarte mici — chiar neglijabile de mici cînd lungimea panoului este mare — şi de aceea nu se produce o mare eroare dacă se prelungeşte limita superioară a integralelor în raport cu x, din ecuaţia (77) de la

$$x = a_i + \frac{a}{2p} \qquad \text{la} \quad x \to \infty. \tag{85}$$

Ţinînd seama că în cazul rigidizărilor transversale distanţate valorile constantelor de integrare B_n, C_n şi D_n sînt date de relaţiile (47) şi (53) expresia energiei totale de deformare (75) corespunzătoare stării de tensiune produsă în inimă de forţele T_y, de-a lungul celor (p—1) rigidizări, se scrie

$$(\Delta A_i)_{pl}^r = \frac{\pi^3 s^2 t}{4b^2}\,E\sum_n \frac{n^3}{N_n^2}\big[C_n^2 + (1 + \mu)\,(1 - C_n)\big]\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\ \sin\ \frac{m\pi}{p}\,i\right)^2 =$$

$$= \frac{(1 + \mu)\,(3 - \mu)}{(1 - \mu)^2}\,\frac{\pi^3 s^2 t}{4b^2}\,E\sum_n \frac{n^3}{N_n^2}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_m a_{mn}\ \sin\ \frac{m\pi}{p}\,i\right)^2. \tag{86}$$

7. STABILIREA ECUAŢIEI ENERGETICE

Ţinînd seama de relaţiile (60), (67), (71), (72) şi (84) variaţia energiei potenţiale totale a plăcii ca urmare a voalării se scrie sub forma

$$\Delta\Pi = \Delta A_i - \Delta A_a = (\Delta A_i)_{pl} - (\Delta A_a)_{pl} + (\Delta A_i)_r^w + (\Delta A_i)_r^v + (\Delta A_i)_{pl}^r =$$

$$= \frac{b\pi^4}{8a^3} D \sum_m \sum_n a_{mn}^2 (m^2 + \alpha^2 n^2)^2 - \frac{\pi^2 t\, \sigma_{cr}}{8\alpha}\left(1 - \frac{d}{2}\right) \sum_m \sum_n m^2 a_{mn}^2 -$$

$$- \frac{2\,dt}{\alpha} \sigma_{cr} \sum_m \sum_n \sum_k m^2 \frac{nk\, a_{mn}\, a_{mk}}{(n^2 - k^2)^2} + \frac{\pi^4 EI_r}{4b^3} \sum_n n^4 \sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_m a_{nn} \sin \frac{m\pi}{p} i \right)^2 +$$

$$+ \frac{\pi^2 s^2 t^2}{4bS} E \sum_n \frac{n^2}{N_n^2} (1 - B_n - C_n - D_n)^2 \sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \right)^2 +$$

$$+ \frac{\pi^3 s^2 t}{4b^2} E \sum_n \frac{n^3}{N_n^2} Q_n \sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi}{p} i \right)^2, \tag{87}$$

în care s-a notat cu

$$Q_n = \left[D_n^2 (\alpha^{+2\alpha_n} - 1) + C_n^2 (1 - e^{-2\alpha_n}) + 4\mu\, \alpha_n C_n D_n\right] + (1 + \mu)$$
$$\left\{\left[B_n + (\alpha_n + 1) D_n\right](B_n + \alpha_n D_n)\, e^{+2\alpha_n} - \left[1 + (\alpha_n - 1)\, C_n\right]\right.$$
$$\left.(1 + \alpha_n C_n)\, e^{-2\alpha_n} - (B_n + D_n)\, B_n + (1 - C_n)\right\}. \tag{88}$$

În cazul inimilor întărite prin rigidizări transversale distanţate $(\alpha' > p)$, din (86) se deduce valoarea expresiei Q_n

$$Q_n = \frac{(1 + \mu)(3 - \mu)}{(1 - \mu)^2}. \tag{89}$$

În formula (87) pentru K se acceptă orice număr întreg astfel încît $(n + K)$ să fie un număr impar.

Anulînd derivatele energiei potenţiale în raport cu fiecare din constantele a_{mn}, se obţine un sistem de ecuaţii liniare şi omogene. Ecuaţia generală de ordin mn a acestui sistem, este

$$\frac{\pi^2 b}{4a^3} D\, a_{mn}\, (m^2 + \alpha^2 n^2)^2 - \frac{t\, \sigma_{cr}}{4\alpha}\left(1 - \frac{d}{2}\right) m^2\, a_{mn} - \frac{2dt}{\alpha\pi^2} \sigma_{cr}\, m^2 \sum_k \frac{nk\, a_{mk}}{(n^2 - k^2)^2} +$$

$$+ 2\left[\frac{\pi^2 I_r}{4b^3} n^4 E + \frac{s^2 t^2}{4bS} E \frac{n^2}{N_n^2} (1 - B_n - C_n - D_n)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi s^2 t}{4b^2} E \frac{n^3}{N_n^2} Q_n \right] \sum_{i=1}^{p-1} \sin \frac{m\pi}{p} i \left(\sum_r a_{rn} \sin \frac{r\pi}{p} i \right) = 0. \tag{90}$$

Pentru ca acest sistem de ecuaţii să admită o soluţie diferită de zero pentru constantele a_{mn} şi deci pentru legea (2) — care exprimă ecuaţia fibrei medii deformate a plăcii voalate, rigidizată unilateral, — trebuie ca determinantul Δ al coeficienţilor constantelor a_{mn} să fie nul. Soluţia minimă pozitivă a ecuaţiei obţinută prin anularea acestui determinant reprezintă valoarea tensiunii critice de voalare a inimii solicitată în planul ei median şi întărită prin $(p-1)$ rigidizări transversale unilaterale.

8. RIGIDIZĂRI UNILATERALE DISPUSE ALTERNATIV, DE O PARTE ŞI DE ALTA A INIMII

S-a indicat modul de calcul al sarcinii critice de voalare în cazul panoului de inimă întărit cu rigidizări transversale, dispuse pe aceeaşi faţă a inimii (fig. 2 *a*).

În cazul panoului de inimă întărit cu rigidizări transversale dispuse alternativ pe ambele feţe (fig. 2), modul de calcul şi valoarea absolută a expresiilor A_{ni}, B_n, C_n şi D_n sînt aceleaşi ca în cazul panoului întărit cu rigidizări dispuse pe o singură faţă a inimii, cînd dimensiunile, condiţiile de margine şi solicitarea panoului sînt identice. Diferă numai semnul lui A_{ni} şi deci semnul componentelor stării de tensiune σ_x, σ_y, τ_{xy} şi a rezultantei Y, în expresia cărora intră A_{ni} ca factor.

Semnul expresiei A_{ni} depinde de modul presupus de încovoiere al rigidizării în timpul voalării. În cazul rigidizărilor unilaterale dispuse pe o singură faţă a inimii, toate rigidizările au fibrele vecine liniei de contact întinse sau comprimate, după cum se consideră sensul de încovoiere al plăcii în timpul voalării ; în timp ce în cazul rigidizărilor unilaterale dispuse alternativ, dacă o rigidizare are fibrele vecine liniei de contact întinse, la rigidizarea următoare vor fi comprimate. În consecinţă, în timp ce în primul caz atît expresia A_{ni} cît şi componentele stării de tensiune σ_x, σ_y, τ_{xy} sau rezultanta Y au acelaşi semn pentru toate rigidizările, în al doilea caz semnul lor se schimbă de la o rigidizare la alta.

Din expresia variaţiei energiei potenţiale totale a plăcii, ca urmare a voalării (87) numai relaţiile (71), (72), şi (84) depind de valoarea componentelor stării de tensiune σ_x, σ_y, τ_{xy} şi a rezultantei Y.

Deoarece în aceste relaţii sînt cuprinse patratele componentelor σ_x, σ_y, τ_{xy} şi a rezultantei Y, valoarea expresiei (87) şi prin urmare sistemul de ecuaţii energetic (90) nu sînt influenţate de faptul că în cazul panourilor cu rigidizări dispuse alternativ pe ambele feţe, componentele σ_x, σ_y, τ_{xy} şi rezultanta Y îşi schimbă semnul de la o rigidizare la alta.

Prin urmare, indiferent cum sînt dispuse rigidizările unilaterale — pe o singură parte a inimii sau alternativ de o parte şi de alta a inimii — pentru anumite dimensiuni, solicitări şi condiţii de margine ale unui panou de inimă se obţine aceeaşi valoare pentru sarcina critică de voalare.

Primită la redacţie la 4 decembrie 1958.

СПЛОШНЫЕ БАЛКИ С ОДНОСТОРОННИМ УКРЕПЛЕНИЕМ

РЕЗЮМЕ

Преимущества технического, эстетического и экономического порядка, представляемые односторонним по сравнению с укреплением с обеих сторон стенки, привели к необходимости теоретического и экспериментального исследования местной устойчивости стенки металлической балки с поперечным односторонним подкреплением, подверженной напряжению эксцентрического сжатия или напряжению изгиба.

Определяется напряженное состояние стенки и эксцентрическая сжимающая сила, появляющаяся в одностороннем подкреплении; эти напряжения возникают в результате того, что жесткая связь между подкреплением и стенкой во время изгиба балки препятствует неодинаковому удлинению соседних крайних волокон стенки и соприкасающегося с ней подкрепления.

Вследствие того, что напряжения σ_x и τ_{xy} очень быстро убывают с удалением от подкрепления, для упрощения расчета делается допущение, что на середине расстояния между двумя последовательными подкреплениями стенки балки эти напряжения равняются нулю.

При известных нормальных напряжениях и дополнительного напряженного состояния, возникающего в стенке балки, для определения значения критического напряжения выпучивания, применяется энергетический метод.

Критическое напряжение представлено наименьшим положительным решением уравнения, получаемым путем приравнивая нулю определител коэффициентов a_{mn} системы уравнений, полученной в результате дифференцирования выражения общей потенциальной энергии по каждой константе.

POUTRES À ÂME PLEINE RAIDIES UNILATÉRALEMENT

RÉSUMÉ

Les avantages d'ordre technique, esthétique et économique que présentent les raidisseurs unilatéraux par comparaison avec ceux placés sur les deux faces de l'âme, ont rendu nécessaire l'étude théorique et expérimentale de la stabilité locale des âmes des poutres métalliques, raidies, transversalement et unilatéralement, soumises aux efforts unitaires de compression excentriques ou de flexion.

On a déterminé l'état de tension de l'âme et la force de compression excentrique du raidisseur unilatéral qui apparaît par suite du fait que par la liaison rigide entre le raidisseur et l'âme on empêche, pendant le voile-

ment, l'allongement différent des fibres marginales de l'âme et du raidisseur, voisins de la ligne du contact. Pour simplifier le calcul, et comme les tensions σ_x et τ_{xy} diminuent très vite avec l'éloignement du raidisseur, on a supposé qu'au milieu de la distance entre deux raidisseurs consécutifs des âmes des poutres, ces tensions sont nulles.

En connaissant les efforts unitaires normaux et l'état de tension supplémentaire produite dans l'âme des poutres, on a employé, pour la détermination des valeurs de la tension critique de voilement, la méthode énergétique.

La tension critique est représentée par la plus petite solution positive de l'équation qui s'obtient en annulant le déterminant des coefficients a_{mn} du système des équations, déduit en dérivant l'expression de l'énergie potentielle totale par rapport avec chacune des constantes a_{mn}.

BIBLIOGRAFIE

1. F. SCHLEICHER, *Einfluss der Stabilität der Stegbleche auf die Gestaltung vollwandiger Balkenbrücken.* Public. prelim. Congres II AIPC-Berlin, oct. 1936, 1391.
2. CH. MASSONNET, *Recherches sur le dimensionnement et le raidissage rationnels de l'âme des poutres à âme pleine, en tenant compte du danger de voilement.* Ann ITBTP, **VI**, 1061 (1953).
3. M. RADOJKOVIC, *Le soudage dans la construction du nouveau pont-route sur la Sava à Belgrad.* Ann. ITBTP, *117*, sept., 865 (1957).
4. E. CHWALLA, A. NOVAK, *Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife.* Stahlbau, **10**, 73, 92 (1937).
5. F. SCHLEICHER, R. BARBRÉ, *Stabilität versteifter Rechteckplatten mit anfänglicher Ausbiegung.* Der Bauingenieur, **18**, 665 (1937).
6. H. SIEVERS, E. BORNSCHEUER, *Über die Beulstabilität durchlaufender Platten mit drehsteifen Längssteifen.* Stahlbau, **22**, 149 (1953).
7. E. BORNSCHEUER, *Beitrag zur Berechnung ebener, gleichmässig gedrückter Rechteckplatten versteift durch eine Längssteife.* Disertație, Darmstadt, 1943—1946.
8. CH. MASSONNET, *Essais de voilement sur poutres à âme raidie.* Acier-Stahl-Steel, 1955.
9. G. ERLEMANN, *Knickerscheinungen bei verschiedenartig versteiften Platten.* Jahrbuch Schiffsbautechnik Gesellschaft, **34**, 514, 1933.
10. W. METZER, *Luftfahrtforschung.* **4**, 1 (1929).
11. K. GIRKMAN, *Flächentragwerke.* Springer, Wien, 1948.
12. E. CHWALLA, *Die Formeln zur Berechnung der vollmittragenden Breite dünner Gurt- und Rippenplatten.* Der Stahlbau, **9**, 73 (1936).
13. S. TIMOSHENKO, *Théorie de la stabilité élastique.* Béranger, Paris, 1947.
14. A. NADAI, *Die elastischen Platten.* Springer, Berlin, 1925.
15. * * * *Manualul inginerului constructor.* Ed. tehnică, **I**, București.

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

ASPECTE PRIVIND EFICACITATEA METODELOR DE MĂSURĂ RADIOACTIVE ȘI CU SEMICONDUCTORI, FUNCȚIE DE TRADUCTOARE ȘI DOMENIUL CERCETĂRII

DE

D. PAVELESCU

Evoluția rapidă a științei și tehnicii din ultima perioadă a făcut să apară cu totul justificată părerea unor oameni de știință, expusă cu mai mulți ani în urmă (ex. acad. prof. A. F. Ioffe — U.R.S.S.), că de la cele două domenii ale fizicii moderne : nucleul atomic și semiconductori, se așteaptă cele mai mari salturi [10].

Înainte de 1955, în domeniul utilizării izotopilor radioactivi, deși se lucrase deja în cîteva țări, cercetările și aplicațiile științifice erau totuși rare, limitîndu-se în special la anumite măsurători, cel mult calitative, pe baza principiilor clasice cunoscute [6].

În perioada ce s-a scurs între cele două conferințe internaționale, ce au avut loc la Geneva pentru utilizarea energiei atomice în scopuri pașnice (1955 și 1958), și de asemenea pînă în prezent, cercetările și rezultatele au marcat o creștere continuă.

În ceea ce privește aplicarea semiconductorilor, evoluția este oarecum asemănătoare, ambele domenii începînd să se dezvolte în general după 1948 ; progrese mai importante în utilizarea materialelor cu proprietăți semiconductoare s-au marcat mai ales în ultimii ani, pe măsură ce știința a descoperit materiale noi, reușind totodată să îmbunătățească și caracteristicile acestora.

În lucrarea de față încercăm să prezentăm felul în care izotopii radioactivi și semiconductorii corespund utilizării, din punctul de vedere al măsurătorilor, în diferite domenii de cercetare.

Este cunoscut faptul, că cea mai mare parte a metodelor moderne de măsură se bazează pe traducerea mărimilor neelectrice și măsurarea lor ca mărimi electrice, între cele două mărimi existînd o dependență precisă. În condițiile impuse de domeniul în care se utilizează metoda de măsură, în afara caracteristicilor limitative ce privesc sistemul electronic propriu-zis, factorul esențial și de cele mai multe ori determinant, îl constituie *elementul traductor*. În această privință, în măsurătorile electronice sînt cunoscute deja o gamă întreagă de traductoare electrice (rezistive, capacitive, inductive, magnetostrictive, piezoelectrice etc.), cu care se pot măsura diferiți parametri neelectrici ca : eforturi, presiuni, deformații, deplasări, vibrații, temperaturi etc. [1].

De asemenea, traductoare sînt însă și celulele fotoelectrice cu gaz, camerile de ionizare și contoarele Geiger-Müller, ce pot fi considerate că fac parte din categoria traductoarelor

— rezistențe cu gaz — parametrul măsurat fiind radiația luminoasă respectiv cea nucleară, iar efectul de bază, ionizarea moleculelor de gaz [3].

Vom analiza în linii mari la ce rezultate s-a ajuns prin utilizarea acestor traductoare în cazul măsurătorilor radioactive, comparînd în anumite domenii eficacitatea obținută față de traductoarele cu semiconductori.

În măsurători radioactive, o serie de factori limitează posibilitățile elementului traductor și totodată eficacitatea metodei : considerăm că acești factori sînt :

— condițiile impuse de domeniul respectiv ;

— condițiile impuse de natura elementului radioactiv, din care în special menționăm natura radiației și perioada de semidisociere ;

— natura statistică a dezintegrării nucleului ;

— caracteristicile traductorilor : camere de ionizare, contori Geiger-Müller și contori cu scintilație [6].

În general, după părerea noastră, s-ar putea spune, fără a greși prea mult, că posibilitățile de utilizare cu succes a metodelor radioactive, sînt în funcție de densitatea și omogenitatea mediului în care se efectuează măsurătoarea, rezultate optime fiind obținute pentru cazul mediilor solide omogene, dificultăți și rezultate neegale apărînd în cazul lichidelor, și mari dificultăți, rezultate nereproductibile etc., avînd loc în cazul mediilor gazoase. La acestea din urmă, dificultățile sînt amplificate și prin creșterea excesivă a periculozității. Constatarea ce o facem, se menține valabilă cu toate că în ultimii ani, prin introducerea contoarelor de scintilație, s-au perfecționat traductoarele cunoscute sporindu-se sensibilitatea prin creșterea eficacității contoarelor (timpul mort) de la 10^{-4} la 10^{-7} s.

În lucrarea [6] scrisă în 1955, într-un moment în care aplicațiile energiei nucleare în tehnică erau — după cum s-a arătat — în faza de început, și cînd metodele de măsură se limitau doar la aplicarea principiilor generale deja cunoscute în cîteva domenii, cu rezultate globale, s-a căutat să se analizeze perspectiva utilizării și introducerii metodelor radioactive în măsurătorile și cercetările mecanicii aplicate, aceste metode fiind mai sensibile și mai economice decît cele clasice cunoscute.

Cercetările efectuate în ultimii ani, într-un număr din ce în ce mai mare de instituții în diferite țări, printre care și țara noastră, au ajutat la concretizarea posibilităților reale folosirii radiațiilor, la stabilirea domeniilor în care se pot obține rezultate concludente și utile.

Astfel, spre exemplu, s-au obținut rezultate bune, perfecționîndu-se metodele privind studiul cu raze X sau γ a defectelor pieselor metalice și organelor de mașini. Măsurarea grosimilor, a straturilor subțiri și controlul suprafețelor, de asemenea a condus la noi metode cu bune rezultate, cum ar fi mai ales utilizarea difuziei, metodele cu scintilatori în 2π sau 4π [2], [9].

Un domeniu în care, de asemenea, s-au făcut progrese și s-au obținut rezultate concludente și perfect reproductibile, este domeniul frecării și uzurii, utilizîndu-se metode combinate radiografice și cu contori, pentru măsurarea activității produselor uzurii unor piese în prealabil iradiate [2]. De asemenea, și în ceea ce privește studiul uzurii sculelor așchietoare, s-au putut urmări ceilalți parametri ai așchierii, funcție de durata de serviciu a sculei, ce depinde de uzura tăișului ei [7].

În mecanica construcțiilor, geotehnică și în general acolo unde, deși mediul este solid, omogenitatea materialului nu este asigurată, metodele radioactive au condus la rezultate indicative — globale ; în orice caz în aceste situații metodele nedestructive radioactive, sînt totuși indicate fiind economice, ele putînd fi comparate, în anumite cazuri, doar cu metodele cu ultrasunet. Nu s-au putut obține încă rezultate concludente privind deplasările structurale în materiale omogene, în studiile de elasticitate și plasticitate. În schimb, în mai multe domenii din metalurgie și în general în chimie, metodele radioactive sînt suverane prin sensibilitatea și posibilitatea lor de selecţie, ce poate merge pînă la marcarea moleculei şi chiar a atomului [2].

În domeniul fluidelor lichide, cum ar fi de exemplu în lubrificaţie, metodele radioactive au întîmpinat dificultăţi, excepţie făcînd cazul în care se studiază proprietăţile de ungere a uleiurilor şi aditivilor, numai prin prisma uzurii suprafeţelor respective. S-au obţinut în schimb rezultate mai bune, în cazul studierii acţiunii chimice a lubrifianţilor şi combustibililor asupra suprafeţelor metalice. Cercetările privind straturile lubrifiante închise între suprafeţe metalice, sau cele privind regimurile de onctuozitate, semihidrodinamic etc., au fost limitate fiind necesară găsirea unor metode speciale [8] ce urmează a fi continuate.

În acest domeniu metodele radioactive obişnuite, bazate pe determinarea grosimilor prin interacţiunea cu materia şi atenuarea radiaţiilor, sau pe difuzie, s-au lovit în primul rînd de densitatea redusă a lubrifiantului în raport cu cea a suprafeţelor în frecare, eroarea de măsură produsă în special din cauza fluctuaţiilor statistice ale dezintegrărilor, fiind ca ordin de mărime asemănătoare dimensiunii ce trebuie studiată [8].

În hidrotehnică cercetările şi aplicaţiile au fost dirijate în special spre determinări calitative de debite, nivele, raporturi de densităţi în conductele de scurgere, deplasări de aluviuni etc. Scurgerile lichidelor de diferite vîscozităţi prin medii poroase (materiale de construcţii, bitumuri, soluri diferite etc.), au constituit un domeniu cu bune rezultate, deoarece în acest caz cercetătorii respectivi, au fost satisfăcuţi nu numai cu obţinerea unor rezultate calitative, pe care alte metode nu puteau nici măcar să le egaleze [2].

Un domeniu deosebit de important în care progresele ştiinţei şi tehnicii sînt la fel de rapide ca şi în cele două domenii ale fizicii moderne menţionate mai sus (izotopii radioactivi şi semiconductorii), este aeromecanica. Desigur că şi în acest caz s-a căutat să se uşureze progresul cercetărilor prin metodele cele mai moderne de măsură. Metodele radioactive au dat însă satisfacţie numai în ceea ce priveşte partea organologică a maşinilor aeriene ; în schimb utilizarea metodelor de măsură radioactive la probleme ce privesc scurgerea gazelor, repartiţiile de viteze, presiuni etc., ce se pun curent în tunelele aerodinamice experimentale, nu au dat decît rezultate în general globale şi indicative.

În acest domeniu considerăm că mediul cu mare fluiditate a constituit primul inconvenient ; al doilea incovenient — dar nu de principiu — provine din partea măsurilor de protecţie ce trebuie luate mai ales cînd se lucrează cu surse deschise şi trasori (în tunele aerodinamice), situaţie care indică cercetări de acest fel numai în machete mici ermetic închise.

Considerăm că în această privinţă sînt concludente rezultatele unor studii ce s-au făcut deja. Astfel la Institutul de automatică şi telemecanică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. s-au efectuat cercetări îndelungi pentru găsirea unei metode privind măsurarea unor debite şi viteze în scurgerea unui curent de gaz într-un tub. Se recurge, desigur, la posibilitatea ionizării gazului prin iradierea locală exterioară cu surse β — active de mare energie (stronţiu 90 sau rubidiu 86). Astfel metoda se bazează pe obţinerea unui nor de ioni în gaz, ce permite determinarea vitezei, prin înregistrarea diferenţei de timp între două poziţii în tub a acestui nor de ioni. Pe baza acestei metode (în Institutul de cercetări pentru construcţii de aparate termoenergetice — U.R.S.S.), s-a ajuns la stabilirea unui debit şi la realizarea unui aparat de laborator de consum de gaze ale cărui scări de sensibilitate sînt cuprinse între 1—3 m^3/oră pentru debite, şi între 0,5—1,5 m/s, pentru viteze [11].

Fiind necesare numai valori medii, pe care alte metode nu le pot oferi, s-au obţinut rezultate satisfăcătoare în siderurgie, în ceea ce priveşte studiul scurgerii, printr-un furnal — a unui curent de aer (injectat cu rafale de radon), urmărindu-se existenţa *pungilor* (discontinuităţi) în mersul aerului în cuptor ; de asemenea s-a stabilit viteza gazelor în diferite regiuni ale furnalului [2].

În concluzie, dacă este vorba de măsurători riguroase, metodele radioactive și traductoarele respective rămîn deci în acest domeniu în urma metodelor clasice, ce folosesc termoanemometre și tuburi Pitot.

În schimb însă, după cum se va vedea semiconductorii sînt mai eficace decît izotopii radioactivi în acest domeniu al mecanicii fluidelor, excepție făcînd doar funcția de *trasor*.

După cum s-a amintit, în ultimii ani s-au făcut progrese remarcabile privind semiconductorii, ce interesează diferite domenii ale tehnicii : realizarea bateriilor solare (în special pentru sateliți și rachete cosmice), utilizarea efectului Peltier invers, în tehnica frigorifică, aplicațiile tranzistoriilor în radiotehnică sau automatică etc.

Ne vom opri numai la aspectul ce privește : măsurarea mărimilor neelectrice cu traductoarele semiconductoare.

Datorită unor anumite caracteristici remarcabile, semiconductorii formează un subiect de cercetare și aplicare deosebit de important în metodica și tehnica măsurătorilor, mai ales în cazul în care se constată că metodele radioactive nu pot acoperi cu succes toate domeniile cercetărilor ; aceasta cu atît mai mult cu cît traductoarele semiconductoare prezintă în multe cazuri sensibilități de sute de ori mai mari ca cele ale traductoarelor electrice cunoscute, și chiar a unor metode radioactive. Astfel dacă o marcă tensometrică rezistivă de constantan are sensibilitatea 2 (raportul dintre variația relativă a rezistenței și cea a lungimii), unele elemente semiconductoare ating sensibilitatea 200 [3].

Și în acest caz se constată că domeniile și posibilitățile de aplicare depind de unele condiții asemănătoare celor arătate în cazul metodelor radioactive :

— caracterul parametrului (mărimii neelectrice) de măsurat ;

— condițiile impuse de mediul respectiv, în special densitate, temperatură și umiditate ;

— caracteristicile și natura elementelor sau materialelor cu proprietăți semiconductoare.

Vom trece în revistă cîteva dintre traductoarele semiconductoare indicînd și posibilitățile acestora ; domeniul fiind relativ nou, vom da și unele amănunte utile.

a. *Traductoare semiconductoare rezistive.* Pentru măsurarea mișcării (deplasărilor), reostatele semiconductoare nu sînt recomandabile, fiind mai puțin stabile și rezistente decît traductoarele reostatice metalice. În schimb, după cum s-a exemplificat mai sus, semiconductorii tensometrici sînt mult mai sensibili decît *mărcile* tensometrice metalice, în cazul măsurării deformațiilor și eforturilor.

Pentru eforturi mecanice sau presiuni, sînt deja de mai mult timp cunoscute anumite traductoare semiconductoare : microfoanele cu praf sau granule de cărbune (pentru eforturi și vibrații), coloanele din pastile de cărbune și tensoliții — compoziții plastice ale carbonului. În ultimul timp însă au apărut ca traductoare tensometrice semiconductoare : cuproxizi, sulfuri, sau compuși ai seleniului [1], [3], [5].

La aceste categorii de traductoare semiconductoare, rezistența electrică variază în ultimă instanță cu eforturile respective. Semiconductorii tensometrici se pot deci folosi cu succes în locul traductoarelor electrice cunoscute, în cazul în care se pune problema măsurării eforturilor și deformațiilor — domeniu în care izotopii radioactivi nu sînt aplicabili.

b. *Traductoare semiconductoare termostabile.* În primul rînd semnalăm termorezistențele sau termistoarele, rezistențe semiconductoare cu un coeficient de temperatură negativ (circa 4% pe °C), care le deosebesc ca posibilități de manganin, constantan etc., ce nu au practic coeficient termic negativ [1], [5].

Faptul că anumiți semiconductori au deci și un pronunțat coeficient de temperatură negativ, este de mare importanță în măsurători. În această categorie se plasează termistoarele din oxid de cupru, bioxid de uraniu, sau compuși sulfuroși, azotoși sau carbonici ai metalelor. La aceste traductoare legea ce leagă rezistența de temperatură este exponențială ; variația pronunţată a conductibilităţii electrice cu temperatura este însă doar una din caracteristicile semiconductorilor. Precizăm că la termorezistenţe, interesează îndeosebi caracteristicile : rezistenţă-putere de intrare şi tensiune-intensitate, la diferite temperaturi (0—40°C), caracteristici care reflectă posibilităţile de utilizare [1].

În afară de măsurătorile privind intensitatea şi puterea, domeniul cel mai important la aceste termorezistenţe îl constituie însă măsurătorile termice ; măsurătorile de temperatură se fac montînd aceste elemente în punte Wheaststone, folosindu-le în circuite de temporizare etc. Pragul de sensibilitate al termistorului ajunge la 10^{-9} W ; se pot înregistra variaţii de temperatură de ordinul 10^{-5} °C.

Aplicaţia în măsurători a termorezistenţelor este vastă şi importantă. Traductorul respectiv montat în focarul unei oglinzi parabolice poate măsura de la distanţă încălzirea unei maşini evitînd spre exemplu — prin comandă automată — gripajul maşinii ; se măsoară de fapt energia radiantă.

O altă categorie de traductoare de mare sensibilitate pentru înregistrarea energiei radiante, sînt bolometrele ; cu acestea se pot măsura variaţii de temperatură pînă la 10^{-7} °C, tensiuni pînă la 10^{-10} V şi fluxuri de energie radiantă pînă la 10^{-10} W, cele mai sensibile fiind bolometrele cu semiconductori şi de asemenea cele cu supraconductori¹) [5].

Cu un bolometru cu semiconductori se poate măsura temperatura dintr-un cuptor de topire sau temperatura gazelor la ieşire sau din camera de ardere a unui reactor, mergîndu-se pînă la o precizie de suta mia parte dintr-un grad. În această privinţă s-au putut realiza adevărate recorduri cu bolometru cu semiconductori în ceea ce priveşte sensibilitatea, putîndu-se sezisa o radiaţie infraroşie reflectată pe lună.

Cu microelectrotermometre (cu diametrul testului între 50 μ pînă la 0,5 mm), se pot determina schimbări de temperatură ce au loc în cîteva zecimi sau sutimi de secundă, pe medii cu suprafaţă redusă.

Realizarea unor astfel de traductoare foarte sensibile şi de dimensiuni ce merg pînă la diametrul firului de păr, sînt deosebit de importante pentru perspectivele ce le deschid. Aceste elemente foarte sensibile la modificări de temperatură, permit măsurarea curenţilor de gaz (viteza) ; montîndu-se mai multe elemente se pot determina de asemenea şi repartiţia curenţilor înlocuindu-se astfel cu succes termoanemometrele, şi cu atît mai mult metodele radioactive care după cum s-a văzut sînt limitate de anumiţi factori.

În afară de termistoare, în măsurători sînt folosite de asemenea şi alte materiale semiconductoare (carbură de siliciu, sau cristale de siliciu şi germaniu) ce posedă un apreciabil coeficient de variaţie a rezistenţei cu intensitatea. La aceste elemente — varistoare — variaţia rezistenţei depinde doar indirect de temperatură [1].

c. *Traductoare semiconductoare fotosensibile.* Deşi principial sînt cunoscute de mai mult timp, fotorezistenţele s-au dezvoltat mai ales în ultima perioadă. La fel ca şi termistoarele, fotorezistenţele sînt sensibile şi la radiaţii infraroşii ; altele sînt sensibile însă la raze ultraviolete, raze X sau radiaţii γ. Sensibilitatea la radiaţii nucleare, indică posibilitatea utilizării lor ca detectoare şi dozimetre, cu atît mai mult cu cît actualele dozimetre individuale bazate pe ionizare, nu sînt în general sensibile şi nu indică în toate cazurile rezultate identice în condiţii similare.

O caracteristică interesantă a semiconductorilor fotosensibile, este aceea că nu prezintă o pierdere ireversibilă a sensibilităţii la iluminări intense, spre deosebire de celulele fotosensibile cunoscute care au durata de funcţionare limitată.

---

¹) Fenomenul de supraconductibilitate constă în faptul că la temperaturi apropiate de zero absolut, rezistenţa unor materiale scade pînă la cîteva zecimi de ohm, conductibilitatea crescînd brusc. Sensibilitatea bolometrului creşte foarte mult, coeficientul de temperatură a rezistenţei fiind în această situaţie foarte mare.

Față de celulele cu vid, fotorezistențele sînt mai inferioare numai în ceea ce privește viteza de lucru (inerția cca 10^{-4} s față de 10^{-9} s), în schimb sensibilitatea și celelalte caracteristici sînt mult mai favorabile[1].

În general, și pentru această categorie de traductoare aplicațiile sînt vaste, în special în automatizare. Încercăm să ilustrăm printr-un singur exemplu, posibilitățile mai mari decît cele ale izotopilor, într-un anumit domeniu. Astfel, sepre deosebire de metoda radioactivă, metoda cu semiconductori permite să se numere și să se selecționeze în același timp bilele de rulmenți rebutate (mate), selecția datorîndu-se faptului că ele nu prezintă strălucire.

Forma cea mai cunoscută a acestor traductoare, este fotorezistența cu seleniu ; la aceasta curentul ce traversează celula este practic proporțional cu rădăcina patrată a iluminării, fapt ce conduce la o mare sensibilitate [1], [3], [5].

În ultimul timp s-au construit însă fotorezistențe mult mai sensibile (cu sulfură, selenură, sau telurură de plumb, sulfură sau selenură de cadmiu, sulfură de taliu etc.) și cu caracteristici mai bune, pentru diferite spectre de frecvențe. Spre exemplu cu celule cu sulfură de plumb, se poate măsura pînă la o lungime de undă de 3 μ — în infraroșu ; se pot urmări variații slabe de temperatură a unei surse de aproximativ 100°C cu un timp de răspuns de aproximativ 0,1 milisecunde. O perfecționare a acestor traductori o constituie rezistențele fotoelectrice — amplificatori. Aceste fotodiode au fost realizate, intercalîndu-se și un strat de blocaj ; elementul semiconductor este format din sulfură de taliu, sulfură de argint, sulfură de zinc activată cu fier etc. În S.U.A. s-au realizat astfel de fotodiode de germaniu cu strat de blocare ; în U.R.S.S. s-a realizat o gamă întreagă de celule fotoelectrice dintre care unele ajung pînă la o sensibilitate de 8 000 microamperi pe lumen, deci de 15 ori mai sensibile ca celulele cu fier și seleniu [3], [4].

S-au realizat de asemenea noi perfecționări : fototriodele, care amplifică și mai mult semnalul luminos, datorită prezenței tranzistorului. La aceste elemente se observă o descreștere sensibilă a rezistenței electrice în momentul în care joncțiunea este luminată ; gama spectrală acoperă spectrul vizibil și infraroșu, iar cea de frecvență ajunge pînă la 200 kHz [1], [10].

În general, datorită gabaritelor reduse, a marii sensibilități etc. fotorezistențele sînt aplicate cu succes în o serie de măsurători și în automatizare. Astfel se poate înregistra nivelul de lichid, turația unei mașini, controla micile orificii, opacitatea mediilor etc. Spre exemplu prin măsura opacității ceții de combustibil sau de lubrifiant la un motor cu explozie, se poate regla experiența sau funcționarea în mod automat, în limitele parametrilor doriți. În aerodinamică la cercetările cu tubul de șoc, sau în dozimetrarea radiațiilor cu film fotosensibil, de asemenea se pot efectua măsurări precise a intensității opacității, fapt ce prezintă o deosebită importanță.

Este de remarcat aspectul că, în timp ce spre exemplu în cazul determinării nivelelor lichide, izotopii radioactivi sînt eficaci și la recipienții închiși, iar semiconductorii numai la recipienți deschiși, în cazul măsurătorilor menționate, ce privesc straturile fluide opace, numai semiconductorii sînt eficaci.

În concluzie, se constată că metodele radioactive, în afară de metodele electrice cunoscute, trebuie completate în anumite domenii cu metode ce au la bază ca traductoare semiconductorii. Sînt unele domenii de cercetare în care numai izotopii radioactivi — și traductoarele respective — sînt eficace : uzura, determinarea grosimii metalice etc. ; în alte domenii cum ar fi spre exemplu mediile gazoase, unde izotopii nu dau rezultate concludente decît doar ca simpli trasori, semiconductorii sînt mai sensibili chiar decît alți traductori electrici cunoscuți. De asemenea, după cum a rezultat sînt şi măsurători în care folosirea semiconductorilor este exclusivă (măsurători la distanţe cu captori termo- şi foto-sensibili). În ceea ce priveşte automatizarea proceselor industriale, apreciem pentru semiconductori un domeniu mult mai vast de aplicare decît cel al izotopilor radioactivi.

---

[1] Fotorezistențele au un prag de sensibilitate între 10^{-6}—10^{-9} lm, sau 10^{-7}—10^{-9} W, la o temperatură de culoare a radiatorului de 2 400°K.

Rezultă cu certitudine deci, că nici una din aceste metode moderne nu poate fi eficace în toate domeniile. Desigur că, în general, pentru ca aportul tehnicii măsurătorilor să fie eficace cercetărilor experimentale, din mai multe puncte de vedere : a sensibilităţii, metodei, erorilor de măsură, timpului necesar, costului etc., este necesară cunoaşterea prealabilă şi selecţionarea diferitelor metode de măsură pentru a se aplica cea mai adecvată.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1959

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАДИОАКТИВНЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ И МЕТОДОВ С ПОЛУПРОВОДНИКАМИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДАТЧИКОВ И ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается в какой степени радиоактивные изотопы и соответствующие датчики, в частности счетчики, удовлетворяют требованиям различных областей измерения, а также области измерения, в которых дают удовлетворительные результаты различные датчики с полупроводниками. Автор приходит к заключению, что главным образом в измерениях, касающихся газопотоков (скорости, присоединения, непрозрачности и пр.) полупроводники дают лучшие результаты по сравнению с радиоактивными методами; указываются также и другие области, в которых датчики с полупроводниками дают хорошие результаты.

Выводится общее заключение, что различные методы удовлетворяют требованиям не во всех областях; для эффективности измерений необходимо использовать наиболее подходящий метод.

EFFICIENCY OF RADIOACTIVE AND SEMICONDUCTOR MEASURING METHODS AS RELATED TO GAUGES AND THE INVESTIGATED FIELD

ABSTRACT

Paper discusses the way in which radioactive isotopes, the specific instrumentation and particularly the counters are suited to measurements in various fields ; the fields of application for various types of semiconductor-gauges are also discussed. It is shown that the semiconductors are more adequate than the radioactive methods in gas flow measurements (velocities, opacities and so on). Other applications of semiconductor-gauges are also indicated. The general conclusion is drawn that various methods can cover separately only certain fields ; for the efficiency of measurements the most adequate method has to be used.

BIBLIOGRAFIE

1. BANNER E.H.W., *Instruments Electroniques de Mesure*. Ed. Dunod, Paris, 1959.
2. BRODA E., SCHOFFELD T., *Aplicațiile tehnice ale radioactivității*. Ed. tehnică, București, 1959.
3. KLEMENTIEV S. D., *Automatica și telemecanica*. Ed. tehnică, București, 1957.
4. КОЛОМИЕТ В. Т., *Фотосопротивления в автоматике*. Изд. знание, 1956, Ленинград.
5. MARGOLIN I. A., RUMIANȚEV, N. P., *Bazele tehnicii razelor infraroșii*. Ed. tehnică, București, 1957, 121—206. p.
6. PAVELESCU D., *Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *1* (1956).
7. — *Cu privire la studiul uzurii cuțitelor de strung* (*iradiate*) *pentru determinarea parametrilor optimi de așchiere*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* (1957).
8. PAVELESCU D., ILIUC I., *Studiul prin metode radioactive a influenței viscozității asupra grosimii filmului de lubrifiant*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).
9. RAISKY S. M., SMIRNOV V. F., *Bazele fizice ale metodei indicatorilor radioactivi*. I.S.R.S., București, 1957.
10. STERE R., *Tranzistorul*. Ed. tehnică, București, 1957.
11. ШУМИЛОВСКИЙ Н. Н., МЕЛТТЕР Л. В., *Применение радиоактивных излучений для бесконтактного контроля расхода и скорости потока газа. Машиностроение и приборостроение*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1958, 276—279.

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

MOTOR PNEUMATIC CU LAGĂRE CU AER

DE

V. N. CONSTANTINESCU şi GH. MARIN

Este cunoscut faptul că în ultimii ani problema lubrificaţiei cu gaze se bucură de o atenţie deosebită din partea specialiştilor, iar realizările obţinute sînt din ce în ce mai promiţătoare. Într-adevăr, lagărele cu aer prezintă în comparaţie cu alte sisteme de lagăre o serie de avantaje (frecări deosebit de reduse, uzuri de asemenea foarte reduse, posibilitatea funcţionării la temperaturi foarte ridicate sau foarte scăzute etc.) care le fac să fie de preferat în special pentru maşinile şi aparatele cu turaţii mari şi foarte mari. Realizările tehnice sînt totuşi destul de reduse ca număr pînă în momentul de faţă, datorită faptului că lagărele cu aer prezintă anumite particularităţi funcţionale şi de execuţie care mai necesită unele perfecţionări. Din această cauză, în stadiul actual, fiecare realizare tehnică de lagăre cu aer aduce o contribuţie la cunoaşterea mai îndeaproape a fenomenului lubrificaţiei cu gaze şi la elucidarea dificultăţilor de ordin tehnic care apar la construirea lor.

Pentru studii experimentale privind funcţionarea lagărelor cu aer şi pentru utilizarea lor în diferite construcţii de maşini şi aparate, la Institutul de mecanică aplicată a fost construit motorul pneumatic cu lagăre cu aer prezentat schematic în figura 1, al cărui organ motor este constituit dintr-o turbină acţionată cu aer comprimat. Rotorul (1) se sprijină pe două lagăre radiale şi două axiale astfel încît ansamblul să poată funcţiona în orice poziţie. Partea activă a rotorului, turbina, a fost realizată prin frezarea unor canale în masa rotorului. Ca formă a turbinei s-au utilizat două variante: una conică, aşa cum este prezentată în schema din figura 1, şi una cilindrică. Turbina este alimentată cu aer comprimat prin 13 orificii dispuse radial în cuvă (2). Cuva, în cazul rotorului conic, joacă şi rol de lagăr axial cu aer, alimentat sub presiune (în cazul rotorului cilindric lagărul axial a fost realizat dintr-o şaibă avînd 4 sectoare înclinate). Al doilea lagăr axial (3) este format dintr-o coroană circulară plană, prevăzută cu o serie de orificii prin care se introduce aer comprimat. Cele două lagăre radiale (4) (5) sînt compuse din cîte o bucşe cilindrică montată în cîte un sistem de reglaj care permite fixarea bucşelor în poziţie cît mai axială prin strîngerea piuliţei (7) pe suprafaţa sferică a bucşei intermediare (16). Carcasa aparatului este formată din două bucăţi (9) şi (10) care se îmbină prin strîngere pe un con cu planşe.

Lagărele radiale au diametrul de 14 mm şi lăţimea de 28 mm iar jocul radial este de $1{,}2^0/_{00}$. Utilizînd rezultatele anterioare privind calculul lagărelor circulare lubrifiate cu gaze, s-a calculat capacitatea portantă maximă a acestora, considerînd că sarcina maximă ar corespunde unei grosimi minime a stratului de lubrifiant de 2 μ sub care ar exista pericolul producerii unui contact direct între fus şi cuzinet. În aceste condiţii, sarcina maximă suportată de lagăr, în funcţie de turaţie, este arătată în figura 2. Se constată că deşi de dimensiuni reduse, fiecare

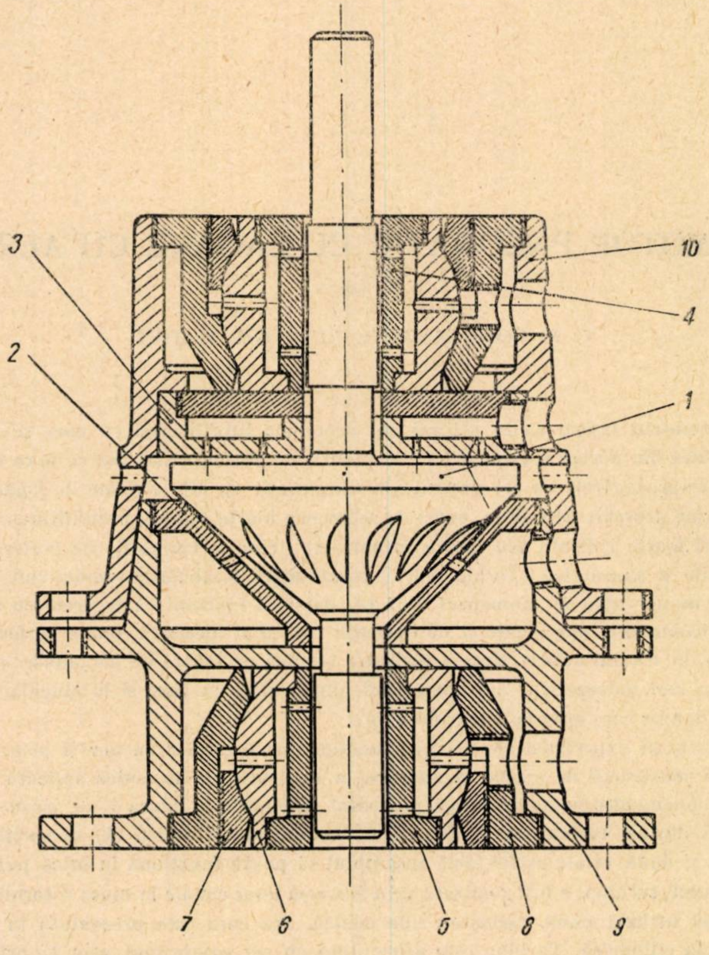


Fig. 1

lagăr poate suporta o sarcină de peste 5 kg la 20 000 rot/min şi peste 10 kg la 60 000 rot/min, sarcină considerabil mai mare decît greutatea proprie a rotorului (0,5 kg; revenind 0,25 kg pentru un lagăr). În schimb, puterea consumată prin frecări, după cum se vede din figura 3, este foarte redusă, nedepăşind 4 W la 40 000 rot/min şi 10 W la 60 000 rot/min. În această diagramă s-a reprezentat puterea consumată de un lagăr în ipoteza că este complet descărcat (excentricitate relativă $\alpha = 0$) şi marcat cu sarcina considerată maximă, care ar conduce la o grosime minimă a peliculei de aer de 2μ (excentricitate relativă $\alpha = 0{,}75$). În figura 4 s-a reprezentat puterea consumată de lagărul axial 3 în ipoteza că este reglat pentru un joc între suprafeţe de

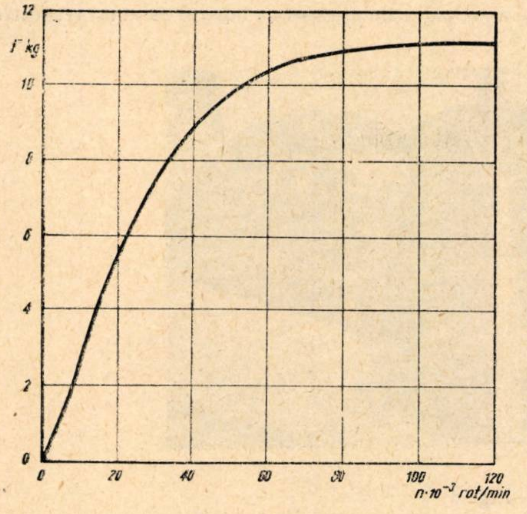


Fig 2

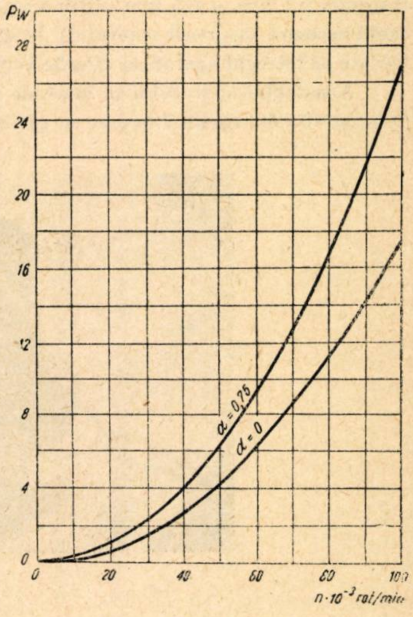


Fig. 3

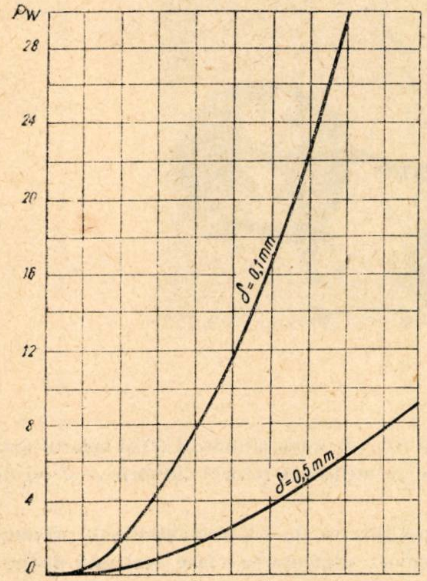


Fig. 4

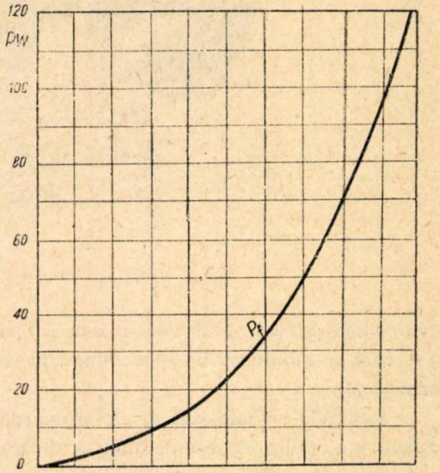


Fig. 5

respectiv 0,1 mm și 0,5 mm (ultima valoare fiind suficientă pentru a asigura capacitatea portantă necesară susținerii rotorului). În sfîrșit, în figura 5 s-a reprezentat puterea consumată prin frecare de întregul aparat, la diferite turații.

Ansamblul aparatului în stare de funcțiune este arătat în figura 6, iar parțial demontat în fotografia din figura 7 în care se văd cele două părți ale carcasei cu lagărul axial (*a*) respectiv

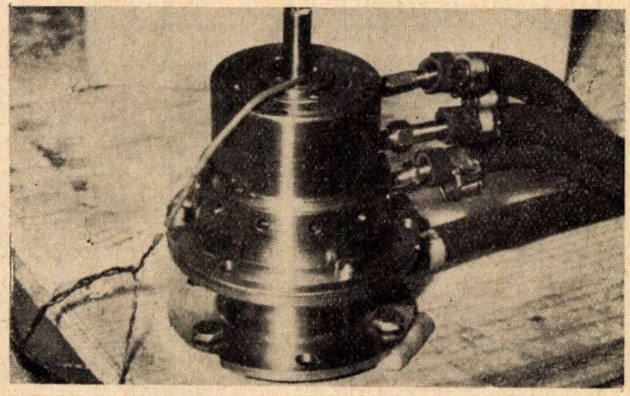


Fig. 6

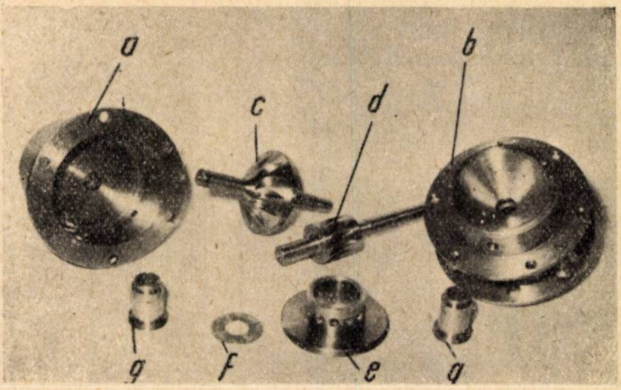


Fig. 7

cuva conică (*b*), cele două variante de rotori utilizați (*c*), (*d*), cuva cilindrică (*e*) și lagărul axial (*f*) — care se montează în locul bucșei în cazul cînd se utilizează rotorul cilindric — și cei doi cuzineți (*g*).

Lagărele radiale sînt și ele prevăzute cu posibilitatea de a fi alimentate sub presiune, iar pentru a realiza o presiune diferită de aceea a turbinei, alimentarea a fost realizată distinct de aceasta. În ambele cazuri presiunea de alimentare a fost controlată cu cîte un manometru, iar reglarea ei s-a făcut cu ajutorul unor robineți simpli. Întreaga aparatură utilizată în timpul încercărilor, care în afară de cele de mai sus a mai cuprins măsurarea temperaturii cuzineților în timpul lucrului cu ajutorul unei instalații speciale, și a turației rotorului, este arătată în fotografia din figura 8.

★

Probele efectuate cu motorul descris mai sus sînt deosebit de promițătoare. Astfel motorul are o funcționare stabilă și sigură la turații mari (turația maximă atinsă a fost de 56 000 rot/min), fără vibrații. Funcționarea este la fel de bună pentru orice poziție a motorului. Încălzirile în lagăre sînt extrem de reduse (1—3°C peste temperatura din mediul înconjurător la 40 000 rot/min). Din încercări a rezultat că lagărele radiale funcționează tot atît de bine și în cazul cînd nu sînt alimentate sub presiune. Acest fapt este deosebit de important pentru aplicațiile tehnice, deoarece în cazul unei antrenări electrice sau de altă natură, rezultă că nu este nevoie de o instalație suplimentară de aer comprimat pentru asigurarea bunei funcționări a lagărelor. Ca materiale de lagăre s-au utilizat : oțelul, bronzul și fonta, ultimul material fiind acela adoptat deoarece a dat cele mai bune rezultate.

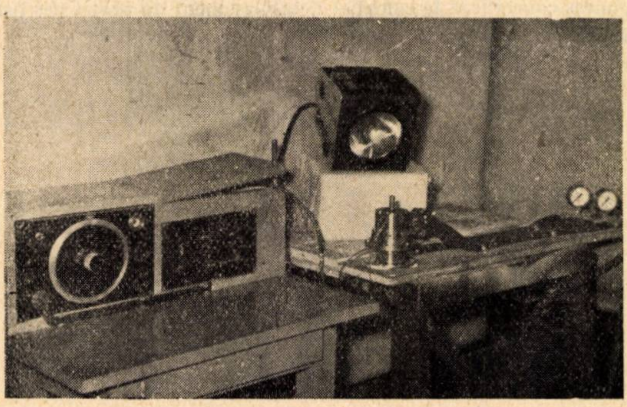


Fig. 8

Instalația va fi utilizată pentru cercetări privind funcționarea lagărelor cu aer, studii asupra materialelor de lagăre și asupra uzurii lor. În afară de aceste utilizări, aparatul va servi pentru proiectarea și realizarea altor lagăre cu aer în construcția de mașini. De altfel chiar sub forma prezentată, motorul este susceptibil de a avea aplicații industriale ca organ activ al unei mașini de șlefuit lentile, al unei mașini de rectificat interior etc.

Primită la redacție la 20 octombrie 1959

ПНЕВМАТИЧЕСКИЙ ДВИГАТЕЛЬ НА ПОДШИПНИКАХ С ВОЗДУШНОЙ СМАЗКОЙ

РЕЗЮМЕ

Описывается пневматический двигатель, сконструированный в Институте прикладной механики. Двигатель состоит из ротора с пневматическим приводом, установленного на двух радиальных и одном упорном подшипниках с воздушной смазкой. Приводятся некоторые данные относительно расчета и проектировки подшипников, а также и полученные качественные показатели.

MOTEUR PNEUMATIQUE À COUSSINETS D'AIR

RÉSUMÉ

Le moteur pneumatique décrit a été réalisé dans le cadre de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R. Il consiste dans un rotor actionné pneumatiquement, dont l'arbre tourne dans deux paliers radiaux et un palier axial, lubrifiés à l'air. Les auteurs fournissent certaines données concernant le calcul et l'établissement du projet des paliers, et indiquent les résultats obtenus.

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

TENSOMETRU STATIC CU COMUTARE PE 15 PUNCTE DE MĂSURĂ

DE

A. ZAHARESCU

În sectorul de tehnica măsurătorilor din Institutul de mecanică aplicată a fost proiectat şi executat un tensometru static cu sensibilitate mărită, capabil să măsoare cu ajutorul traductorilor rezistivi, deformaţii în 15 puncte, prin comutare în interiorul aparatului.

SCHEMA ELECTRICĂ

Aparatul constă din următoarele părţi : o punte de măsură, un oscilator pentru alimentarea punţii şi un indicator de nul, format dintr-un amplificator şi un detector sensibil la fază.

S-a adoptat puntea etajată formată din două punţi Wheatstone în serie, pentru a se evita influenţa contactelor elementelor de echilibrare asupra echilibrului. Echilibrul se produce la anularea sumei tensiunilor de pe diagonalele de măsură ale celor două punţi în serie. Schema de comutare a traductorilor este astfel aleasă, încît o variaţie „Δr" a rezistenţei de contact la comutator este redusă la o variaţie

$$\frac{(\Delta r)^2}{2 \cdot r}, \quad (r = R_{44} = R_{45})$$

în braţul punţii. Puntea este etalonată pentru o constantă a traductorilor $K = 2$. Elementele de echilibrare a punţii sînt : potenţiometrul cu tambur R_6, corespunzînd unei deformaţii

$\varepsilon = 2.10^{-4}$, comutatorul K_1, corespunzînd unei deformaţii

$\varepsilon = 2.10^{-3}$ şi comutatorul K_2, corespunzînd unei deformaţii

$\varepsilon = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$. Rezistenţele punţii sînt măsurate cu o eroare mai mică de 0,1% şi sînt bobinate antiinductiv. Rezistenţele R_1, R_2, R_3, R_{37}, R_{38}, R_{39}, a căror stabilitate prezintă o mai mare importanţă, sînt compensate termic pînă la o variaţie relativă a rezistenţei mai mică de 2.10^{-6}/°C.

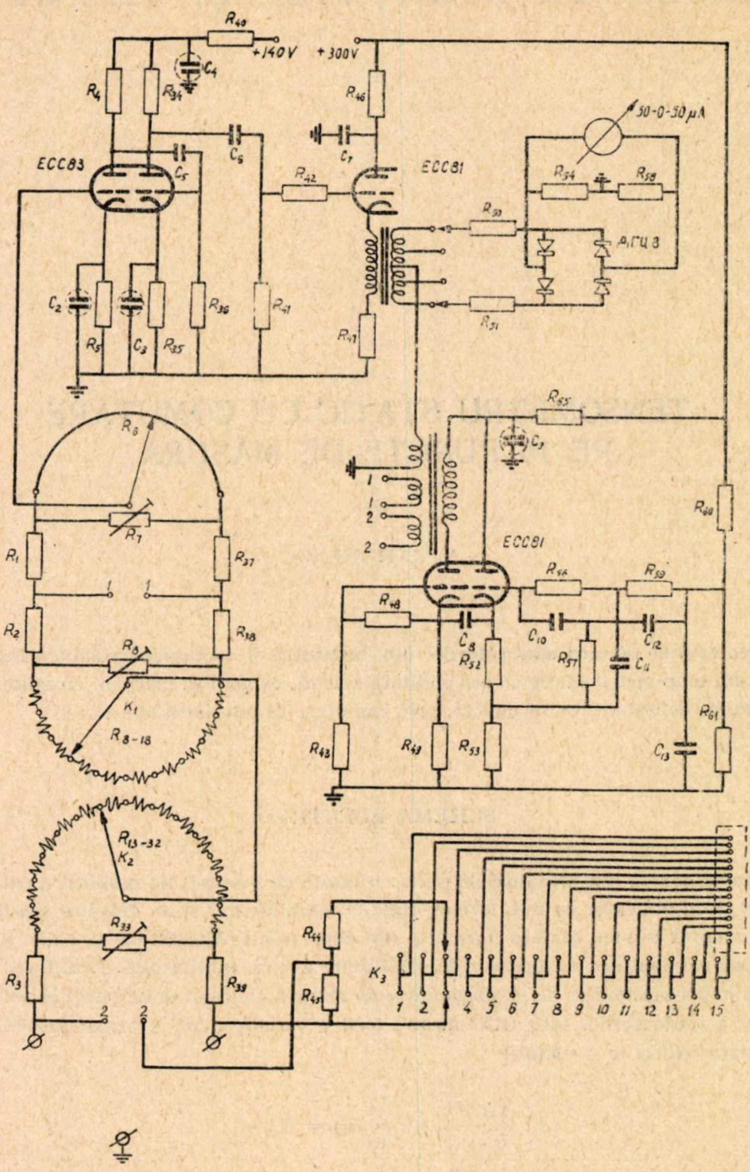

R40
+140V
+300V
C4
R4
R34
R46
50-0-50μA
ECC83
C5
C6
C7
R42
ECC81
R54
R58
R50
Д,ГЦ 8
R51
C2
R5
C3
R35
R36
R41
R47
R55
C9
R60
R6
R7
R1
R37
1
1
2
2
R2
R38
R8
K1
R8-18
ECC81
R56
R59
R48
C8
R52
C10
R57
C11
C12
R43
R49
R53
R61
C13
R13-32
K2
R33
R44
R45
K3
R3
R39
2
2
1 2 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Fig. 1. — Schema electrică a aparatului.

Detalii electrice $R_1 = R_2 = R_3 = R_{31} = R_{38} = R_{39} = 230$ ohm (bobinate), $R_4 = R_{34} = 220$ Kohm, $R_5 = R_{35} = 2{,}7$ Kohm, $R_9 - R_{18} = 5$ ohm (bobinate), $R_{19} - R_{32} = 20$ ohm (bobinate), $R_{36} = R_{41} = 1$ Mohm, $R_{40} = 20$ Kohm, $R_{42} = 100$ Kohm, $R_{43} = 91$ Kohm, $R_{44} = R_{45} = 2$ ohm (bobinate), $R_{46} = 39$ Kohm, $R_{47} = 300$ ohm, $R_{48} = 1$ Mohm, $R_{49} = 560$ ohm, $R_{50} = R_{51} = 32$ Kohm, $R_{52} = 1{,}8$ Kohm, $R_{53} = 100$ Kohm, $R_{54} = R_{58} = 820$ ohm, $R_{55} = 10$ Kohm, $R_{56} = R_{59} = 57$ Kohm, $R_{57} = 11{,}8$ Kohm, $R_{60} = R_{61} = 320$ Kohm, $C_2 = C_3 = 25\ \mu F$, $C_4 = 16\ \mu F$, $C_5 = C_6 = 2\,500\ pF$, $C_7 = 0{,}25\ \mu F$, $C_8 = 2\,000\ pF$, $C_9 = 8\ \mu F$ $C_{10} = C_{12} = 3\,200\ pF$, $C_{11} = 15\,500$ pF, $C_{13} = 0{,}5\ \mu F$.

Oscilatorul este realizat pe un repetor catodic, cu circuit selectiv dublu - T, elementele acestuia din urmă fiind alese astfel*), încît să lucreze ca circuit pasiv amplificator. Stabilitatea sa este bună la variația tensiunii anodice și de filament. Frecvența tensiunii generate este de 800 Hz. Transformatorul pentru alimentarea punții este bobinat pe un miez de ferită, în doi galeți, cu ecrane între înfășurări.

Realizarea amplificatorului a cerut atenție în ceea ce privește ecranajul și stabilirea punctelor de masă. Amplificarea poate fi variată în două trepte, pentru o echilibrare mai comodă a punții.

Pentru detectorul de fază s-a adoptat o schemă care cere consum mic de la oscilator, pentru a nu mări conținutul de armonici al tensiunii acestuia. Rezistențele R_{50} și R_{51} asigură o bună stabilitate a punctului de zero și, împreună cu R_{54} și R_{58}, sensibilitatea dorită la instrument. Oricare ar fi dezechilibrul punții de intrare, curentul prin instrument nu depășește 65 μA datorită acțiunii de limitare a detectorului de fază.

Redresorul aparatului, montat în aceeași cutie, este realizat cu ajutorul tuburilor 6 × 4, STR 150/40 z pentru tensiunea de 140 V și GR80F pentru semnalizarea funcționării. Se face un filtraj foarte puternic al tensiunii redresate.

DATE TEHNICE

Gama valorilor deformațiilor ε măsurate are ca limită inferioară 2.10^{-6} iar ca limită superioară $\pm 10^{-2}$ (în cazul utilizării unor traductori măsurați cu o precizie de $\pm 0{,}4\%$). Puntea este etalonată pentru traductori de 200 ohm dar poate lucra cu traductori între 100

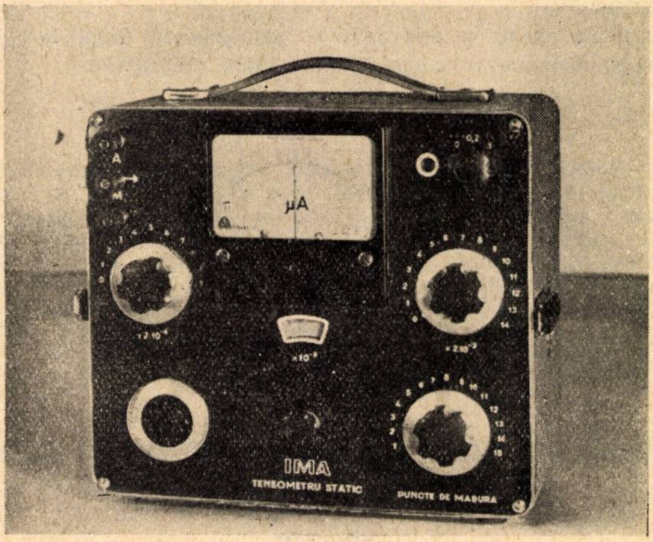


Fig. 2. — Vedere asupra aparatului.

---

*) $R_{53} = R_{59} = \frac{1}{k} \cdot R_{57}$

$C_{10} = C_{12} = K \cdot C_{11}$

$K = 0{,}207$

şi 600 ohm, dînd o eroare suplimentară mai mică de 1%. Eroarea de etalonare a comutatorilor pentru doi traductori activi, este mai mică de $\varepsilon = \pm 10^{-6}$ pentru o treaptă a comutatorului K_1 şi de $\varepsilon = \pm 5 \cdot 10^{-6}$ pentru o treaptă a comutatorului K_2.

Deplasarea punctului de zero, consecinţă a dezechilibrului nedorit în punte şi în detectorul de fază, este de $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-6}$ pentru o oră de funcţionare continuă, după intrarea aparatului în regim stabil.

Nu se obţin erori suplimentare vizibile la variaţii ale tensiunii de reţea între + 10 şi − 20%.

Aparatul permite şi vizualizarea pe oscilograf a solicitărilor dinamice conţinînd armonice importante mai mici de 100 Hz.

Dimensiunile şi greutatea aparatului îl fac uşor portabil.

Primită la redacţie la 19 septembrie 1959

СТАТИЧЕСКИЙ ТЕНЗОМЕТР С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ НА 15 ТОЧЕК ИЗМЕРЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В статье приводится электрическая схема и качественные показатели статического тензометра, сконструированного в отделе техники измерений Института прикладной механики.

Путем выбора схемы и аккуратного выполнения были получены лучшие, чем у обычных приборов этого рода, качественные показатели.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Электрическая схема прибора. Электрические детали : $R_1 = R_2 = R_3 = R_{31} = R_{38} = R_{39} = 230$ ом (с обмоткой), $R_4 = R_{34} = 220$ ком, $R_5 = R_{35} = 2{,}7$ ком, $R_9 - R_{18} = 5$ ом (с обмоткой), $R_{19} - R_{32} = 20$ ом (с обмоткой), $R_{33} = R_{41} = 1$ мом, $R_{40} = 20$ ком, $R_{42} = 100$ ком, $R_{43} = 91$ ком, $R_{44} = R_{45} = 2$ ом (с обмоткой), $R_{46} = 39$ ком, $R_{47} = 300$ ом, $R_{48} = 1$ мом, $R_{49} = 560$ ом, $R_{50} = R_{51} = 32$ ком, $R_{52} = 1{,}8$ ком, $R_{53} = 100$ ком, $R_{54} = R_{58} = 820$ ом, $R_{55} = 10$ ком, $R_{56} = R_{59} = 57$ ком, $R_{57} = 11, 8$ ком, $R_{60} = R_{61} = 320$ ком, $C_2 = C_3 = 25$ μF, $C_4 = 16$ μF, $C_5 = C_6 = 2500$ пф, $C_7 = 0{,}25$ μF, $C_8 = 2000$ пф, $C_9 = 8$ μF, $C_{10} = C_{12} = 3200$ пф, $C_{11} = 15500$ пф, $C_{13} = 0{,}5$ μF.

Рис. 2. — Общий вид прибора.

TENSOMÈTRE STATIQUE À COMMUTATION SUR 15 POINTS DE MESURE

RÉSUMÉ

L'auteur décrit, dans ce travail, le schéma électrique et les caractéristiques de fonctionnement d'un appareil de tensométrie statique réalisé dans la section de la technique des mesures de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.

L'adoption de schémas électriques appropriés, jointe à une exécution soignée, a permis d'obtenir des performances supérieures aux appareils courants de ce genre.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma électrique de l'appareil.

Détails électriques : $R_1 = R_2 = R_3 = R_{21} = R_{38} = R_{39} = 230\ \Omega$ (bobinées) ; $R_4 = R_{24} = 220\ \text{k}\ \Omega$; $R_5 = R_{25} = 2{,}7\ \text{k}\Omega$; $R_9 = R_{18} = 5\ \Omega$ (bobinées) ; $R_{19} = R_{32} = 20\ \Omega$ (bobinées) ; $R_{36} = R_{41} = 1\ \text{M}\ \Omega$; $R_{40} = 20\ \text{k}\ \Omega$; $R_{42} = 100\ \text{k}\ \Omega$; $R_{43} = 91\ \text{k}\ \Omega$; $R_{44} = R_{45} = 2\ \Omega$ (bobinées) ; $R_{46} = 39\ \text{k}\ \Omega$; $R_{47} = 300\ \Omega$; $R_{48} = 1\ \text{M}\ \Omega$; $R_{49} = 560\ \Omega$; $R_{50} = R_{51} = 32\ \text{k}\ \Omega$; $R_{52} = 1{,}8\ \text{k}\ \Omega$; $R_{53} = 100\ \text{k}\ \Omega$; $R_{54} = R_{58} = 820\ \Omega$; $R_{55} = 10\ \text{k}\ \Omega$; $R_{56} = R_{59} = 57\ \text{k}\ \Omega$; $R_{57} = 11{,}8\ \text{k}\ \Omega$; $R_{60} = R_{61} = 320\ \text{k}\ \Omega$; $C_2 = C_3 = 25\ \mu\text{F}$; $C_4 = 16\ \mu\text{F}$; $C_5 = C_6 = 2\,500\ \text{pF}$; $C_7 = 0{,}25\ \mu\text{F}$; $C_8 = 2\,000\ \text{pF}$; $C_9 = 8\ \mu\text{F}$; $C_{10} = C_{12} = 3\,200\ \text{pF}$; $C_{11} = 15\,500\ \text{pF}$; $C_{13} = 0{,}5\ \mu\text{F}$.

Fig. 2. — Vue de l'appareil.

RECENZII

V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959, 870 pag.

Această lucrare, publicată sub redacţia celor trei autori citaţi, cu colaborarea lui O. Dragnea, Al. Stoenescu, R. Woinaroski, P. Mazilu, T. Ganea, S. Popp, E. Beiu-Paladi, avînd contribuţia lui E. Toth, D. Mangeron, A. Ripianu, I. Ivanov, constituie prin vastitatea materialului pe care-l prezintă, material care cuprinde toate capitolele acestei ştiinţe — un adevărat tratat de mecanică teoretică.

Trebuie să observăm de la început că, prin această lucrare, s-a urmărit să se realizeze un manual atît pentru studenţii din universităţi cît şi pentru studenţii din institutele de învăţămînt tehnic superior ; lucrarea este de asemenea utilă cercetătorilor ştiinţifici de specialitate. Pentru aceasta elementele de natură teoretică sînt însoţite de numeroase aplicaţii legate de practică.

Mecanica mediilor continue deformabile, teoria relativităţii, mecanica cuantică şi ondulatorie, mecanica statistică nu sînt cuprinse în această lucrare.

Tratarea problemelor este vectorială, acolo unde este cazul făcîndu-se apel la calculul analitic.

După o introducere care se ocupă de noţiunile şi principiile fundamentale ale mecanicii, în partea I se dau cele mai importante rezultate din domeniul algebrei şi analizei vectoriale, precum şi noţiuni de calcul tensorial ; probleme de dimensiuni, unităţi, omogenitate, similitudine completează această parte.

Partea a II-a cuprinde statica punctului material şi statica sistemelor de puncte materiale. Tot aici se studiază sistemele de forţe, privite ca vectori alunecători, precum şi probleme legate de centrul maselor. Se ţine seama de diferitele legături la care pot fi supuse punctele materiale, sistemele de puncte materiale sau solidele rigide, inclusiv de legăturile cu frecare. În capitole speciale se prezintă problema firelor, precum şi unele elemente de statică grafică.

În partea a III-a sînt tratate problemele de cinematică ale punctului material şi ale solidului rigid. Un capitol special este dedicat mişcării relative.

Partea a IV-a cuprinde aplicaţii ale staticii şi cinematicii. Menţionăm astfel maşinile simple, tratate pe larg, precum şi noţiuni de structura mecanismelor.

Partea a V-a este una dintre cele mai dezvoltate părţi ale lucrării, cuprinzînd dinamica punctului material, dinamica sistemelor de puncte materiale precum şi dinamica solidului rigid. După ce se studiază teoremele generale ale mecanicii, se trece la cazul unor forţe particulare, importante în practică, care pot acţiona asupra punctului material : forţele centrale şi forţele elastice. Menţionăm faptul că se dau şi unele noţiuni de mecanică neliniară. Tratarea mişcării relative a punctului material este însoţită de numeroase aplicaţii practice. Un capitol ajutător este dedicat momentelor de inerţie. Mişcarea unui solid cu o axă fixă, mişcarea solidului cu un punct fix şi mişcarea plan-paralelă se bucură de o atenţie specială. Menţionăm elemente de mecanică a solidului de masă variabilă. Un capitol special este destinat problemei ciocnirilor şi percusiunilor.

Partea a VI-a este de asemenea mult dezvoltată, cuprinzînd mecanica analitică. După ce se studiază principiile diferenţiale ale mecanicii, se trece la ecuaţiile lui Lagrange şi la probleme de stabilitate a echilibrului ; se prezintă apoi ecuaţiile lui Hamilton precum şi diferitele probleme legate de integrarea acestora. Un capitol special este dedicat principiilor variaţionale. Menţionăm aici aportul original al prof. V. Vâlcovici, care permite prezentarea acestor principii într-o formă mai generală, cu ajutorul principiului general variaţional. În legătură cu principiul lui Hamilton, se studiază transformările canonice.

În partea a VII-a se dau noţiuni de dinamica maşinilor şi se prezintă unele experienţe mecanice.

Prin varietatea şi bogăţia materialului prezentat, prin tratarea completă a multor probleme, prin faptul că se ţine seama de cele mai noi studii publicate în ţară şi străinătate, această lucrare constituie o interesantă şi importantă contribuţie la literatura de specialitate.

P. P. Teodorescu

Н. М. МУСТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек* (Teoria neliniară a învelitorilor subţiri). Таткнигоиздат, Казань, 1957, 430 pag.

În actualele construcţii de maşini şi în special în construcţii de avioane, navale şi motoare, în scopul reducerii greutăţii proprii sînt frecvent utilizate elemente din plăci subţiri. Datorită formei lor aceste elemente sînt susceptibile de a avea mari deformaţii şi de a prezenta pericolul de instabilitate.

Pentru a răspunde la problemele puse de calculul acestora, în cartea cunoscuţilor cercetători N. H. Muştari şi K. Z. Galimov în domeniul teoriei pînzelor subţiri se găsesc reunite pentru prima dată într-o lucrare cu asemenea volum, bazele teoriei neliniare ale pînzelor subţiri. Prin teoria neliniară se înţelege neliniaritatea geometrică şi este bazată pe lucrările apărute pînă în prezent printre care ale lui Wey-zan-Tsin, I. G. Bubnov, F. Papcovici şi alţii.

Lucrarea conţine, după o succintă prezentare a formulelor şi notaţiilor din domeniul geometriei diferenţiale utilizate capitole privind ecuaţiile de echilibru în coordonate curbilinii şi ortogonale, condiţiile la limită, relaţiile între tensiuni şi deformări precum şi o serie de considerente variaţionale. În următoarele capitole sînt problema clasificării plăcilor, a stabilităţii lor cu aplicaţii diverse.

Această carte aduce un ajutor substanţial dezvoltării teoriei plăcilor subţiri, fiind totodată un manual util proiectării acestor elemente.

M. Mişicu

* * * *Труды совещания по прикладной газовой динамике.* (Lucrările consfătuirii în domeniul dinamicii aplicate a gazelor) 2. Алма-Ата, 23—26 октября 1956 г. Издательство Академии Наук Казахской ССР, Алма-Ата, 1959.

Materialul cuprins în această culegere de articole se grupează în jurul studiului vînelor fluide căreia îi sînt consacrate 12 articole şi al unei cercetări aerotermodinamice a combustiei gazelor cuprinse în aproximativ 11 articole. Restul de 7 articole se ocupă de probleme apropiate, teoretice şi experimentale. O trăsătură comună a rezultatelor expuse o constituie valoarea lor aplicativă, numeroasele rezultate şi metode experimentale, date şi tabele fiind utilizabile în studiul ejectoarelor, camerele de combustie ale turbinelor cu gaz, ajutajele motoarelor cu reacţie, arzătoarele circulare pentru pulbere de cărbune, focarele ciclonice etc. În teoria vînelor se atacă problema *Vîne turbulente într-un curent de fluid* (G. N. Abramovici) spre deosebire de vîna înecată, se prezintă sinteza *Rezultatele de bază şi problemele de viitor ale cercetării mişcărilor lichidelor şi gazelor în stare de vîne* (L. A. Vulis), se studiază cazurile noi ale curenţilor de întîlnire *Despre mişcarea dezordonată şi de întîlnire a doi curenţi omogeni de gaz compresibili* (V. P. Koşcarov) şi *Distribuţia vînelor axial simetrice în curenţi dezordonat şi de întîlnire* (T. P. Leontieva), cazul vînei semimărginite precum şi problema *Aerodinamica vînelor torsionate şi camerelor ciclonice* (B. P. Astrimenko). Soluţiile teoretice prezentate sînt în general explicite, pretîndu-se la interpretări directe.

Sînt prezentate de asemenea rezultate experimentale preţioase privind *Cercetarea circuitului turbulenţei vînei libere neizotermice şi a flăcării deschise* (G. S. Antonova), *Vîna plană în secţiune transversală a unei conducte de aer* (S. F. Sepelev, S. Toi), *Distribuţia vînei axial-simetrice a unui gaz într-un mediu de altă densitate* (N. N. Terechina).

În domeniul cercetării aerotermodinamicii combustie şi a flăcării sînt expuse două lucrări teoretice *Aerodinamica flăcării de gaz turbulente* (S. A. Erşin) şi *Probleme de bază ale termodinamicii curentului în condiţii la limită reale* (S. V. Romanenko), precum şi o cercetare tematică de chimie fizică *Legile arderii flăcării de gaz* (A. S. Teleghin). Numeroase experienţe efectuate, ca : *Unele probleme ale aerodinamicii în curentul în două faze într-un focar ciclonic* (E. V. Volkov), *Asupra problemei procesului de lucru în camera ciclonică* (A. V. Tonkonoghii, I. P. Basina) arată atenţia deosebită acordată camerelor de foc ciclonice precum şi sprijinirii efective a teoriei (*Încercarea industrială a noilor capete de ardere ale cuptoarelor Martin* (N. I. Kokarev).

Din restul articolelor desprindem : *Despre fenomenul de criză la scurgerea unui gaz vîscos într-un canal plan paralel* (Nazerciuk şi Polskii), *Cîmpul concentraţiilor aerosolilor de mare putere de dispersiune din conductele de aer* (Radcenko, Bieloborodov), precum şi studiul *Electrotermoanemometre VEI şi folosirea lor pentru cercetarea curenţilor de gaz neizotermic* (P. V. Cebîşev) de mare interes practic în laborator.

Prin tratarea modernă a problemelor şi valoarea practică a rezultatelor obţinute această culegere de articole este extrem de preţioasă atît în cercetarea ştiinţifică cît şi industrie.

Şt. Săvulescu

* * * *Труды Новочеркасского Ордена Трудового Красного Знамени Политехнического Института им. С. Орджоникидзе, том 104, Работы кафедры строительной механики.* (Lucrările Institutului politehnic din Novocerkask „S. Ordjonikidze", vol. 104, Lucrările catedrei de mecanica construcţiilor), Редакционно-издательский отдел Н.П.И., Новочеркасск — 1959.

Printre numeroasele culegeri de lucrări care ilustrează aportul substanţial adus de cadrele didactice din învăţămîntul superior sovietic se numără şi lucrările catedrei de mecanica construcţiilor a Institutului politehnic din Novocerkask.

Contribuţiile cuprinse în culegerea de lucrări menţionată se referă atît la metodele generale de rezolvare a problemelor mecanicii construcţiilor, cît şi la unele capitole importante din acest domeniu: calculul cadrelor, mecanica barelor cu pereţi subţiri, elasticitatea plană şi dinamica corpului solid.

O contribuţie în domeniul metodelor generale de rezolvare a problemelor mecanicii construcţiilor o constituie lucrarea: *Asupra unei metode de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale şi aplicării ei în probleme ale mecanicii construcţiilor*, a docentului cand. în ştiinţe tehnice G. V. Voronţov.

În articol se prezintă o metodă de integrare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale, bazată pe folosirea dezvoltării funcţiei căutate în serie Mac-Laurin, avînd restul pus sub forma lui Cauchy şi determinarea funcţiei cu ajutorul acestei dezvoltări prin *procedeul momentelor*. Pe această cale se tratează ecuaţiile generale ale barei de secţiune variabilă, deformaţiile barelor de secţiune constantă comprimate excentric şi oscilaţiile grinzilor sub acţiunea unei sarcini mobile.

Calculului cadrelor îi sînt consacrate trei lucrări:

Calculul estacadelor în cadre, avînd formă poligonală în plan, a docentului cand. în ştiinţe tehnice G. V. Veselovski, în care se prezintă sistematizarea calculului cadrelor cu mai multe deschideri, cu un singur nivel, avînd rigla de formă poligonală în plan orizontal, prin metoda eforturilor, alegîndu-se ca necunoscute static nedeterminate eforturile din mijlocul deschiderii fiecărei porţiuni de riglă cuprinsă între doi stîlpi consecutivi; *Asupra unei metode aproximative de calcul al cadrelor plane pe schema deformată* şi *Asupra unei variante a metodei deplasărilor în problema stabilităţii şi rezistenţei cadrelor plane*, ale docentului cand. în ştiinţe tehnice G. V. Voronţov; în ultima lucrare se prezintă o variantă a metodei deplasărilor aplicată în special problemei stabilităţii cadrelor plane, conducînd la micşorarea substanţială a numărului necunoscutelor.

Culegerea de lucrări cuprinde patru contribuţii în domeniul mecanicii barelor cu pereţi subţiri:

Influenţa lunecării suprafeţei mediane asupra mărimii unghiurilor de răsucire şi eforturilor în cazul torsiunii din încovoiere a barelor cu pereţi subţiri, cu profil deschis, a cand. în ştiinţe tehnice P. D. Mişcenko;

Asupra convergenţei unei metode de aproximaţii succesive în unele probleme ale mecanicii construcţiilor, a cand. în ştiinţe tehnice P. D. Mişcenko, în care, pentru profile deschise solicitate la încovoiere cu torsiune, se ia în consideraţie influenţa lunecării suprafeţei mediane asupra eforturilor, prin îmbunătăţirea succesivă a ipotezei de calcul, prima treaptă de aproximaţie fiind neglijarea acestei influenţe;

Asupra determinării experimentale şi teoretice a coordonatelor centrului de încovoiere a profilelor în formă de ⊏, a asist. A. A. Cirkov, în care se determină, pe cale teoretică, poziţia centrului de încovoiere în trei ipoteze (ipoteza lui Vlasov, ipoteza păstrării elementului normal şi ipoteza păstrării elementului normal cu luarea în considerare a lunecării suprafeţei mediane) şi se face comparaţie cu rezultatele experimentale, ajungîndu-se la concluzia că ultima ipoteză este cea mai apropiată de realitate; *Asupra torsiunii împiedicate a barelor cu pereţi subţiri cu secţiunea transversală avînd forma unui arc de cerc*, a aspirantului V. A. Smatkov, în care se demonstrează că ipoteza simplificatoare a lui Vlasov poate conduce în unele cazuri la abateri mari faţă de realitate, o ipoteză corespunzătoare fiind aceea a liniarităţii distribuţiei eforturilor unitare normale pe secţiune.

Domeniul teoriei elasticităţii este reprezentat prin lucrarea asist. N. T. Glazunova *Asupra calculului plăcilor ortotrope de formă trapezoidală.*

O contribuţie în domeniul dinamicii o constituie lucrarea asist. V. S. Voiţenia *Problema plană a mişcării de translaţie a corpului sub suprafaţa de separaţie a două lichide*, în care problema propusă este rezolvată prin metoda acad. N. E. Kocin.

Culegerea cuprinde, de asemenea, soluţia unei probleme deosebit de interesante şi cu o largă aplicare în tehnică *Calculul roţii cu spiţe cu obada avînd o secţiune transversală oarecare, solicitată de o sarcină simetrică cuprinsă în planul roţii*, de docent cand. în ştiinţe tehnice N. N. Vorobiov şi asist. D. I. Cistov.

Din parcurgerea culegerii de lucrări reiese cu claritate orientarea autorilor spre cercetări în domenii de actualitate ale mecanicii construcţiilor (cum este acela al mecanicii barelor cu pereţi subţiri), spre studiul unor probleme de mare importanţă practică (lucrările autorilor G. V. Voronţov, V. S. Voiţenia, N. N. Vorobiov şi D. I. Cistov), precum şi o pronunţată înclinare spre verificarea experimentală a rezultatelor obţinute pe cale teoretică.

V. *Petcu*

E. GÜNTHER, *Herstellung warmgewalzter Feinbleche*, 2. *erweiterte Auflage mit Abschnit Warmbreitbänder* (Fabricarea tablelor subţiri prin laminarea la cald. Ediţia a doua completată cu capitolul : Benzi late obţinute la cald). VEB Verlag Technik, Berlin, 1958 326 pag., 142 fig.

Lucrarea lui E. Günther, publicată în prima ediţie în anul 1957, a fost epuizată într-un an, iar autorul a dat publicităţii, în 1958, o a doua ediţie completată, care face obiectul recenziei de faţă.

Cartea cuprinde o prezentare a diferitelor aspecte din industria laminării tablelor subţiri, privite prin prisma unei îndelungate experienţe practice personale din domeniul respectiv. Aceasta a permis autorului publicarea unor foarte importante date numerice curente, care vor interesa pe actualii şi viitorii ingineri şi tehnicieni din specialitatea laminării.

Lucrarea se adresează atît celor care se ocupă cu fabricarea utilajului cît şi celor care se ocupă cu laminarea tablelor şi benzilor subţiri.

Capitolele 1—5 se ocupă de materialul supus laminării şi de produsele finite rezultate. La început se precizează anumite noţiuni de bază şi apoi se dau indicaţiile necesare privitor la dimensiuni, calităţi, control, tratamente, depozitare şi calculul greutăţii, indicîndu-se domeniile de utilizare a diferitelor calităţi şi dimensiuni.

Capitolele 6—9 se ocupă de utilajul laminoarelor inclusiv instalaţiile anexe. Se dau indicaţii privind dimensiunile şi poziţia cilindrilor laminoarelor, materialele cilindrilor, prelucrarea, tratamentele, avariile şi prevenirea lor, vitezele de lucru ale cilindrilor. Problema şlefuirii cilindrilor şi a profilului acestora, în instalaţii speciale de şlefuit, stabile, la care să fie aduşi cilindrii face obiectul unei tratări atente.

Problema materialului lagărelor, dimensiunilor şi montajului lor este expusă pe baza unei documentaţii bogate. Tot aici este tratată chestiunea antrenării laminoarelor. Apoi se ocupă de construcţia de rezistenţă a laminoarelor, de fundaţie, suporţi, montaj, reglare, cuplaje.

În capitolul 10 sînt prezentate cuptoarele de încălzit şi modul de încălzire a materialului.

Capitolele 11—12 tratează dimensionarea şi modul de lucru la laminoarele duble, indicîndu-se şi cîteva scheme tehnologice. Tot aici se vorbeşte despre influenţa calităţii suprafeţelor cilindrilor asupra produsului finit obţinut şi de asemenea se arată defecţiunile ce se pot ivi la tablele laminate (cauze şi combaterea lor).

Programul de laminare cuprinde cele mai variate lăţimi, lungimi şi grosimi de table şi de aceea autorul indică cum se calculează grosimea medie pe care o poate realiza o instalaţie de laminoare şi cum variază ea în timp. În mod normal, capacitatea de producţie a unui laminor depinde în principal de grosimea medie, care este o caracteristică și mai puțin de lungimea și de lățimea foilor.

Suprafața tablelor este interesantă însă pentru calculul băițuirilor.

În capitolul 13 se tratează mecanizarea operațiunilor de manipulare a materialului supus laminării. Autorul arată principiile ce au stat la baza mecanizării și de asemenea utilajele și construcțiile realizate (pentru diferite operațiuni, transporturi, cuptoare) și aranjarea lor într-un flux tehnologic rațional. La sfîrșitul capitolului 13 se dă o foarte interesantă comparație între o linie mecanizată și una de tip vechi, din care rezultă o serie de avantaje tehnice și economice în favoarea primei.

Capitolul 14 se ocupă cu operațiunile la care este supus materialul laminat, înainte de a fi livrat la consumator (îndreptare, tăiere, tratamente termice etc.). Este prezentat și utilajul folosit în acest scop.

În capitolul 15 se tratează tablele de calitate superioară pentru utilizări speciale în diferite construcții mecanice.

În capitolul 16 se tratează tablele pentru utilizări electrotehnice (transformatoare, motoare).

În capitolul 17 (nou) se expune problema laminoarelor pentru benzi late obținute la cald. Este cunoscut că manipulările repetate ale foilor, pînă la obținerea grosimii finale, consumă pînă la 85% din timpul total al operației de laminare (la instalații mecanizate se consumă doar 75% din timpul total). S-a ajuns astfel la ideea de a se lamina materialul în benzi lungi, ceea ce a pus probleme greu de rezolvat, ca diferențe mari de temperatură între începutul și sfîrșitul unei benzi; apoi obținerea unor produse uniforme ca grosime, lățime și calitate pe toată lungimea unei benzi etc. și pe loturi de fabricație.

Se prezintă, de asemenea, o comparație între o linie de laminare complet continuă și alta semiautomatizată. Autorul arată că limitele economice actuale pentru laminarea în benzi sînt: în sus pînă la 1 600 mm lățime, iar în jos pînă la 800 mm lățime (deși din punct de vedere tehnic se poate merge și pînă la lățimea de circa 500 mm).

Is. Niculescu

A. NAUMANN, H. PFEIFFER, *Versuche an Wirbelstrassen hinter Zylindern bei hohen Geschwindigkeiten* (Cercetări asupra șirurilor de vîrtejuri din spatele cilindrilor la viteze mari) Forschungsberichte des Wirtschafts - und Verkehrministeriums Nordrhein — Westfalen (Rapoarte de cercetare ale Ministerului economiei și transporturilor Renania și Nord-Westfalia) Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1958.

Lucrarea conține un studiu experimental, prin metoda strioscopiei, asupra scurgerii în spatele unor cilindri, la numere Mach cuprinse între 0,35 și 0,75, într-un domeniu de numere Reynolds variind între 80 000 și 200 000. Instalația utilizată a fost sufleria mică de viteze mari a politehnicii din Aachen. Imaginile fotografice au fost luate cu o frecvență foarte mare, mergînd pînă la 40 000 pe secundă. S-a observat că desprinderea vîrtejurilor se produce și deasupra numărului Mach critic, pînă în domeniul numărului Reynolds critic.

Unda de șoc din apropierea ecuatorului, care limitează în aval scurgerea supersonică locală, este supusă unor variații de intensitate și poziție, în ritmul antrenării vîrtejurilor de către fluid.

Imaginile fotografice permit, de asemenea, determinarea frecvenței vîrtejurilor desprinse, în funcție de numărul Reynolds și de numărul Mach.

T. Oroveanu

OTTO KRAEMER, *Getriebelehre*. Verlag G. Braun, Karlsruhe. 1959, ed. a II-a, 264 p.

Această lucrare este o ediție nouă, revăzută de autor în urma sugestiilor primite, a cărții recenzate în nr. 3/1958 din Studii și cercetări de mecanică aplicată.

Modificările și adăugirile aduse sînt relativ numeroase însă scurte, referindu-se în special la completări de explicații, noțiuni noi, figuri și exemple suplimentare. Astfel, s-au modificat în special: capitolul I, unde s-a schimbat textul explicativ și se insistă mai mult asupra bazelor sintezei mecanismelor; capitolul V, îmbogățit prin exemple, tratînd, mai ales, folosirea centrului instantaneu de rotație în cinematica trenurilor de roți; capitolul VII unde s-a introdus și o parte privind curbura curbelor înfășurătoare; capitolul VIII cu adăugarea relației Euler-Savary și a curbei lui Ball și capitolul XIII completat cu noțiuni de șoc.

Modificări mai restrînse găsim și în capitolul II în ceea ce privește ghidajele, în capitolul XI relativ la mecanismul antiparalelogram și capitolul XIV unde se dă conturul camei ca funcție polară.

Păstrîndu-și caracterul practic și de inițiere în domeniul mecanismelor și în metodele de rezolvare cinematică a lor, adăugirile făcute sînt concise, fără a se insista mult asupra demonstrațiilor și fără dezvoltări teoretice. Astfel, scopul cărții este de a expune noțiunile și elementele de bază ale teoriei mecanismelor, pentru a se putea rezolva problemele cele mai des întîlnite. În acest sens, scoatem în evidență, din nou, claritatea și concizia expunerii și menționăm modul expeditiv și practic de tratare a derivării grafice, în scopul micșorării erorilor ce provin din ducerea tangentei într-un punct al unei curbe.

Apreciem că aceste completări aduse constituie o îmbunătățire a ediției anterioare. Față de calitățile de expunere și domeniul cuprins, ar fi de dorit însă o tratare teoretică mai aprofundată, ceea ce ar da practicianului, căruia i se adresează în primul rînd, o perspectivă mai largă asupra fenomenelor și legăturii dintre ele.

E. Bugajewski

W. KRAUS, *Messungen des Temperatur- und Geschwindigkeitfeldes bei freier Konvektion* (Măsurarea cîmpurilor de viteze și temperaturi în convecția liberă) Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1955, 147 p.

Cercetarea experimentală a transmiterii căldurii prin convecție liberă comportă dificultăți remarcabile. Acest lucru se datorește în primul rînd necesității de a se lua măsuri de precauție foarte îngrijite pentru a se asigura condiții standard de producere a cîmpului de temperaturi și viteze, fără a introduce perturbații termice sau a restrînge circulația aerului.

În al doilea rînd — și ceea ce este mai interesant — măsurarea parametrilor aerodinamici și termici ai cîmpului este îngreunată de faptul că vitezele aerului sînt mici, dar foarte neuniform distribuite. De aceea, realizarea aparaturii necesare pentru asemenea măsurători este o problemă delicată și interesantă, iar importanța tehnică a convecției căldurii a impus efectuarea de lucrări numeroase în acest domeniu. În acest sens, lucrarea dr. W. Kraus este foarte binevenită, întrucît sintetizează experiența cîștigată pînă azi în problemele de care ne ocupăm. Autorul a lucrat mult și cu succes în acest domeniu, și contribuțiile sale originale sînt prezentate în lucrare, împreună cu o bogată bibliografie, care sporește și mai mult interesul ei.

În primul capitol al lucrării se analizează în detaliu, modul de realizare corectă a unui cîmp de temperaturi și viteze în convecție liberă, evitînd toate influențele parazite. Se prezintă apoi instrumentele pentru măsurarea temperaturii și vitezelor, descriindu-se în detaliu anemometrul cu fir de cuarț pentru viteze mici, la a cărui confecționare autorul a adus importante contribuții. În sfîrșit, se studiază în detaliu metodele optime de vizualizare a cîmpurilor de temperaturi (strioscopie și interferometrie) ; numeroase fotografii excelent realizate contribuie să sporească valoarea expunerii.

Deși nu se insistă asupra unor aparate moderne — ca de exemplu, anemometrul cu fir cald — lucrarea oferă totuși un tablou aproape complet al tehnicii măsurătorilor în domeniul tratat.

Ținem să subliniem că bogatul material cuprins în monografia dr. W. Kraus depășește ca interes, cadrul strîmt al specialității respective ; cercetătorii și tehnicienii care lucrează în alte domenii ale aerodinamicii, unde se întîlnesc cu problema măsurării vitezelor foarte mici și a gradienților slabi de temperatură, vor găsi în lucrare sugestii foarte interesante.

De asemenea, dintr-un punct de vedere mai general, lectura acestei cărți este instructivă pentru toți cei ce se ocupă de cercetări experimentale, căci din expunere se poate vedea cîte precauții și eforturi cere executarea unor măsurători experimentale la nivelul de precizie al tehnicii moderne și cu certitudinea că fenomenul studiat nu este contaminat de intervenția operatorului și a aparatelor de măsură.

L. Dumitrescu

LOUIS ROBIN, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales* (Funcțiile sferice ale lui Legendre și funcțiile sferoidale). Paris — Gauthier Villars, vol. I, 1957, 201 pag. ; vol. II, 1958, 384 pag. ; vol. III sub tipar.

Funcțiile sferice ale lui Legendre și funcțiile sferoidale joacă un rol important în fizica matematică. Lucrarea de față se adresează astfel fizicienilor, inginerilor și matematicienilor, pe care îi interesează aceste funcții și care le utilizează. Materialul voluminos al acestei lucrări a fost împărțit în trei volume, dintre care au apărut două, al treilea volum fiind în curs de apariție.

În volumul I, după ce ecuația asociată a lui Legendre este obținută din ecuația undelor $\Delta u + k^2 u = 0$ scrisă în coordonate sferice, autorul se ocupă în mod detaliat de polinoamele și funcțiile de-a doua speță ale lui Legendre precum și de funcțiile asociate ale lui Legendre, P_n^m și Q_n^m pentru n și m întregi, $n \geqslant 0$; tot în acest volum sînt studiate armonicele sferice de grad întreg, pozitiv, negativ sau nul. Sînt studiate amănunțit proprietățile tuturor acestor funcții speciale și se dau relații de recurență, dezvoltări în serii, diferite expresii ale acestor funcții precum și multe alte formule în care intervin acestea.

La sfîrșitul primului volum, sînt date în patru anexe expresiile primelor polinoame, funcții de-a doua speță și funcții asociate ale lui Legendre, precum și unele valori particulare ale acestora.

În volumul II, autorul se ocupă în mod detaliat de funcțiile asociate ale lui Legendre de tip general. Sînt date definiții, proprietăți, relații de recurență, diferite expresii, dezvoltări în serie ale acestor funcții precum și relații între funcțiile Bessel și funcțiile asociate ale lui Legendre.

Un capitol este consacrat valorilor aproximative ale funcțiilor asociate și anume : dezvoltării asimptotice ale acestora și inegalității simple satisfăcute de aceste funcții. Tot în acest volum sînt studiate seriile de polinoame și de funcții asociate ale lui Legendre, precum și seriile de polinoame ale lui Laplace.

Din cele expuse de autor în introducerea primului volum, volumul III este consacrat formulelor și teoremelor de aditivitate ale funcțiilor lui Legendre, problemei zero-urilor sau rădăcinilor funcțiilor asociate ale lui Legendre, aplicațiilor funcțiilor asociate ale lui Legendre în cazul suprafețelor de revoluție, făcînd parte dintr-un sistem triplu ortogonal diferit de cel corespunzător coordonatelor sferice, polinoamelor și funcțiilor Gegenbauer și funcțiilor sferoidale. Volumul III se termină cu o anexă care conține tabele numerice.

Din enumerarea succintă făcută mai sus este ușor de văzut că în aceste trei volume a fost expus un material bogat. Prin tratarea sistematică, la un nivel matematic superior, a funcțiilor lui Legendre și a funcțiilor sferoidale, lucrarea reprezintă o monografie completă foarte documentată a acestor funcții speciale.

L. Dumitrescu

J. BURTON, *Pratique de la mesure et du contrôle dans l'industrie* (Practica măsurătorii și controlului în industrie). DUNOD, Paris., vol. I, 1958, 400 pag., vol. II, 1959, 392 pag.

În cele două volume apărute pînă în prezent, autorul și-a propus să prezinte o trecere în revistă a unor metode de măsură și a unor aparate ce interesează anumite domenii din industrie, în special cu privire la problemele de control automat. Lucrarea se bazează pe aparate de serie (de măsură și control), realizări ale unor firme constructoare din diferite țări occidentale, și în special din Franța. Se prezintă schematic partea teoretică, principiul general de aplicare și funcționare, și apoi descrierea aparaturii exemplificatoare.

Primul volum cuprinde patru capitole privind măsurarea presiunilor (pag. 5—73), vidului (pag. 74—87), nivelelor (pag.88—102) și debitelor (pag. 103—362).

Se acordă o mai mare atenție măsurării debitelor și diferitelor tipuri de debitmetre, indicatori, contori etc.

Primul volum se termină cu o abacă folositoare și un indice alfabetic.

Bibliografia prezentată se bazează pe lucrări de nivel tehnico-științific, în cea mai mare parte franceze.

Volumul II cuprinde trei capitole, privitoare la măsurători de temperatură (pag. 1—277), higrometrice (pag. 278—307) și măsurători de densități și greutăți specifice (pag. 308—342).

Se acordă în capitolul V, o mare atenție măsurătorilor de temperatură ; sînt prezentate o gamă completă de metode și instrumente : termometre pe bază de dilatație, pe bază de rezistență cuple termo-electrice, măsurători cu milivoltmetre și potențiometre electronice, cu amplificatori electronici. Sînt prezentați de asemenea traductori și amplificatori magnetici și diferite pirometre.

Volumul II se încheie prin tabele, abacă și un indicator alfabetic.

Bibliografia se bazează de asemenea pe lucrări de nivel tehnico-științific în cea mai mare parte franceze.

În concluzie, considerăm că lucrările se adresează mai puțin personalului institutelor de cercetări și îndeosebi inginerilor și tehnicienilor din industrie și laboratoarele uzinale. În ansamblu, lucrarea este o utilă trecere în revistă a aparatelor și metodelor de măsură din domeniile citate.

Regretăm faptul că autorul, care făcînd un plan de expunere destul de judicios și acordînd prezentărilor teoretice și de principiu o însemnată parte a capitolelor, subcapitolelor și pragrafelor, nu a trecut la exemplificări și prezentări de aparate decît numai din țări occidentale.

Această limitare în prezentare micșorează apreciabil importanța lucrării, mai ales în ceea ce privește unul din scopurile propuse chiar de autor și anume informarea și ajutorul tehnicienilor și inginerilor. Facem această observație, dat fiind faptul cunoscut că știința nu trebuie să aibă granițe ; autorul nu a ținut seama de aparatele de măsură și control realizate în țări ca U.R.S.S., R.D.G., C.S.R., R.P.U. etc. cu caracteristici cel puțin egale și de multe ori superioare celor prezentate în lucrare. Autorul ar putea, în volumele următoare, să țină seama de această observație pe care o considerăm esențială.

Dan Pavelescu

* * * *Proceedings of the first Japan congress on testing materials* (Comunicările primului Congres japonez pentru încercări de materiale). The Japan Society for Testing Materials, Kyoto, Japan, 1958, 180 + 22 + 148 + VIII pag.

Lucrarea conține un număr de 54 comunicări prezentate la primul congres japonez pentru încercări de materiale care a avut loc în octombrie 1957.

O parte din aceste comunicări, în număr de 36, se ocupă de problema materialelor metalice. Menționăm în special comunicările privind rezistența la oboseală a unor organe de mașini supuse la diferite solicitări variabile. Influența coroziunii este de asemenea luată în considerare. Alte lucrări se ocupă de fluajul oțelului sau al unor aliaje speciale folosite în industrie.

Metodele de cercetare ale materialelor sînt dintre cele mai moderne : ultrasunete, raze X etc. Sînt prezentate și unele comunicări asupra comportării metalelor la temperaturi înalte. Un mare grup de lucrări se ocupă de încercările mecanice ale acestor materiale, în special de încercările la încovoiere ale anumitor oțeluri supuse la diferite influențe (influența incluziunilor nemetalice, influența hidrogenului etc). O deosebit de interesantă comunicare atacă problema anizotropiei corpurilor metalice, produsă de deformații plastice.

Alte 9 comunicări se ocupă de problema materialelor nemetalice, în special mortarul și betonul. Ultimele 9 lucrări cuprind probleme diferite, cum ar fi de exemplu problema inflamabilității materialelor organice de construcție.

Toate articolele publicate sînt foarte interesante pentru cercetătorii care se ocupă de încercări de materiale.

Lucrarea mai cuprinde și un apendice (22 pag.) asupra dezvoltării industriei japoneze, în stadiul actual.

Cu ocazia Congresului s-a hotărît să se publice anual asemenea comunicări.

P. P. Teodorescu

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

⁂ *Soobșcenia Akademii Nauk Gruzinskii SSR*, XXII, 1959, *1—6*.

⁂ *Problemi nefti i gaza*, Goztoptehizdat, 1959, Moscova, 361 p.

V. N. GONCEAROV, *Osnovi dinamiki ruslevih potokov*.
Ghidrometeorologhiceskoe Izdatelstvo, Leningrad, 1954, 452 p.

G. I. ȘAMOV, *Stok nanosov rek SSSR*.
Ghidrometeorologhiceskoe Izdatelstvo, Leningrad, 1956, 254 p.

⁂ *Igori Efghenievici Tamm*.
Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1959, 36 p.

W. KUNZ, J. SCHINTIMEISTER, *Tabellen der Atomkerne*.
Teil I. *Eigenschaften der Atomkerne*.
Band 1. *Die Elemente Neutron bis Zinn*.
Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 465 p.

⁂ *Proceedings of the Second Japan Congress on Testing Materials*.
Tokyo, 1959, 244 p.

F. H. RAYMOND, *L'automatique des informations*. Masson, Paris, 1959, 186 p.

L. ROBIN, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales*.
Vol. I, 1957, 201 p. ; Vol. II, 1958, 384 p. ; Vol. III (sub tipar),
Gauthier-Villars, Paris.

R. EXNER, M. ROSSKOPF, *Logic in elementary mathematics*.
McGraw Hill, New York, 1959, 274 p.

V. M. FAIRES, *Kinematics*. McGraw Hill, 1959, 468 p.

J. O. HINZE, *Turbulence*. McGraw Hill, 1959, 586 p.

⁂ *Kernenergie-Anlagen* (după lucrări publicate în AEG-Mitteilungen), Berlin 1958, 59 p.

⁂ *Technische Berichte des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung*, Berlin-Charlottenburg, nr. 13, 16, 24.

⁂ *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt*. DVL, Bericht, nr. 73, 77, 94, 96, 97, 99/1959.

P. NOTNI, H. OLEAK, *Die Bewegung eines rotierenden zylinderförmigen Satelliten in der Atmosphäre* (Veröffentlichungen der Sternwarte Babelsberg, Bd. XIII,Heft 3), 1959, 30 p.

P. NOTNI, H. OLEAK, *Die Rotation der Trägerrakete von Sputnik III* (Veröffentlichungen der Sternwarte Babelsberg, Bd. XIII, Heft 4), 1959, 26 p.

Disertații primite de la Institutul politehnic Stuttgart

G. KELLERHALS, *Randwertprobleme bedingter Wahrscheinlichkeiten.* 1959, 30 p.

E. HENZE, *Beiträge zum Irrfahrtproblem.* 1958, 155 p.

G. GOES, *BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourier-koeffizienten*, 1959, 25 p.

H. K. NONNENKAMP, *Berechnung von kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehältern und kreiszylindrischen Bogenstaumauern mit hyperbolischem Wandstärkenverlauf durch das Intergralgleichungsverfahren.* 1959, 164 p.

G. SCHWEIZER, *Beiträge zur Berechnung und zur experimentellen Untersuchung von nichtlinearen Regelkreisen.* 1958, 108 p.

K. LORENZ, *Experimentelle Untersuchungen an Kugelschalen bei gleichförmig verteilter Belastung längs einer Kreislinie normal zur Oberfläche.* 1958, 62 p.

H. ZIRWAS, *Die ergänzende Rückführung als Mittel zur schnellen Regelung von Regelstrecken mit Laufzeit.* 1958, 109 p.

E. SCHWARZ, *Über Geflechte kongruenter Flächen.* 1958, 28 p.

R. HENRICH, *Beitrag zur Frage der optimalen Bemessung der frei wählbaren Regelkonstanten.* 1958, 88 p.

K. KÖSTLIN, *Über die innere Reibung schmelzflüssiger Metalle und Legierungen.* 1958, 17 p.

A. LOTZE, *Über Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik.* 1958, 62 p.

Disertații primite de la Institutul politehnic Karlsruhe

H. ZAHORANSKY, *Die praktische Berechnung der Torsions-Kerbspannungen.* 1958, 94. p.

K. STEPHAN, *Wärmeübergang und Druckabfall laminarer Strömungen im Einlauf von Rohren und ebenen Spalten.* 1959, 109 p.

M. BERDJIS, *Schwingungstilgung in Abgasleitungen mit Hilfe von Resonatoren.* 1958, 183 p.

O. KÖLLER, *Einflussfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenba lkensysteme* 1957, 30 p.

GALL, *Der Einfluss der Quersteifigkeit der Binderscheiben auf den Spannungs- und Formänderungszustand von kreiszylindrischen Schalen.* 1958.

BONGARD, *Zur Theorie und Berechnung von Schalentragwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide.* 1958.

Disertație primită de la Institutul politehnic Aachen

H. MEYER, *Allgemeine Gesetzmässigkeiten bei der pneumatischen Förderung.* 1959, 100 p.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

MECANICĂ APLICATĂ

E. CARAFOLI, **Aerodinamica vitezelor mari (fluide compresibile) 708** p., + **2** pl., **47** lei.

E. CARAFOLI, T. OROVEANU, **Mecanica fluidelor, 2 volume** vol. I 276 p., 7 lei. vol II 412 p., 21, 15 lei.

N. N. PATRAULEA, **Aerodinamica suprafețelor permeabile**, 175 p., 16, 25 lei.

N. TIPEI, **Hidro-aerodinamica lubrificației**, 969 p., 37 lei.

METALURGIE

ELENA LĂBUŞCĂ, **Introducere în metalurgia pulberilor**, 289 p., 13, 50 lei.

ELECTROTEHNICĂ

I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, A. MORARU, C. I. BUDEANU, **Determinarea forțelor axiale în transformatorii electrici de mare putere**, 160 p., 5, 75 lei.

C. I. BUDEANU, **Sistemul practic general de mărimi și unități**, 140 p., 8, 70 lei.

MATEI MARINESCU, PAUL APOSTOL, TUDOR TĂNĂSESCU, **Difuzoare electrodinamice**, 200 p., 9 lei.

TUDOR TĂNĂSESCU, **Manual de tuburi și circuite electronice**, 476 p. + 7 pl., 34 lei.

GH. CARTIANU, **Modulația de frecvență**, 451 p. + 5 pl., 31 lei.

C. I. PENESCU, **Automatica și telemecanica sistemelor energetice**, 787 p. + 15 pl., 52, 50 lei.

CEZAR PARTENI ANTONI, ION S. ANTONIU, **Comportarea mașinilor electrice la unda de șoc**, 201 p., 12,50 lei.

ION S. ANTONIU, **Chestiuni speciale de electrotehnică**, 730 p., 27, 10 lei.

D. BUIMOVICI, **Studiul cîtorva proprietăți ale lingniților din R.P.R. și ale semicocsului lor**, 112 p., 3, 90 lei.

GEORGE BĂRĂNESCU, **Calculul proceselor de ardere**, 394 p. + 1 mapă cu 21 pl. anexe, 40, 41 lei.

IGNAT SAPHIER, **Recuperarea pierderilor de căldură în industrie**, 108, p., 4, 80 lei.

CONSTRUCȚII

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri**, 401 p. + 6 pl., 18,40 lei.

R. J. BALLY, **Metode electrice de îmbunătățire a pămînturilor în lucrările de construcții** 248 p. + 11 pl., 28, 50 lei.

GHEORGHE RUSU, **Tehnica măsurătorilor în construcțiile masive**, 319 p. + 1 pl., 25, 90 lei.

Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul Dvs. pentru 1960.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

I. P. 2, c. 4977

VIII

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

2
ANUL XI
1960

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic Bucureşti ;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor, (INCERC) Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

2

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— [Studii originale *cu caracter fundamental de înalt nivel ştiinţific şi reflectare în practică*].

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune* : *stadiul actual al unei anumite probleme*, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, „Traian Vuia”, Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 2 1960

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU, Scurgerea supersonică în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj conic 325
AL. MARINESCU, Observații cu privire la mișcarea în jurul carenelor de revoluție . 339

HIDROMECANICĂ

DUMITRU DUMITRESCU și VASILE IONESCU, Studiul mișcării lamelor deversante infinite într-un plan vertical 345

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

N. TIPEI și V.N. CONSTANTINESCU, Generalizarea ecuației lui Reynolds la studiul lubrificației în regim turbulent 359

TEORIA MECANISMELOR

CHR. PELECUDI, R.C. BOGDAN și L. CALMACIUC, Contribuții la cinematica mecanismului cu patru elemente articulate 365

REZISTENTA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

J. VALENTA, Starea elasto-plastică a recipientelor cu straturi multiple 379
M. ARCAN și M. TANNENBAUM, Unele aspecte ale problemei fisurării betonului armat studiate fotoelastic 397
E. NICOLAU, Unele probleme ale modelării fotoelastice a betonului armat 409
NICOLAE S. PÎRVULESCU, Despre turtirea elastică a burlanelor de sondă sub acțiunea presiunii exterioare 437
HOREA SANDI, Ecuațiile barelor subțiri elastice. I 449
N. BOICU, Unele probleme ale torsiunii barelor cilindrice cu strat exterior de material diferit 479

Pag.

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

V. MARCU şi P. FREUND, Asupra aderenţei straturilor metalizate pe suprafeţe plane 491
C.I. FLORESCU şi M. VASILESCU, Asupra variaţiilor rezistenţei la penetrare a solurilor 501

NOTE

LUCIAN DUMITRESCU, Asupra numărului Mach limită al scurgerii într-un tub de şoc 513

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

D. PAVELESCU şi I. ILIUC, Densitometru cu semiconductori pentru dozimetria cu film 515
GH. MARIN, Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură 523

RECENZII 527
CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 543

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI, № 2 1960

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

Стр.

ЭЛИЕ КАРАФОЛИ и Д. МАТЕЕСКУ, Сверхзвуковое обтекание системы крестообразное крыло—конический фюзеляж 325
А. МАРИНЕСКУ, Замечания в связи с движением вокруг обтекателей в виде тел вращения 339

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. ДУМИТРЕСКУ и В. ИОНЕСКУ, Исследование движения бесконечных переливающихся струй в вертикальной плоскости 345

СМАЗКА, ТРЕНИЕ, ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Распространение уравнения Рейнольдса на исследование смазки при турбулентном режиме 359

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

К. ПЕЛИКУДИ, Р. БОГДАН и Л. КАЛМАЧУК, К кинематике шарнирного четырехзвенного механизма 365

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ — РЕАЛОГИЯ

Ж. ВАЛЕНТА, Упруго-пластическое состояние многослойных сосудов 379
М. АРКАН и М. ТАНЕНБАУМ, Некоторые аспекты задачи трещинообразования в железобетоне, исследуемой методом фотоупругости 397
Э. НИКОЛАУ, Некоторые задачи фотоупругого моделирования железобетона 409
Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Об упругом сплющивании обсадных труб под действием внешних явлений 437
Х. САНДИ, Уравнения упругих тонких стержней. I 449
Н. БОЙКУ, Некоторые задачи кручения цилиндрического стержня с покрытием из другого материала 479

Стр.

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

В. МАРКУ и П. ФРОЙНД, О прилипании металлизированных слоев на плоские поверхности 491
К. И. ФЛОРЕСКУ и М. ВАСИЛЕСКУ, Об изменениях сопротивления грунтов на внедрение 501

ЗАМЕТКИ

Л. ДУМИТРЕСКУ, О максимальном числе Маха течения в ударной трубе 513

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Д. ПАВЕЛЕСКУ и И. ИЛЮК, Плотномер с полупроводниками для дозиметрии с использованием фотопленки 515
К. МАРИН, Прибор для калориметрирования процессов изнашивания . . . 523

РЕЦЕНЗИИ 527
КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ ПУТЕМ ОБМЕНА 543

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ”

публикует:

— Оригинальные исследования *на высоком уровне представляющие всеобщий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторых вопросов.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, разработанных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термо-аэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность.

— Вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии.

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и с этой целью принимает к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая больших введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, на одной стороне листа; формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики должны быть выполнены китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае абсолютной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная в тексте литература должна даваться общим списком в конце статьи, причем необходимо указывать инициалы и фамилию автора, наименование работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра необходимо представлять резюме на румынском языке, или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме не должно превышать одной страницы, напечатанной на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи посылаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Констатин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie :

•

— des études originales, des recherches fondamentales d'un caractère hautement scientifique, orientées vers l'activité pratique;

— des notes (*communications brèves*) *d'un caractère général, ou représentant une mise au point d'une certaine question*;

— des rapports scientifiques et techniques *ou l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème en soulignant son aspect nouveau, des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée, la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée*;

— des notes bibliographiques *au sujet des livres et études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— aéromécanique (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*);

— hydromécanique (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*).

— constructions mécaniques (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*);

— mécanique générale (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*);

— statique et dynamique des constructions (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*);

— technique des mesures (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultrasons et des isotopes radio-actifs en technique*).

La revue tend a stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leur travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, raionul Gh. Gheorghiu-Dej, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE « TRAIAN VUIA »

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, nº 2 1960

SOMMAIRE

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

Page

E. CARAFOLI et D. MATEESCU, Écoulement supersonique autour du système aile cruciforme-fuselage conique 325
AL. MARINESCU, Remarques sur le mouvement autour des carènes de révolution . 339

HYDROMÉCANIQUE

D. DUMITRESCU et V. IONESCU, Étude du mouvement des lames déversantes infinies dans un plan vertical 345

LUBRIFICATION, FROTTEMENT, USURE

N. TIPEI et N.V. CONSTANTINESCU, Généralisation de l'équation de Reynolds à l'étude de la lubrification en régime turbulent 359

THÉORIE DES MÉCANISMES

CHR. PELECUDI, R.C. BOGDAN und L. CALMACIUC, Beiträge zur Kinematik des Gelenkvierecks 365

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX, ÉLASTICITÉ, PLASTICITÉ, RHÉOLOGIE

J. VALENTA, Elasto-plastic state of multi-layer vessels 379
M. ARCAN und M. TANNENBAUM, Spannungsoptische Untersuchungen des Reissens von Stahlbeton 397
E. NICOLAU, Quelques problèmes soulevés par l'étude au moyen de modèles photoélastiques du béton armé 409
N.S. PÎRVULESCU, Sur l'instabilité élastique des parois des tubes de sondes sous l'action de la pression extérieure 437
HOREA SANDI, Équations des barres élastiques minces. I 449
N. BOICU. Quelques problèmes de la torsion des barres cylindriques à couche externe d'un matériel différent 479

Page

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

V. MARCU et P. FREUND, Sur l'adhérence aux surfaces planes des couches métallisées . . . 491

C.I. FLORESCU et M. VASILESCU, Sur les variations de la résistance à la pénétration des sols . . . 501

NOTES

L. DUMITRESCU, On the value of the maximum Mach number in a shock-tube . 513

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

D. PAVELESCU and I. ILIUC, Semi-conductor densimeter for film dosimetry . . . 515

GH. MARIN, Appareil pour les mesures calorimétriques des processus d'usure . . . 523

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . 527

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION . . . 543

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL SISTEMULUI ARIPĂ CRUCIFORMĂ-FUZELAJ CONIC

DE

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], am tratat problema scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic, și am dat o metodă generală de soluționare pentru cazul general cînd aripa are incidența constantă pe diversele ei porțiuni.

În această lucrare ne propunem să studiem problema scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic, prevăzut cu o placă normală pe aripă astfel situată încît axa fuzelajului să fie intersecția dintre planul aripii și cel al plăcii.

Vom considera sistemul aripă-fuzelaj ca în figura 1, axa fuzelajului avînd față de curentul neperturbat U_∞ incidența α_f în planul vertical Ox_1x_3, și incidența γ_f în planul orizontal Ox_1x_2; aripa, pe de altă parte are incidența α_a, iar placa incidența γ_p.

Scurgerea este raportată la sistemul trirectangular $Ox_1x_2x_3$, axa Ox_1 fiind dirijată după axa fuzelajului.

Vom presupune că fuzelajul are dimensiuni reduse față de conul Mach ($B^2c^2 \ll 1$) și că incidențele aripii, plăcii și fuzelajului sînt destul de mici pentru a putea aplica teoria micilor perturbații.

În acest caz, vom putea descompune scurgerea în jurul sistemului considerat în următoarele trei mișcări:

I — Scurgerea axial simetrică în jurul fuzelajului conic izolat, fără incidență (problemă cunoscută).

II — O mișcare care, însumată cu scurgerea I, reprezintă scurgerea în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj, fuzelajul avînd numai incidența laterală γ_f, placa avînd incidența γ_p, iar aripa neavînd incidență. Este ușor de văzut că, placa fiind simetrică, această mișcare este echivalentă cu scurgerea în jurul sistemului format de placă și fuzelaj conic, avînd incidenţele γ_p şi respectiv γ_f, problemă care a fost soluţionată de noi într-o lucrare anterioară [1].

III — O mişcare care, însumată cu scurgerea I, reprezintă scurgerea în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj conic, fuzelajul avînd numai incidenţa α_f în planul vertical, aripa avînd incidenţa α_a, iar placa neavînd incidenţă.

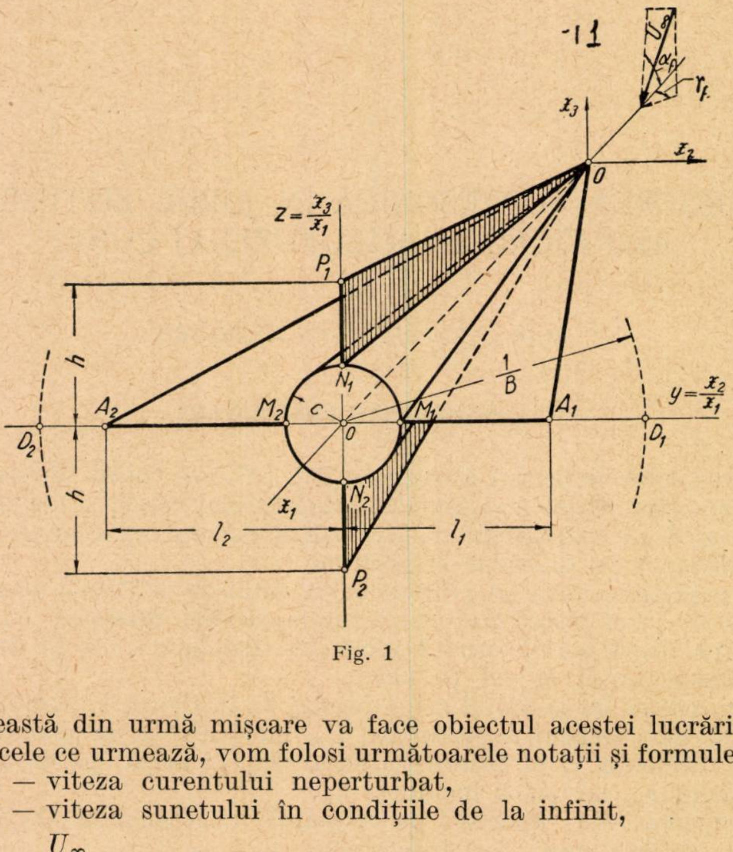


Fig. 1

Această din urmă mişcare va face obiectul acestei lucrări.

În cele ce urmează, vom folosi următoarele notaţii şi formule uzuale :

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile de la infinit,

$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach,

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1x_2x_3$ — sistem octogonal de coordonate, axa Ox_1 fiind dirijată după axa fuzelajului,

$y = \frac{x_2}{x_1}$, $z = \frac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic oyz ($x_1 = 1$, fig. 1),

$\omega\eta\zeta$ — planul lui Busemann, obţinut prin transformarea

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \; \theta = \theta, \; (r^2 = y^2 + z^2, \; \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{1}$$

$oy\mathfrak{z}$ — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad (x = y + i\mathfrak{z}, \ \xi = \eta + i\zeta). \tag{2}$$

În acest plan secțiunea fuzelajului din planul fizic se transformă (considerînd mereu $B^2c^2 \ll 1$) tot într-un cerc de rază c, urma aripii din planul fizic oyz este reprodusă la aceeași scară pe axa reală, iar urma plăcii este reprodusă tot pe axa imaginară, legătura dintre coordonatele punctelor fiind : $\mathfrak{z} = \frac{z}{\sqrt{1-B^2z^2}}, \quad \mathfrak{h} = \frac{h}{\sqrt{1-B^2h^2}}$.

X — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \quad X = Y + iZ, \tag{3}$$

χ — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă

$$\chi^2 = X^2 + H^2, \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2 \tag{4}$$

u, v, w — componentele vitezei de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3, care sînt funcții armonice în planele ξ, x, X, χ.

$\mathcal{U} = u + iu'$, $\mathcal{V} = v + iv'$, $\mathcal{W} = w + iw'$. — funcții analitice între care se pot scrie relațiile de compatibilitate

$$d\mathcal{U}_a = - x d\mathcal{V}_a = \frac{ixd\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-B^2x^2}}. \tag{5}$$

2. STABILIREA RELAȚIILOR FUNDAMENTALE

În planul fizic oyz, condițiile la limită pentru mișcarea de care ne ocupăm (mișcarea III) sînt următoarele :

$$v \cos\theta + (w - \alpha_f U_\infty) \sin\theta = cu \approx 0 \tag{6}$$

pe cercul de rază c,

$$w = \alpha_a U_\infty \tag{7}$$

pe porțiunile A_1M_1 și A_2M_2 ale urmei aripii, și

$$v = 0 \tag{8}$$

pe porțiunile N_1P_1 și N_2P_2 ale urmei plăcii ; condițiile la limită pe restul axei oy și pe cercul Mach sînt aceleași ca și în cazul aripii subțiri izolate ($u = v = 0$).

În continuare, ne vom ocupa de funcția $\mathcal{V}$, toate condițiile la limită putînd fi puse destul de simplu pentru această funcție.

Folosind relațiile de compatibilitate (5) și condițiile de mai sus, se poate deduce (considerînd mereu $B^2c^2 \ll 1$)

$$-dv' \approx dw, \quad v' + w = k_0 = \text{const.}, \tag{9}$$

pe cercul de rază c din planul x (fig. 2), și

$$-dv' = \frac{dw}{\sqrt{1 - B^2y^2}},\quad v' = k_0 - \alpha_a U_\infty, \tag{10}$$

pe segmentele A_1M_1 și M_2A_2.

Considerînd funcția $F(x)$ definită de relația

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{V} - i\,(k_0 - \alpha_f U_\infty), \tag{11}$$

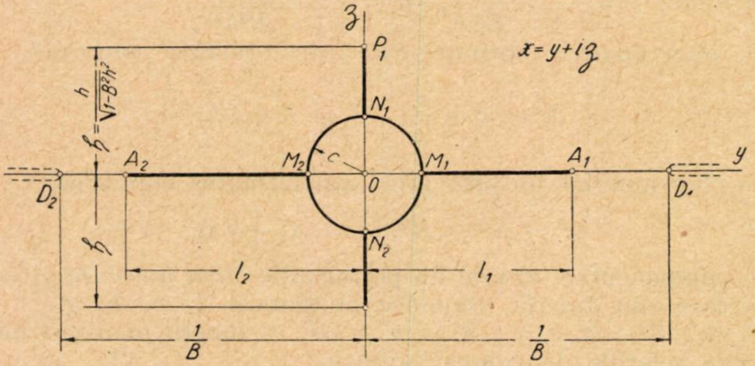


Fig. 2

condițiile limită de mai sus pot fi scrise mai simplu în planul x (fig. 2), sub forma

$$\mathcal{R}e\; x\frac{dF}{dx} = 0 \tag{12}$$

pe cercul de rază c,

$$\mathcal{J}m\,\frac{dF}{dx} = K,\quad K = (\alpha_f - \alpha_a)\,U_\infty, \tag{13}$$

pe segmentele A_1M_1 și M_2A_2, și

$$\mathcal{R}e\,\frac{dF}{dx} = 0 \tag{14}$$

pe segmentele P_1N_1 și N_2P_2, și pe semidreptele $-\infty A_2$ și $A_1\infty$.

Funcția $\frac{dF}{dx}$ prezintă singularitățile

$$\frac{1}{\sqrt{x - l_1}},\quad \frac{1}{\sqrt{x + l_2}},\quad \frac{1}{\sqrt{x - i\mathfrak{h}}},\quad \frac{1}{\sqrt{x + i\mathfrak{h}}}, \tag{15}$$

acestea rezultînd din faptul că vitezele de perturbație u și v au aceleași singularități în bordurile de atac subsonice (A_1 și A_2) ale aripii și (P_1 și P_2) ale plăcii ca și în cazul aripii cruciforme izolate.

Cu ajutorul funcției $\frac{dF}{dx}$, care va fi determinată în cele ce urmează, se poate găsi ușor soluția mișcării, expresia vitezei axiale de perturbație ($u = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}$) putînd fi scrisă sub forma, deja utilizată [1],

$$\mathcal{U} = -\,x\mathcal{V} + \int \mathcal{V} dx = -\,x\frac{dF}{dx} + F. \tag{16}$$

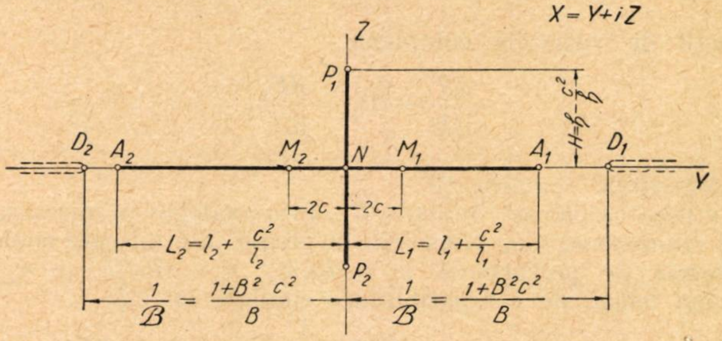

X = Y+iZ
Z
P_1
$H=h-\frac{c^2}{h}$
D_2
A_2
M_2
N
M_1
A_1
D_1
Y
2c
2c
$L_2=l_2+\frac{c^2}{l_2}$
$L_1=l_1+\frac{c^2}{l_1}$
P_2
$\frac{1}{\mathcal{B}}=\frac{1+B^2c^2}{B}$
$\frac{1}{\mathcal{B}}=\frac{1+B^2c^2}{B}$

Fig. 3

Pentru rezolvarea problemei, vom utiliza planul auxiliar X (fig. 3) definit de transformarea conformă (3), plan în care vom considera funcția $\frac{dF}{dX}$, care poate reprezenta o viteză complexă în acest plan, definită de relația

$$\frac{dF}{dX} = \frac{dF}{dx}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\right). \tag{17}$$

Condițiile la limită pentru funcția $\frac{dF}{dX}$ se deduc din cele ale funcției $\frac{dF}{dx}$, și sînt

$$\mathcal{I}m\,\frac{dF}{dX} = 0 \tag{18}$$

pe segmentul M_2M_1,

$$\mathcal{I}m\,\frac{dF}{dX} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{19}$$

pe segmentele A_2M_2 și M_1A_1, și

$$\mathcal{R}e\,\frac{dF}{dX} = 0 \tag{20}$$

pe segmentul P_1P_2 și pe semidreptele $-\infty A_2$ și $A_1\infty$.

Ţinînd seama de (17), rezultă că funcţia $\frac{dF}{dX}$ va prezenta aceleaşi singularităţi în bordurile de atac subsonice ale aripii şi plăcii, ca şi funcţia $\frac{dF}{dx}$, însă transpuse în planul X, aceste singularităţi fiind

$$\frac{1}{\sqrt{X-L_1}},\ \frac{1}{\sqrt{X+L_2}},\ \frac{1}{\sqrt{X-iH}}\ \text{şi}\ \frac{1}{\sqrt{X+iH}}. \tag{21}$$

Pentru soluţionarea problemei, vom descompune funcţia $\frac{dF}{dX}$ în două funcţii de variabilă complexă

$$\frac{dF}{dX}=\mathcal{V}_a+\frac{dF_1}{dX}, \tag{22}$$

avînd următoarele semnificaţii:

a) În ceea ce priveşte funcţia $\mathcal{V}_a$, prin analogie cu mişcarea în jurul unei aripi cruciforme, vom considera în planul X o mişcare conică fictivă avînd vitezele de perturbaţie $u_a=\mathcal{R}e\,\mathcal{U}_a$, $v_a=\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a$ şi $w_a=\mathcal{R}e\,\mathcal{W}_a$ care satisfac relaţii de compatibilitate similare cu (5)

$$d\mathcal{U}_a=-X\,d\mathcal{V}_a=\frac{iX\,d\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}},\ \left(\frac{1}{\mathcal{B}}=\frac{1+B^2c^2}{B}\right); \tag{23}$$

vom considera de asemenea că aripa cruciformă fictivă are bordurile de atac subsonice, situate în aceleaşi puncte $X=L_1$, $X=-L_2$, $X=iH$ şi $X=-iH$, şi că placa fictivă are incidenţa laterală nulă, în timp ce aripa fictivă are incidenţa nulă pe porţiunea M_2M_1 şi incidenţa $\alpha_A=\frac{K}{2U_\infty}\sqrt{1-4\mathcal{B}^2c^2}$ pe porţiunile A_2M_2 şi M_1A_1.

Rezultă pentru funcţia $\mathcal{V}_a$ din mişcarea conică în jurul aripii cruciforme fictive definite mai sus, aceleaşi condiţii, (18) şi (20), ca şi pentru funcţia $\frac{dF}{dX}$, cu observaţia că condiţia (19) pe segmentele A_2M_2 şi M_1A_1 devine

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{V}_a=\frac{K}{2}, \tag{24}$$

funcţia $\mathcal{V}_a$ prezentînd aceleaşi singularităţi în bordurile de atac ale aripii şi plăcii ca şi $\frac{dF}{dX}$.

Funcţiile $\mathcal{U}_a$ şi $\mathcal{V}_a$, reprezentînd soluţia scurgerii conice în jurul unei aripi cruciforme izolate, deja cunoscută, pot fi determinate, şi ţinînd seama de (16), (17), (22) şi (23), vom putea scrie pentru $\mathcal{U}^{(a)}$, care reprezintă contribuția mișcării conice fictive considerate mai sus în $\mathcal{U}$ din planul x, relația

$$\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x} \mathcal{V}_a. \tag{25}$$

b) Pentru funcția $\frac{dF_1}{dX}$ rezultă, ținînd seama de (22), aceleași condiții (18) și (20) ca și pentru funcția $\frac{dF}{dX}$, iar pe segmentele A_2M_2 și M_1A_1 condiția

$$\mathcal{I}m \frac{dF_1}{dX} = \frac{K}{2} \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}. \tag{26}$$

Este ușor de văzut că $\frac{dF_1}{dX}$ poate fi considerată ca fiind viteza complexă a unei mișcări potențiale plane, în jurul plăcii orizontale M_1M_2 de lățime $4c$, situată într-un curent vertical avînd viteza la infinit $\frac{K}{2}$. Ținînd seama de transformarea conformă (3) și de (17), $\frac{dF_1}{dx}$ reprezintă în planul x, viteza complexă în jurul unui cerc de rază c, situat într-un curent vertical avînd viteza la infinit $\frac{K}{2}$, soluția acestei mișcări fiind

$$F_1 = \frac{iK}{2}\left(x - \frac{c^2}{x}\right), \quad \frac{dF_1}{dx} = \frac{iK}{2}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right). \tag{27}$$

Contribuția acestei mișcări în $\mathcal{U}$, ținînd seama de relațiile (16), (22) și (27), este

$$\mathcal{U}^{(1)} = -x\frac{dF_1}{dx} + F_1 = \frac{-iKc^2}{x}. \tag{28}$$

În cele din urmă, ținînd seama de (22), se obține prin însumarea celor două contribuții, $\mathcal{U}^{(a)}$ și $\mathcal{U}^{(1)}$, viteza axială de perturbația $u = \mathcal{R}e\mathcal{U}$, din mișcarea în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj care ia în considerație efectul incidențelor aripii cruciforme și fuzelajului,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(a)} + \mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a - \frac{iKc^2}{x}, \tag{29}$$

astfel problema reducîndu-se la aceea a soluționării unei mișcări conice în jurul unei aripi cruciforme izolate, fictive.

3. CALCULUL VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE $u = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}$

Pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbație trebuie determinate, după cum rezultă din (29), funcțiile $\mathcal{U}_a$ și $\mathcal{V}_a$. În cele ce urmează vom trece la determinarea funcției $\mathcal{U}_a$, urmînd ca $\mathcal{V}_a$ să fie dedusă din aceasta prin utilizarea relațiilor de compatibilitate (23).

Condițiile la limită pentru funcția $\mathcal{U}_a$ se deduc din cele ale funcției $\mathcal{V}_a$ (indicate mai sus) prin utilizarea relațiilor de compatibilitate (23), rezultînd aceleași condiții (18) și (20) ca și pentru funcțiile $\mathcal{V}_a$ și $\dfrac{dF}{dX}$, iar pe segmentele A_1M_1 și M_2A_2 fiind respectiv

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{U}_a = \mp Kc, \tag{30}$$

semnul minus referindu-se la segmentul A_1M_1.

De asemenea, utilizînd relațiile de compatibilitate (23), se poate deduce că funcția $\mathcal{U}_a$ prezintă aceleași singularități (21) în bordurile de atac ale aripii cruciforme fictive ca și $\mathcal{V}_a$.

Ținînd seama de metodele cunoscute [3] și [4], se poate ușor determina funcția $\mathcal{U}_a$ avînd condițiile la limită de mai sus.

Astfel în planul auxiliar $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ (fig. 4) funcția $\mathcal{U}_a$ are expresia 1))

$$\mathcal{U}_a = \frac{Q_0 + Q_1\chi + Q_2\chi^2}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)(\Lambda_2 + \chi)}} - \frac{2Kc}{\pi}\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1 - \chi)(\Lambda + \varkappa)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\varkappa - \chi)}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + \chi)(\Lambda_1 + \varkappa)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\varkappa + \chi)}}\right], \tag{31}$$

în care, ținînd seama de (3) și (4), avem

$$H = \mathfrak{h} - \frac{c^2}{\mathfrak{h}}, \quad \mathfrak{h} = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2h^2}}, \tag{32 a}$$

$$\Lambda_1^2 = L_1^2 + H^2, \quad L_1 = l_1 + \frac{c^2}{l_1}, \tag{32 b}$$

$$\Lambda_2^2 = L_2^2 + H^2, \quad L_2 = l_2 + \frac{c^2}{l_2}, \tag{32 c}$$

$$\varkappa = 4c^2 + H^2 \tag{32 d}$$

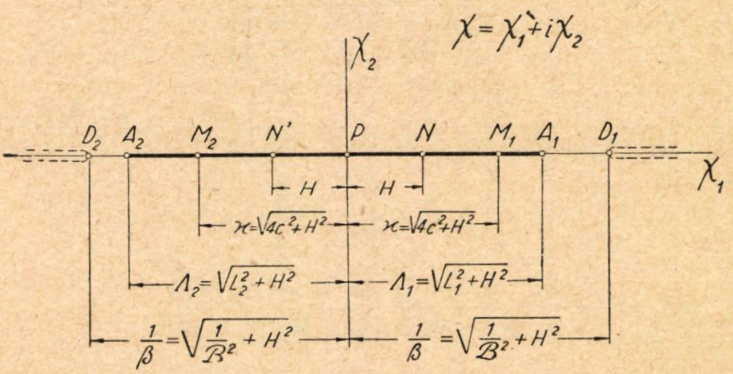
iar Q_0, Q_1 și Q_2 sînt constante care trebuie determinate.

---

1) Expresia (31) a funcției $\mathcal{U}_a$ este valabilă, în limitele aproximației anunțate, numai pe aripă, pe fuzelaj și pe placă sau în imediata lor apropiere. Am menținut totuși simbolic χ și . în formulele următoare, în care se va considera $\chi = \chi_1$.

Funcţia $\mathcal{V}_a$ poate fi determinată prin integrarea relaţiilor de compatibilitate (23). Astfel, pe aripă şi pe fuzelaj

$$\mathcal{V}_a = -\,\mathcal{R}e \int_{\frac{1}{\beta}}^{\chi} \frac{d\mathcal{U}_a}{\sqrt{\chi^2 - H^2}} + iG, \tag{33}$$



$\chi = \chi_1 + i\chi_2$
χ_2
χ_1
D_2
A_2
M_2
N'
P
N
M_1
A_1
D_1
H
H
$\varkappa = \sqrt{4c^2 + H^2}$
$\varkappa = \sqrt{4c^2 + H^2}$
$\Lambda_2 = \sqrt{l_2^2 + H^2}$
$\Lambda_1 = \sqrt{l_1^2 + H^2}$
$\frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} + H^2}$
$\frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{B}^2} + H^2}$

Fig. 4

în care

$$\varkappa < \chi = \chi_1 < \Lambda_1 \text{ şi } -\Lambda_2 < \chi = \chi_1 < -\varkappa,\ G = \frac{K}{2} \text{ pe aripă, şi}$$

$$H < \chi = \chi_1 < \varkappa \text{ şi } -\varkappa < \chi = \chi_1 < -H,\ G = 0 \text{ pe fuzelaj,}$$

iar pe placă

$$\mathcal{V}_a = i\,\mathcal{R}e \int_{H}^{\chi} \frac{dU_a}{\sqrt{H^2 - \chi^2}}, \tag{34}$$

în care $-H < \chi = \chi_1 < H$.

Efectuînd calculele, se obţine

— *Pe aripă şi pe fuzelaj* (porţiunile A_1M_1 şi M_1N)

$$\mathcal{V}_a = -\frac{Q_0 + R_1\chi + R_2\chi^2 + R_3\chi^3}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)(\Lambda_2 + \chi)}\sqrt{\chi^2 - H^2}} + \Big[R_4\mathbf{F}(\varphi, k_1) +$$

$$+ R_5\mathbf{E}(\varphi, k_1) + R_6\mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_1, k_1) + R_7\mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_2, k_1)\Big]_{\varphi=\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} + iG \tag{35}$$

în care

$$R_1 = Q_1 - \frac{Q_0 + Q_1H + Q_2H^2}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}\,\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{H}, \tag{36 a}$$

$$R_2 = Q_2 - \frac{Q_0 + Q_1H + Q_2H^2}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}\,\frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{H}, \tag{36 b}$$

$$R_3 = \frac{Q_0 + Q_1H + Q_2H^2}{H(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}, \tag{36 c}$$

$$R_4 = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}} \left\{ \frac{1}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 - H)} \left[Q_0 \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2H}{H} - \right.\right.$$

$$\left. - Q_1 (\Lambda_1 - \Lambda_2) + Q_2 (2\Lambda_1\Lambda_2 - H(\Lambda_1 + \Lambda_2) \right] - \frac{2Kc}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(\Lambda_1 - \varkappa)(\Lambda_2 + \varkappa)}}{\varkappa + H} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sqrt{(\Lambda_1 + \varkappa)(\Lambda_2 - \varkappa)}}{\varkappa - H} \right] \right\}, \qquad (36\text{ d})$$

$$R_5 = \frac{1}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 - H)\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}} \left[(Q_0 + Q_2 H^2) \frac{\Lambda_1\Lambda_2 - H^2}{H^2} - \right.$$

$$\left. - Q_1 (\Lambda_1 - \Lambda_2) \right], \qquad (36\text{ e})$$

$$R_6 = - \frac{K}{\pi} \frac{4cH}{\varkappa^2 - H^2} \sqrt{\frac{(\Lambda_1 - \varkappa)(\Lambda_2 + \varkappa)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}, \qquad (36\text{ f})$$

$$R_7 = - \frac{K}{\pi} \frac{4cH}{\varkappa^2 - H^2} \sqrt{\frac{(\Lambda_1 + \varkappa)(\Lambda_2 - \varkappa)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}, \qquad (36\text{ g})$$

$$G = \frac{K}{2} \text{ pe aripă, și } G = 0 \text{ pe fuzelaj;}$$

$\mathbf{F}(\varphi, k_1)$, $\mathbf{E}(\varphi, k_1)$ și $\mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_1, k_1)$, $\mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_2, k_1)$ sînt integrale eliptice de speța I-a, a II-a și respectiv a III-a, parametrii lor avînd valorile

$$k_1^2 = \frac{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 - H)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}, \qquad (37\text{ a})$$

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(\Lambda_1 + H)(\chi - H)}{(\Lambda_1 - H)(\chi + H)}}, \qquad (37\text{ b})$$

$$\rho_1 = - \frac{(\Lambda_1 - H)(\varkappa + H)}{(\Lambda_1 + H)(\varkappa - H)}, \qquad (37\text{ c})$$

$$\rho_2 = - \frac{(\Lambda_1 - H)(\varkappa - H)}{(\Lambda_1 + H)(\varkappa + H)}. \qquad (37\text{ d})$$

— *Pe placă*

$$\mathcal{V}_a = i \frac{Q_0 + P_1\chi + P_2\chi^2 + P_3\chi^3}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)(\Lambda_2 + \chi)}\sqrt{H^2 - \chi^2}} + i \left[P_4 \mathbf{F}(\varphi, k_2) + \right.$$

$$\left. + P_5 \mathbf{E}(\varphi, k_2) + P_6 \mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_3, k_2) + P_7 \mathbf{\Pi}(\varphi, \rho_4, k_2) \right]_{\varphi = \varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}, \qquad (38)$$

în care

$$P_1 = -\frac{Q_0\Lambda_1 + (Q_1 + Q_2\Lambda_1)\,H^2}{\Lambda_1^2 - H^2}, \tag{39 a}$$

$$P_2 = -\frac{Q_0}{H^2}, \tag{39 b}$$

$$P_3 = \frac{Q_0\Lambda_1 + (Q_1 + Q_2\Lambda_1)\,H^2}{H^2(\Lambda_1^2 - H^2)}, \tag{39 c}$$

$$P_4 = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\left[\frac{Q_0}{H^2} - Q_2 + \frac{2Kc}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\Lambda_1 - \varkappa}{\Lambda_2 + \varkappa}} - \sqrt{\frac{\Lambda_1 + \varkappa}{\Lambda_2 - \varkappa}}\right)\right], \tag{39 d}$$

$$P_5 = -\frac{-1}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 - H)\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\left[(Q_0 + Q_2H^2)\,\frac{\Lambda_1\Lambda_2 - H^2}{H^2} - \right.$$

$$\left. - Q_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)\right], \tag{39 e}$$

$$P_6 = \frac{2Kc}{\pi\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\,\frac{\Lambda_2 - H}{\varkappa + H}\sqrt{\frac{\Lambda_1 - \varkappa}{\Lambda_2 + \varkappa}}, \tag{39 f}$$

$$P_7 = \frac{-2Kc}{\pi\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\,\frac{\Lambda_2 - H}{\varkappa - H}\sqrt{\frac{\Lambda_1 + \varkappa}{\Lambda_2 - \varkappa}}, \tag{39 g}$$

şi în care

$$k_2^2 = \frac{2H(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}, \tag{40 a}$$

$$\varphi_2 = \text{arc sin}\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + H)(H + \chi)}{2H(\Lambda_2 + \chi)}}, \tag{40 b}$$

$$\rho_3 = -\frac{2H(\Lambda_2 + \varkappa)}{(\Lambda_2 + H)(\varkappa + H)}, \tag{40 c}$$

$$\rho_4 = \frac{2H(\Lambda_2 - \varkappa)}{(\Lambda_2 + H)(\varkappa - H)}. \tag{40 d}$$

Introducînd expresiile găsite pentru $\mathcal{U}_a$ şi $\mathcal{V}_a$ în (29) se obţine expresia vitezei axiale de perturbaţie, $u = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}$, în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj conic.

Soluţia problemei pentru punctele de pe porţiunile A_2M_2 şi M_2N_1 ale aripii şi fuzelajului se obţin înlocuind în expresia lui $\mathcal{U}$ pentru porţiunile A_1M_1 şi M_1N_1 pe l_1 prin l_2 şi pe l_2 prin l_1, după ce în prealabil au fost determinate constantele Q_0, Q_1, Q_2.

Determinarea constantelor. În expresia vitezei axiale de perturbaţie sînt 3 constante nedeterminate şi anume Q_0, Q_1, Q_2. Aceste constante pot fi determinate utilizînd condiţiile fizice iniţiale ca aripa să aibă incidenţa α_a, iar placa incidenţa nulă. Aceste condiţii pot fi scrise sub forma

$$\mathcal{R}e \int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă}} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix}\, d\mathcal{U} = \alpha_a U_\infty, \tag{41}$$

care reprezintă de fapt două condiţii, aplicîndu-se atît pentru punctele aripii de pe porţiunea $A_1 M_1$, cît şi pentru punctele de pe porţiunea $A_2 M_2$, şi

$$\mathcal{R}e \int_{\text{cerc Mach}}^{\text{placă}} \frac{d\mathcal{U}}{x} = 0. \tag{42}$$

Primită la redacţie la 12 februarie 1960

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СИСТЕМЫ КРЕСТООБРАЗНОЕ КРЫЛО — КОНИЧЕСКИЙ ФЮЗЕЛЯЖ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается обтекание системы крыло-конический фюзеляж, оснащенной нормальной пластинкой (рис. 1), в том случае, когда передние кромки крыла и пластинки дозвуковые, причем фюзеляж имеет угол атаки, различный от углов атаки крыла и нормальной пластинки.

Задача трактуется в гипотезе малых возмущений, причем считается, что размеры фюзеляжа достаточно малы по сравнению с конусом Маха, и что углы атаки крыла, нормальной пластинки и фюзеляжа также достаточно малы.

Общее движение вокруг рассматриваемой системы разлагается на три движения, одно из которых представляет собой уже известное осесимметричное обтекание изолированного конического фюзеляжа, другое — обтекание системы симметричная пластинка — фюзеляж, являющееся предметом другой работы авторов [1], а третье — обтекание системы крестообразное крыло — фюзеляж, причем пластинка не имеет, как и фюзеляж, бокового угла атаки. Это последнее движение является предметом настоящего исследования.

Задача рассматривается в подходящей плоскости, где сводится к определению двух простых плоских потенциальных движений, одно из которых имеет место вокруг крестообразной пластинки и происходит от конического движения вокруг тонкого крестообразного крыла, а другое имеет место вокруг окружности.

Затем выводится общее выражение осевой скорости возмущения и указывается способ определения постоянных.

ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE AUTOUR DU SYSTÈME AILE CRUCIFORME-FUSELAGE CONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs traitent le problème de l'écoulement autour du système aile-fuselage conique, pourvu d'une plaque normale (fig. 1), dans le cas où les bords d'attaque de l'aile et de la plaque sont subsoniques, l'incidence du fuselage étant différente de celles de l'aile et de la plaque normale.

L'étude est faite dans l'hypothèse des petites perturbations, en considérant — à cet effet — que les dimensions du fuselage sont assez petites par rapport au cône de Mach et que les incidences de l'aile, de la plaque normale et du fuselage sont, elles aussi, suffisamment petites.

Le mouvement général autour du système considéré est décomposé en trois mouvements, dont le premier représente l'écoulement axial symétrique autour du fuselage conique isolé — déjà connu — , le second représente l'écoulement autour du système plaque symétrique-fuselage, qui a fait l'objet d'un autre travail des mêmes auteurs [1], et le dernier represente l'écoulement autour du système aile cruciforme-fuselage, la plaque ainsi que le fuselage étant sans incidence latérale ; ce dernier mouvement fait l'objet de cette étude.

Le problème est ramené à un plan convenablement choisi, où il est réduit au problème de détermination de deux mouvements simples : un mouvement conique autour d'une aile cruciforme mince, et un mouvement plan autour d'un cercle.

Les auteurs donnent l'expression générale de la vitesse axiale de perturbation u, tout en indiquant la voie à suivre pour déterminer les constantes.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *Ecoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*. Révue de Mécanique Appliquée, IV, *3* (1959).
2. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *A General Method for Determining the Wing-Conical Body Interference in Supersonic Flow*. Révue de Mécanique Appliquée, V, *2* (1960).
3. E. CARAFOLI, et colabb., *L'écoulement supersonique autour d'une aile a disque axial*. Révue de Mécanique Appliquée, I, *1* (1956).
4. E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics*. Ed. tehnicà, Bucarest, 1956.

STUDII

AEROMECANICĂ

OBSERVAȚII CU PRIVIRE LA MIȘCAREA ÎN JURUL CARENELOR DE REVOLUȚIE

DE

AL. MARINESCU

Problema mișcării în jurul carenelor de revoluție la viteze mari subsonice, care face obiectul lucrării de față, a intrat în atenția cercetării nu de multă vreme prin lucrările din referințele [1] și [2].

Ecuațiile care descriu mișcarea în acest caz sînt neliniare și găsirea vitezelor respectiv a presiunilor în jurul carenelor prezintă serioase dificultăți.

În referințele [1] și [2] pornindu-se în ipoteza perturbațiilor mici de la următoarea ecuație a potențialului vitezelor

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = M_\infty^2 \frac{\varkappa + 1}{U_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{1}$$

se presupune că $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \text{const.}$, cu alte cuvinte că viteza axială de perturbație $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ este liniară și soluționarea ecuației (1) ajunge astfel la soluționarea unei ecuații liniare.

În lucrarea de față, ideea care ne călăuzește este aceea că viteza de perturbație $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ are un rol dominant în distribuția presiunilor pe carenă, și vom căuta s-o determinăm fără a face vreo presupunere asupra ei.

De aceea pornind tot de la ecuația (1) pe care o satisface potențialul vitezelor de perturbație după ce trecem în coordonatele cilindrice

$$x = x\ ,\ y = r\cos\omega\ ,\ z = r\sin\omega,$$

ținînd seama că avem simetrie de rotație adică $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0$ și derivînd față de x ajungem la ecuația

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) = M_\infty^2 \frac{\varkappa + 1}{U_\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (2)$$

Presupunem acum carena foarte alungită cu alte cuvinte că $\frac{dr}{dx}$ este foarte mic. Deoarece contribuția lui $v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ în ce privește presiunile este de ordinul $\frac{v^2}{U_\infty^2}$ față de $\frac{u}{U_\infty}$ deci foarte mică, neglijînd termenul $\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} \cdot v$ ținînd seama de condiția de irotaționalitate și notînd $x = \sqrt{1 - M_\infty^2} \cdot \xi = \beta \cdot \xi$ ecuația (2) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{u^2}{2}\right), \quad (3)$$

unde

$$\alpha = \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{\varkappa + 1}{U_\infty}.$$

Vom căuta soluția ecuației (3) pe baza celei de-a doua formule a lui Green, printr-o extindere a teoriei bidimensionale întîlnită la aripi [3].

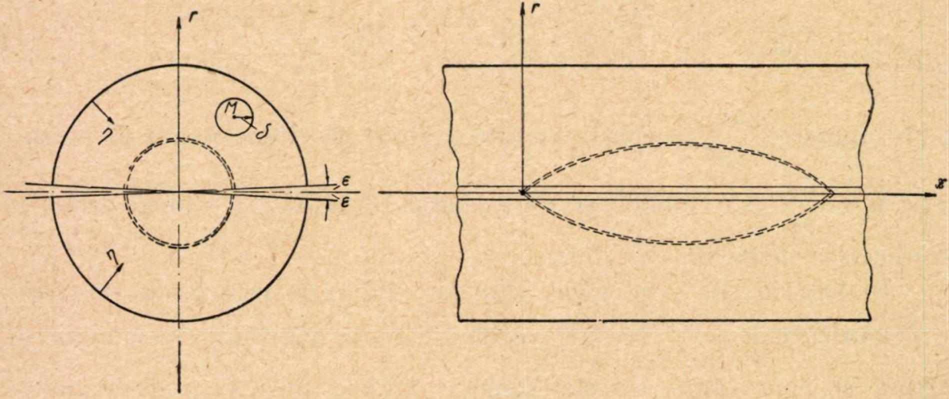


Fig. 1

În acest caz altfel de cum s-a precedat în teoria aripii [3] vom considera carena încadrată de doi semicilindri indefiniți închizînd cînd $\varepsilon \to 0$ (fig. 1) un volum τ mărginit de suprafața S.

Fie pe un acelaşi plan meridian u_s viteza în semicilindrul superior şi u_i în semicilindrul inferior şi să considerăm ca soluţie fundamentală pentru ecuaţia lui Laplace

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (r - r')^2}}\,. \tag{4}$$

Variabilele de integrare fiind θ, r', ξ', atunci

$$dS = r'\, d\theta\, d\xi' \text{ şi } d\tau = r' d\theta\, dr'\, d\xi'.$$

Variaţia lui θ este de la ε la $\pi - \varepsilon$ pentru semicilindrul superior şi de la $-\varepsilon$ la $-\pi + \varepsilon$ pentru semicilindrul inferior.

Apoi întrucît perturbaţiile vitezelor în faţa ca şi în spatele carenei sînt foarte mici, variaţia lui ξ' nu o vom considera între $-\infty$ şi $+\infty$ ci între 0 şi l prin l înţelegînd lungimea carenei.

Construind soluţia în semicilindrul superior şi apoi în cel inferior prin adunarea celor două soluţii sîntem conduşi cînd $\varepsilon \to 0$ la soluţia de bază a problemei

$$u(\xi, r) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\text{carenă}} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r'} - \frac{\partial u_i}{\partial r'} \right) - (u_s - u_i) \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS -$$

$$- \frac{\alpha}{4\pi} \iiint\limits_{\tau} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \left(\frac{u^2}{2} \right) d\tau. \tag{5}$$

Primul termen al formulei (5) pe care îl însemnăm cu u_L reprezintă soluţia problemei liniare şi ca o verificare ţinînd seama că pe carenă

$$r' = r_c \;;\; r = 0 \;;\; u_s - u_i = 0 \tag{6}$$

iar

$$\frac{\partial u_s}{\partial r'} - \frac{\partial u_i}{\partial r'} = \frac{\partial v_s}{\partial x'} - \frac{\partial v_i}{\partial x'} = 2 U_\infty \frac{d^2 r_c}{dx'^2} \tag{7}$$

obţinem imediat soluţia clasică dedusă pe baza sursei liniforme [4].

Formula (5) se mai poate scrie integrînd prin părţi faţă de ξ' în cel de-al doilea termen,

$$u(\xi, r) = u_L + \alpha \left[\frac{u^2}{2} - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau} \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau \right]. \tag{8}$$

Rezolvînd faţă de u în (8) din condiţia de a avea viteza nulă la vîrf obţinem ecuaţia integrală

$$u = \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 2 \left(\frac{u_L}{\alpha} - I_1 \right)}\,, \tag{9}$$

unde

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau} \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau. \tag{10}$$

Singura dificultate a rămas acum efectuarea integralei (10), care conţine funcţia necunoscută u.

Integrînd în raport cu θ și operînd derivarea aceasta se poate scrie

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^\infty \int_0^l u^2 \left[-\frac{r'}{[(\xi-\xi')^2 + r'^2]^{3/2}} + \frac{3r'(\xi-\xi')^2}{[(\xi-\xi')^2 + r'^2]^{5/2}} \right] dr' d\xi'. \quad (11)$$

Soluționarea ecuației (9) care constă în esență în efectuarea integralei (11) se poate face prin aproximații succesive înlocuind mai întîi în (11) pe u cu o funcție apropiată, cunoscută. Ca aplicație s-a considerat carena cu datele din referința [5], tabela III, pag. 8 (raportul de finețe 6). S-a înlocuit în (11) u cu u_L, s-a efectuat I_1 și avînd tot din referința [5] pe u_L pentru carena în cauză, din (9) s-a calculat u pentru diverse valori ale raportului $\frac{x}{l}$. Avînd pe u astfel calculat, din formula

$$\frac{P_{static}}{P_{total}} \approx \frac{1 - \varkappa \dfrac{u}{U_\infty} M_\infty^2}{1 - \varkappa \dfrac{u}{U_\infty} M_\infty^2 + \dfrac{\varkappa}{2} M_\infty^2 + \varkappa \dfrac{u}{U_\infty} M_\infty}, \quad (12)$$

cu $M_\infty = 0{,}9$; $a_\infty = 325$ m/s; și $\varkappa = 1{,}41$ s-au calculat valorile teoretice ale lui $\frac{P_{static}}{P_{total}}$ înscrise cu linie plină în diagrama din figura 2. Punctat pe aceeași diagramă este trasată curba experimentală pentru aceeași carenă.

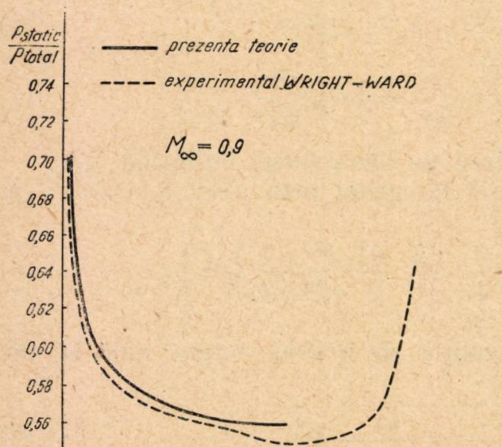


Fig. 2

Curba teoretică nu este trasată mult peste $\frac{x}{l} = 0{,}5$ deoarece din această regiune încep desprinderile și teoria micilor perturbații nu mai este valabilă.

Apoi curba experimentală prezintă peste $\frac{x}{l} = 0{,}5$ o distorsiune care rezidă în faptul că modelul experimentat a avut dimensiuni mari față de ale tunelului. Ca dovadă este faptul că această distorsiune nu se observă la modele de dimensiuni mai mici (vezi [5]). O comparație deci a teoriei cu experiența peste $\frac{x}{l} = 0{,}5$ ar fi discutabilă pentru carena din cazul de față.

Primită la redacție la 12 decembrie 1959

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С ДВИЖЕНИЕМ ВОКРУГ ОБТЕКАТЕЛЕЙ В ВИДЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе исследуется движение вокруг обтекателей в виде тел вращения при больших дозвуковых скоростях.

Вычисления производятся в гипотезе малых возмущений.

Определяется осевая возмущающая скорость путем решения нелинейного уравнения и, в зависимости от этой скорости, вычисляется отношение $\frac{\mathrm{P}_{\text{ст}}}{\mathrm{P}_{\text{сумм}}}$, которое сравнивается с уравнением, экспериментально найденным Райтом и Вардом.

REMARQUES SUR LE MOUVEMENT AUTOUR DES CARÈNES DE RÉVOLUTION

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le mouvement autour des carènes de révolution aux grandes vitesses subsoniques.

Les calculs sont faits dans l'hypothèse des petites perturbations.

La vitesse axiale de perturbation est déterminée par la solution d'une équation non linéaire. En fonction de cette vitesse, il calcule le rapport $\frac{P_{\text{statique}}}{P_{\text{total}}}$, qu'il compare avec celui que Wright et Ward ont trouvé expérimentalement.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Oswatitsch, *Flow Around Bodies of Revolution at Mach Number One.* Brooklyn Polytehnic's Conference on High-Speeds Aeronautics, Ianuary, 20—22 (1955).
2. F.P. Maeder, U.H. Thomen, *Some Results of Linearized Transonic Flow About Slender Airfoils and Badies of Revolution* J.A.S., februarie (1956).
3. R.I. Spreiter, A. Alksne, *Theoretical Prediction of Pressure distribution on Nonlifting Airfoils at High Subsonic Speeds.* NACA, Report, 1217 (1955).
4. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti (1957).
5. H.R. Wright, G.V. Ward, *NACA Transonic Wind Tunel Test Section.* NACA, Report, 1231 (1955).

STUDII

HIDROMECANICĂ

STUDIUL MIŞCĂRII LAMELOR DEVERSANTE INFINITE ÎNTR-UN PLAN VERTICAL

DE

DUMITRU DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

şi VASILE IONESCU

INTRODUCERE

Studiul mişcării fluidelor reale cu suprafaţă liberă a fost, datorită importanţei ei practice, o preocupare continuă a hidraulicienilor. Cu toate că sîntem în posesia unui bogat material experimental, dificultăţile teoretice insurmontabile au făcut aproape imposibilă găsirea unei soluţii generale matematice, care să ţină seama de toţi parametrii mişcării reale.

În anumite cazuri particulare, ca de exemplu scurgerea peste deversoare cu muchie ascuţită, ipoteza fluidelor perfecte poate duce la rezultate teoretice care redau cu o foarte bună aproximaţie fenomenul real.

În raport cu importanţa ei practică, problema mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă a fost relativ puţin studiată. Majoritatea lucrărilor de specialitate [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] tratează problema mişcării fluidelor grele cu o singură suprafaţă liberă.

În lucrarea de faţă, ne propunem să studiem în ipoteza fluidului ideal, mişcarea într-un plan vertical a lamelor deversante sub influenţa gravitaţiei. Rezultatele teoretice obţinute cu această ocazie, ne vor permite să determinăm, într-o lucrare ulterioară, mişcarea plană peste un deversor cu muchie ascuţită.

În prima parte a lucrării se enunţă ipotezele de calcul adoptate, condiţiile la limită ale problemei şi se exprimă forma generală a soluţiei ca limită a unui şir de aproximaţii succesive. Partea a doua cuprinde un studiu detaliat al soluției; se studiază diferitele aproximații, convergența șirului de aproximații succesive și se discută existența soluției limită. Ultima parte a lucrării conține concluzii generale care rezultă din studiul mișcării și se arată direcția în care pot fi continuate cercetările.

FORMULAREA MATEMATICĂ A MIȘCĂRII LAMELOR DEVERSANTE

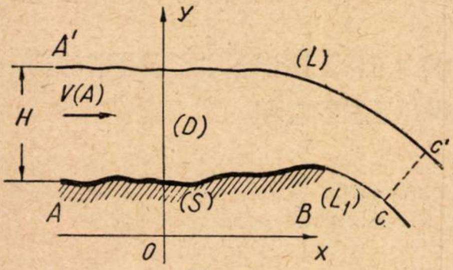


Fig. 1

Notații, ipoteze de calcul. Presupunem de la început că vîscozitatea fluidului este neglijabilă și că mișcarea este plană și irotațională. Aspectul general al mișcării este arătat în figura 1.

Suprafața de scurgere (S) este nelimitată la infinit amonte, tinde asimptotic către orizontală în acest punct și este limitată în punctul B. Presupunem că fluidul are la infinit amonte o viteză constantă V_0; notăm cu H și q înălțimea, respectiv debitul mișcării la infinit amonte. După ce fluidul a părăsit suprafața de scurgere (S) în punctul B, cade liber în cîmpul gravitației sub formă de lamă deversantă. Presupunem că atît pe suprafața superioară (L) cît și pe cea inferioară (L_1) acționează presiunea atmosferică constantă p_0. Notăm cu V viteza fluidului pe suprafața liberă, cu θ înclinarea vitezei pe suprafața de scurgere (S) și cu $y = y\ (x)$ ecuația suprafețelor libere raportate la un sistem de axe rectangulare, în care axa absciselor este paralelă cu direcția asimptotică a suprafeței (S).

Condițiile la limită. Problema la limită. În ipotezele simplificatoare pe care le-am făcut, problema revine la determinarea potențialului complex al mișcării $f\ (z) = \varphi\ (x, y) + i\ \psi\ (x, y)$ în domeniul (D) ocupat de fluid și a liniilor libere (L) și (L_1) în așa fel încît pe conturul domeniului (D) astfel determinat să fie satisfăcute condițiile la limită pe care le vom stabili în cele ce urmează.

Suprafața de scurgere (S) și suprafețele libere (L) și (L_1) trebuie să fie linii de curent ale mișcării. Pe ele trebuie să fie satisfăcute așadar relațiile: $\psi\ [x, y(x)] = 0$ pentru suprafețele (S) și (L_1) și $\psi[x,y(x)] = q$ pentru suprafața (L). Suprafețele libere (L) și (L_1) necunoscute apriori trebuie determinate în așa fel încît pe ele să fie satisfăcută relația lui Bernoulli

$$V^2 + 2gy = \text{const.} \tag{1}$$

Ținînd seama de expresia componentelor vitezei

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

relaţia lui Bernoulli (1) ia forma

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+2gy=\text{const.}\tag{2}$$

În acest caz problema revine la determinarea funcţiei armonice $\psi(x,y)$ şi a liniilor libere (L) şi (L_1) în aşa fel încît aceste linii să fie linii de curent ale mişcării şi pe ele să fie satisfăcută relaţia (2).

Exprimată sub această formă, problema este greu de rezolvat; condiţia la limită (2) este neliniară şi domeniul (D) în care trebuie determinată funcţia armonică $\psi(x, y)$ este necunoscut apriori. Vom căuta să reducem problema la determinarea unei funcţii olomorfe care să satisfacă anumite condiţii pe conturul unui domeniu cunoscut într-un plan auxiliar $Z = X + iY$.

În planul potenţialului complex $f = \varphi + i\psi$, mişcarea din planul $z=x+iy$ este reprezentată de banda din figura 2. Semidreapta OA corespunde suprafeţei de scurgere AB, semidreapta OC corespunde suprafeţei libere inferioare (L_1) iar dreapta $A'C'$ corespunde suprafeţei libere superioare. Se vede din figură că am considerat punctul B ca origine a potenţialului de viteze. Vom reprezenta banda din planul $f = \varphi+i\psi$ pe semicercul din planul auxiliar $Z=X+iY$ (fig. 3), pentru a reduce rezolvarea problemei la un caz deja studiat. Funcţia de transformare este

$$f=\frac{q}{\pi}\log\frac{(1+Z)^2}{2(1+Z^2)}\tag{3}$$

iar corespondenţa punctelor este cea arătată în figură: suprafaţa de scurgere (S) se reprezintă pe diametrul real al semicercului, suprafaţa (L_1) pe

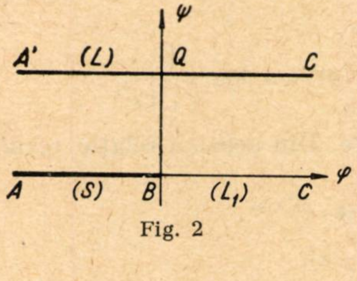


Fig. 2

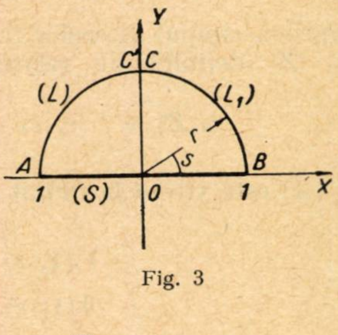


Fig. 3

arcul $O \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}$ iar suprafaţa (L) pe arcul $\frac{\pi}{2} \leqslant s \leqslant \pi$. Am notat cu r şi s coordonatele polare ale unui punct din planul Z.

În cele ce urmează vom căuta să reducem rezolvarea problemei din domeniul necunoscut (D) al planului $z = x + iy$ la semicercul superior unitar din planul $Z = X + iY$. Pentru a deduce expresia ecuaţiei lui Bernoulli pe liniile $A'C'$ şi OC din planul f diferenţiem relaţia (1). Obţinem:

$$VdV+gdy=0.\tag{4}$$

Din relaţia generală

$$\frac{df}{dz} = e^{-i(\theta + i\tau)}$$

deducem pentru $\psi = \text{const.}$:

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{V(\varphi)} e^{i\theta(\varphi)}, \tag{5}$$

unde θ şi V au semnificaţiile arătate în paragraful precedent. Din relaţia (5) deducem

$$\frac{dx}{d\varphi} + i\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{V(\varphi)} e^{i\theta(\varphi)}.$$

Egalînd părţile imaginare din cei doi membri ai ecuaţiei de mai sus avem

$$V(\varphi)\,dy = \sin\theta(\varphi)\,d\varphi. \tag{6}$$

Introducem relaţia (6) în ecuaţia (4) şi obţinem ecuaţia lui Bernoulli pe liniile libere

$$V^2 dV + g\sin\theta(\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{7}$$

Pentru a exprima relaţia lui Bernoulli pe semicercul din planul Z ne folosim de funcţia de transformare (3). Separînd partea imaginară şi diferenţiind obţinem pe semicerc

$$d\varphi = \frac{q}{\pi}\frac{1}{\cos s}\operatorname{tg}\frac{s}{2}\,ds. \tag{8}$$

Vom exprima cîmpul vitezelor în semicerc cu ajutorul unei funcţii auxiliare $\omega(Z)$ definită de relaţia

$$\omega(Z) = f(r, s) + ig(r, s) = i\log\frac{V}{V(A)},$$

unde $V(A)$ este viteza la infinit amonte. Din această relaţie rezultă imediat

$$V(1, s) = V(A)\,e^{g(1, s)}, \tag{9}$$

$$\theta(1, s) = f(1, s). \tag{10}$$

Diferenţiind relaţia (9) obţinem

$$dV = V(A)\,g'(1, s)\,e^{g(1, s)}\,ds. \tag{11}$$

Introducem relaţiile (8) şi (11) în ecuaţia (7) şi obţinem relaţia lui Bernoulli pe semicerc

$$g'(1, s)\cos s\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}} = -\frac{q}{\pi}\,g\,V^{-3}(A)\,e^{-3g(1, s)}\sin f(1, s) \tag{12}$$

sau sub forma

$$g'(1,\ s)\cos s\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}} + \mu\, e^{-3g(1,\ s)}\sin f(1,\ s) = 0, \tag{13}$$

unde am notat

$$\mu = \frac{gq}{\pi V^3(A)} \text{ sau } \mu = \frac{1}{\pi \mathcal{F}r}$$

($\mathcal{F}r$ reprezintă numărul Froude al mişcării).

În planul Z panta vitezei pe suprafaţa de scurgere (S) devine o funcţie $\theta(X)$ $[-1 < X < 1]$ pe care o presupunem cunoscută cel puţin calitativ.

Din cele expuse mai sus rezultă că studiul mişcării lamelor deversante se reduce la determinarea funcţiei $\omega(Z) = f(r,\ s) + i\,g(r,\ s)$ olomorfă în semicercul din planul Z care verifică următoarele condiţii pe contur

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\omega(-1) = 0,\\ &f(X,\ 0) = \theta(X),\\ &g'(1,\ s)\cos s\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}} + \mu e^{-3g(1,\ s)}\sin f(1,\ s) = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dacă funcţia $\omega(Z)$ este cunoscută, problema este complet rezolvată. Relaţiile (9) şi (10) dau repartiţia de viteze pe semicerc deci şi pe suprafeţele libere (L) şi (L_1). Ecuaţia suprafeţelor libere se deduce din ecuaţia generală $V = \dfrac{df}{dz}$ sau sub altă formă $dz = \dfrac{df}{V}$ sau încă

$$dz = \frac{df}{V(A)\, e^{-i\omega(Z)}}.$$

Introducînd în această ultimă relaţie expresia lui df dedusă din formula (3) obţinem

$$dz = \frac{2q}{\pi V(A)}\, e^{i\omega(Z)}\, \frac{1 - Z}{(1 + Z)(1 + Z^2)}\, dZ$$

sau sub forma

$$dz = \frac{2H}{\pi}\, e^{i\omega(Z)}\, \frac{1 - Z}{(1 + Z)(1 + Z^2)}\, dZ. \tag{15}$$

Soluţia problemei la limită (A). Funcţia $\omega(Z)$ nu poate fi determinată direct cu ajutorul condiţiilor la contur (14) şi de aceea se foloseşte un procedeu de aproximaţii succesive pe care îl vom indica mai jos.

Vom determina un şir $\{\omega_n(Z)\}$ de funcţii olomorfe în semicercul (D) care satisfac pe contur condiţiile

$$(A_n)\begin{cases} \omega_n(-1) = 0, \\ f_n(X, 0) = \theta(X), \\ g_n'(1, \mathrm{s}) \cos s \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{s}{2}} + \mu e^{-3g_{n-1}(1,s)} \sin f_{n-1}(1, s) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Vom considera ca primă aproximaţie a soluţiei funcţia $\omega_1(Z)$ care satisface condiţiile :

$$(A_1)\begin{cases} \omega_1(-1) = 0, \\ f_1(X, 0) = \theta(X), \\ g_1'(1, s) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Problema (A_1) revine la determinarea unei funcţii analitice în semicercul superior al planului Z a cărei parte reală este cunoscută pe diametrul real şi a cărei parte imaginară e nulă pe semicerc. Ea are expresia [6] :

$$\omega_1(Z) = \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} \theta X() \frac{Z^2 - 1}{(X - Z)(1 - ZX)} d\mathrm{X}. \tag{18}$$

Pentru determinarea funcţiilor $\omega_n(Z)$ vom face schimbarea de funcţie

$$\Omega_n(Z) = \omega_n(Z) - \omega_1(Z) = F_n(X, Y) + iG_n(X, Y),$$

care reduce problema la un caz studiat. Funcţiile Ω_n satisfac condiţiile la contur

$$(B_n)\begin{cases} \Omega_n(-1) = 0, \\ F_n(X, 0) = 0, \\ G_n'(1, s) = g_n'(1, s) - g_1'(1, s) = -\mu e^{-3g_{n-1}(1,s)} \dfrac{\sin f_{n-1}(1, s)}{\cos s} \operatorname{tg}\dfrac{s}{2}. \end{cases} \tag{19}$$

Condiţiile (B_n) conduc la rezolvarea următoarei probleme la limită : să se găsească o funcţie analitică în semicercul unitar aşa încît să fie nulă în punctul $Z = -1$, pur imaginară pe diametrul real şi derivata normală a părţii reale să fie cunoscută pe semicirconferinţă. Soluţia acestei probleme este [6]

$$\Omega_n(Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} H_n(1, u) \log \frac{e^{iu} - Z}{e^{-iu} - Z} du - \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} u H_n(1, u) du, \tag{20}$$

unde am notat cu $H_n(1, u)$ derivata normală exterioară a funcţiei $F(r, s)$ pe semicerc ; ea are expresia

$$H_n(1, u) = g_n'(1, u) - g_1'(1, u).$$

Din cele expuse în acest paragraf rezultă că aproximaţia de ordinul n, $\omega_n(Z)$ se deduce din aproximaţia de ordinul $n-1$ aplicînd formula (20).

Soluţia $\omega(Z)$ a problemei este aproximată de fiecare dintre funcţiile $\omega_n(Z)$ iar mişcarea reprezentată de funcţia $\omega_n(Z)$ constituie aproximaţia de ordinul n a mişcării reale. Ţinînd seama de formulele (9) şi (15) în aproximaţia de ordinul n, pe suprafeţele libere viteza va fi exprimată de formula

$$V_n(1, s) = V(A)\, e^{g_n(1, s)}, \tag{21}$$

iar liniile libere de ecuaţia

$$dz_n = \frac{2H}{\pi} e^{i\omega_n(Z)} \frac{1-Z}{(1+Z)(1+Z^2)}\, dZ. \tag{22}$$

Dacă şirul de funcţii $\{\omega_n(Z)\}$ tinde către o limită unică mişcările de ordinul n exprimate de formulele (21) şi (22) tind către mişcarea reală exprimată de formulele (9) şi (20). Studiul detaliat al sistemului de funcţii $\{\omega_n(Z)\}$ va constitui obiectul părţii a doua a lucrării.

STUDIUL NEDETERMINĂRII SOLUŢIEI TEORETICE A MIŞCĂRII LAMELOR DEVERSANTE

Pentru a studia convergenţa funcţiilor $\omega_n(Z)$ în semicerc este suficient să examinăm convergenţa lor pe conturul semicercului. Conform unei teoreme demonstrate de P. Montel, dacă un şir de funcţii definite într-un domeniu (D) este mărginit pe frontiera domeniului, şirul tinde către o singură limită în tot domeniul. Vom separa partea reală şi imaginară a funcţiilor pe diametrul real şi pe semicerc şi vom studia comportarea lor în fiecare punct al frontierei.

Din formula (18) deducem separînd partea reală şi partea imaginară

$$f_1(1, s) = \frac{2\sin s}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(u)\, du}{u^2 - 2u\cos s + 1}, \quad g_1(1, s) = 0, \tag{23}$$

pe semicerc şi

$$f_1(X, 0) = \theta(X), \quad g_1(X, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \theta(u) \frac{X^2 - 1}{(X-u)(1-uX)}\, du, \tag{24}$$

pe diametrul real.

Formula (20) ne dă expresia celorlalte funcţii $f_n(r, s)$ şi $g_n(r, s)$.

Avem succesiv

$$\begin{cases} f_2(1, s) = f_1(1, s) - \dfrac{\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \log \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| \sin f_1(1, u)\, du, \\[2ex] g_2(1, s) = -\dfrac{\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^s \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \sin f_1(1, u)\, du, \\[2ex] f_2(X, 0) = \theta(X), \\[1ex] g_2(X, 0) = -\dfrac{2\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \sin f_1(1, u) \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1+X}{1-X} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) du, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} f_3(1, s) = f_1(1, s) - \dfrac{\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \log \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| e^{-2g_2(1, u)} \sin f_2(1, u)\, du, \\[2ex] g_3(1, s) = -\mu \displaystyle\int_0^s \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} e^{-3g_2(1, u)} \sin f_2(1, u)\, du, \\[2ex] f_3(X, 0) = \theta(X), \\[1ex] g_3(X, 0) = -\dfrac{2\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \sin f_2(1, u)\, e^{-2g_2(1, u)} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1+X}{1-X} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) du; \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} f_n(1, s) = f_1(1, s) - \dfrac{\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} \log \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| e^{-2g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u)\, du, \\[2ex] g_n(1, s) = -\mu \displaystyle\int_0^s \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u)\, du, \\[2ex] f_n(X, 0) = \theta(X), \\[1ex] g_n(X, 0) = -\dfrac{2\mu}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\cos u} e^{-2g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1+X}{1-X} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) du. \end{cases} \tag{27}$$

Vom studia comportarea tuturor funcțiilor de mai sus în jurul punctelor singulare pentru a trage concluzii asupra convergenței celor două șiruri de funcții.

Studiul primei aproximații. Pentru studiul comportării primei aproximații vom folosi formulele (23) și (24):

$$f_1(1, s) = \frac{2 \sin s}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\theta(u)\, du}{u^2 - 2u \cos s + 1},$$

$$g_1(1, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \theta(u) \frac{X^2 - 1}{(X - u)(1 - uX)}\, du.$$

Am presupus că suprafața de scurgere (S) tinde asimptotic către orizontală în punctul de la infinit amonte și că panta tangentei la suprafața de scurgere este o funcție continuă. Rezultă că funcția $\theta(u) = 0$ în punctul $u = -1$ sau că $\theta(u)$ este de forma $\theta(u) = (u + 1)\, \theta_0(u)$ unde $\theta_0(u)$ este o funcție mărginită în intervalul $[-1, 1]$. Funcția $f_1(1, s)$ are în acest caz expresia

$$f_1(1, s) = \frac{2 \sin s}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(u + 1)\, \theta_0(u)\, du}{u^2 - 2u \cos s + 1}.$$

Această formulă arată că funcția $f_1(1, s)$ este mărginită în orice punct al intervalului $[0, \pi]$. În adevăr, în punctul $s = 0$ avem

$$f_1(1, s) = \lim_{s=0} \frac{2 \sin s}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(u + 1)\, \theta_0(u)}{(u - 1)^2}\, du.$$

Numitorul funcției de sub integrală este infinit în punctul $u = 1$ și integrala este infinită ca $\frac{1}{u}$. În punctul $s = 0$ sinusul tinde la 0 pe arcul s de unde rezultă că $f_1(1, 0) = \text{const}$.

În punctul $s = \pi$ avem

$$f_1(1, \pi) = \lim_{s=\pi} \frac{2 \sin s}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(u + 1)\, \theta_0(u)}{(u + 1)^2}\, du.$$

Valoarea integralei devine infinită ca $\log(u + 1)$ cînd $u \rightarrow -1$ iar sinusul tinde către 0 ca arcul s. Rezultă că $f_1(1, \pi) = 0$. Într-un punct oarecare $0 < s < \pi$ se vede imediat că $f_1(1, s) = \text{finit}$. În particular, pentru $s = \frac{\pi}{2}$ adică în punctul de la infinit al lamei deversante avem

$$f_1\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(u + 1)\, \theta_0(u)}{u^2 + 1}\, du,$$

formulă care dă înclinarea asimptotică a lamei fluide la infinit aval.

Pentru prima aproximație obținem așadar următorul tablou de valori

$$f_1(1, 0) = \text{finit}, \qquad f_1(1, s) = \text{finit}\ (0 < s < \pi), \qquad f_1(1, \pi) = 0.$$

Funcția $g_1(X, 0)$ este mărginită în orice punct al intervalului $[-1, 1]$, dacă funcția $\theta(X)$ este continuă în orice punct al acestui interval și păstrează un semn constant. În adevăr, punctul $X = u \neq \pm 1$ prezintă o singularitate integrabilă. În punctul $X = u = \pm 1$, funcţia $g_1(X, 0) = 0$. În acest punct viteza fluidului este egală cu viteza la infinit amonte.

În punctele în care suprafaţa (S) are vîrfuri ascuţite, îndreptate înspre domeniul fluid sau în afara lui, funcţia $\theta(X)$ prezintă discontinuităţi de prima speţă. În aceste puncte viteza fluidului este infinită sau nulă după cum vîrful este îndreptat spre fluidul în mişcare sau nu. În adevăr, în aceste puncte funcţia $g_1(X, 0)$ este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$. Relaţia (9) arată că în acest caz viteza devine infinită sau nulă. Din analiza făcută în acest paragraf rezultă că funcţia $\omega_1(Z)$ rămîne mărginită pe frontiera semicercului dacă funcţia $\theta(u)$ este o funcţie continuă în intervalul $[-1, 1]$.

Studiul aproximaţiilor de ordin superior. Funcţiile $\omega_2(Z)$, $\omega_3(Z)$, $\ldots$, $\omega_n(Z)$, $\ldots$ se comportă pe semicerc la fel ca părţile lor reale şi imaginare exprimate de formulele (25), (26), (27).

Grupul de formule (25) arată că punctele $u = \frac{\pi}{2}$ $\left(s \text{ oarecare diferit de } \frac{\pi}{2}\right)$ $u = \pi$, şi $u = s = \frac{\pi}{2}$ sînt puncte singulare pentru funcţia de sub integrala din membrul drept al expresiei lui $f_2(1, s)$. Se vede imediat că în punctul $u = \frac{\pi}{2}$ $\left(s \neq \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos u$ se anulează trecînd de la valori pozitive la valori negative. Acest punct prezintă aşadar o singularitate integrabilă. În punctul $u = s = \frac{\pi}{2}$ funcţia devine infinită ca $\frac{1}{u} \log \frac{1}{|u|}$ dar trece de la $+\infty$ la $-\infty$ deci şi în acest caz avem de-a face cu o singularitate integrabilă. În sfîrşit, în punctul $u = \pi$ funcţia $\operatorname{tg} \frac{u}{2}$ devine infinită ca $\frac{1}{u}$ dar $\sin f_1(1, \pi) = 0$ deci funcţia de sub integrală este finită. Putem scrie aşadar următorul tablou de variaţie al funcţiei $f_2(1, s)$: $f_2(1, 0) = \text{finit}$, $f_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \text{finit}$, $f_2(1, s) = \text{finit}$ (s oarecare), $f_2(1, \pi) = 0$. Aceste valori arată că fluidul părăseşte suprafaţa de scurgere sub un unghi oarecare, ajunge la valoarea asimptotică $f_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ şi în punctul de la infinit amonte $(s = \pi)$ panta suprafeţei libere este nulă.

Variaţia funcţiei $g_2(1, s)$ dată de a doua formulă (25) arată comportarea vitezelor pe suprafaţa liberă a fluidului. În punctul $s = 0$ avem $g_2(1, 0) = 0$, iar în punctul $s = \frac{\pi}{2}$ (capătul infinit aval al lamei fluide) $g_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \infty$. Dacă ţinem seama de relaţia (9) deducem că în acest punct, viteza devine infinită ceea ce înseamnă că lama deversantă este infinit subţire. Acest rezultat este în concordanţă cu fenomenul fizic, avînd în vedere că în a doua aproximaţie intervine în calcule efectul gravitaţiei. Studiul funcţiei $g_2(X, 0)$ dă repartiţia de viteze pe suprafaţa de scurgere (S). Punctul $u = \frac{\pi}{2}$ prezintă o singularitate integrabilă pentru funcţia de sub semnul integrală, iar în punctul $u = \pi$ funcţia are o valoare finită. Rezultă, aşadar, că viteza este finită în orice punct al suprafeţei (S).

Un studiu analog al funcţiilor $f_3(1, s)$ şi $g_3(1, s)$ ne dă indicaţii asupra configuraţiei mişcării în cea de-a treia aproximaţie. Din expresia acestor funcţii date de formulele (26) se vede că sub semnul integralei se introduce numai factorul $e^{-3g_2(1, s)}$ care este finit în orice punct al intervalului $[0, \pi]$ în afară de $s = \frac{\pi}{2}$. În acest caz putem scrie următoarele tablouri de valori pentru funcţiile $f_3(1, s)$ şi $g_3(1, s)$:

$$f_3(1, 0) = \text{finit},\ f_3\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \text{finit},\ f_3(1, \pi) = 0,\ f_3(1, s) = \text{finit}\ (s\ \text{oarecare}),$$

$$g_3(1, 0) = \text{finit},\ g_3\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \text{finit},\ g_3(1, \pi) = 0,\ g_3(1, s) = \text{finit}\ (s\ \text{oarecare}).$$

În acest caz lama de fluid care părăseşte suprafaţa de scurgere are la infinit aval o grosime finită, ca şi în prima aproximaţie (teoria siajurilor). Pentru aproximaţia de ordinul al patrulea putem scrie în mod similar următoarele tablouri de variaţie:

$$f_4(1, 0) = \text{finit},\ f_4\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \text{finit},\ f_4(1, \pi) = 0,\ f_4(1, s) = \text{finit}\ (s\ \text{oarecare}),$$

$$g_4(1, 0) = \text{finit},\ g_4\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \infty,\ g_4(1, \pi) = 0,\ g_4(1, s) = \text{finit}\ (s\ \text{oarecare}).$$

În aproximaţia a patra lama fluidă se comportă ca în cazul aproximaţiei de ordinul al doilea adică tinde asimptotic către o lamă de grosime nulă.

Putem continua în acest fel studiul aproximaţiilor de diferite ordine ale soluţiei. Această analiză arată că în punctul $s = \frac{\pi}{2}$ şirul de funcţii $g_1(1, s), g_2(1, s), \ldots, g_n(1, s)$ nu tinde către o limită bine determinată, deci nu se poate afirma că şirul este convergent în acest punct. Aproximaţiile de ordin par devin infinite în acest punct, iar aproximaţiile de ordin par sînt finite.

CONCLUZII

Din faptul că şirul de funcţii $\{g_n(1, s)\}$ nu este mărginit în punctul $s = \frac{\pi}{2}$ şi că aproximaţiile de ordin par se comportă diferit de aproximaţiile de ordin impar, în acest punct, se trage concluzia că nu se poate spune ceva precis despre convergența șirului de funcții $\{\omega_n(Z)\}$. Interpretarea fizică a rezultatelor teoretice obținute arată că în aproximațiile impare mișcarea are o configurație asemănătoare cu cea obținută în teoria siajurilor (viteza finită în orice punct al mișcării) iar în aproximațiile pare mișcarea comportă viteze infinite în punctul de la infinit al lamei deversante.

Un caz analog se obține și din studiul mișcării fluidului greu peste un prag de adîncime infinită la care fluidul aderă complet, așa cum rezultă din lucrarea citată a lui H. Poncin. Suprafața liberă tinde oscilînd către o poziție asimptotică care se confundă cu poziția reală a suprafeței libere. Un studiu mai detaliat al comportării șirului $\{g_n(1, s)\}$ în jurul punctului $s = \frac{\pi}{2}$ poate să ne dea indicații mai precise asupra aspectului mișcării în punctul de la infinit al lamei deversante; într-o lucrare ulterioară ne vom ocupa în detaliu de această problemă.

Concluziile ce se trag din studiul acestei probleme sînt importante atît din punct de vedere teoretic, cît mai ales din punct de vedere al consecințelor ce le comportă. Am văzut că singurul punct din tot domeniul mișcării care prezintă dificultăți este punctul de la infinit al lamei deversante, prin faptul că aici viteza ia valori infinite. Este normal ca dificultatea problemei să fie înlăturată o dată cu înlăturarea acestui punct din studiu. Pentru acest lucru se impune în mod natural să nu studiem toată lama deversantă, ci numai o porțiune a ei, delimitată cu o secțiune normală la lamă, într-un punct suficient de depărtat de punctul de deversare așa cum arată figura 1 (punctat). În acest fel înlăturăm din mișcarea fluidului porțiunea în care fluidul are vitezele infinite și studiem numai zona mișcării de pe suprafața de scurgere și din vecinătatea punctului de deversare. Acest studiu va constitui obiectul unei lucrări ce va apare ulterior, unde vom studia problema teoretic și vom aplica rezultatele obținute la mișcarea fluidelor peste deversoare cu muchie ascuțită.

Primită la redacție la 10 februarie 1960

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРЕЛИВАЮЩИХСЯ СТРУЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается задача свободного движения переливающихся струй тяжелых жидкостей в вертикальной плоскости. Считается, что точка на бесконечности вниз по течению переливающейся струи принадлежит области движения.

Решение задачи сводится к определению функции Леви-Еивита $\omega(z)$ в верхнем единичном полукруге вспомогательной плоскости $Z = X + iY$. Функция $\omega(z)$ должна удовлетворять на контуре полукруга

нелинейному условию, а решение задачи выражается в виде предела ряда последовательных приближений $\omega_n(z)$.

Далее в работе рассматривается задача сходимости ряда $\{\omega_n(z)\}$. Из проведенного анализа делается вывод, что ряд сходится во всех точках полукруга отсчета кроме точки $Z = e^{i\frac{\pi}{2}}$, которая соответствует точке в бесконечности вниз по течению переливающейся струи. В этой точке приближения четного порядка принимают бесконечные значения, а приближения нечетного порядка принимают конечные значения.

Для устранения этих трудностей предлагается исследование движения только в окрестности точки отрыва переливающейся струи.

Это ограничение оправдывается самим реальным течением жидкости.

ÉTUDE DU MOUVEMENT DES LAMES DÉVERSANTES INFINIES DANS UN PLAN VERTICAL

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient le problème du mouvement libre des lames déversantes des fluides pesants, dans un plan vertical, en considérant que le point à l'infini aval de la lame déversante fait partie du domaine de mouvement.

La résolution du problème se réduit à la détermination de la fonction de Levy-Cività $\omega(Z)$ dans le demi-cercle supérieur unitaire d'un plan auxiliaire $Z = X + iY$. La fonction $\omega(Z)$ doit satisfaire à une condition non linéaire sur le contour du demi-cercle et la solution du problème s'exprime sous la forme de la limite d'une suite d'approximations successives $\omega_n(Z)$.

Après cela, les auteurs étudient le problème de la convergence de la suite $\{\omega_n(Z)\}$. L'analyse effectuée permet de conclure que la série converge dans tous les points du demi-cercle de définition, sauf au point $Z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ qui correspond au point à l'infini aval de la lame déversante. Dans ce point, les approximations d'ordre pair prennent des valeurs infinies, tandis que celles d'ordre impair prennent des valeurs finies.

Afin d'éviter ces difficultés, les auteurs proposent que le mouvement ne soit étudié qu'au voisinage du point de détachement de la lame déversante.

Cette restriction est justifiée par l'écoulement réel même du fluide.

BIBLIOGRAFIE

1. F. AIMOND, *Recherches d'Hydrodynamique en vue de la détermination du mouvement de l'eau sur un barrage déversoir*. Ann. de Toulouse, *21*, 43 (1929).
2. H. LEWY, *On steady free surface flow in a gravity*. Comm. Pure Applied Math., *5*, 413 (1952).

3. F. **John**, *Two dimensional potential flows with a free boundary*. Comm Pure Applied Math., *6*, 497 (1953).
4. R. **Gerbert**, *Solutions exactes des mouvements des liquides pesants*. Journal des Math. pures et appliquées, *3* (1955).
5. M. **Haimovici**, *Sur l'écoulement des liquides pesants dans un plan vertical*. Ann. scientifiques de l'Univ. de Jassy, *21*, 182 (1935).
6. H. **Poncin**, *Recherches sur le mouvement des fluides pesants dans un plan vertical*. Paris, 1932.
7. D. **Dumitrescu**, *Strömung ein einer Luftblase in senkrechten Rohr*. ZAMM, *23*, 139 (1943),
8. D. **Dumitrescu**, V. **Ionescu** C. **Iancu**, *Contribuții teoretice și experimentale la studiul mișcării peste deversoare*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, XI, — *3*, (1958).

STUDII

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

GENERALIZAREA ECUAȚIEI LUI REYNOLDS LA STUDIUL LUBRIFICAȚIEI ÎN REGIM TURBULENT

DE

N. TIPEI și V.N. CONSTANTINESCU

Dacă se consideră un sistem ortogonal de axe $Ox_1x_2x_3$ astfel ca Ox_1, x_3 să se aștearnă peste o suprafață solidă (1) iar Ox_2 să fie normală la aceasta, se pot deduce ecuațiile mișcării turbulente ale unui fluid între (1) și o altă suprafață solidă (2), situată la o distanță h, foarte mică și variabilă cu punctul, față de prima suprafață. Notînd cu $\bar{p}$, $\bar{v}_i$ presiunea și viteza după axa Ox_i medie, în sensul definiției valorilor medii într-o mișcare turbulentă, cu V_{1i}, V_{2i} $(i = 1, 2, 3)$ componentele vitezelor absolute ale suprafețelor (1), (2), iar prin μ viscozitatea dinamică, apoi cu v_{im} expresia

$$v_{im} = \frac{1}{h}\int_0^h \bar{v}_i \, dx_2 , \tag{1}$$

s-a arătat într-o lucrare precedentă [1] că se poate scrie componenta gradientului de presiune pe Ox_1 după cum urmează

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = -\left[12 + 0{,}16\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\,\mathfrak{R}_e\right)^{0{,}725}\right]\frac{\mu}{h^2}\left(v_{1m} - \frac{V_{11} + V_{21}}{2}\right). \tag{2}$$

În această relație $\pm\,\sigma^\star = \left(\dfrac{dl^\star}{dx_2}\right)_{\substack{x_2=0\\ x_2=h}}$, ($l^\star$ — lungimea de amestec), iar $\mathfrak{R}_e$ numărul Reynolds $\mathfrak{R}_e = \dfrac{\rho V h}{\mu}$; $(V = V_{11} + V_{21})$. Alegînd axa Ox_1 astfel încît să fie conținută în planul mișcării relative și Ox_2 normală pe (1), rezultă apoi $V_{13} + V_{23} = 0$ și [4]

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = \pm\,(12 + 0{,}103\ \mathfrak{R}_e^{0{,}745})\,\frac{\mu}{h^2 V^{0{,}089}\ \mathfrak{R}_e^{0{,}18}}\,|\,v_{3m}|^{1+0{,}089\,\mathfrak{R}_e^{0{,}18}}. \tag{3}$$

Deoarece ρ poate fi considerat ca invariabil pe normala la suprafețe se poate scrie apoi

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\bar{v}_i)\,dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^h(\rho\bar{v}_i)\,dx_2 - \rho V_{2i}\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho h\, v_{im}) - \rho V_{2i}\frac{\partial h}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Dacă se integrează ecuația de continuitate între 0 și h, se găsește

$$-\int_0^h\left(\frac{\partial(\rho\bar{v}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_3)}{\partial x_3}\right)dx_2 = \rho(V_{22} - V_{12}) + h\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{5}$$

sau, ținînd seama de (1) și de (4)

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho h\, v_{1m}) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho h\, v_{3m}) = \rho(V_{22} - V_{12}) + h\frac{\partial\rho}{\partial t} - \\ - \rho\left(V_{21}\frac{\partial h}{\partial x_1} + V_{23}\frac{\partial h}{\partial x_3}\right). \tag{6}$$

Dacă se introduc apoi valorile vitezelor medii date de formulele (2) și (3), se obține ecuația presiunilor în regim turbulent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3\rho}{\mu k_1}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) \pm \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\left(\frac{h^2 V^{n_3-1}}{\mu k_3}\left|\frac{\partial p}{\partial x_3}\right|\right)^{\frac{1}{n_3}}\rho h\right] = \rho(V_{22} - V_{12}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho h(V_{11} + V_{21})] - \rho\left(V_{21}\frac{\partial h}{\partial x_1} + V_{23}\frac{\partial h}{\partial x_3}\right) + h\frac{\partial\rho}{\partial t}, \\ &k_1 = 12 + 0{,}14\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}725}, \quad k_3 = 12 + 0{,}103\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}745}, \\ &\qquad n_3 = 1 + 0{,}089\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}18}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

În această ecuație semnul + (plus) se va lua pentru $\frac{\partial p}{\partial x_3} > 0$ și invers. Membrul al doilea al relației precedente este de altfel identic cu acela care apare în ecuația presiunilor pentru regimurile laminare de ungere.

Deoarece aplicarea ecuației (7), pornind de la relația (3) este destul de dificilă se poate admite cu suficientă exactitate, în domeniul de presiuni nu prea mari ($p < 50$ kg/cm^2) o legătură liniară între $\frac{\partial p}{\partial x_3}$ și v_{3m}

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\left[12 + 0{,}0897\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}65}\right]\frac{\mu}{h^2}v_{3m}. \tag{8}$$

Cu ajutorul acesteia se găsește din (6)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3\rho}{\mu k_1}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h^3\rho}{\mu k_3}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)=\rho\,(V_{22}-V_{12})+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(\rho h\,(V_{11}+V_{21})\right]-\rho\left(V_{21}\frac{\partial h}{\partial x_1}+V_{23}\frac{\partial h}{\partial x_3}\right)+h\frac{\partial \rho}{\partial t},\\ &k_3=12+0{,}0897\left(\frac{\sigma^{*2}}{0{,}16}\,\mathcal{R}e\right)^{0,65}. \end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Această formulă prezintă o asemănare mai mare cu ecuația presiunilor în regim laminar decît (7). Domeniul său de aplicare determinat de maximele și minimele presiunilor, este mai restrîns, totuși acoperă practic întreaga gamă de variație a lui p.

Fie $\rho=$ constant, adică lubrificația cu lichide. Admițînd o lege de variație a viscozității de forma [2]

$$\mu=\mu_1\left(\frac{h}{h_1}\right)^q \qquad (10)$$

unde h_1 este grosimea maximă a peliculei fluide, se poate vedea imediat că numărul Reynolds devine constant pentru tot stratul lubrifiant, dacă $q=1$.

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}e=\frac{\rho V h}{\mu}=\frac{\rho V h^{1-q}h_1^q}{\mu_1},\\ &\mathcal{R}e_{q=1}=\frac{\rho V h_1}{\mu_1}=\text{const.}, \end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

și deci k_1 și k_3 de asemenea nu variază cu punctul.

Operînd schimbările de variabilă [4]

$$\tilde{x}_3=\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\,x_3,\qquad \tilde{V}_{ij}=\frac{k_1}{12}\,V_{ij}, \qquad (12)$$

se găsește din (9), dacă $\tilde{V}_{ij}$ nu depind de x_3

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^2 h_1}{12\,\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3}\left(\frac{h^2 h_1}{12\,\mu_1}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_3}\right)=\tilde{V}_{22}-\tilde{V}_{12}+\\ &+\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{V}_{11}+\tilde{V}_{21})+\frac{1}{2}(\tilde{V}_{11}-\tilde{V}_{21})\frac{dh}{dx_1}, \end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

adică ecuația binecunoscută a lubrificației în regim laminar, dar în raport cu variabilele x_1 și $\tilde{x}_3$ și pentru vitezele $\tilde{V}_{ij}$.

Totul se petrece în acest caz ca și cînd alungirea λ suferă o modificare $\tilde{\lambda}=\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\,\lambda$, iar vitezele sînt amplificate prin $\frac{k_1}{12}>1$. Cu aceste observaţii, se pot aplica toate rezultatele găsite pentru regimul laminar şi lubrificaţiei turbulente [2].

Pentru $q \neq 1$ ecuaţiile (7) şi (9) sînt greu de rezolvat, chiar dacă densitatea nu variază. În general se poate ca la anumite regimuri de mişcare să existe porţiuni unde $\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_c$, iar în altele $\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_c$. Totuşi în cazul mişcării plane [1], dacă scurgerea nu mai depinde de x_3 şi dacă se notează cu h_0 grosimea în punctul unde presiunea ia valoarea maximă, rezultă din aplicarea legii continuităţii

$$\rho h v_{1m} = \frac{1}{2} \rho_0 h_0 V \tag{14}$$

şi apoi numărul Reynolds efectiv

$$\mathcal{R}e_e = \frac{\rho v_{1m} h}{\mu} = \frac{\rho_0 h_0 V}{2\mu}. \tag{15}$$

Pentru o viscozitate constantă $\mathcal{R}e_e = \text{const}$. Acest rezultat arată că mişcarea devine turbulentă, în condiţiile amintite, în întregul strat fluid, dacă $2\mathcal{R}e_e \gg \mathcal{R}e_c$ [3].

Primită la redacţie la 10 februarie 1960

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА НА ИССЛЕДОВАНИЕ СМАЗКИ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

Исходя из ранее установленных соотношений, связывающих расход смазочного вещества, градиент давления и число Рейнольдса, выводится уравнение давлений для случая смазки несжимаемыми или сжимаемыми жидкостями (газами) при турбулентном режиме.

GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS À L'ÉTUDE DE LA LUBRIFICATION EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

En partant des relations entre le débit du lubrifiant, le gradient des pressions et le nombre de Reynolds, antérieurement établies, les auteurs déduisent l'équation des pressions dans le cas de la lubrification en régime turbulent, aussi bien avec des fluides incompressibles que compressibles (gaz).

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 139–162 (1958).
2. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., 1957.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Considerații asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2*, 369–376 (1958).
4. — *Considerații asupra lubrificației tridimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *4* (1959).

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

CONTRIBUŢII LA CINEMATICA MECANISMULUI CU PATRU ELEMENTE ARTICULATE

DE

CHR. PELECUDI, R.C. BOGDAN şi L. CALMACIUC

Din dezvoltarea metodei de cercetare a diadei Cebîşev, pe baza analizei armonice [1] se deduc la mecanismul cu patru elemente articulate indici simplificaţi cu ajutorul cărora analiza şi sinteza acestor mecanisme este mult uşurată. În acest mecanism diada Cebîşev este legată la manivelă în A_1 şi la suport în A_2 (fig. 1) astfel că din coeficienţii seriei Fourier în dezvoltarea

$$\cos \Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\varphi}, \tag{1}$$

rămîn numai trei

$$\Delta_0 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2 - b^2}{2r_1 r_2}, \qquad \Delta_1 = \Delta_{-1} = \frac{rb}{2r_1 r_2} \tag{2}$$

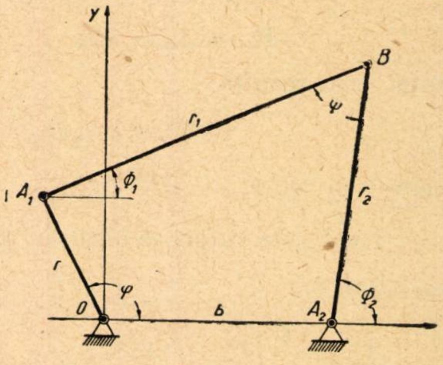


Fig. 1

unde s-au întrebuinţat notaţiile din figură.

Calculele pentru determinarea coeficienţilor dezvoltării

$$\sin \Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

duc la formulele de recurenţă

$$\Delta_k^{(n+1)} = \left[\Delta_{k-1}^{(n)} + \mu\Delta_k^{(n)} + \Delta_{k+1}^{(n)}\right] \Delta_1 \tag{4}$$

sau mai bine

$$\Delta_k^{2(n+1)} = \left[\Delta_{k-2}^{(2n)} + 2\mu\,\Delta_{k-1}^{(2n)} + (2+\mu^2)\,\Delta_k^{(2n)} + 2\mu\,\Delta_{k+1}^{(2n)} + \Delta_{k+2}^{(2n)}\right]\Delta_1^2\,, \tag{5}$$

unde $\Delta_k^{(p)}$ reprezintă coeficientul de ordinul k al dezvoltării $\cos^p \Psi$ în serie Fourier cu termeni complecși, iar

$$\mu = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}. \tag{6}$$

Față de acest raport μ, în tabela 1 sînt date funcțiile $f_k^{(2n)}(\mu)$ care conduc la

$$\Delta_k^{(2n)} = f_k^{(2n)}(\mu)\,\Delta_1^{2n}, \tag{7}$$

$$d_k^{(2n)} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n\,!}\,\Delta_k^{(2n)}, \qquad d_k^{(2)} = \frac{1}{2}\,\Delta_k^{(2)}, \tag{8}$$

astfel că

$$D_k = -\sum_{n=1}^{\infty} d_k^{(2n)} \quad \text{și} \quad D_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} d_0^{(2n)}. \tag{9}$$

Atît polinoamele $f_k^{(2n)}(\mu)$ de gradul $2n-k$ în μ cît și coeficienții $\Delta_k^{(2n)}$ și D_k sînt reali, prezentînd proprietatea de simetrie, elementele de indici k și $-k$ fiind egale. Funcțiile $f_k^{(2n)}(\mu)$ sînt monoton crescătoare pentru $\mu > 0$, pare sau impare după cum k este par sau impar:

$$f_k^{(2n)}(-\mu) = (-1)^k\,f_k^{(2n)}(\mu) \tag{10}$$

și toți termenii seriei D_k păstrează același semn.

Determinarea acestor termeni se face mai ușor cu ajutorul nomogramelor din figura 2 (a, b, c), calculate în funcție de μ și Δ_1 și numai pentru valorile pozitive ale lui μ. Pentru valorile negative ale lui μ se ține seama în calcul de relația 10.

Coeficienții B_k ai dezvoltării $e^{i\Psi}$ revin sub forma:

$$B_k = B_{-k} = iD_k \quad \text{pentru} \quad k \neq -1,\ 0,\ 1, \tag{11}$$

$$B_0 = \Delta_0 + iD_0 \qquad B_1 = B_{-1} = \Delta_1 + iD_1, \tag{12}$$

după care rezultă

$$C_k^{(1)} = -r_2 B_k, \qquad C_0^{(1)} = r_1 - r_2 B_0, \tag{13}$$

unde $|B_k| \leqslant 1, \qquad |C_k^{(1)}| \leqslant r_2, \qquad |C_0^{(1)}| \leqslant r_1 + r_2.$

Cu aceste valori se obțin în final pentru dezvoltarea $e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)}\,e^{ik\varphi}$ coeficienții

$$\overline{A}_m^{(1)} = \frac{1}{b}\left[C_m^{(1)} + \lambda\,C_{-(m+1)}^{(1)} + \ldots + \lambda^p\,C_{-(m+p)}^{(1)}\right] + \lambda^{p+1}\,\overline{A_{m+p+1}^{(1)}} \tag{14}$$

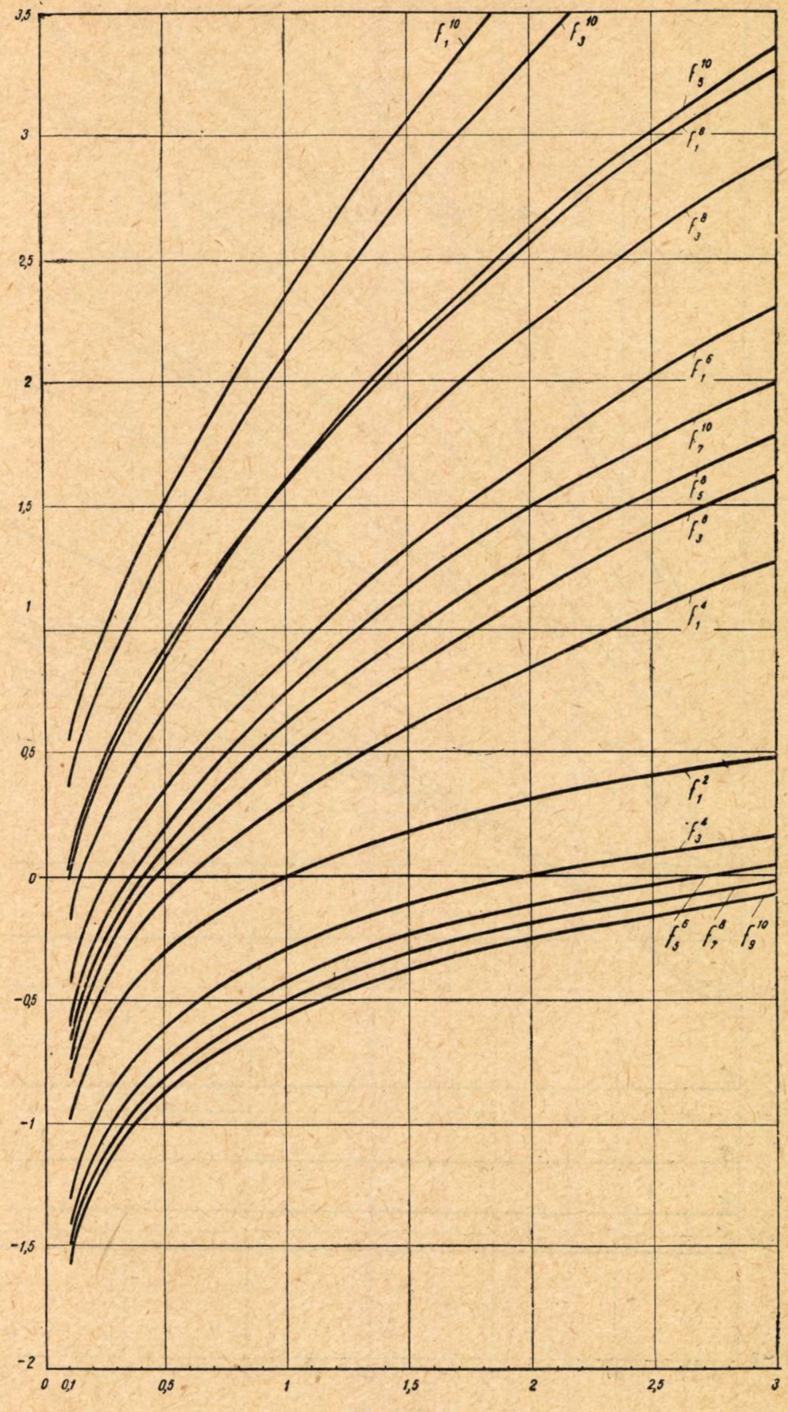

f_1^{10}
f_3^{10}
f_5^{10}
f_1^8
f_3^8
f_1^6
f_7^{10}
f_5^8
f_3^6
f_1^4
f_1^2
f_3^4
f_5^6
f_7^8
f_9^{10}
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
0
0,1
0,5
1
1,5
2
2,5
3

Fig. 2*a*

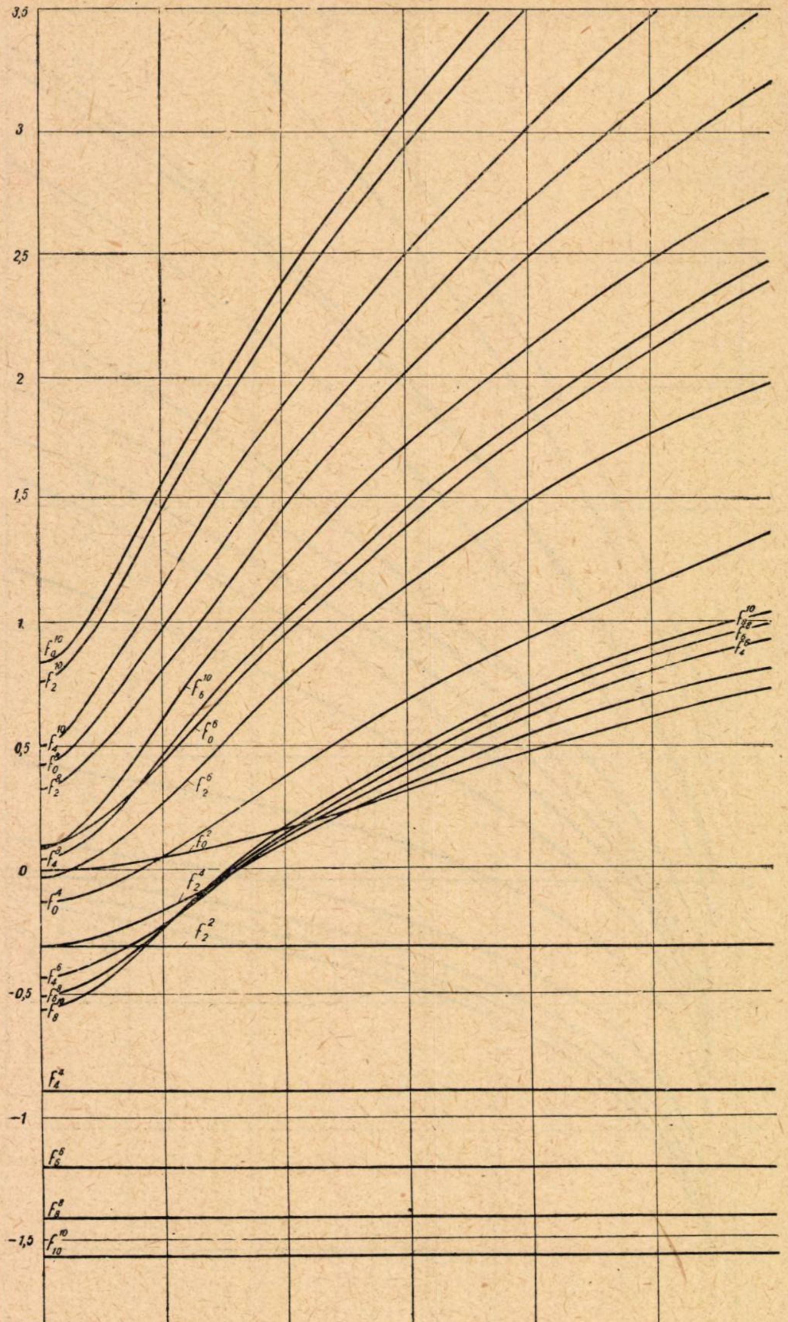

3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
0,1
0,2
0,5
1
1,5
2
2,5
3
f_0^{10}
f_2^{10}
f_4^{10}
f_0^{8}
f_2^{8}
f_6^{10}
f_0^{6}
f_2^{6}
f_4^{8}
f_0^{2}
f_0^{4}
f_2^{4}
f_2^{2}
f_4^{6}
f_6^{8}
f_8^{10}
F_4^{4}
F_6^{6}
F_8^{8}
F_{10}^{10}

Fig. 2*b*

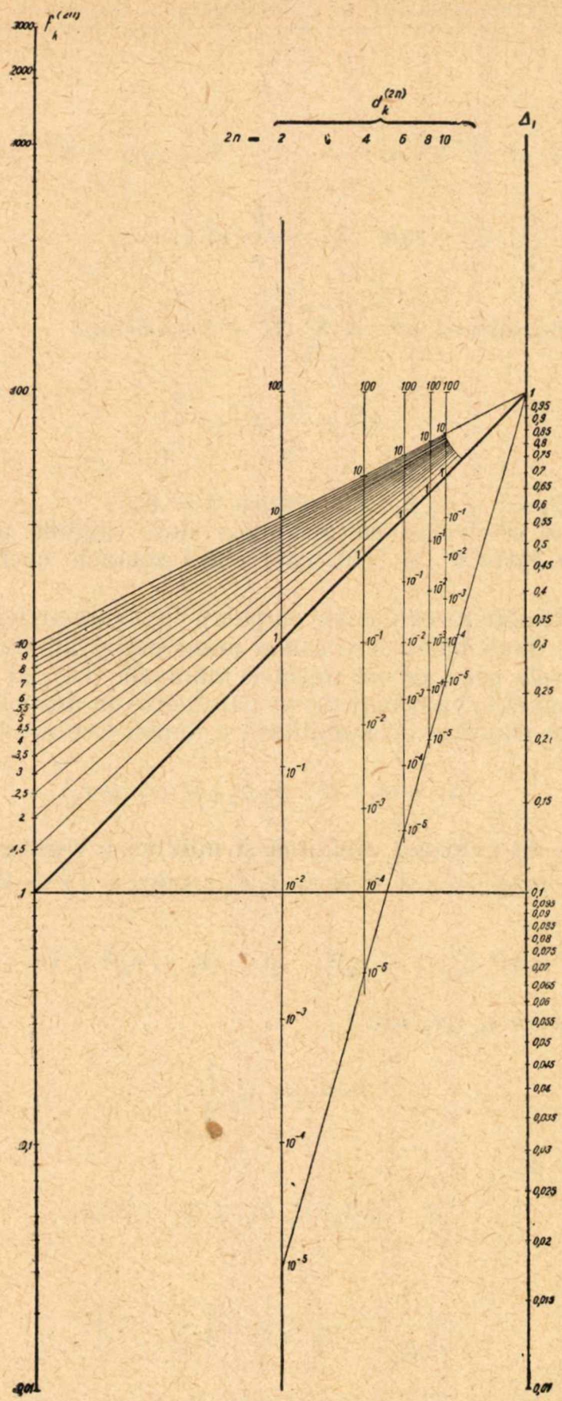

$F_k^{(2n)}$
3000
2000
1000
100
10
9
8
7
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,1
0,01
$d_k^{(2n)}$
2n = 2 6 4 6 8 10
100
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
Δ_1
1
0,95
0,9
0,85
0,8
0,75
0,7
0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,095
0,09
0,085
0,08
0,075
0,07
0,065
0,06
0,055
0,05
0,045
0,04
0,035
0,03
0,025
0,02
0,015
0,01

Fig. 2c

sau

$$\overline{A}^{(1)}_{-m} = \frac{1}{r}\left[C^{(1)}_{m+1} + \lambda^{\star} C^{(1)}_{m+2} + \ldots + \lambda^{\star p} C^{(1)}_{m+p+1}\right] + \lambda^{\star p+1}\,\overline{A}^{(1)}_{-(m+p+1)}, \quad (15)$$

după cum $\lambda = \frac{r}{b} < 1$ sau $\lambda^{\star} = \frac{b}{r} < 1$.

Pentru dezvoltarea $e^{i\Phi_2} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{(2)}_k\, e^{ik\varphi}$ se oţbine

$$A^{(2)}_k = \frac{r_1}{r_2} A^{(1)}_k - \frac{\beta_k}{r_2} \quad (16)$$

unde $\beta_0 = b$; $\beta_1 = -r$; $\beta_k = 0$ petnru $k \neq 0$; 1.

Trebuie să observăm că formulele sînt valabile pentru variaţiile lui Ψ cuprinse între 0° şi 180°, căci altfel semnele coeficienţilor D_k se schimbă.

Discuţie. Dintre mecanismele cu patru elemente articulate prezentînd două manivele, două balansiere sau o manivelă şi un balansier, ne vom opri numai la cele care au cel puţin o manivelă OA_1, al cărui unghiu φ făcut cu suportul OA_2 va fi luat drept parametru în dezvoltările armonice. În acest caz din condiţia de mobilitate a diadei Cebîşev (fig. 1):

$$|r_1 - r_2| \leqslant |\overline{A_1A_2}| \leqslant (r_1 + r_2) \quad (17)$$

şi ţinînd seama de valoarea maximă şi minimă a segmentului $|A_1A_2|$, adică $|\overline{A_1A_2}|$ max. $= r + b$ şi $|\overline{A_1A_2}|$ min. $= |r - b|$, reies următoarele:

$$(r + b)^2 \leqslant (r_1 + r_2)^2 \quad \text{şi} \quad (r_1 - r_2)^2 \leqslant (r - b)^2,$$

ceea ce duce la $rb \leqslant r_1r_2$ sau

$$0 < \Delta_1 \leqslant \frac{1}{2} \quad (18)$$

şi de asemenea la

$$-(1 - 2\Delta_1) \leqslant \Delta_0 \leqslant (1 - 2\Delta_1), \quad (19)$$

sau

$$-\left(\frac{1}{\Delta_1} - 2\right) \leqslant \mu \leqslant \left(\frac{1}{\Delta_1} - 2\right). \quad (20)$$

S-au obţinut deci limitele valorilor luate de Δ_0 şi μ în funcţie de Δ_1 (tabela 2).

Tabela 1

Tabela funcțiilor $f_k^{(2n)}(\mu)$

$2n \backslash k$	0	1	2
1	μ	1	—
2	$2+\mu^2$	2μ	1
4	$6+12\mu^2+\mu^4$	$12\mu+4\mu^3$	$4+6\mu^2$
6	$20+90\mu^2+30\mu^4+\mu^6$	$60\mu+60\mu^3+6\mu^5$	$15+60\mu^2+15\mu^4$
8	$70+560\mu^2+420\mu^4+56\mu^6+\mu^8$	$280\mu+560\mu^3+168\mu^5+8\mu^7$	$56+420\mu^2+280\mu^4+28\mu^6$
10	$252+3150\mu^2+4200\mu^4+1260\mu^6+90\mu^8+\mu^{10}$	$1260\mu+4200\mu^3+2520\mu^5+360\mu^7+10\mu^9$	$210+2520\mu^2+3150\mu^4+840\mu^6+45\mu^8$

$2n \backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—
4	4μ	1	—	—	—	—	—	—
6	$30\mu+20\mu^3$	$6+15\mu^2$	6μ	1	—	—	—	—
8	$168\mu+280\mu^3+56\mu^5$	$28+168\mu^2+70\mu^4$	$56\mu+56\mu^3$	$8+28\mu^2$	8μ	1	—	—
10	$840\mu+2520\mu^3+1260\mu^5+120\mu^7$	$120+1260\mu^2+1260\mu^4+210\mu^6$	$360\mu+840\mu^3+252\mu^5$	$45+360\mu^2+210\mu^4$	$90\mu+120\mu^3$	$10+45\mu^2$	10μ	1

Tabela 2

Δ_0 ; μ ; Δ_1

Δ_1	Δ_0	μ
0	$-1 \div +1$	
0,1	$-0{,}8 \div -0{,}8$	$-8 \div +8$
0,2	$-0{,}6 \div +0{,}6$	$-3 \div +3$
0,3	$-0{,}4 \div +0{,}4$	$-1{,}33 \div +1{,}33$
0,4	$-0{,}2 \div +0{,}2$	$-0{,}5 \div +0{,}5$
0,5	0	0

Pentru o convergență cît mai rapidă a diferitelor dezvoltări, trebuie ca Δ_1, μ sau Δ_0, λ sau λ^* să fie cît mai mici, respectiv $\ll 1$ (exceptînd μ).

Dintre cazurile interesante menționăm mecanismele patrulatere care au două cîte două laturi egale și pentru care se găsesc formule exacte ale coeficienților diferitelor dezvoltări. Acest caz corespunde cu $\Delta_0 = 0$ ($\mu = 0$).

1. $r_1 = b, r_2 = r$ — patrulater cu două cîte două laturi opuse egale — paralelogram ($\Psi = \varphi$) sau antiparalelogram cu manivelele $0A_1$ și A_2B încrucișate avînd mers în același sens $\lambda^* < 1$ și $\Psi = -\varphi$ (fig. 3), sau cu biela A_1B și suportul $0A_2$ încrucișate avînd mersul manivelelor în sens contrar $\lambda < 1$ și $\Psi = 360 - \varphi$ (fig. 4).

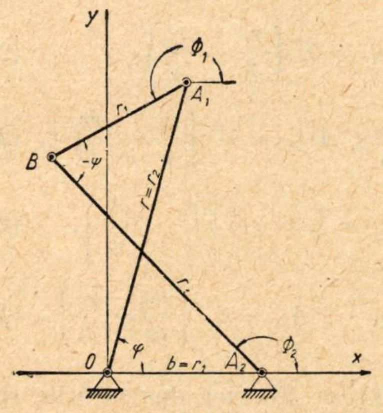


Fig. 3

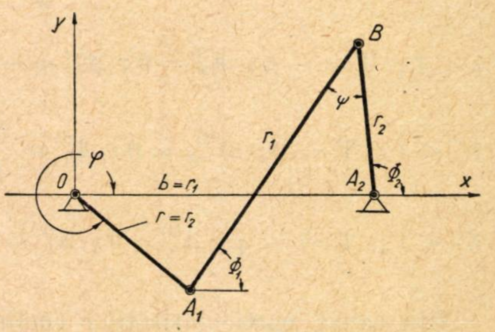


Fig. 4

2. $r_1 = r$, $r_2 = b$ — patrulater cu două cîte două laturi alăturate egale $\Psi = \varphi$ (fig. 5) sau patrulater degenerat $\Psi = 360 - \varphi$ cu $\lambda < 1$ sau $\lambda^* < 1$ (fig. 6).

Pentru aceste prime două cazuri s-a observat că $\Psi = \varphi$ sau $\Psi = -\varphi$ ($\Psi = 360 - \varphi$) ceea ce atrage direct (Ψ trece prin 0 și 180°):

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = \varphi \quad && B_1 = 1 \text{ și } B_k = 0 \text{ pentru } k \neq 1, \\ &\Psi = -\varphi && B_1 = 1 \text{ și } B_k = 0 \text{ pentru } k \neq -1, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

iar

$$C_1^{(1)} = -r_2 \quad C_0^{(1)} = r_1 \quad C_k^{(1)} = 0 \text{ pentru } k \neq 0, -1, \tag{22}$$

sau

$$C_{-1}^{(1)} = -r_2 \quad C_0^{(1)} = r_1 \quad C_k^{(1)} = 0 \text{ pentru } k \neq 0, -1.$$

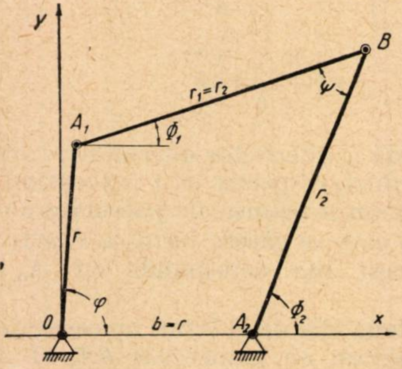


Fig. 5

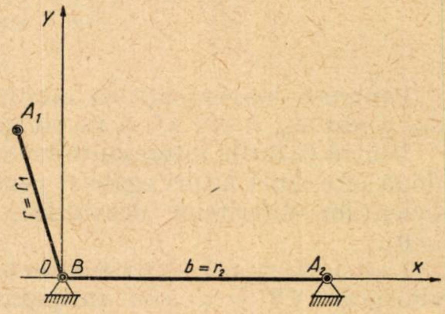


Fig. 6

Soluțiile vor fi

$$a)\ \lambda < 1\,;\ \Psi = \varphi\,;\ A_m^{(1)} = 0\,;\ A_0^{(1)} = \frac{r_1}{b}\,;\ A_m^{(1)} = \lambda^m \left(\frac{r_1}{b} - \frac{r_2}{r}\right), \tag{23}$$

$$b)\ \lambda < 1\,;\ \Psi = -\varphi\,;\ A_m^{(1)} = 0\,;\ A_1^{(1)} = -\frac{r_2}{b}\,;\ A_{-m}^{(1)} = \lambda^m \left[\frac{r_1}{b} - \frac{rr_2}{b^2}\right], \tag{24}$$

$$c)\ \lambda^\star < 1\,;\ \Psi = \varphi\,;\ A_{-m}^{(1)} = 0\,;\ A_0^{(1)} = \frac{r_2}{r}\,;\ A_{+m}^{(1)} = \lambda^{\star m} \left[\frac{r_2}{r} - \frac{r_1}{b}\right], \tag{25}$$

$$d)\ \lambda^\star < 1\,;\ \Psi = -\varphi\,;\ A_m^{(1)} = 0\,;\ A_1^{(1)} = -\frac{r_1}{r}\,;\ A_m^{(1)} = \lambda^{\star m} \left[\frac{rr_2}{b^2} - \frac{r_1}{b}\right]. \tag{26}$$

Din cauza particularităților coeficienților Fourier dezvoltările sînt progresii geometrice care conduc la expresiile

$$\Psi = \varphi \qquad e^{i\varphi_1} = \frac{r_2 - r_1 e^{i\varphi}}{r - b\, e^{i\varphi}}, \tag{27}$$

$$\Psi = -\varphi \qquad e^{i\varphi_1} = \frac{r_1 - r_2 e^{i\varphi}}{b - r\, e^{-i\varphi}},$$

și

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Psi. \tag{28}$$

3. În aceeași situație cu indicele $\Delta_0 = 0$ se găsesc și patrulaterele al căror vîrf B (diada Cebîșev), se află pentru unghiul $\varphi = 90^\circ$ pe cercul circumscris triunghiului dreptunghi OA_1A_2 (fig. 7), căci $r_1^2 + r_2^2 = r^2 + b^2$. Cazurile de mai sus cu $\Delta_1 = 0{,}5$ corespund pe figura 7 paralelogramelor $O_1A_1B_2A_2$ sau $O_2A_1B_1A_2$ antiparalelogramelor $O_1A_1O_2A_2$ sau $O_2A_1O_1A_2$ și patrulaterelor $O_1A_1B_1A_2$ sau $O_2A_1B_2A_2$. Pentru $\Delta_1 < 0{,}5$ punctul B este așezat între B_1 și B_2, deoarece suprafața triunghiului $A_1BA_2 = r_1r_2/_2$ este mai mare decît suprafața triunghiului $O_1A_1A_2 = rb/_2$. Din tabela 1 rezultă pentru $\mu = 0$, următoarele :

$$\begin{aligned}
D_0 &= 1 - \left[\Delta_1^2 + \frac{3}{4}\,\Delta_1^4 + \frac{5}{4}\,\Delta_1^6 + \frac{175}{64}\,\Delta_1^8 + \frac{441}{64}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right. \\
D_2 = D_{-2} &= -\left[\frac{1}{2}\,\Delta_1^2 + \frac{1}{2}\,\Delta_1^4 + \frac{15}{16}\,\Delta_1^6 + \frac{35}{16}\,\Delta_1^8 + \frac{735}{128}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right. \\
D_4 = D_{-4} &= -\left[\frac{1}{8}\,\Delta_1^4 + \frac{3}{8}\,\Delta_1^6 + \frac{35}{32}\,\Delta_1^8 + \frac{105}{32}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right. \\
D_6 = D_{-6} &= -\left[\frac{1}{16}\,\Delta_1^6 + \frac{5}{16}\,\Delta_1^8 + \frac{315}{256}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right. \\
D_8 = D_{-8} &= -\left[\frac{5}{128}\,\Delta_1^8 + \frac{35}{128}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right. \\
D_{10} = D_{-10} &= -\left[\frac{7}{256}\,\Delta_1^{10} \ldots, \right.
\end{aligned} \qquad (29)$$

iar coeficienții de indice impar sînt nuli. Așa cum am arătat mai sus Δ_1 poate varia între 0 și 0,5, iar unghiul Ψ trebuie să rămînă cuprins între 0 și 180°.

4. Dacă pentru $\varphi = 90^\circ$ unghiul $\Psi < 90^\circ$ punctul B este în afara cercului $O_1O_2A_1A_2$ cu $\Delta_0 > 0$, iar dacă $\Psi > 90^\circ$ punctul B este în interiorul acestui cerc, avîndu-se $\Delta_0 < 0$. Într-adevăr pentru această poziție $\varphi = 90^\circ$ avem $\cos \Psi_{90} = \Delta_0$. În figura 7 sînt desenate locurile geometrice — cercuri — pentru construcția patrulaterelor cu diferiți indici $\Delta_0 = \text{const.}$ De asemenea, sînt reprezentate locurile geometrice — ovalele lui Cassini — pentru punctele de indici $\Delta_1 = \text{const.}$ Punctul B poate aparține domeniului limitat de elipsa $r_1 + r_2 = r + b = \text{const.}$ și de ramurile hiperbolei $|\, r_1 - r_2 \,| = |\, r - b \,| = \text{const.}$, ambele cu focarele în A_1 și A_2, în care caz mecanismul patrulater articulat este cu manivelă și balansier pentru originea O_1 cu $\lambda < 1$ și cu două manivele pentru originea O_2 cu $\lambda^* < 1$.

5. Valorile coeficienților Δ_0 și Δ_1 pot fi găsite direct pe cale grafică, desenînd patrulaterul în trei poziții particulare (ceea ce permite și verificare) și anume

$$\begin{aligned}
\varphi &= 0 & \cos \Psi_0 &= \Delta_0 + 2\Delta_1, \\
\varphi &= 90^\circ & \cos \Psi_{90} &= \Delta_0, \\
\varphi &= 180^\circ & \cos \Psi_{180} &= \Delta_0 - 2\Delta_1,
\end{aligned}$$

deoarece $\cos \Psi = \Delta_0 + 2\,\Delta_1 \cos \varphi$. (30)

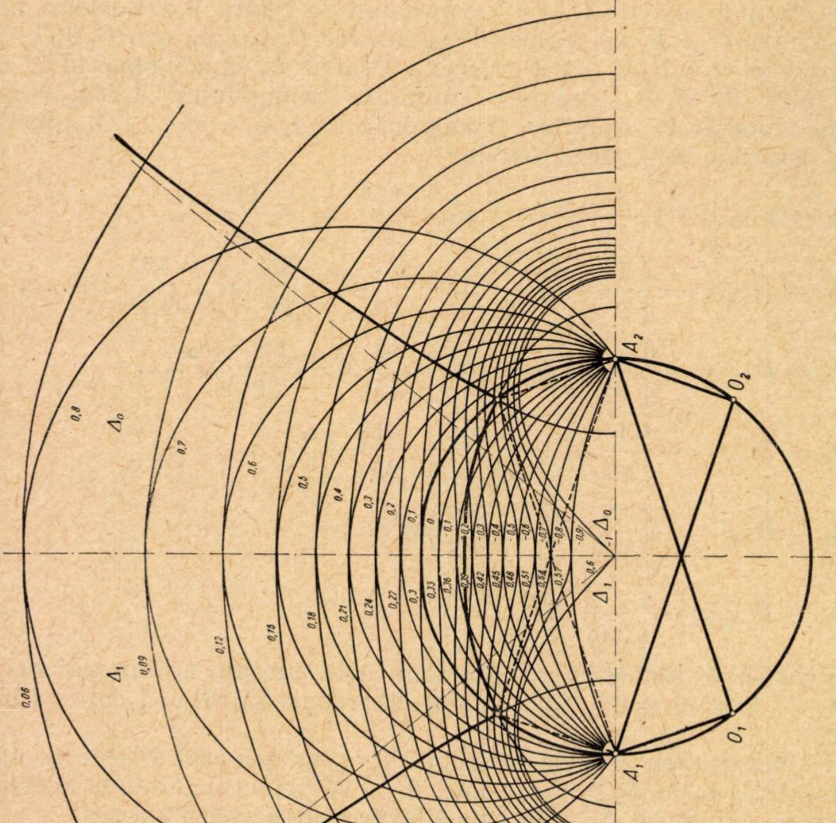

0,8
Δ0
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,7
-0,8
-0,9
-1
Δ0
0,06
Δ1
0,09
0,12
0,15
0,18
0,21
0,24
0,27
0,3
0,33
0,36
0,39
0,42
0,45
0,48
0,51
0,54
0,57
0,6
Δ1
A2
O2
A1
O1

Fig. 7

Pentru seria Fourier

$$\sin \Psi = D_0 + 2D_1 \cos \varphi + \ldots + 2D_k \cos k\varphi + \ldots, \tag{31}$$

se poate calcula în acelaşi fel determinînd pentru diferite poziţii $\varphi_i = \frac{2\pi i}{m}$, valorile funcţiei $\sin \Psi_i$ şi deci

$$m D_k = \sum_{i=1}^{m} \sin \Psi_i \cos k\varphi_i \tag{32}$$

unde s-a împărţit perioada 2π în m părţi egale (fig. 8).

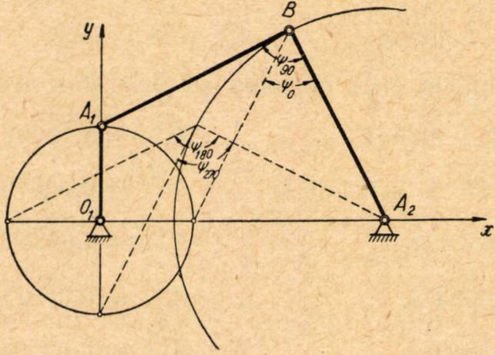


Fig. 8

Exemplu de calcul

Fie patrulaterul (fig. 8) $r = 50$ mm, $b = 150$ mm, $r_1 = r_2 = 50\sqrt{5} = 111{,}80$ mm.

Se calculează $\lambda = \frac{r}{b} = \frac{1}{3}$, $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 0{,}3$.

Din formulele (29), respectiv nomogramele (3) rezultă coeficienţii

$D_0 = 0{,}90279$, $D_1 = D_3 = D_5 = D_7 = 0$,

$D_2 = -0{,}04990$,

$D_4 = -0{,}00136$,

$D_6 = -0{,}00007$.

Aplicînd relaţiile (11) — (12) avem

$B_0 = 0{,}90279\ i$, $B_4 = -0{,}00136\ i$,

$B_1 = B_{-1} = 0{,}3$, $B_5 = 0$,

$B_2 = -0{,}04990\ i$, $B_6 = -0{,}00007\ i$,

$B_3 = 0$, $B_7 = 0$.

Deducem din (13) următoarele:

$$C_0^{(1)} = 111{,}80 - 100{,}93192\ i,$$

$$C_1^{(1)} = C_{-1}^{(1)} = -33{,}54,$$

$$C_2^{(1)} = C_{-2}^{(1)} = 5{,}57882\ i,$$

$$C_3^{(1)} = C_{-3}^{(1)} = 0,$$

$$C_4^{(1)} = C_{-4}^{(1)} = 0{,}15\,205\ i,$$

$$C_5^{(1)} = C_{-5}^{(1)} = 0,$$

$$C_6^{(1)} = C_{-6}^{(1)} = 0{,}00783\ i, \qquad C_7^{(1)} = C_{-7}^{(1)} = 0.$$

Iar din formulele (14) obţinem în cele din urmă

$$A_0^{(1)} = 0{,}6708 + 0{,}66873\ i, \qquad A_{-1}^{(1)} = 0{,}22291\ i,$$

$$A_1^{(1)} = -0{,}2236 - 0{,}12773\ i, \qquad A_{-2}^{(1)} = 0{,}00079 + 0{,}03711\ i,$$

$$A_2^{(1)} = -0{,}03731\ i, \qquad A_{-3}^{(1)} = 0{,}01237\ i,$$

$$A_3^{(1)} = -0{,}00034\ i, \qquad A_{-4}^{(1)} = 0{,}00311\ i,$$

$$A_4^{(1)} = -0{,}01019\ i, \qquad A_{-5}^{(1)} = 0{,}00103\ i,$$

$$A_5^{(1)} = -0{,}00002\ i, \qquad A_{-6}^{(1)} = 0{,}00029\ i,$$

$$A_6^{(1)} = -0{,}00005\ i, \qquad A_{-7}^{(1)} = 0{,}00009\ i.$$

Primită la redacţie la 23 decembrie 1959

К КИНЕМАТИКЕ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА

РЕЗЮМЕ

Применяя общие соотношения, полученные для диады с низшими парами в связи с разложениями в ряд Фурье различных параметров к комплексной форме; устанавливается классификация для случая шарнирного четырехзвенного механизма, причем показываются области применимости и быстрой сходимости для используемого метода. С целью облегчения вычислений, хотя они уже были упрощены тем, что разложение cos ψ (угла передачи) содержит только три члена $\Delta_1 = \underline{\Delta}_1$ и Δ_0, приводятся номограммы для графического расчета. Также дается обзор частных случаев, представляющих формулы в очень простом виде.

BEITRÄGE ZUR KINEMATIK DES GELENKVIERECKS

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Anwendung der für die Dyade mit niederen Elementenpaaren gefundenen allgemeinen Beziehungen im Hinblick auf die komplexe Fourierentwicklung der verschiedenen Parameter für die Untersuchung des Gelenkvierecks verfolgt und zu diesem Zweck eine Einteilung vorgenommen und die Anwendungsgebiete sowie das Kriterium schneller Konvergenz für die benutzte Methode gezeigt.

Zur Erleichterung der Rechnungen, die schon durch die Tatsache vereinfacht wird, daß die Entwicklung von cos ψ (Übertragungswinkel) nur drei Glieder, $\Delta_1 = \Delta_{-1}$ und Δ_0 enthält, werden für die graphische Berechnung noch Nomogramme aufgestellt.

Es werden ferner die Sonderfälle behandelt, welche die Formeln in besonders einfacher Form zeigen.

BIBLIOGRAFIE

1. Radu C. Bogdan, Christian Pelecudi, *Contribuţii la cinematica diadei Cebîşev.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *4* (1959).
2. Radu C. Bogdan, Christian Pelecudi, *Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).
3. Meyer zur Capellen, *Die zwei dimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *1/2* Ianuar/Februar (1959).
4. Meyer zur Capellen, *Die harmonische Analyse bei elliptichen Kurbelschleifen.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *1/2* Ianuar/Februar, (1958).
5. И. И. Артоболевский, Н. И. Левицкий, С. А. Черкудинов, *Синтез плоских механизмов.* Физматгиз, 1959.

REZISTENȚA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

STAREA ELASTO-PLASTICĂ A RECIPIENTELOR CU STRATURI MULTIPLE

DE

J. VALENTA [1]

INTRODUCERE

Pentru obținerea unei utilizări mai uniforme a materialului din care sînt executați pereții recipientelor de mare presiune, s-au propus construcții pretensionate la care se realizează o distribuție practic uniformă de tensiuni pe grosimea peretelui [1], [2]. Aceasta se obține prin provocarea unei contracții a fibrelor exterioare ale peretelui astfel încît la o presiune interioară nulă fibrele interioare să fie supuse la o pretensionare de compresiune circumferențială. Această pretensionare compensează într-o anumită măsură tensiunile de întindere cauzate de presiune internă.

În acest domeniu au dat bune rezultate utilizarea recipientelor înfășurate cu o bandă profilată [1], [3] și așa-numitele recipiente cu straturi multiple [4], [5].

Prima categorie de recipiente se obține prin înfășurarea unei benzi profilate în mai multe straturi pe un miez cu pereți subțiri, cu pasul spiralei benzii corespunzător lățimii acesteia. Banda este mai întîi încălzită prin rezistență sau inducție la o temperatură de 800° pînă la 900°C, iar în timpul înfășurării este presată cu ajutorul unei role. Imediat după rola de comprimare, banda este răcită cu ajutorul unui curent de aer cu viteză mare și după înfășurarea a cîtorva pasuri, printr-un duș de apă; acest tratament dă benzii atît proprietățile mecanice cerute, cît și pretensionarea de întindere necesară. Benzile sînt striate și se suprapun parțial una peste cealaltă, astfel încît se obține o îmbinare capabilă să preia forțele axiale (fig. 1).

De obicei, un recipient cu straturi multiple constă dintr-un miez avînd o grosime de aproximativ 20 mm și din straturi de oțel de 6 mm, fiecare dintre acestea fiind înfășurate progresiv și strînse în jurul unui cilindru interior prin mijloace mecanice, iar apoi sudate, întîi cu o cusătură longitudinală și apoi cu două cusături de capăt circulare. Straturile individuale care înfășoară miezul trebuiesc prevăzute cu orificii mici pentru a asigura ventilația și contactul intim între două straturi succesive. Contracția cusăturilor longitudinale, care nu trebuie tratată termic pentru înlăturarea tensiunii reziduale, produce o tensiune de întindere în straturile precedente.

---

[1] Vyzkumný Ústav Tepelné Techniky, Praga.

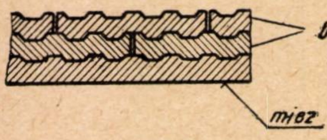


Fig. 1

Soluția teoretică a problemei recipientelor cu straturi multiple [1]) în domeniul elastic a constituit un obiect de studiu pentru diverși autori [6], [7]. Pretensionarea rezultantă a recipientului a fost determinată în ipoteza unor straturi infinit de subțiri. Siebel [8] și Urbanowski [9] au considerat o grosime finită a straturilor, determinînd tensiunile într-un recipient cu straturi multiple pentru un caz special de pretensionare; Siebel pe baza tensiunilor tangențiale maxime, iar Urbanowski cu ajutorul ipotezei HMH (Huber-Mises-Hencky).

În articolul de față se încearcă a se rezolva starea de tensiune a unui recipient cu straturi multiple în domeniul elastoplastic, în cazul unei grosimi finite a straturilor și considerînd modulul de plasticitate constant. Se determină domeniul admisibil de contracție și condițiile optime pentru un recipient cu straturi multiple.

TENSIUNILE ELASTICE PROVOCATE DE CONTRACȚIA STRATURILOR

Se presupune că recipientul constă din n straturi, fiecare cu o grosime s, și dintr-un cilindru interior avînd grosimea s_1 (fig. 2). Presiunea ${}^1p'_K$ cauzată de contracția între stratul K și straturile interioare poate fi determinată din condiția ca suma variațiilor diametrului exterior al recipientului [cilindrul interior împreună cu cele $(K-1)$ straturi] și stratul K să fie egală cu Δ_K. Pentru generalizare să presupunem că stratul este un cilindru cu pereți groși. În acest caz

$$
{}^1p'_K = \frac{E_2\,\Delta_K}{2r_K}\cdot\frac{r^2_{K+1}-r^2_K}{r^2_{K+1}-r^2_0}\left(1-\frac{r^2_0}{r^2_K}\right);\qquad K=1,\,2,\,\ldots,\,n, \tag{1}
$$

unde r_0 este raza interioară a recipientului, r_K este raza interioară a stratului K și E_2 este modulul de elasticitate al materialului stratului.

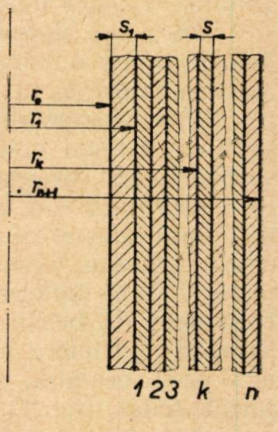


Fig. 2

---

[1]) În articolul de față prin „recipient cu straturi multiple" se înțelege un recipient pretensionat care constă dintr-o serie de cilindri avînd toți aceeași grosime, cu excepția cilindrului interior.

Pentru n straturi, relaţia pentru presiunea care acţionează la raza r_K poate fi scrisă în următoarea formă generală

$$p_K' = \frac{E_2}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r_K^2}\right)\sum_{j=K}^{n}\frac{\Delta_j}{r_j}\cdot\frac{r_{j+1}^2 - r_j^2}{r_{j+1}^2 - r_0^2}. \tag{2}$$

Aici Δ_j poate fi exprimat astfel:

$$\frac{\Delta_j}{r_j} = \frac{1}{E_2} f(r_j, \bar{\sigma}_r) \tag{3}$$

unde $\bar{\sigma}_r$ este pretensionarea radială a stratului, iar $f(r_j, \bar{\sigma}_r)$ este aşa-numită funcţie de ,,pretensionare'', dată de metoda de fabricare a recipientului cu straturi multiple; aceasta trebuie determinată experimental, de exemplu prin măsurători ale deformaţiilor radiale ale cilindrului interior în timpul contracţiei straturilor [3], [7]. Măsurători efectuate pe recipiente pretensionate în Cehoslovacia şi în alte ţări [8], [10] au arătat că funcţia $f(r_j, \bar{\sigma}_r)$ este practic independentă de raza r_j. Astfel, în cazul unui recipient cu benzi înfăşurate, se obţine funcţia

$$f(r_j, \bar{\sigma}_r) = E_2 \beta\, \Delta t,$$

unde β este coeficientul de dilatare termică şi Δt este gradientul de temperatură corespunzînd contracţiei benzii. Cînd pretensionarea este provocată de contracţia cusăturii longitudinale, atunci $f(r_j, \bar{\sigma}_r) = \sigma_t$ unde σ_t este pretensionarea circumferenţială a stratului individual [10], [11].

Expresia (2) poate fi scrisă după cum urmează

$$p_K' = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r_K^2}\right)\sum_{j=K}^{n}\frac{r_{j+1}^2 - r_j^2}{r_{j+1}^2 - r_0^2}. \tag{4}$$

Suma din ecuaţia (4) se poate exprima simplu cu ajutorul funcţiei (funcţia digamma), definită după cum urmează [13]:

$$\Psi(x) = \frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} = -0{,}57772\ldots - \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+j} - \frac{1}{j+1}\right). \tag{5}$$

Se obţine

$$p_K' = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{4}\left(1 - \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\Psi_{1,2}(n, K), \tag{6}$$

în care $\alpha_K = \frac{r_K}{r_0}$;

$$\Psi_{1,2}(n, K) = \left(2 + \frac{s}{r_0}\right)\left[\Psi\left(n + 1 + \frac{r_1 + r_0}{s}\right) - \Psi\left(K + \frac{r_1 + r_0}{s}\right)\right] +$$

$$+ \left(2 - \frac{s}{r_0}\right)\left[\Psi\left(n + 1 + \frac{s_1}{s}\right) - \Psi\left(K + \frac{s_1}{s}\right)\right].$$

Funcția $\Psi(x)$ este tabulată [13] și reprezentată grafic în figura 3 *a*. În mod similar, funcția digamma poate fi folosită pentru exprimarea tensiunii de contracție circomferențială rezultantă pe raza interioară a stratului K.

$$\sigma'_{tK} = f(\bar{\sigma}_r)\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\Psi_{1,2}(n, K)\right]. \qquad (7)$$

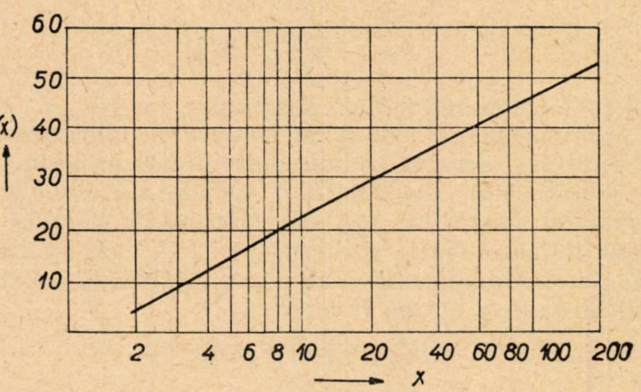


Fig. 3 *a*

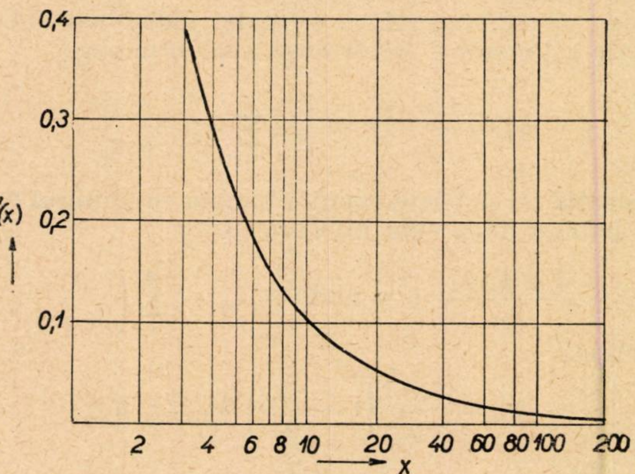


Fig. 3 *b*

Rezultă din proprietățile funcției $\Psi(x)$ că prin mărirea numărului de straturi n, incrementul funcției $\Psi_{1,2}(n, K)$ descrește cu alte cuvinte, rolul jucat de straturi în menținerea presiunii de contracție radială se mărește. Maximul curbei p'_K se deplasează către straturile exterioare.

NUMĂR INFINIT DE STRATURI

Urmează a se determina limita expresiei (6). În conformitate cu [13], pentru funcţia $\Psi(x)$ este valabilă următoarea dezvoltare asimptotică $(x \gg 1)$:

$$\Psi(x) = \lg x - \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{x+j} - \lg\left(1 + \frac{1}{x+j}\right)\right]. \tag{8}$$

Folosind expresia (8), obţinem pentru straturile infinit de subţiri $(s \to 0)$

$$\begin{aligned} p'_K = \lim_{s\to 0}\frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\Bigg\{\lg\frac{\alpha_{n+1}^2 - 1}{\alpha_K^2 - 1} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{s}{r_0}\,\frac{\alpha_{K+1} - \alpha_K}{\alpha_K - 1 + j\frac{s}{r_0}} \times \\ \times\left(\frac{1}{\alpha_{n+1} + 1 + j\frac{s}{r_0}} + \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1 + j\frac{s}{r_0}}\right) + \\ + \lg\frac{\left(1 + \frac{s}{r_0}\cdot\frac{1}{\alpha_{n+1} + 1 + j\frac{s}{r_0}}\right)\left(1 + \frac{s}{r_0}\,\frac{1}{\alpha_{n+1} - 1 + j\frac{s}{r_0}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{r_0}\cdot\frac{1}{\alpha_K + 1 + j\frac{s}{r_0}}\right)\left(1 + \frac{s}{r_0}\,\frac{1}{\alpha_K - 1 + j\frac{s}{r_0}}\right)}\Bigg\} = \\ = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\lg\frac{\alpha_{n+1}^2 - 1}{\alpha_K^2 - 1}. \end{aligned} \tag{9}$$

În mod similar, limita expresiei (7) pentru $s \to 0$

$$\sigma'_{tK} = f(\bar{\sigma}_r)\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\lg\frac{\alpha_{n+1}^2 - 1}{\alpha_K^2 - 1}\right]. \tag{10}$$

Expresiile (9) şi (10) corespund relaţiilor folosite pînă acum în calculul recipientelor cu straturi multiple. Ele sînt justificate numai în cazul recipientelor înfăşurate cu sîrmă de oţel, deoarece diametrul sîrmei este foarte mic faţă de alte dimensiuni.

STABILIREA CILINDRULUI INTERIOR

Straturile exterioare opresc deformaţia liberă a cilindrului interior, deformaţia miezului putînd fi doar locală, iar ruperea lui apare în realitate datorită ruperii la forfecare a segmentelor individuale.

Numărul necesar de straturi este determinat din condiţia ca pretensionarea prin compresiune a miezului să nu depăşească limita admisibilă.

Cînd în dezvoltarea (8) se folosesc doar primii doi termeni şi se neglijează raportul $\frac{s}{r_0}$ în comparaţie cu unitatea, numărul admis de straturi poate fi exprimat cu ajutorul expresiei (6) după cum urmează

$$\alpha_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{r_0} = -\frac{s}{r_0} + \sqrt{1 + \left[\left(\alpha_1 + \frac{s}{r_0}\right)^2 - 1\right] e^{\xi}} \tag{11}$$

$$\text{unde } \xi = \frac{\sigma'_{t0}}{f(\bar{\sigma}_r)} - \frac{1}{2\left(1 + \frac{s_1}{s}\right)}\,; \quad \sigma'_{t0} = \frac{2\,\alpha'_1}{\alpha_1^2 - 1}\, p'_1$$

este pretensionarea admisibilă a cilindrului interior.

Este bine cunoscut din teoria cilindrilor cu pereţi groşi că cilindrul se rupe la o presiune

$$p_0 \simeq \sigma_{p1} \lg \frac{r_{n+1}}{r_0}\,, \tag{12}$$

unde σ_{p1} este rezistenţa la rupere a materialului, iar r_0, r_{n+1} sînt respectiv razele exterioară şi interioară ale recipientului. În cazul în care raportul dintre tensiunea de curgere şi rezistenţa la rupere a materialului se apropie de 1, expresia (12) corespunde în mod satisfăcător condiţiilor reale [16].

Miezul este precomprimat prin înfăşurarea straturilor, astfel încît ruperea sa apare datorită presiunii externe. În cazul de faţă cînd se foloseşte expresia (12), miezul se rupe la presiunea exterioară de $p'_1 \approx \sigma_{p1} \,.\, \lg \,.\, \alpha_1$. Numărul limită de straturi poate fi din nou determinat din expresia (11) prin substituirea expresiei

$$\sigma'_{t0} = \frac{2\alpha_1^2 \lg \alpha_1}{\alpha_1^2 - 1}\, \sigma_{p1}\,.$$

Exemplu

Considerăm un recipient din benzi înfăşurate avînd

$$r_0 = 66{,}0 \text{ cm}\,; \quad S_1 = 3{,}5 \text{ cm}\,;$$
$$n = 12 \quad ; \quad S = 0{,}8 \text{ cm}$$
$$f(\bar{\sigma}_r) = E_2 \beta\, \Delta t = 20\ .\ 10^2 \text{kg/cm}^2$$
$$\sigma_{p1} = 55\ .\ 10^2 \text{ kg/cm}^2.$$

Prin substituire în (11) rezultă

$$\alpha_{n+1} = -\frac{0{,}8}{66} + \sqrt{1 + \left[\left(\frac{69{,}5 + 0{,}8}{66}\right)^2 - 1\right] e^{2{,}64}} = 1{,}8.$$

Numărul de straturi la care apare ruperea miezului este

$$n = \frac{r_{n+1} - r_1}{s} \approx 62\,;$$

cel real constă din 12 straturi.

RECIPIENT CU STRATURI MULTIPLE SUPUS LA PRESIUNE INTERNĂ

Este binecunoscut faptul că începutul deformaţiilor permanente este legat de începutul lunecării plastice în granulele cristaline precum şi în straturile individuale ale materialului. Condiţiile care determină începutul lunecării pentru o stare spaţială de tensiune pot fi obţinute fie din teoria tensiunilor tangenţiale maxime (Guest), fie din teoria energiei de deformaţie HMH (Huber-Mises-Hencky).

La determinarea dimensiunilor unui recipient cu straturi multiple se foloseşte ipoteza tensiunilor tangenţiale maxime care dă relaţii simple ce se pot întrebuinţa în practică. Să presupunem că tensiunile principale sînt date şi că $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. În acest caz condiţia lui Guest este valabilă la limita de curgere

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_K \tag{13}$$

unde σ_K este limita de curgere a materialului. Ipotezele de bază sînt:

a) secţiunile aşezate la o distanţă suficientă de extremităţi rămîn plane şi după deformaţie (principiul lui Saint Venant);

b) tensiunile axiale rezultante nu depăşesc valoarea tensiunilor circomferenţiale.

Datorită unei anumite elasticităţi a straturilor, tensiunea axială a miezului poate fi în cazul recipientelor cu straturi multiple mai mare decît aceea a straturilor. Pentru acest motiv se introduce coeficientul φ în calculul de rezistenţă al miezului, care reprezintă raportul între tensiunea axială a cilindrului interior şi tensiunea axială a unui cilindru cu pereţi groşi de o dimensiune similară cu aceea a unui recipient cu straturi multiple. Pentru recipientul din benzi înfăşurate valoarea teoretică a coeficientului φ a fost determinată în lucrarea [3]. Deoarece tensiunea axială este distribuită uniform pe grosimea unui recipient cu straturi multiple, $\varphi = 1$. Cînd forţa axială este transmisă numai prin cilindrul interior

$$\varphi = \frac{\alpha_{n+1}^2 - 1}{\alpha_1^2 - 1}.$$

Pentru majoritatea recipientelor din benzi înfăşurate, se admite $\varphi \approx 2$ [3], [8].

Datorită diferenţei între tensiunile axiale ale miezului şi ale straturilor, presiunea dintre miez şi straturi trebuie să fie determinată din condiţia ca deformaţiile lor circomferenţiale să fie egale la raza r_1. Aşadar

$$p_{10} = \frac{\dfrac{E_2}{E_1} p_0 - \dfrac{\mu}{2}(\alpha_1^2 - 1)\left(\dfrac{E_2}{E_1}\sigma_{z_1} - \sigma_{z_2}\right)}{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{E_2}{E_1}(\alpha_1^2 + 1) - \dfrac{\mu}{2}(\alpha_1^2 - 1)\left(\dfrac{E_2}{E_1} - 1\right) + \dfrac{(\alpha_{n+1}^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1^2 - 1)}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2}\right]} \tag{14}$$

unde p_0 este presiunea interioară, σ_{z_1} este tensiunea axială a miezului, σ_{z_2} este tensiunea axială a straturilor care este distribuită uniform pe întreaga secțiune transversală a straturilor, E_1 este modulul de elasticitate al materialului miezului și μ este valoarea inversă a constantei lui Poisson.

Să calculăm pe σ_{z_2} din condiția de echilibru în direcția axială și să o substituim în expresia (14). Pentru $E_1 = E_2 = E$, se obține

$$p_{10} = \frac{p_0}{\alpha_1^2(\alpha_{n+1}^2 - 1)} \left[\alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2 - \frac{\mu}{2}(\alpha_1^2 - 1)(\varphi - 1)\right]. \tag{15}$$

În conformitate cu (13) pe raza interioară r_0 a recipientului, se aplică următoarea relație

$$\frac{p_0}{\alpha_{n+1}^2 - 1}\left[2\alpha_{n+1}^2 + \mu(\varphi - 1)\right]\frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\Psi_{1,\,2}(n, 1) = \frac{c\,\sigma_{K1}}{\varkappa_1}, \tag{16}$$

unde σ_{K1} este limita de curgere al materialului miezului, $\varkappa_1$ este factorul de siguranță și c este factorul de utilizare al sudurii miezului.

În mod similar, tensiunile tangențiale maxime pe raza interioară a stratului K se pot exprima în modul următor:

$$f(\bar{\sigma}_r)\left[1 - \frac{1}{2\alpha_K^2}\Psi_{1,2}(n, K)\right] + \frac{2\alpha_1^2 p_{10}}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2}\cdot\frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_K^2} = \frac{\sigma_{K2}}{\varkappa_2}, \tag{17}$$

unde σ_{k_2} este limita de curgere a materialului benzilor și $\varkappa_2$ este factorul de siguranță.

Introducînd funcția digamma, curba discontinuă a tensiunilor tangențiale este înlocuită printr-o funcție continuă, valorile acestei funcții de substituție corespunzînd în punctele $K = 1,2,\ldots, n$ cu valorile reale (fig. 4). Părțile din stînga ale ecuațiilor (16) și (17) stabilesc nu numai mărimea, ci de asemenea și caracterul curbei tensiunilor reduse în straturile recipientului; astfel se poate determina poziția tensiunii tangențiale maxime sau se poate propune pretensionarea optimă.

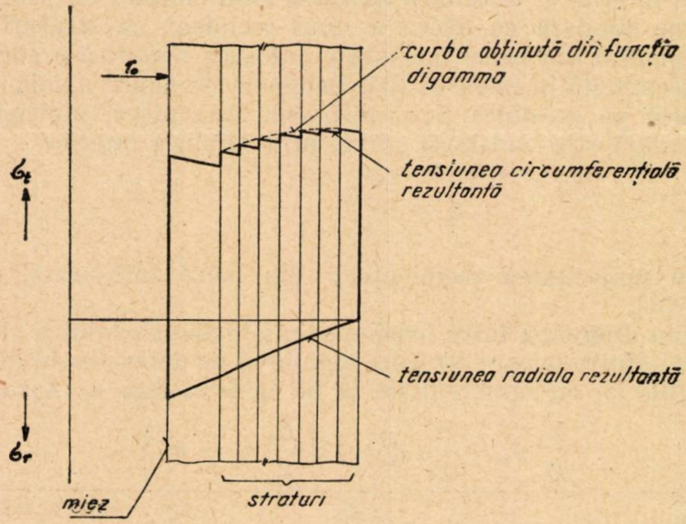

curba obținută din funcția digamma
r_0
σ_t
tensiunea circumferențială rezultantă
tensiunea radiala rezultantă
σ_r
miez
straturi

Fig. 4

Să anulăm prima derivată în raport cu K a părţii din stînga a ecuaţiei (17)

$$\frac{f(\bar{\sigma}_r)}{4p_0} = \frac{\delta_1}{\Psi_{1,2}(n, K) - \frac{r_K}{2_s}\Psi'_{1,2}(n, K)},$$

$$\text{unde} \quad \delta_1 = \frac{2\alpha^2_{n+1}}{\alpha^2_{n+1} - 1}\left[1 - \frac{\mu}{2}(\varphi - 1)\frac{\alpha^2_i - 1}{\alpha^2_{n+} - \alpha^2_1}\right]; \tag{18}$$

$\Psi'_{1,2}(n, K) = \frac{\partial\Psi_{1,2}(n, K)}{\partial K}$ este aşa-numita funcţie trigamma.

Ecuaţia (18) permite, de exemplu, determinarea stratului K la tensiunile tangenţiale maxime. Reprezentarea funcţiei trigamma este arătată în figura 3 *b*.

Rezultă din proprietăţile funcţiilor digamma şi trigamma că numitorul expresiei (18) descreşte cu creşterea lui K. Pentru a obţine tensiuni tangenţiale maxime în primul sau în ultimul strat, este necesară o anumită pretensionare $f(\sigma_r)$ minimă sau maximă.

Să analizăm relaţia dintre numărul de straturi şi valoarea pretensionării. Grosimea stratului individual rămîne constantă în toate cazurile. Pretensionarea $f(\sigma_r)$ va varia în interiorul domeniului $(1 \leqq K \leqq n)$ în conformitate cu (18).

Dacă se dau σ_{K_1}, σ_{K_2} sau grosimea stratului s, numărul de straturi n, grosimea miezului s_1 şi pretensionarea $f(\bar{\sigma}_r)$ pot fi determinate din expresiile (15) pînă la (18) în aşa fel încît să rezulte simultan valoarea maximă a tensiunilor tangenţiale atît în miez (fibra interioară) cît şi într-unul din straturi. În conformitate cu figurile 5 *a—c*, numărul de straturi şi grosimea recipientului descresc cu creşterea pretensionării $f(\bar{\sigma}_r)$. Cînd poziţia tensi-

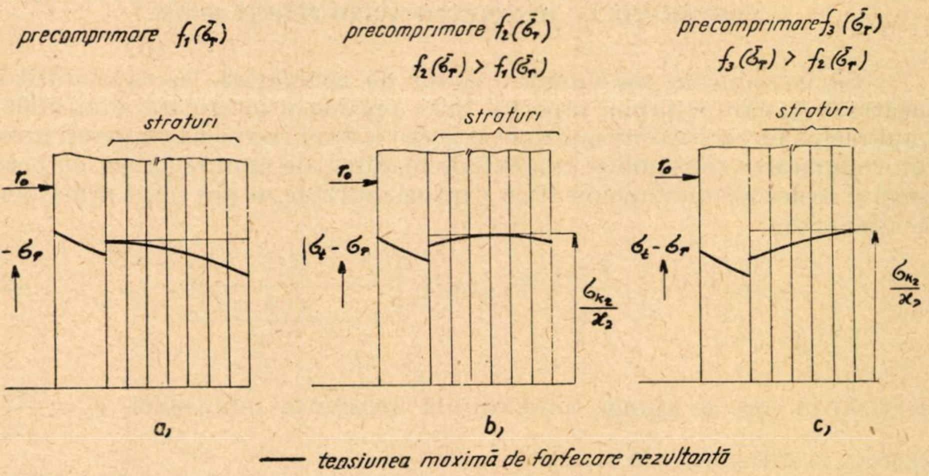

precomprimare $f_1(\bar{\sigma}_r)$
precomprimare $f_2(\bar{\sigma}_r)$
$f_2(\bar{\sigma}_r) > f_1(\bar{\sigma}_r)$
precomprimare $f_3(\bar{\sigma}_r)$
$f_3(\bar{\sigma}_r) > f_2(\bar{\sigma}_r)$
straturi
straturi
straturi
r_0
r_0
r_0
$\sigma_t - \sigma_r$
$\sigma_t - \sigma_r$
$\sigma_t - \sigma_r$
σ_{K_2}
x_2
σ_{K_2}
x_2
a)
b)
c)
tensiunea maximă de forfecare rezultantă

Fig. 5 *a, b, c*

unilor tangențiale maxime atinge ultimul strat (fig. 5 *c*), numărul cerut de straturi se reduce la minimum.

Mărimea ulterioară a pretensionării provoacă o mai mare pretensionare a miezului[1]), dar este însoțită de o creștere rapidă a numărului de straturi (fig. 6).

Valoarea pretensionării ce rezultă din tensiunile tangențiale maxime în ultimul strat corespunde atunci la un anumit număr minim de straturi; există astfel o valoare optimă a contracției care poate fi calculată din ecuația (18) pentru $K = n$.

În cazul recipientelor cu pereți subțiri, raportul $\frac{s}{r_0} \ll 1$. Neglijînd în expresia (18) raportul $\frac{s}{r_0}$ în raport cu unitatea și folosind relația aproximativă $\Psi(x) \approx \lg x (x \gg 1)$ se obține pentru valoarea optimă de precomprimare următoarea relație $(K = n)$:

$$\frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2p_0} = 1. \tag{19}$$

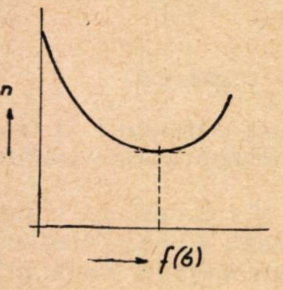


Fig. 6

Pentru a se obține o proiectare optimă a recipientelor cu straturi multiple, este necesară o pretensionare aproximativ egală cu dublul presiunii de funcționare.

COMPARAȚIE CU RECIPIENȚII AVÎND PEREȚI GROȘI

Să introducem așa-numitul factor de comparație al capacității de încărcare η_p care exprimă raportul între presiunea interioară admisibilă a unui recipient cu straturi multiple și aceea a unui recipient cu pereți groși; din compararea tensiunilor tangențiale maxime ale unui recipient cu pereți groși și acelea ale unui recipient cu straturi multiple, se pot trage următoarele concluzii:

$$\eta_p = \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{f(\bar{\sigma}_r)}{\sigma_a}\,\Psi_{1.2.}(n, 1)\right]\frac{1}{1 + \dfrac{\mu(\varphi - 1)}{2\alpha_{n+1}^2}}, \tag{20}$$

în cazul în care se ajunge simultan la tensiunea admisibilă $\sigma_a = \frac{\sigma_{K1}}{\varkappa_1}$ în miez și într-unul din straturi.

Se poate remarca că cu cît este mai mică rezistența admisibilă și cu cît este mai mare grosimea recipientului, cu atît este mai mare capacitatea de încărcare a unui recipient cu straturi multiple în comparație cu aceea a unui cilindru cu pereți groși. Pe de altă parte, capacitatea de încărcare descrește cu creșterea grosimii miezului.

---

[1]) Grosimea miezului nu trebuie să fie sub o anumită valoare tehnolog admisibilă.

Exemplu

Un recipient cu straturi multiple, constînd din benzi cu grosimea $S = 0{,}5$ cm, înfășurate în jurul unui miez interior avînd raza interioară $r_0 = 40$ cm, este supus la presiunea internă $p_0 = 300$ kg/cm². Pretensionarea într-un strat individual este cauzată de contracția sudurii longitudinale $f(\bar{\sigma}_r) = \sigma_t = 500$ kg/cm² [10], [11]. Să se găsească numărul de straturi n și grosimea miezului s_1. $\sigma_{K_1} = \sigma_{K_2} = 4000$ kg/cm². Factori de siguranță sînt $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}5$.

Alegem prin încercări

$$s_1 = 1{,}5 \text{ cm}, \quad n = 7 \quad (c = 0{,}9).$$

Din figura 3 *a* rezultă

$$\Psi_{1,2}(n, 1) = 2\,[\Psi(171) - \Psi(164) + \Psi(11) - \Psi(4)] = 2 \cdot 1{,}138.$$

Din ecuația (16) $\varkappa_1 = 1{,}58$, poziția tensiunilor tangențiale maxime este determinată din ecuația (18). Prin încercări rezultă $K = 3$.

În conformitate cu (17) pentru $K = 3$, rezultă $\varkappa_2 = 1{,}47$.

Pretensionarea de compresiune a miezului este

$$\sigma'_{t0} = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\,\Psi_{1,2}(n, 1) = 570 \text{ kg/cm}^2$$

factorul de siguranță

$$\varkappa = \frac{c\,\sigma_{K1}}{\sigma'_{t0}} = 6{,}3.$$

Valori propuse

$$n = 7\,; \quad s_1 = 1{,}5 \text{ cm}\,; \quad S = 0{,}5 \text{ cm}.$$

În conformitate cu (20) $\eta_p = 1{,}207$. Un recipient cu straturi multiple poate să suporte o presiune interioară cu 20 % mai mare decît un recipient cu pereți groși de aceeași dimensiune.

STAREA PLASTICĂ A RECIPIENTELOR CU STRATURI MULTIPLE

În stare elastică, tensiunile rezultante radiale și circomferențiale în straturile unui recipient pretensionat sînt date de următoarele expresii

$$\sigma_r^{(e)} = \frac{\alpha_1^2 p_{10}}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2}\left(1 - \frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha^2}\right) - p'_K\,; \tag{21}$$

$$\sigma_t^{(e)} = \frac{\alpha_1^2 p_{10}}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2}\left(1 + \frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha^2}\right) + \sigma'_{tK}\,. \tag{22}$$

Urmează din cele de mai sus că pentru o anumită pretensionare a straturilor $f(\bar{\sigma}_r)$, primele deformații plastice apar în straturile interioare ale miezului sau în cîteva din straturi. Mărimea presiunii interioare corespunzătoare se determină cu ajutorul expresiilor (16) sau (17) pentru $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, satisfăcînd în același timp condiția (18).

În stare elasto-plastică a unui recipient cu straturi multiple, importanța primordială o constituie efectul pretensionării asupra propagării deformațiilor plastice și asupra rezistenței recipientului.

În soluția care urmează, se vor considera numai două cazuri limită și anume : curgerea plastică se propagă de la straturile interioare către straturile exterioare, sau invers. Toate celelalte posibilități vor avea loc undeva între aceste două cazuri limită. Tensiunile axiale sînt considerate a fi tensiuni medii, iar efectul curgerii straturilor este neglijat ($\varphi = 1$).

IPOTEZE FUNDAMENTALE

1. Materialul este incompresibil atît în domeniul plastic, cît și în cel elastic. Această ipoteză simplifică considerabil calculele, totuși rezultatele concordă satisfăcător cu acelea obținute prin folosirea unei teorii mai exacte bazate pe compresibilitatea materialului.

2. Tensiunile tangențiale maxime sînt proporționale cu lunecările specifice maxime. Din punct de vedere matematic aceasta se poate exprima în modul următor

$$\frac{\sigma_t^{(p)} - \sigma_r^{(p)}}{e_t^{(p)} - e_r^{(p)}} = \frac{\sigma_r^{(p)} - \sigma_z^{(p)}}{e_r^{(p)} - e_z^{(p)}} = \frac{\sigma_t^{(p)} - \sigma_z^{(p)}}{e_t^{(p)} - e_z^{(p)}} = T \tag{23}$$

unde $e_t^{(p)}$, $e_r^{(p)}$, $e_z^{(p)}$ sînt lungirile specifice plastice în direcțiile circomferențială, radială și axială, T este o funcție de raza r_K a recipientului și de pretensionarea $f(\bar{\sigma}_r)$, iar $\sigma_z^{(p)}$ este tensiunea axială.

3. Tensiunile tangențiale maxime sînt funcții de lunecările specifice $\gamma_{\max}$. Potrivit teoriei lui Tresca se obține

$$\tau = \sigma_t^{(p)} - \sigma_r^{(p)} = 2F(\gamma_{\max}). \tag{24}$$

Pentru un material cu un modul de plasticitate constant (fig. 7)

$$\tau = \tau_s + \omega G(\gamma - \gamma_s), \tag{25}$$

unde τ_s este tensiunea tangențială la limita de curgere a materialului și γ_s este lunecarea care corespunde lui τ_s. Pentru o stare plastică ideală a materialului $\omega = 0$.

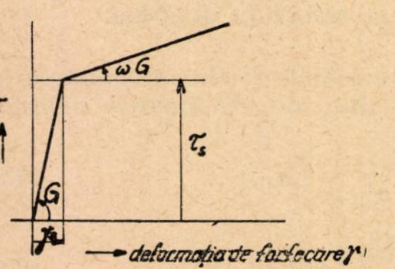


Fig. 7

Din condiţia ca secţiunile transversale să rămînă plane şi după deformaţie, urmează că $e_z^{(p)} = e_0 = \text{const.}$, şi din condiţia ca materialul să fie incompresibil rezultă ecuaţia de compatibilitate

$$\begin{aligned} e_r^{(p)} &= -\frac{e_0}{2} - \frac{a}{r_K^2}, \\ e_t^{(p)} &= -\frac{e_0}{2} + \frac{a}{r_K^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

a — constantă de integrare.

Lunecare specifică maximă este

$$\gamma = e_t^{(p)} - e_r^{(p)} = \frac{2a}{r_0^2\,\alpha_K^2}. \tag{27}$$

Constanta a poate fi determinată din condiţia la limită pe conturul elasto-plastic, $K = c$, respectiv $\alpha_K = \alpha_c$: $\gamma_{\max} = \frac{\tau_s}{G} - \gamma_c'$, unde γ_c' este lunecarea specifică cauzată de pretensionare. În conformitate cu (6) şi (7)

$$\gamma_c' = e_{tc} - e_{rc} = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2G}\left[1 - \frac{1}{2\alpha_c^2}\,\Psi_{1.2}(n, c)\right].$$

Atunci ecuaţia (27) devine

$$\gamma = \frac{\alpha_c^2}{G\alpha_K^2}\,\tau_s', \tag{28}$$

$$\tau_s' = \tau_s - \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{2}\left[1 - \frac{1}{2\alpha_c^2}\,\Psi_{1.2}(n, c)\right].$$

Substituind pe γ în ecuaţia (25)

$$\tau = (1 - \omega)\,\tau_s + \frac{\omega\alpha_c^2}{\alpha_K^2}\,\tau_s'. \tag{29}$$

Distribuţia tensiunilor în domeniul plastic poate fi stabilită din ecuaţia de echilibru a unui element de recipient cilindric

$$\alpha_K\frac{\partial\sigma_r}{\partial\alpha_K} = \sigma_t^{(p)} - \sigma_r^{(p)} = 2\tau = 2\tau_s\,(1 - \omega) + \frac{2\,\omega\alpha_c^2}{\alpha_K^2}\,\tau_s'. \tag{30}$$

După integrare

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= (1 - \omega)\,\tau_s \lg \alpha_K^2 - \frac{\omega\alpha_c^2}{\alpha_K^2}\,\tau_s' + A, \\ \sigma_t^{(p)} &= (1 - \omega)\,\tau_s \lg \alpha_K^2 + 2\tau_s\,(1 - \omega) + \frac{\omega\alpha_c^2}{\alpha_K^2}\,\tau_s' + A. \end{aligned} \tag{31}$$

Condițiile de continuitate ale deformațiilor pe conturul elasto-plastic necesită continuitatea lui $e_t^{(p)}$ și $e_r^{(p)}$ sau probabil a lui $\sigma_t^{(p)}$, $\sigma_r^{(p)}$. Apoi în domeniul elastic se aplică următoarele relații

$$\begin{aligned} \sigma_t^{(e)} &= \varphi_1 - \frac{\varphi_2}{\alpha_K^2}, \\ \sigma_r^{(e)} &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\alpha_K^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Să examinăm întîi cazul în care deformațiile plastice se propagă de la straturile interioare ale cilindrului către cele exterioare ($\sigma_{K1} = \sigma_{K2} = \sigma_K$). Constantele φ_1, φ_2 și A se determină din următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \alpha_{n+1} : \quad \sigma_r^{(e)} = 0, \\ \alpha_K &= \alpha_c : \quad \sigma_r^{(p)} = \sigma_r^{(e)}; \ \sigma_t^{(p)} = \sigma_t^{(e)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Rezultă

Domeniul plastic ($\alpha_1 \leqq \alpha_K \leqq \alpha_c$)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(p)}}{\tau_s} &= (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_K}{\alpha_c}\right)^2 - (1-\omega)\left(1 - \frac{\alpha_c^2}{\alpha_{n+1}^2}\right) + \frac{\omega\tau_s'}{\tau_s}\cdot\frac{\alpha_c^2}{\alpha_{n+1}^2}\left(1 - \frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_K^2}\right), \\ \frac{\sigma_t^{(p)}}{\tau_s} &= (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_K}{\alpha_c}\right)^2 + (1-\omega)\left(1 + \frac{\alpha_c^2}{\alpha_{n+1}^2}\right) + \frac{\omega\tau_s'}{\tau_s}\,\frac{\alpha_c^2}{\alpha_{n+1}^2}\left(1 + \frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_K^2}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

În secțiunea transversală a miezului ($1 \leqq \alpha_K \leqq \alpha_1$) se utilizează substituția $\tau_s' = \tau_s + \sigma_{t0}'$, unde $\sigma_{t0}' = \frac{f(\bar{\sigma}_r)}{4}\Psi_{1,\,2}(n,\ c)$ este pretensionarea rezultantă a miezului.

Domeniul elastic ($\alpha_c \leqq \alpha_K \leqq \alpha_{n+1}$)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(e)}}{\tau_s} &= \alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} - \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\left[1 + \omega\left(\frac{\tau_s'}{\tau_s} - 1\right)\right], \\ \frac{\sigma_t^{(e)}}{\tau_s} &= \alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} + \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\left[1 + \omega\left(\frac{\tau_s'}{\tau_s} - 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Ultimul termen al expresiei (34) arată efectul pretensionării. Pentru un material plastic ideal, adică $\omega = 0$, pretensionarea $f(\bar{\sigma}_r)$ nu influențează propagarea deformațiilor plastice. Aceasta însemnează că în cazul materialelor al cărui raport între limita de curgere și rezistența la rupere se apropie de 1, un recipient cu straturi multiple se comportă în stare plastică aproximativ ca un recipient cu pereți groși; acest fapt a fost dovedit și experimental [4], [10].

Deformația circomferențială a cămășii exterioare a unui recipient cu straturi multiple poate fi determinată din legea lui Hooke

$$\frac{Ee_t^{(e)}}{\tau_s} = \sigma_t^{(e)}(1-\mu^2) - \frac{\nu E e_0}{\tau_s}. \tag{36}$$

Deformația axială $e_0 = \text{const.}$, poate fi determinată din condiția de echilibru în direcția axială. Pentru un recipient închis se poate folosi aproximația $e_0 \to 0$ [15]. Substituind în ecuația (36) expresia (35) a lui $\sigma_t^{(e)}$, se obține $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{Ee_t^{(e)}}{\tau_s} = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_c^2}{\alpha_{n+1}^2}\left[1 + \omega\left(\frac{\tau_s'}{\tau_s} - 1\right)\right]. \tag{37}$$

Soluția indicată mai sus corespunde cazului deformațiilor plastice care progresează de la straturile interioare către cele exterioare. Recipientul poate fi totuși proectat și într-un alt mod, de exemplu, în așa fel încît primele deformații plastice să apară în straturile exterioare. În acest caz curgerea plastică se propagă în direcție opusă către cilindrul interior. Starea de tensiune în domeniile elastic și plastic ale recipientului poate fi dedusă în mod similar

Straturile exterioare — domeniul plastic $(\alpha_c \leqq \alpha_K \leqq \alpha_{n+1})$

$$\frac{\sigma_r^{(p)}}{\tau_s} = (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_K}{\alpha_{n+1}}\right)^2 + \omega\,\frac{\tau_s'}{\tau_s}\,\alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} - \frac{1}{\alpha_K^2}\right),$$

sau

$$\frac{\sigma_t^{(p)}}{\tau_s} = (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_K}{\alpha_{n+1}}\right)^2 + 2\,(1-\omega) + \omega\,\frac{\tau_s'}{\tau_s}\,\alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} + \frac{1}{\alpha_K^2}\right). \tag{38}$$

Partea interioară a recipientului — domeniul elastic $(\alpha_1 \leqq \alpha_K \leqq \alpha_c)$

$$\frac{\sigma_r^{(e)}}{\tau_s} = (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_{n+1}}\right)^2 + (1-\omega)\left(1 - \frac{\alpha_c^2}{\alpha_K^2}\right) + \omega\,\frac{\tau_s'}{\tau_s}\,\alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} - \frac{1}{\alpha_K^2}\right),$$

sau

$$\frac{\sigma_t^{(e)}}{\tau_s} = (1-\omega)\lg\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_{n+1}}\right)^2 + (1-\omega)\left(1 + \frac{\alpha_c^2}{\alpha_K^2} + \omega\,\frac{\tau_s'}{\tau_s}\,\alpha_c^2\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^2} + \frac{1}{\alpha_K^2}\right)\right.. \tag{39}$$

În secțiunea transversală a miezului $(1 \leqq \alpha_K \leqq \alpha_1)$ efectuăm substituția $\tau_s' = \tau_s + \frac{1}{4} f(\bar{\sigma}_r)\,\Psi_{1,\,2}\,(n,\ c)$.

Ultimii termeni din relațiile (38) exprimă din nou efectul pretensionării și o comparație cu relațiile (34) menționate mai sus, indică faptul că ei coincid pentru același contur elasto-plastic.

Presiunea interioară p_0'' care cauzează plasticizarea completă a recipientului pretensionat (un material plastic ideal) este aceeași în ambele cazuri menționate mai sus, adică este independentă de direcția de propagare a deformațiilor plastice și egală cu

$$p_0'' = 2\ \tau_s \lg \alpha_{n+1}. \tag{40}$$

Primită la redacție la 21 iulie 1959

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ СОСУДОВ

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье дается решение напряженного состояния многослойных сосудов в упруго-пластической области. Результирующие выражения предварительного напряжения представляются в замкнутом виде при помощи дигамма-функции.

Показывается, что существует оптимальное значение предварительного напряжения отдельного слоя. Величина загрузочной емкости многослойного сосуда, по сравнению с тонкостенным сосудом, зависит от толщины сердечника и слоев, а также от применяемого материала. Направление распространения пластических деформаций зависит от величины предварительного напряжения. В случае идеально-пластического материала, внутреннее давление, обуславливающее полную пластификацию стенки многослойного сосуда, совпадает с давлением, которое вызывает пластификацию толстостенного сосуда таких же размеров.

ELASTO-PLASTIC STATE OF MULTI-LAYER VESSELS

ABSTRACT

The present paper contains a solution of the state of stresses in a multi-layer vessel in the elasto-plastic region. The expressions for the resultant prestress are submitted in a closed form with the aid of the digamma function. It is shown that there exists the optimum value of the prestress of the individual layer. The increase of the load carrying capacity of the multi-layer vessel as compared with that of the thick-walled vessel depends on the thickness of the core and of the layers, and on the type of the material used. The direction of the propagation of plastic deform-

ations depends on the magnitude of the prestress. In the case of an ideally plastic material, the internal pressure causing complete plasticizing of the wall of a multi-layer vessel is coincident with the pressure producing plasticizing of the thick-walled vessel of the same size.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Class, A.F. Maier, *Bauarten von Hochdruck-Hohlkörpern in Mehrteil-Insbesondere Mehrlagen-Konstruktion.* Chem.-Ing.-Technik, *24*, 184 (1952).
2. J. Valenta, *Zpusob a vyroba vysokotlakycn nadob.* Strojirenstvi, *2* (1957).
3. — *Vinute nadoby.* Rozpravy CSAV, *4*, 1—60 (1957).
4. E. Schmitz, *Multi-Layer Pentstocks and High Pressure Wyes.* Journal of the Power Division, August, 1344 (1957).
5. H.M. Spring, *Pressure Vessel for Industry*, New York, 1947.
6. R. Maccary, *Design of Prestressed Shells for Pressure Vessels.* Chem. Engng, *56*, 105 (1949).
7. P. Csonka, *Calculation of Prestresses in Strip-wound High-pressure Vessels.* Acta Technica, **XIV**, 127 (1959)
8. E. Siebel, S. Schweigerer, Die Beanspruchungsverhältnisse gewichelter Behalter, Chem.-Ing-Technik, *24*, 199 (1952).
9. Z. Klebowski, W. Urbanowski, *Wytrzymalosc plasza naczynia wysoko-cis. nienmiowego utworzonego z rury owinietej wielowarstwowo tasma.* Przeglad Mechaniczny, *14*, 38 (1955)
10. J. Schierenbeck, *Wickelverfahren zur Herstellung von Synthese-Hochdruckhohlkörpern.* Bremmstoff-Chemie, *31*, 375 (1950)
11. J. Valenta, *Vicevrestve nadoby.* Strojirenstvi, 8, 563 (1958).
12. — *Die Beanspruchung gewickelter Behalter*, Konstruktion, *10*, 394 (1958).
13. H.T. Davis, *Tables of Hingher Mathematical Functions.* **I — II** Oxford, 1934.
14. A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids.* New York, 1950.
15. M.C. Steele, *Partially Plastic Thick-Walled Cylinder Theory.* Journal of Appl. Mech., ***20***, 133 (1952)
16. H.J. Faupel, *Yield and Bursting Characteristics of Heavy Wall Cylinders.* Trans. ASME, *78*, 1031 (1956).

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

UNELE ASPECTE ALE PROBLEMEI FISURĂRII BETONULUI ARMAT STUDIATE FOTOELASTIC

DE

M. ARCAN și M. TANNENBAUM[1]

1. În lucrarea de față se prezintă un studiu de modelare fotoelastică a grinzilor de beton armat în stadiul de dezvoltare a fisurilor în prezența lunecărilor relative locale ale armăturii în raport cu betonul, datorită pierderii treptate a aderenței pe distanța dintre fisuri.

Aceste fenomene caracteristice construcțiilor reale din beton armat în stadiul de fisurare nu au fost în trecut analizate, majoritatea lucrărilor cunoscute cu privire la modelarea betonului armat [1], [2], [3], [4], [5] referindu-se la modele în care nu avea loc nici un fel de lunecare relativă între materialul modelului și armătură.

2. Modelele s-au executat dintr-un material optic activ Dinox F 110 [6] (rășină expoxidică pentru fotoelasticitate realizată în R.P.R.) și au fost armate cu fire de oțel de înaltă rezistență R_4 (STAS 893/951) cu $\sigma_r = 260$ kg/mm^2.

De asemenea au fost utilizate ca armătură, pentru comparație, fîșii de tablă subțire dintr-un aliaj de Cu, care datorită suprafeței mari de contact nu prezintă lunecări, spre deosebire de fire.

Lipirea firelor și fîșiilor s-a făcut cu ajutorul unui adesiv de Araldit care polimerizează la rece. Capetele firelor au fost fixate de capetele grinzilor în așa fel încît să se modeleze ciocurile armăturii și să se împiedice astfel lunecarea armăturilor în zona de capăt. După cum rezultă și din fotografiile prezentate în această lucrare, lipirea nu a dat loc la nici un fel de tensiuni inițiale.

Fisurarea a fost realizată în mod artificial, cu ajutorul unei pînze de traforaj fine (0,3 mm); au fost practicate în modele 3 fisuri verticale la distanțe egale cu înălțimea grinzii.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor — (INCERC), București.

Secțiunea modelului a fost: înălțimea 24 mm, lățimea 5 mm, iar armătura utilizată: 2 ⌀ 0,2 mm – 2 ⌀ 0,5 mm pentru modele armate cu fire, precum și 4 mm × 0,15 mm pentru modele armate cu fîșii de tablă.

3. Încercările s-au efectuat în paralel pe cele două tipuri de modele: tipurile armate cu fîșii de tablă, prezentînd o aderență perfectă, notate cu I și tipurile armate cu cîte două sîrme R_4, prezentînd proprietăți reduse de aderență notate cu II. Toate modelele au fost solicitate la încovoiere pură pe o porțiune de 100 mm lungime.

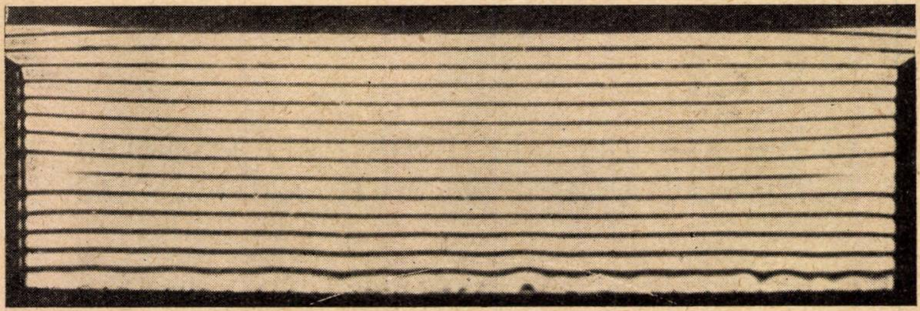


Fig. 1. — Tabloul izocromatelor pentru un model armat nefisurat supus la încovoiere curată.

Fisurile au fost extinse în paralel de la armătură spre fibra extremă comprimată a grinzii în mai multe trepte. La fiecare treaptă, corespunzătoare unei înălțimi date a fisurii, s-au fotografiat tablourile de izocromate.

4. În figura 1, se prezintă tabloul de izocromate pentru unul dintre modele înainte de efectuarea fisurii, în cazul încovoierii pure. Se observă că axa neutră (linia centrală mai scurtă care apare neagră în lumină albă) nu se află la mijlocul înălțimii ci este deplasată spre armătură datorită disimetriei în secțiune introdusă de prezența acesteia.

Poziția axei neutre coincide cu valoarea teoretică, calculată după formula din Rezistența Materialelor.

5. În cazul aderenței perfecte dintre armătură și materialul modelului secțiunea fisurată se comportă conform ipotezelor simplificatoare ale rezistenței materialelor analog cu secțiunea compusă din figura 2.

Poziția axei neutre în secțiunea fisurată, este dată de relația cunoscută

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{\xi^2 + 2n\mu}{\xi + n\mu} \tag{1}$$

în care semnificațiile lui ξ și η sînt date în figura 2, iar $n = \frac{E_{\text{armătură}}}{E_{\text{model}}}$.

În cele ce urmează, se dau rezultatele comparative pentru un model de tipul I, avînd $n\mu = 0{,}1853$ și un model de tipul II avînd $n\mu = 0{,}192$.

Avînd în vedere apropierea foarte mare între aceste două valori, cele două modele ar trebui să aibă practic o comportare identică, dacă nu ar interveni condițiile diferite de aderență.

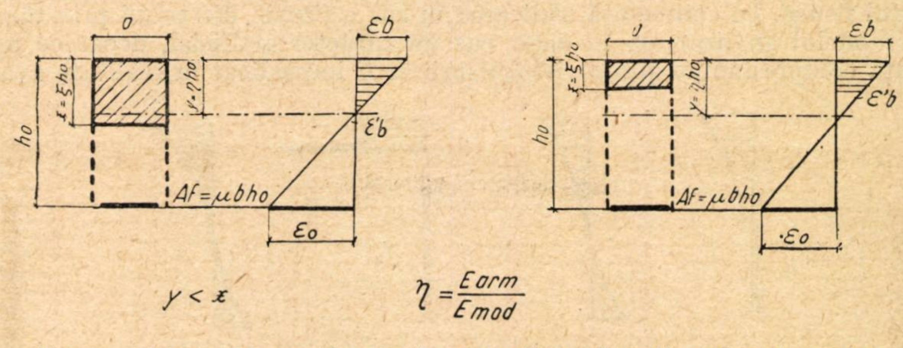


Fig. 2. — Schema deformațiilor specifice în secțiunea fisurată conform ipotezelor simplificatoare ale rezistenței materialelor.

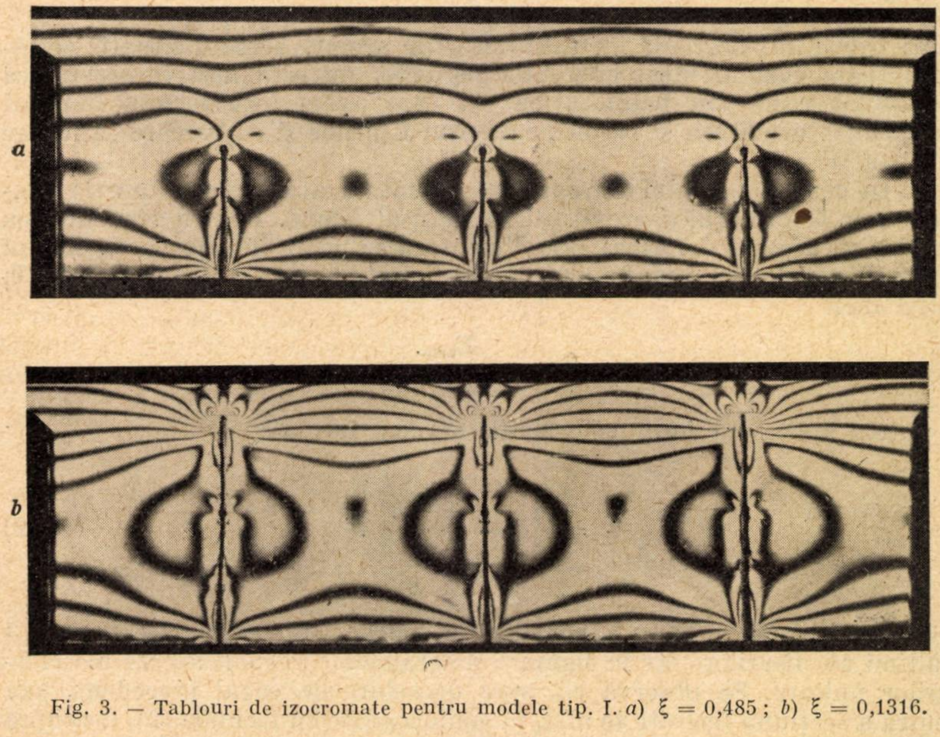


Fig. 3. — Tablouri de izocromate pentru modele tip. I. *a*) $\xi = 0{,}485$; *b*) $\xi = 0{,}1316$.

În cazul modelului I, cu aderență perfectă, poziția experimentală a axei neutre coincide în bună măsură cu poziția teoretică calculată după formula (1). În figura 3, se dau fotografiile izocromaticelor pentru două înălțimi ale fisurilor, iar în figura 4 diagramele corespunzătoare ale eforturilor unitare σ_x. Se observă că, în conformitate cu datele teoretice, avem compresiune în întreaga zonă deasupra fisurii cu o concentrare locală în vîrful fisurii. În consecință, ridicarea în sus a fisurii, efectuată prin tăiere pe modelul analizat are în acest caz un caracter artificial, deoarece prezența compresiunilor peste vîrful fisurii ar fi împiedicat în realitate avansarea fisurii într-o grindă identică de beton armat. Această situație corespunzătoare cazului ideal aderenței perfecte, nu este însă caracteristică secțiunilor reale din beton armat la care avem întotdeauna lunecări locale între armătură și beton în dreptul fisurilor și ca urmare întindere în vîrful fisurii.

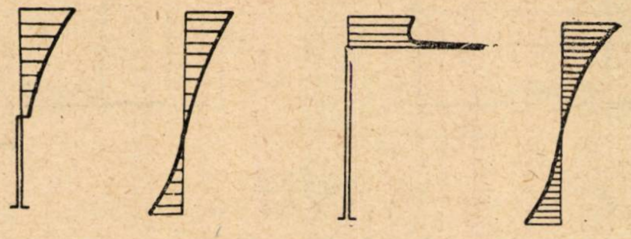

a) $\xi = 0,485$ b) $\xi = 0,1318$

Fig. 4. — Diagrame de eforturi unitare pentru modele de tip I.

În cazul modelului II, epuizarea treptată a aderenței duce la concentrarea deformațiilor armăturii în dreptul fisurii. Pentru comoditatea exprimării această deformație suplimentară se poate interpreta ca efectul unei reduceri locale a modulului de elasticitate a armăturii în raportul θ, astfel încît

$$\theta = \frac{E_{\text{arm.}}}{E_{\text{arm. în fisură}}}$$

și putem aplica tot formula generală (1) sub forma

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + 2\frac{n\mu}{\theta}}{\xi + \frac{n\mu}{\theta}}. \tag{2}$$

În figura 5 se dau fotografiile tablourilor de izocromate pentru 3 înălțimi ale fisurilor, iar în figura 6 diagramele corespunzătoare ale eforturilor unitare. Se observă că, spre deosebire de cazul precedent, axa neutră a secțiunii fisurate se află, în conformitate cu formula (2), deasupra fisurii astfel încît, în vîrful fisurii, avem o concentrare locală de eforturi unitare de întindere. În acest caz, ridicarea fisurii, efectuată pe modelul analizat corespunde cu realitatea, deoarece prezența întinderilor peste vîrful fisurii ar duce la avansarea acesteia într-o grindă identică din beton armat. Comportarea modelului explică astfel ridicarea excesivă a fisurilor în grinzi din beton armat, peste valoarea corespunzătoare poziției axei neutre calculată în stadiul II, ca efect al lunecărilor locale între armătură și beton în dreptul fisurilor.

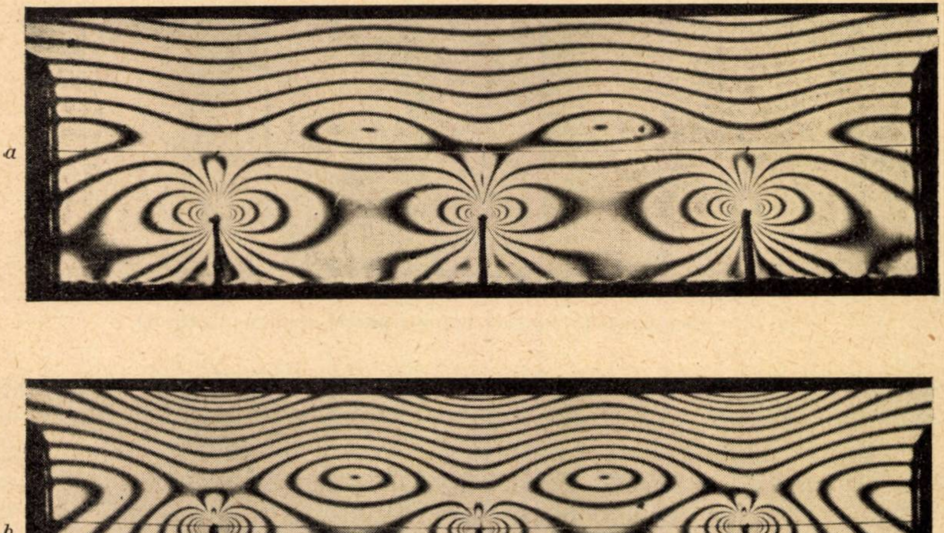


Fig. 5. — Tabloul de izocromate pentru modele de tip II. *a*) $\xi = 0,742$; *b*) $\xi = 0,500$; *c*) $\xi = 0,250$.

În graficul din figura 7 se arată pozițiile succesive ale axei neutre, în funcție de înălțimea fisurii, obținute experimental și calculate conform formulei (1). Din comparaţia perechilor de valori, rezultă valoarea probabilă a coeficientului θ din formula (2), care caracterizează lunecarea locală a armăturii şi concentrarea de deformaţie în dreptul fisurii. Pentru înălţimi de fisură sub h/2, s-au obţinut valori subunitare pentru θ. Aceste valori nu caracterizează însă în acest caz condiţiile reale de aderenţă ci reflectă necorespondenţa dintre starea de eforturi liniară pe baza căreia s-a stabilit formula (1) şi starea reală de eforturi, reprezentată în figura 6.

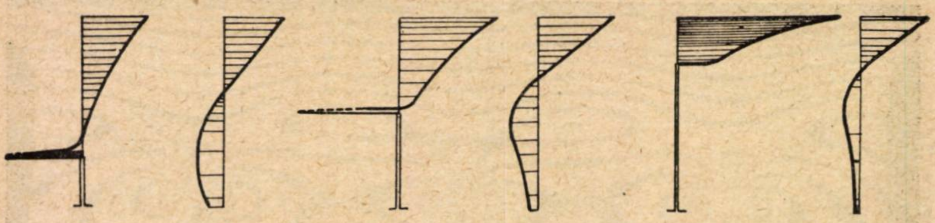

a) $\xi = 0{,}742$ b) $\xi = 0{,}500$ c) $\xi = 0{,}250$

Fig. 6. — Diagrame de eforturi unitare pentru modele de tip II.

Pentru înălţimi mari ale fisurii, axa neutră coincide cu vîrful fisurii şi ca urmare fisura nu mai are tendinţa de a avansa odată cu creşterea solicitării. Sub efectul deschiderii puternice a fisurii, se dezvoltă însă în vîrful fisurii două zone de eforturi unitare de întindere orientate paralel cu direcţia fisurii, în dreapta şi în stînga vîrfului fisurii. Ca urmare, fisura capătă tendinţa de a se ramifica lateral.

Această constatare este confirmată în multe cazuri de încercări la rupere efectuate pe elemente încovoiate din beton armat (fig. 8). De asemenea, în cazul modelului II, unde sarcina s-a sporit în continuare, modelul a cedat prin ramificarea orizontală a fisurii pornind de la vîrful acesteia (fig. 9).

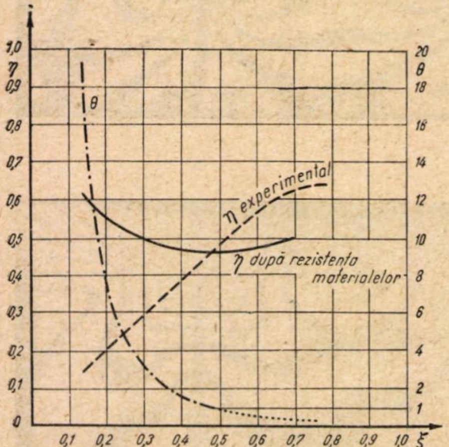


Fig. 7. — Variaţia axei neutre în secţiunea fisurată, în funcţie de înălţimea fisurii şi valorile corespunzătoare ale lui θ.

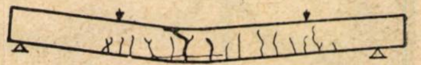


Fig. 8. — Caracterul ruperii la grinzi de beton armat.

6. Dacă se analizează variația stării de eforturi în lungul zonei de moment constant, pentru elementul fisurat, trebuie scoase în evidență următoarele aspecte mai importante:

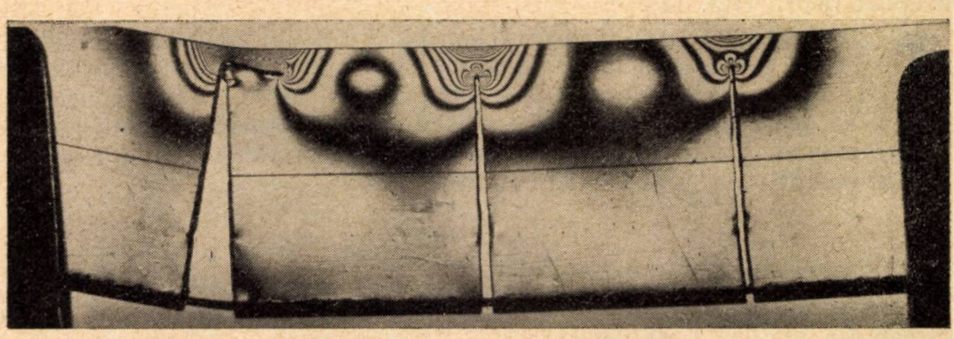


Fig. 9. — Caracterul ruperii la modelul de tip II.

a) Deplasarea axei neutre în secțiunea de la jumătatea distanței dintre fisuri, pe măsura avansării în înălțime a fisurilor are un caracter diferit în funcție de condițiile de aderență. În fig. 10, s-a reprezentat variația poziției axei neutre, în secțiunea considerată, pentru modelele de tip I și II.

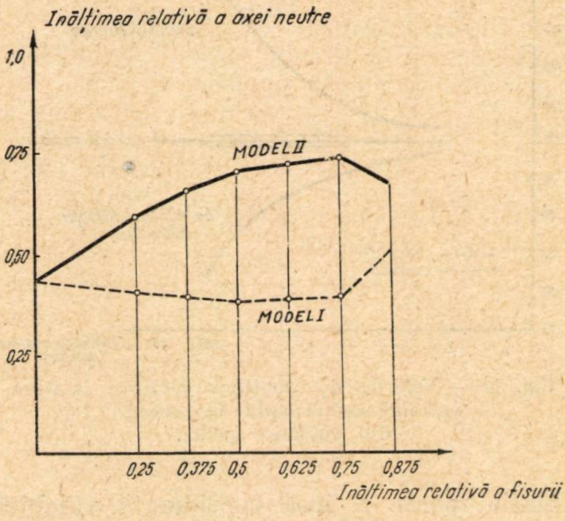


Fig. 10. — Diagrame de variație a poziției axei neutre în secțiunea de la jumătatea distanței dintre fisuri.

b) Datorită pierderii treptate a aderenței, odată cu avansarea fisurilor, se modifică substanțial distribuția eforturilor unitare în zona întinsă a secțiunii de la mijlocul distanței dintre fisuri (fig. 6).

c) Prin pierderea treptată a aderenţei, se constată la modelul II, o diferenţă accentuată, care creşte cu înălţimea fisurii, între deformaţia medie a fibrei extreme comprimate şi deformaţia maximă a acesteia în dreptul fisurii (fig. 11).

7. Condiţiile de similitudine se consideră îndeplinite dacă se păstrează în tot cursul procesului de încărcare proporţionalitatea deformaţiilor în punctele omoloage din prototip şi model. Aplicată în cazul considerat rezultă că, în afară de relaţiile de similitudine geometrică între dimensiunile pe prototip şi pe model, este necesar ca, pentru armătură, să se respecte, atît în prototip cît şi pe model condiţia

$$n\mu = \text{const.} \tag{3}$$

care exprimă invariabilitatea poziţiei relative a axei neutre şi se obţine direct din analiza formulei (1).

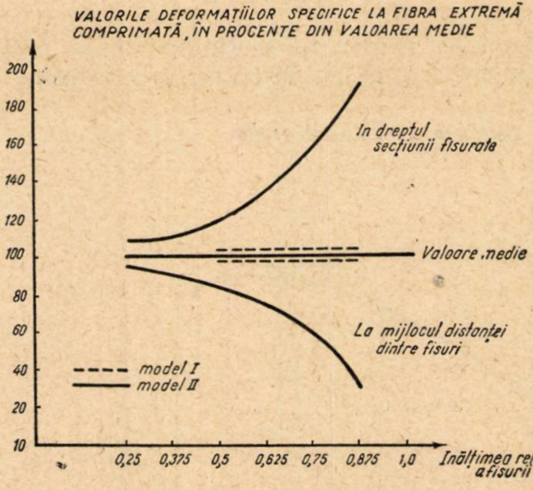


Fig. 11. — Valorile deformaţiilor specifice la fibra extremă comprimată, în procente din valoarea medie.

Această relaţie poate fi însă considerată valabilă, fără rezerve, numai în cazul aderenţei perfecte.

În cazul pierderii treptate a aderenţei, apare necesitatea de a se reproduce cît mai fidel pe model, condiţiile de aderenţă parţială din cazul prototipului care pot fi caracterizate printre altele, prin coeficientul θ din formula (2). Aceasta se poate obţine printr-o alegere adecuată a tipului de armătură utilizată pentru model, a adezivului şi a condiţiilor de realizare a modelului.

Dacă se analizează diagramele de eforturi unitare prezentate în figura 6 pentru modelul de tip II, se remarcă o distribuţie asemănătoare cu cea obținută pe piese similare de beton armat [8]. În consecință se poate considera că în cazul considerat s-a realizat o modelare satisfăcătoare a condițiilor de aderență dintre armătură și beton în grinzi fisurate armate cu bare netede.

8. Problema modelării fotoelastice a betonului armat, ținînd seama de condițiile de conlucrare dintre armătură și beton este desigur mult mai largă decît a putut fi cuprinsă în cercetările prezentate în lucrarea de față.

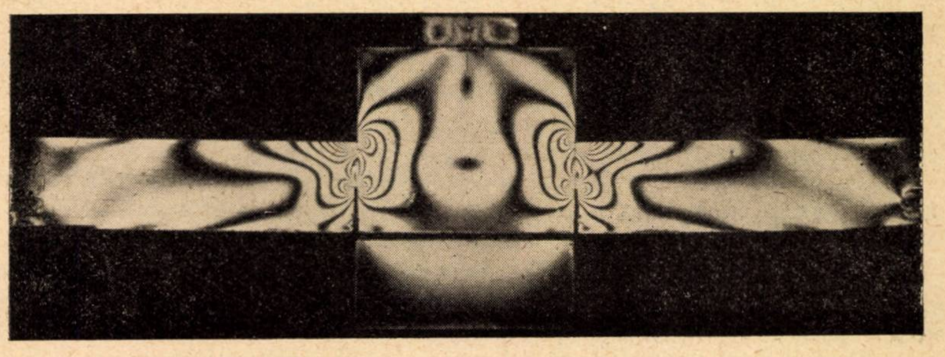


Fig. 12. — Tabloul de izocromate pentru un model prezentînd fisuri în zonele de încastrare.

De exemplu, în lucrarea [7], se studiază pe larg distribuția eforturilor din beton datorită aderenței acestuia cu armătura, în diferite condiții de conlucrare a celor două materiale.

De asemenea, sînt în curs cercetări cu privire la efectul dezvoltării fisurilor în zonele de încastrare a grinzilor.

În figura 12, se dă tabloul de izocromate pentru o înălțime de fisură $x = 0{,}5\, h$, într-un model armat cu fire avînd proprietăți reduse de aderență.

9. Pe baza rezultatelor obținute se pot trage următoarele concluzii:

a) Modelarea fotoelastică a betonului armat este posibilă în limite destul de largi, ținînd seama de variația condițiilor de aderență dintre armătură și beton;

b) O asemenea modelare permite cunoașterea modului cum se comportă betonul armat în stadiul de fisurare (starea de eforturi la vîrful fisurilor, dezvoltarea acestora, ca și tendința de ramificare a fisurilor începînd de la o anumită înălțime a lor, deplasarea axei neutre etc.).

c) Există posibilitatea studierii pe modele fotoelastice a unui număr de fenomene complexe ce se manifestă în elementele de beton armat, care nu sînt pe deplin elucidate în mod teoretic și nu pot fi în general clarificate prin interpretarea directă a rezultatelor încercărilor.

Primită la redacție la 10 februarie 1960.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ЖЕЛЕЗОБЕТОНЕ, ИССЛЕДУЕМОЙ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

РЕЗЮМЕ

Исследуется и доказывается возможность фотоупругого моделирования железобетона в стадии развития трещин при наличии относительных сдвигов арматуры относительно бетона, благодаря постепенной потери сцепления на расстоянии между трещинами.

Исследования проводятся для случая вертикальных трещин, развивающихся в зоне с постоянным изгибающим моментом.

Приводится сравнительное исследование моделей с совершенным сцеплением и моделей с уменьшенным сцеплением.

Рассматривается напряженное состояние в сечениях против трещин и в сечениях между трещинами, а также развитие этого состояния, в зависимости от развития трещин и постепенной потери сцепления.

Модели были изготовлены из материала Dinox F 110 (epoxidică смола румынского производства). Арматуры состоят из металлических нитей или лент, которые прилипаются клеем типа Araldit.

Результаты исследований привели к следующим выводам:

— Фотоупругое моделирование железобетона возможно в достаточно широких пределах.

— Такое моделирование позволяет выявить форму поведения железобетона в стадии трещинообразования (напряженное состояние у вершины трещин, развитие последних, а также стремление трещин к разветвлению, начиная с их определенной высоты и пр.).

— Перемещение нейтральной оси в зоне между трещинами в сечениях с трещинообразованием, имеет совершенно иной характер в случае, когда сцепление сохраняется и когда оно постепенно теряется.

— Существует возможность исследования на фотоупругих моделях многочисленных явлений, проявляющихся в железобетонных элементах и которые еще недостаточно хорошо изучены.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Изохроматические линии на армированной модели без трещин, при чистом изгибе.

Рис. 2. — Схема удельных деформаций в сечении с трещиной согласно упрощающим гипотезам сопротивления материалов.

Рис. 3. — Изохроматические линии для моделей I типа
a) $\xi = 0{,}486$; *b*) $\xi = 0{,}1316$.

Рис. 4. — Диаграмма напряжений для моделей I типа.

Рис. 5. — Изохроматические линии для моделей II типа.
a) $\xi = 0{,}742$; *b*) $\xi = 0{,}500$; *c*) $\xi = 0{,}250$.

Рис. 6. — Диаграмма напряжений для моделей II типа.

Рис. 7. — Изменение нейтральной оси в сечении с трещиной, в зависимости от высоты трещины и соответствующих значений.

Рис. 8. — Характер разрыва железобетонных балок.

Рис. 9. — Характер разрыва модели типа II.

Рис. 10. — Диаграмма изменения положения нейтральной оси в сечении, расположенном на середине расстояния между трещинами.

Рис. 11. — Значения удельных деформаций крайнего сжатого волокна, в процентах от среднего значения.

Рис. 12. — Изохроматические линии для модели с трещинами в зонах защемления.

SPANNUNGSOPTISCHE UNTERSUCHUNGEN DES REISSENS VON STAHLBETON

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Möglichkeit bewiesen, mittels spannungsoptischen Verfahrens Stahlbetonkonstruktionen im gerissenen Zustande zu modellieren, unter Berücksichtigung der gegenseitigen Verschiebung der Bewehrung und des gezogenen Betons infolge der schrittweisen Aufhebung der Haftung im Bereich zwischen den Rissen.

Die Versuche betreffen Modelle von auf reiner Biegung beanspruchten Balken. Es werden vergleichshalber Modelle mit einwandfreier Haftung und Modelle mit schwacher Haftung untersucht.

Der Aufsatz bringt die Ergebnisse betreffend den Spannungszustand in gerissenen und nichtgerissenen Querschnitten, wie auch die Entwicklung dieses Spannungszustandes mit zunehmender Höhe der Risse und Überschreitung des Haftungswiderstandes.

Die Modelle sind aus Dinox F 110 (ein in der Rumänischen Volksrepublik ausgearbeitetes Epoxyharz) hergestellt. Die Bewehrung besteht aus Metalldrähten oder -streifen, die mit einem aralditartigen Haftmittel angeklebt sind.

Die Ergebnisse der Untersuchungen lassen sich wie folgt zusammenfassen :

— Es ist möglich, mittels des spannungsoptischen Verfahrens das Verhalten von Stahlbetonkonstruktionen weitgehend zu modellieren.

— Das geschilderte Modellverfahren bietet die Möglichkeit, den Spannungszustand des gerissenen Stahlbetons unter Berücksichtigung der verschiedenen Haftungsbedingungen zu bestimmen (die Spannungsverteilung am Ende der Risse, die Ausbreitung der Risse, das Bestreben der Risse, sich von einer gewissen Höhe ab zu verzweigen usw.).

Die Verschiebung der Null-Linie im Bereich zwischen und über den Rissen mit fortschreitender Rißbildung zeigt einen ganz verschiedenen Verlauf, je nach der Art der Haftungsbedingungen.

— Es ergibt sich die Möglichkeit, eine große Anzahl der theoretisch noch unvollkommen dargelegten Vorgänge in Stahlbetonkonstruktionen durch das gegebene spannungsoptische Modellverfahren zu erklären.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN

Bild 1. — Isochromatenbild für ein nichtgerissenes bewehrtes auf reine Biegung beanspruchtes Modell.

Bild 2. — Schema der spezifischen Formänderungen im gerissenen Querschnitt nach den Vereinfachungsmethoden der Festigkeitslehre.

Bild 3. — Isochromatenbilder für Modelle Typ I.
a) $\xi = 0{,}485$; b) $\xi = 0{,}1316$.

Bild. 4. — Kräftediagramme für Modelle Typ I.

Bild 5. — Isochromatenbilder für Modelle Typ II.
a) $\xi = 0{,}742$; b) $\xi = 0{,}500$; c) $\xi = 0{,}250$.

Bild 6. — Kräftediagramme für Modelle Typ II.

Bild 7. — Verschiebung der Nullinie im gerissenen Bereich in Abhängigkeit von der Rißhöhe und die entsprechenden Werte von θ.

Bild 8. — Verhalten des Reißens bei Stahlbetonbalken.

Bild 9. — Verhalten des Reißens beim Modell Typ II.

Bild 10. Verschiebung der Nullinie in der Mitte zwischen den Rissen.

Bild 11. — Die Werte der spezifischen Formänderungen der äußersten zusammengedrückten Faser, in Prozenten des Mittelwertes.

Bild 12. — Isochromatenbild für ein Modell mit Rissen in den Einspannungszonen.

BIBLIOGRAFIE

1. R. G. BOITEN, *Photoelastic investigation of armoured models with an application to bending bars with cracks on the tensile side.* Appl. Sci. Res. Section A, **5**, 359—373 (1955).
2. MAX KUFNER, *Spannungsoptische Versuche mit Stahl- und Spann-beton modellen.* VDI —Zeitschrift, **100**, *9* martie (1958).
3. H.H. RACKE, *Photoelastische Spannbetonmodelle.* Schw. Arch., 150—163, 170—177 (1956).
4. Т. М. ДОЛОБКО, *Распределение собственных напряжений в предварительно напряженных железобетонных балках со сцеплением.* Строительная промышленность, *2* (1956).
5. R. HILTSCHER, R.K. MÜLLER, *Bemessung der Bewehrung von Stahlbetonkonstruktionen mit Hilfe des Spannungsoptischen Modellversuches.* Beton und Stahlbetonbau, *11* (1959).
6. M. ARCAN, F. STOENESCU, R. MIHAIL, *Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate „Dinox F 110”.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4* (1957).
7. ED. NICOLAU, *Unele probleme ale modelării fotoelastice a betonului armat.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *2* (1960).
8. V. NICOLAU, C. IONESCU, St. ENESCU, G. STINCULESCU, C. DAMIAN, G. ŞERBĂNESCU, *Introducere în teoria betonului.* **II**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.

UNELE PROBLEME ALE MODELĂRII FOTOELASTICE A BETONULUI ARMAT

DE

E. NICOLAU [1]

1. *Modelarea fotoelastică a betonului armat* este o problemă care a căpătat unele soluţii numai în ultimii ani. Dificultăţile tehnologice în prepararea unui model fotoelastic cu armături frînează utilizarea eficace a metodei fotoelastice în domeniul construcţiilor. De asemenea teoria conlucrării a două materiale cercetate cu ajutorul fotoelasticităţii este prea puţin dezvoltată ca o consecinţă a faptului că preocupările în această direcţie sînt recente.

Pînă în ultimii 4—5 ani utilizarea fotoelasticităţii în problemele de rezistenţă ale construcţiilor se făcea pornind de la ipoteza comportării elastice a betonului armat ca un material omogen şi izotrop. În asemenea condiţii modelele, care erau imagini ale prototipului redus la o anumită scară geometrică nu modelau însă conlucrarea dintre beton şi armătură în ceea ce priveşte deformarea elementelor şi mai ales repartiţia eforturilor unitare în secţiunile lor.

Desigur că fisurarea şi plastificarea betonului fără pierderea capacităţii portante a construcţiilor nu avea nici o legătură cu comportarea de ansamblu şi rezultatele măsurătorilor experimentale de pe modelul care nu prezenta deloc aceste proprietăţi.

În acest stadiu cercetările fotoelastice [1], [2], [3] se mărgineau să aprecieze orientarea cea mai favorabilă a armăturii şi valorile globale ale momentelor încovoietoare.

Începînd cu anul 1954 s-au început studiile fotoelastice pe modele cu armături înglobate. R. G. Boiten [4] comunică la colocviul de fotoelasticitate şi fotoplasticitate de la Bruxelles rezultatele obţinute folosind Araldit B şi D ca material fotoelastic. Metoda preconizată constă în utilizarea Aralditului D care se întărește la temperatura camerei. Turnarea plăcilor de model se face peste sîrmele de armătură. Prin întărirea Arladitului armăturile rămîn înglobate. Metoda nu dă rezultate cu masele plastice care polimerizează și se întăresc la temperatura ridicată, deoarece prin încălzire atît armătura cît și masa plastică se dilată. Coeficienții de dilatare fiind diferiți (la Araldit 50 × 10^{-6} cm/cm°C, iar la metale — aluminiu de ex. 24 × 10^{-6} cm/cm°C) și întărirea avînd loc în stare dilatată prin răcire și contracție diferită apar eforturi inițiale care împiedică folosirea ulterioară a modelelor. Utilizarea Aralditului D înlătură numai în parte acest neajuns. Într-adevăr întărirea la rece evită dilatarea inegală, însă procesul de polimerizare fiind exotermic temperatura trebuie cu multă

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

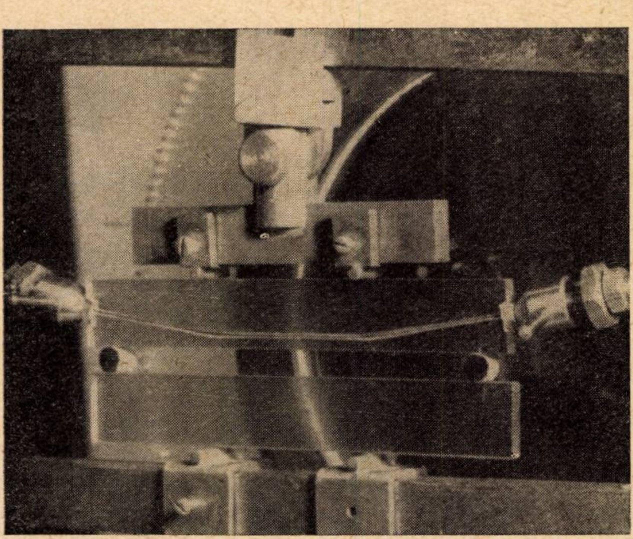


Fig. 1. — Element cu armătura preîntinsă fără aderență.

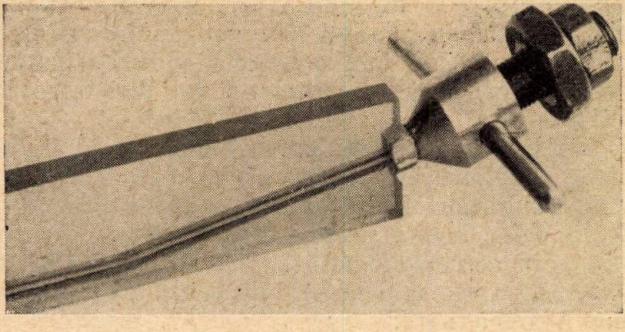


Fig. 2. — Presă de întindere a armăturii.

grije și mijloace artificiale menținută constantă. Un alt neajuns este fluajul mecanic al Aralditului D. Cercetări în același mod au fost efectuate de A. C. Vasconcelos [5] în cadrul dizertației sale în anul 1955.

O altă metodă a preconizat H. R. Racké [6], [7]. Folosind o masă plastică cu modul de elasticitate mic, de $E = 100$ kg/cm^2 dar de mare sensibilitate optică și armînd-o prin lipire cu fîșii din același material, însă opac și cu modul de elasticitate mai mare $E = 200 \div 1\,200$ kg/cm^2, obține modele armate. Cercetările întreprinse cu privire la eforturi în elemente precomprimate și la aderența dintre armătură și beton sînt contribuții interesante la elucidarea problemei tensiunilor în betonul armat. Considerăm însă că utilizarea unei mase plastice fotoelastice cu modul de elasticitate atît de mic poate avea o utilizare foarte limitată

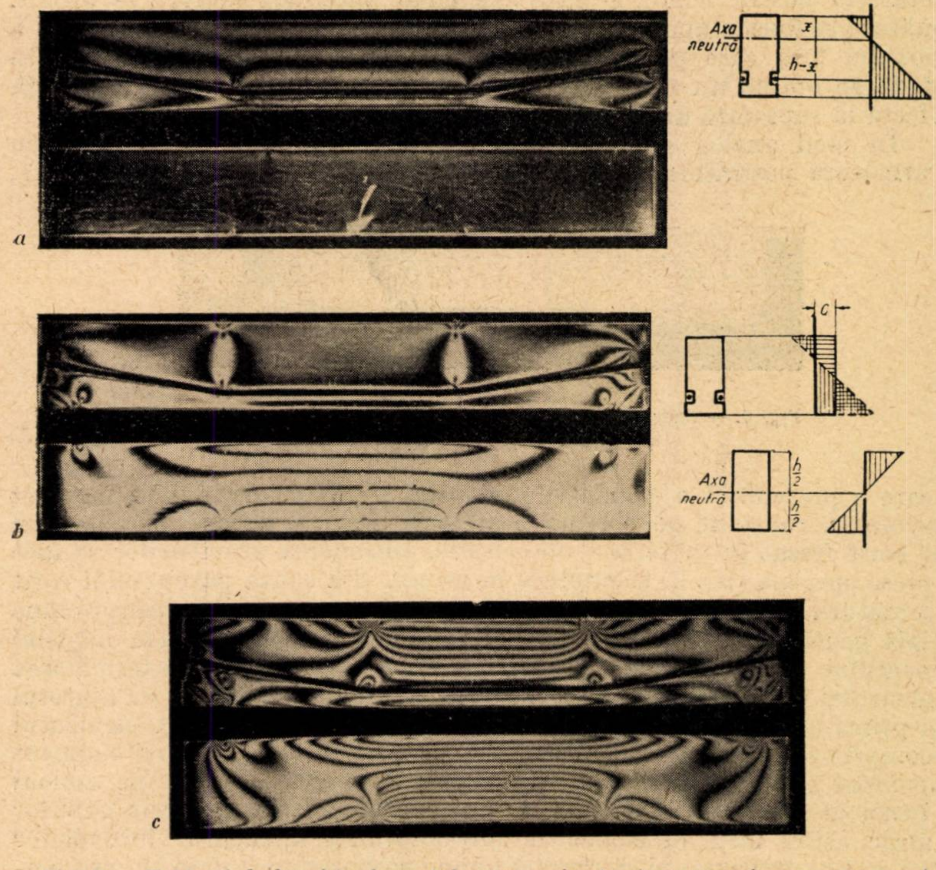


Fig. 3. — Tablouri de benzi în elementul precomprimat : *a*) precomprimare cu moment încovoietor inițial ; *b*) încărcare suplimentară care anulează momentul inițial ; *c*) precomprimare și încărcare.

în aplicațiile tehnice ale fotoelasticității iar dificultățile de obținere ale materialului (Vulkolan) nu justifică utilizarea metodei.

Metoda de modelare preconizată în lucrarea de față constă în executarea cu freza a unor șanțuri care urmăresc traseul armăturii, în modelul elementului studiat confecționat din materialul fotoelastic utilizat în laboratorul nostru Dinox F 110 [8], cu o puternică activitate optică. Armătura se lipește apoi cu un adeziv cu aceeași compoziție chimică ca a Dinoxului însă care polimerizează la temperatura camerei. În această metodă se obține un model armat fără tensiuni inițiale și cu aderență perfectă la suprafața armăturii.

În mod analog se pot studia elemente precomprimate de beton cu armătura postîntinsă sau preîntinsă. Așa cum rezultă din figura 1, în care e prezentată o grindă supusă prin precomprimare unui moment încovoietor, constant pe porțiunea mijlocie a sa, armătura parcurge un șanț cotit frezat în materialul fotoelastic. Întinderea armăturilor se face cu prese speciale (fig. 2) și produce în grindă, din cauza parcursului cotit al armăturii, un moment încovoietor inițial, precum și o compresiune inițială generală a modelului. În figura 3 se poate vedea cum modelul elementului precomprimat prezintă un tablou de benzi. Determinarea momentului încovoietor inițial și a compresiunii inițiale se face cu ajutorul unei grinzi-martor nearmate. Așa cum rezultă și din figura 1 elementul precomprimat și grinda martor sînt supuse simultan aceluiași moment încovoietor exterior. Efectul acestui moment se citește direct pe tabloul de benzi al grinzii martor. Mărimea și sensul acestui moment exterior se alege astfel încît în elementul precomprimat momentul încovoietor inițial să fie compensat și să rămînă numai compresiunea dată de precomprimare. După cum se vede în figura 3 prin suprapunerea diagramelor de tensiuni obținute din tablourile de benzi ale elementului precomprimat supus la momentul inițial și ale grinzii martor supuse momentului exterior ca și elementul precomprimat, se obține atît valoarea momentului de precomprimare, cît și valoarea forței de precomprimare.

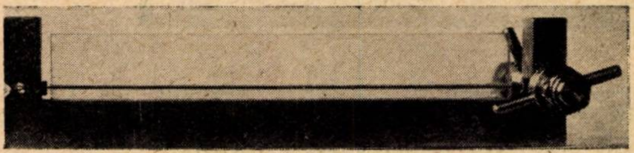


Fig. 4. — Cadru pentru precomprimarea modelelor cu armături preîntinse.

Precomprimarea se poate realiza și prin preîntinderea armăturii într-un cadru prevăzut cu presele menționate mai sus, ca în figura 4. După întinderea armăturilor se lipesc armăturile sub tensiune de masa modelului umplîndu-se șanțurile cu adezivi. Cînd adezivul este întărit se desfac presele și revenirea armăturilor produce comprimarea elementului. Se realizează astfel un element precomprimat prin aderența armăturilor preîntinse (fig. 5).

Această metodă a şanţurilor frezate cu şi fără adeziv este folosită în laboratorul nostru încă de la începutul anului 1958. În noiembrie 1959 R. Hiltscher şi R. Müller publică un studiu [9] în care folosesc aceeaşi metodă de armare a modelelor fotoelastice în tratarea anumitor aspecte particulare ale modelării betonului armat. În lucrarea de faţă, metoda prezentată mai sus a fost utilizată pentru studiul aderenţei dintre armătură şi beton. În cele de mai jos vom prezenta cercetările şi rezultatele obţinute, referitoare la două serii de cercetări pe modele armate.

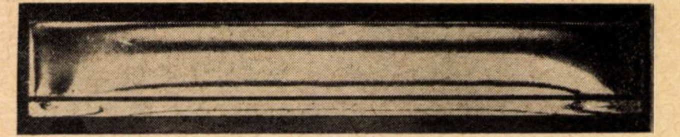


Fig. 5. — Element precomprimat cu armături preîntinse aderente.

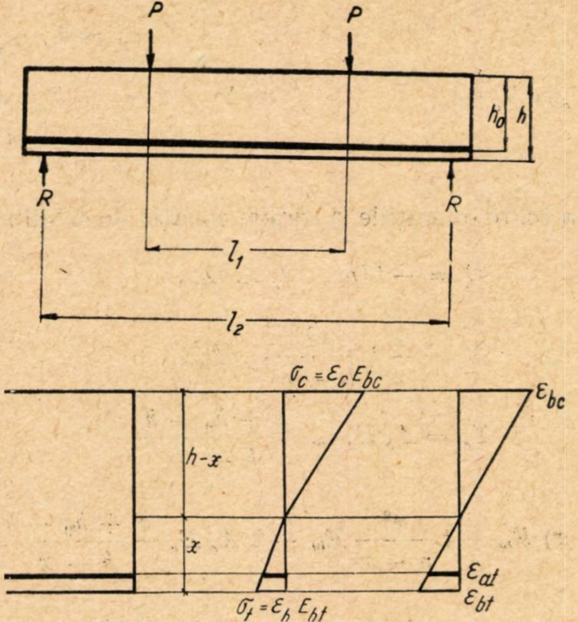


Fig. 6. — Schema de încărcare a grinzii supuse la momentul încovoietor constant şi diagrama de eforturi şi deformaţii.

În prima parte se urmăreşte efectul variaţiei procentului de armare şi a grosimii de acoperire a armăturii asupra deplasării axei neutre în cazul unui moment încovoietor constant, iar în cea de-a doua parte se studiază distribuţia eforturilor unitare în elemente cu armături întinse similare cu epruvetele cu ajutorul cărora se studiază aderenţa în probele de beton armat.

2. *Influența armăturii asupra poziției axei neutre* a fost studiată pe modele de grinzi simplu armate și solicitate cu un moment încovoietor constant pe partea mijlocie a ei, așa cum rezultă din figura 6. Vom nota elementele de calcul în conformitate cu această figură.

Pentru a obține poziția axei neutre scriem ecuația de echilibru

$$C + T_b + T_a = 0,$$

în care

$$C = \int_0^{h-x} t \cdot \mathrm{d}\xi \cdot \sigma_\xi \qquad \text{unde} \qquad \sigma_\xi = E_{bc} \cdot \varepsilon_{c\xi}$$

$$\varepsilon_{c\xi} = \varepsilon_{bc} \cdot \frac{\xi}{h - x},$$

$$T_b = \int_0^{x} t \cdot \mathrm{d}\xi \cdot \sigma_\xi \qquad \text{unde} \qquad \sigma_\xi = E_{bt}\, \varepsilon_{t\xi}$$

$$\varepsilon_{t\xi} = \varepsilon_{bc} \cdot \frac{\xi}{h - \xi},$$

$$T_a = \sigma_a \cdot A_a \qquad \text{unde} \qquad \sigma_a = E_{at} \cdot \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{bc} \cdot \frac{x - (h - h_0)}{h - x}.$$

Efectuăm toate operațiile și scriem ecuația de echilibru, vom obține

$$C = \frac{1}{2} t\,(h - x)\, \varepsilon_{bc}\, E_{bc},$$

$$T_b = \frac{1}{2} t \,\frac{x^2}{h - x}\, \varepsilon_{bc}\, E_{bt},$$

$$T_a = A_a\, E_a\, \varepsilon_{bc}\, \frac{x + h_0 - h}{h - x}$$

și

$$t\,(h - x)\, E_{bc} - t\,\frac{x^2}{h - x}\, E_{bt} - 2\, A_a\, E_a\, \frac{x + h_0 - h}{h - x} = 0.$$

Dacă notăm

$$\xi = \frac{h - x}{h}, \qquad \xi_0 = \frac{h_0}{h};$$

$$n = \frac{E_a}{E_{bc}}, \qquad n' = \frac{E_{bt}}{E_{bc}};$$

$$\varphi = \frac{A_a}{th}.$$

obținem ecuația

$$\xi^2 - n'(1 - \xi)^2 - 2 \cdot \varphi \cdot n\,(\xi_0 - \xi) = 0,$$

sau ordonînd în raport cu ξ

$$(1 - n')\ \xi^2 + 2\,(n' + n\,\varphi)\ \xi - (n' + 2n\,\varphi\xi_0) = 0.$$

Rezultă poziția axei neutre

$$\xi = \frac{n' + n\varphi}{1 - n'}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{(n' + 2n\,\varphi\xi_0)\,(1 - n')}{(n' + n\varphi)^2}}\,\right].$$

Expresia de sub semnul radical se poate dezvolta în serie cu condiția ca

$$\frac{(n' + 2n\,\varphi\xi_0)\,(1 - n')}{(n' + n\varphi)^2} \leqslant 1.$$

Aceasta revine la a scrie că

$$\eta^2 + (2\,n' + 2\,n'\xi_0 - 2\,\xi_0)\,\eta - n' + 2\,n'^2 \geqslant 0$$

unde am notat cu $\eta = n\varphi$.

Coeficientul lui η este pozitiv și deci condiția este satisfăcută pentru η în afara rădăcinilor sale η_1, η_2

$$\eta_{1.2} = (\,\xi_0 - \xi_0 n' - n'\,) \pm \sqrt{(\,\xi_0 - \xi_0\,n' - n'\,) - 2\,n'^2 + n'}\,.$$

Se vede că termenul

$$(\,\xi_0 - \xi_0\,n' - n'\,) < 0 \qquad \text{pentru} \qquad n' > \frac{\xi_0}{\xi_0 + 1}\,;\,(\,\xi_0 < 1),$$

iar

$$-\,2\,n'^2 + n' \leqslant 0 \qquad \text{pentru} \qquad n' > \frac{1}{2}\,.$$

Rezultă deci, că pentru $n' > \dfrac{1}{2}$,

$$\left|\sqrt{(\,\xi_0 - \xi_0\,n' - n'\,)^2 - 2n'^2 + n'}\,\right| < \left|\,\xi_0 - \xi_0\,n' - n'\,\right|$$

și prin urmare ambele rădăcini η_1 și η_2 sînt negative. Cum η este o mărime esențial pozitivă, deci în afara rădăcinilor η_1 și η_2, rezultă că este în orice caz satisfăcută condiția de convergență a seriei de dezvoltare a radicalului

$$\frac{(n' + 2\,\xi_0\,\eta)\,(1 - n')}{(n' + \eta)^2} \leqslant 1.$$

Dezvoltînd radicalul în serie obținem pentru poziția axei neutre

$$\xi = \frac{n' + n\varphi}{1 - n'}\left[\frac{(n' + 2n\,\varphi\xi_0)(1 - n')}{2\,(n' + n\varphi)^2} - \frac{(n' + 2n\,\varphi\xi_0)^2\,(1 - n')^2}{8\,(n' + n\,\varphi)^4} + \ldots\right].$$

Se poate verifica că în condițiile considerate la experimentările făcute convergența este foarte bună, adică termenul al doilea reprezintă mai puțin ca 2 % din primul termen. În aceste condiții se poate considera în calcule numai primul termen. În cazul $n' = 1$, adică $E_{bt} = E_{bc}$, primul termen reprezintă chiar soluția exactă.

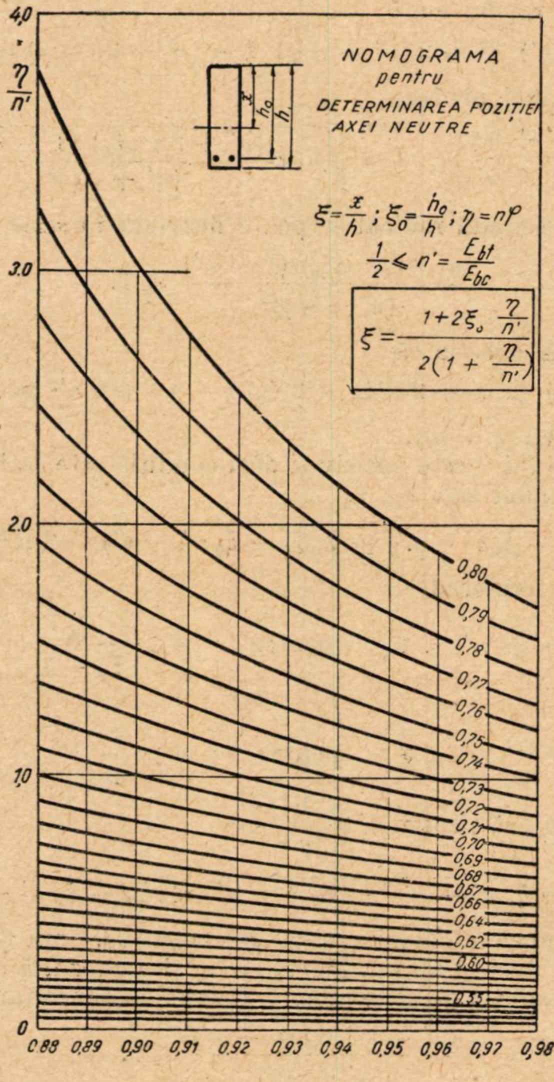


Fig. 7. — Nomogramă pentru determinarea poziției axei neutre.

Ne putem folosi de formula de mai sus pentru a efectua rapid calcule în vederea unei nomograme (fig. 7) care să ne dea poziția axei neutre dacă se cunoaşte n, n' şi φ. Într-adevăr, considerăm poziția axei neutre dată de expresia

$$\xi = \frac{n' + 2\,\xi_0\,\eta}{2\,(n' + \eta)} \quad \text{unde} \quad \eta = n\varphi$$

şi explicităm funcţia $\eta = f(\xi)$, adică

$$\eta = n' \frac{2\xi - 1}{2(\xi_0 - \xi)}.$$

Transformăm expresia înlocuind pe $\xi = 0{,}5 + \Delta\xi$ şi deci

$$\eta = n' \frac{\Delta\xi}{(\xi_0 - 0{,}5) - \Delta\xi}.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

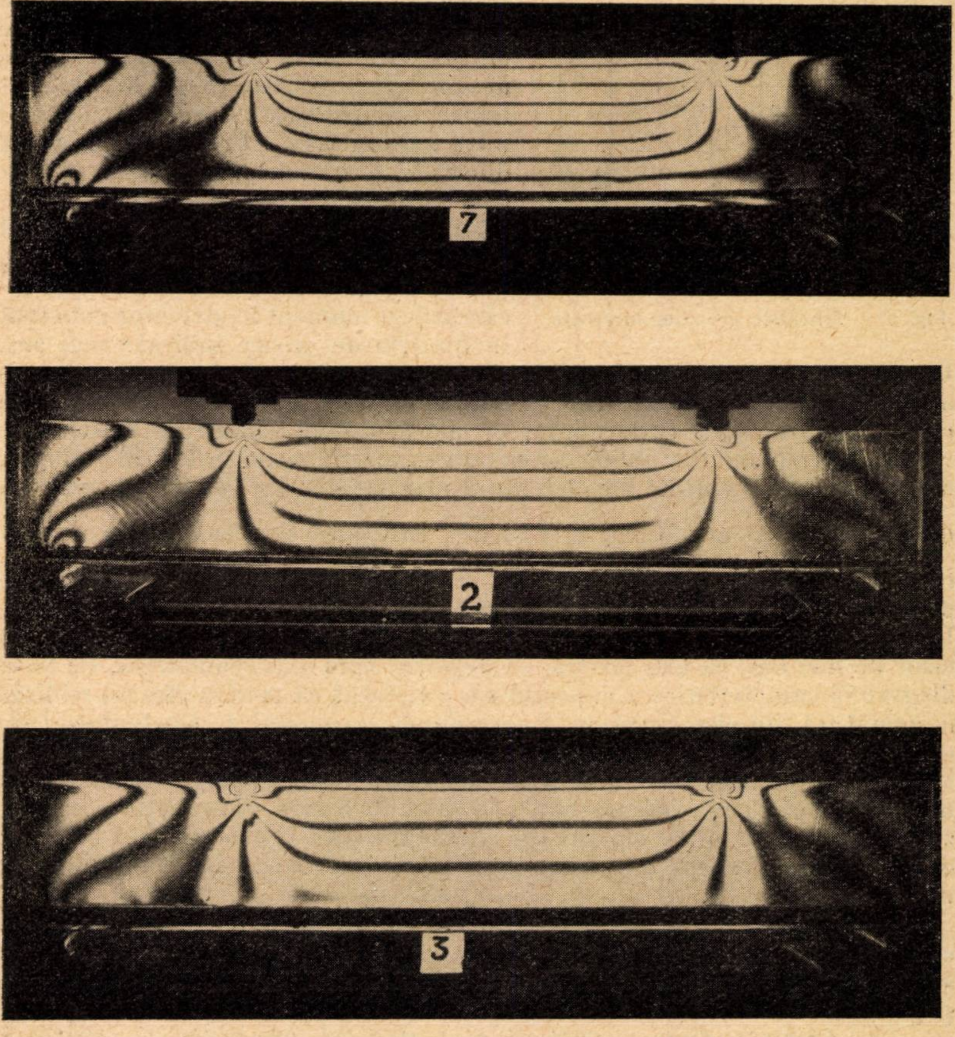


Fig. 8. — Variaţia poziţiei axei neutre în funcţie de procentul de armare. Izocromatice.

Sub această formă calculele se fac rapid, fără nici o dificultate alegînd $\Delta\xi$ la intervale regulate și obținînd în schimb valori pentru $\eta = n\varphi$, ceea ce înseamnă că pentru materiale alese rezultă procentul de armare.

Verificarea conlucrării dintre armătură și model s-a făcut pe cale experimentală, comparînd cu valorile acestei nomograme cele măsurate pe modele fotoelastice (fig. 8).

Se dau mai jos, în figura 9 și tabela 1, caracteristicile modelelor folosite și valorile corespunzătoare pentru ξ determinate experimental și calculate. Rezultă o concordanță satisfăcătoare între modelul real și ipotezele de calcul. Se poate constata în general că, atunci cînd s-au folosit sîrme de fier cu modul de elasticitate bine determinat și constant, rezultatele sînt bune. Eroarea este cuprinsă în general între zero și 2,4%. Primul model a dat diferențe mai mari din cauza eforturilor unitare inițiale ale plăcii modelului. Efectuînd corecțiile — scăzînd efectele tensiunilor inițiale — se obține poziția reală a axei neutre datorită încărcării cu moment încovoietor constant în limitele de eroare indicate mai sus. De asemenea o neconcordanță mai mare (cu o eroare de aproape 10%) apare în cazul armării cu sîrme de cupru. Explicația acestei neconcordanțe constă în utilizarea materialului de armătură cu modul de elasticitate variabil depinzînd de intensitatea efortului din armătură. Într-adevăr, din relația care exprimă dependența dintre poziția axei neutre și modulul de elasticitate al armăturii, în valoarea care intervine sub forma $\frac{E_a}{E_b}$, în factorul $\eta = n\varphi$, se poate constata că descreșterea lui E_a antrenează o descreștere a mărimii ce caracterizează poziția relativă a axei neutre. Pe modelele nr. 4 și 6 armate cu fire de cupru se poate constata, în sensul celor de mai sus, că axa neutră s-a deplasat spre axa geometrică. Pe baza diagramei caracteristice a cuprului s-a constatat că pentru efortul realizat în armătură din elementul nr. 4 corespunde un modul de elasticitate care conduce la o valoare $\xi = 0{,}57$ în loc de 0,64 cît s-a considerat inițial. Dacă valoarea $\xi = 0{,}60$ determinată experimental este de data aceasta mai mare decît cea evaluată mai sus, se explică prin contribuția adusă de zonele marginale unde efortul din armătură este scăzut și deci modulul de elasticitate real are o valoare mai ridicată decît cea din considerentele de mai sus.

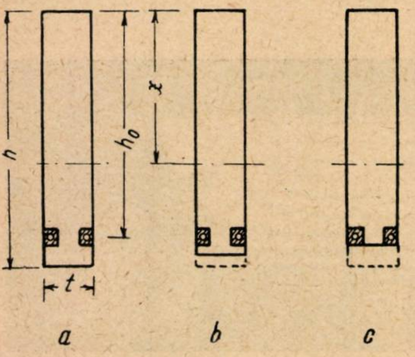


Fig. 9. — Schemele grinzilor încercate.

Concluzia care se desprinde din analiza de mai sus este că modelarea efectuată în conformitate cu prezentarea făcută mai sus permite efectuarea studiilor fotoelastice ale elementelor de beton armat cu aderență continuă și perfectă.

3. *Aderența dintre armătură și materialul fotoelastic* a constituit domeniul de cercetare în problemele betonului armat, abordat cu mijloa-

Tabela 1

	Model	h	h_0	t	A_b	A_a	φ%	ξ_0	$\eta = n\varphi$	ξ calculat	ξ măsurat	eroare %	Observație
1	*a*	25	22,25	5,5	1,375	0,02652	1,925	0,89	1,260	0,71	0,763	7,3	$n = \frac{1\,965\,000}{30\,000} = 65{,}5$ oțel
	b	24	22,25	5,5	1,320	0,02652	2,005	0,927	1,313	0,74	0,755	2	
	c	23	22,25	5,5	1,265	0,02652	2,095	0,967	1,372	0,77	0,802	4	
2	*a*	24	21,5	4,9	1,165	0,01274	1,095	0,899	0,722	0,66	0,67	1,4	$n = \frac{1\,980\,000}{30\,000} = 66{,}0$ oțel
	b	23	21,5	4,9	1,127	0,01274	1,131	0,934	0,746	0,685	0,685	0	
	c	22	21,5	4,9	1,077	0,01274	1,183	0,977	0,781	0,71	0,716	0,6	
3	*a*	25,1	22,1	5,5	1,380	0,0628	4,55	0,88	2,80	0,78	0,769	1,4	$n = \frac{1\,845\,000}{30\,000} = 61{,}5$ oțel
	b	24,1	22,1	5,5	1,325	0,0628	4,74	0,916	2,92	0,81	0,804	0,8	
	c	23,1	22,1	5,5	1,270	0,0628	4,95	0,955	3,05	0,84	0,827	1,6	
4	*a*	24,7	21,95	5,5	1,356	0,01912	1,408	0,888	0,604	0,645	0,605	6,2	$n = \frac{1\,285\,000}{30\,000} = 42{,}8$ cupru
	b	23,7	21,95	5,5	1,301	0,01912	1,468	0,926	0,629	0,665	0,615	7,5	
	c	22,7	21,95	5,5	1,248	0,01912	1,530	0,967	0,656	0,685	0,622	9,3	
5	*a*	24,2	21,7	4,9	1,184	0,0069	0,583	0,897	0,393	0,61	0,634	2,4	$n = \frac{2\,020\,000}{30\,000} = 67{,}33$ oțel
	b	23,2	21,7	4,9	1,136	0,0069	0,608	0,935	0,409	0,627	0,617	1,6	
	c	22,2	21,7	4,9	1,087	0,0069	0,635	0,978	0,427	0,642	0,648	1,0	
6	*a*	25,0	22,0	4,9	1,225	0,00956	0,779	0,88	0,334	0,595	0,55	7,6	$n = \frac{1\,285\,000}{30\,000} = 42{,}8$ cupru
	b	24,0	22,0	4,9	1,176	0,00956	0,812	0,917	0,348	0,61	0,555	9	
	c	23,0	22,0	4,9	1,127	0,00956	0,848	0,957	0,363	0,62	0,556	10,3	
7	*a*	25	22,0	4,9	1,225	0,00317	0,259	0,88	0,169	0,555	0,553	0,2	$n = \frac{1\,960\,000}{30\,000} = 65{,}3$ oțel
	b	24	22,0	4,9	1,176	0,00317	0,269	0,917	0,176	0,562	0,558	0,6	
	c	23	22,0	4,9	1,127	0,00317	0,281	0,957	0,184	0,571	0,578	1,4	

cele fotoelasticității. Pentru studiul valorilor aderenței maxime realizate cu ajutorul adezivului utilizat în modelare s-au efectuat numeroase încercări. S-a urmărit mai întîi să se determine valoarea maximă a efortului unitar de lunecare cît și valoarea lunecării după distrugerea încleierii, cînd aderența se realizează numai pe seama frecării dintre armătură și material fotoelastic. Încercările au fost efectuate cu armături din fîșii de tablă sau cu sîrme de mare rezistență. Utilizarea fîșiilor de tablă pentru armătură a fost adoptată pentru că modelează mai bine cazul stării de tensiune plane. Armăturile de tablă erau introduse într-o tăietură practicată în model și lipite cu adezivul menționat mai sus. Lățimea armăturii era egală cu a plăcii de model. A fost folosit adeziv de tip Dinox preparat în țară la ICECHIM cît și adeziv de tip Araldit D (elvețian). Întărirea mai lentă a Dinoxului a permis determinarea creșterii puterii adezivului cu trecerea timpului.

Încercările pentru determinarea puterii adezivului au constat în măsurarea efortului unitar de lunecare mediu în momentul cînd armătura începe să lunece. De asemenea s-a măsurat efortul mediu de lunecare după ce încleierea a fost distrusă, adică după ce a avut loc prima lunecare. Această din urmă valoare caracterizează aderențele menținute numai de forțele de frecare dintre armătură și adeziv. Încercările au fost efectuate pentru diferite adîncimi de înglobare a armăturii, pentru a constata deosebirile cauzate de această condiție.

Se dau în figura 10 rezultatele încercărilor efectuate.

Din diagramele prezentate se poate constata că efortul limită de lunecare este cu atît mai mare cu cît adîncimea de înglobare a armăturii este mai mică. De asemenea efortul limită realizat prin frecare după distrugerea încleierii este destul de mare, reprezentînd în cazul unei adîncimi de înglobare de 25 mm 4—6 kg/cm^2, adică 40—45% din efortul limită realizat înainte de distrugerea încleierii.

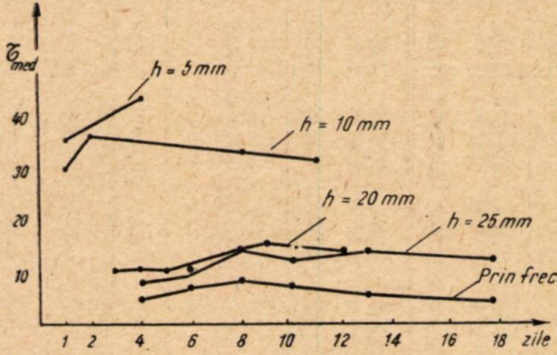


Fig. 10. — Valoarea aderenței medii (efortul limită de lunecare) a adezivului de tip Dinox.

De asemenea se poate constata că, creșterea rezistenței adezivului are loc mai ales în primele 3—4 zile, creșterea ulterioară fiind de ordinul 25% și avînd loc pînă în a 8—9-a zi de la încleiere.

Încercările prezentate mai sus au determinat limitele de rezistență ale adezivului utilizat.

În limitele de mai sus au fost efectuate cercetări fotoelastice asupra eforturilor de lunecare dintre armătură și blocul de încastrare. S-au determinat, pentru diferite adîncimi de înglobare a armăturii, izostaticele, precum și diagramele tensiunilor de lunecare $\left(\frac{\tau}{\tau_{med}}\right)$ de-a lungul armăturii. În figura 11 se poate urmări comparativ alunecările la suprafața armăturii pentru adîncimile de înglobare 15 *d*, 30 *d*, 40 *d* și 50 *d*, unde *d* este grosimea armăturii (tablă de grosime *d*). Se poate astfel constata că valoarea efortului unitar de lunecare (valoarea comparativă) $\left(\frac{\tau}{\tau_{med}}\right)$ la capătul armăturii, are un maxim care este relativ independent de adîncimea de înglobare, dacă aceasta nu depășește 40 *d*. Valoarea lunecării la intrarea armăturilor în masiv și curba de creștere în vecinătatea acestei margini necesită un studiu special.

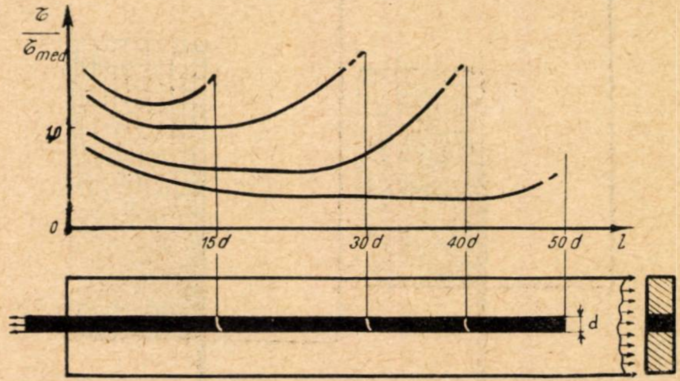


Fig. 11. — Eforturi de aderență la smulgerea armăturii, după începerea pierderii aderenței.
$n = 40$; $\varphi = 0{,}02$

Se pot urmări în figura 12 tablourile de izostatice în blocurile întinse cu armături smulse și se constată că zona de eforturi perturbată prin prezența armăturii nu depășește cu mult limitele armăturii. Atît din izostatice cît și din izocromatice (fig. 13) se poate constata existența unei zone practic fără tensiuni (în realitate aci apar compresiuni) în imediata apropiere a punctului de intrare a armăturii în masivul de încastrare.

Evaluarea eforturilor de lunecare s-a făcut folosind tablourile de izocromate și cele de izocline. Efortul unitar de lunecare (fig. 14) este dat de relația

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \qquad (3.1)$$

sau înlocuind pe $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = n_{xy}\,\tau_0$, unde n_{xy} este ordinul de bandă în punctul considerat, iar τ_0 este valoarea benzii modelului avem

$$\tau_{xy} = n_{xy}\,\tau_0 \sin 2\alpha. \tag{3.2}$$

Ordinul de bandă se obține din tabloul de benzi, iar unghiul α din tabloul de izocline. Valoarea benzii modelului se obține din aceeași fotografie de izocromate scriind echilibrul în zona de întindere curată.

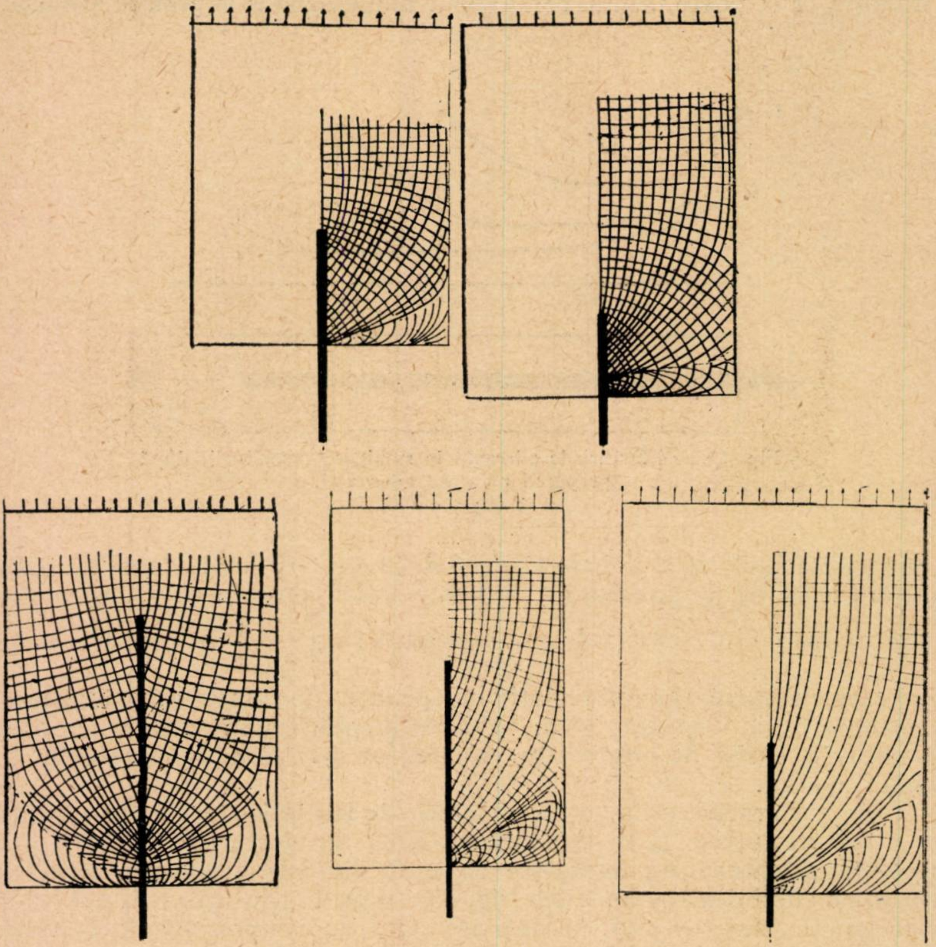


Fig. 12. — Tablouri de izostatice în blocuri cu armături solicitate la smulgere și înglobate pe diferite adîncimi.

Pentru y destul de mare, în afara zonei armate trebuie să avem

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_y \cdot t \cdot \mathrm{d}x = F_{tot}. \tag{3.3}$$

Avînd în vedere faptul că în zona de întindere pură $\sigma_y = \sigma_1$, $\tau_{xy} = 0$ şi $\sigma_x = \sigma_2 = 0$ rezultă că,

$$\frac{\sigma_h}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = n_{xh} \cdot \tau_0 . \tag{3.4}$$

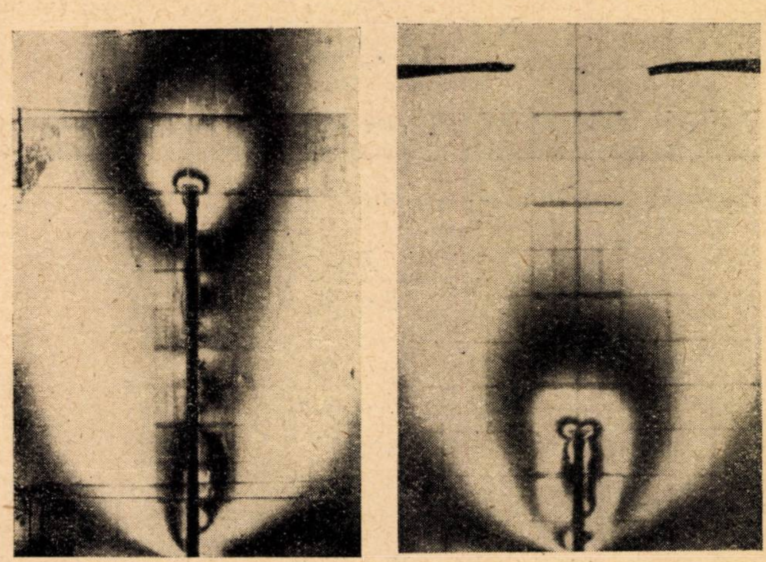


Fig. 13. — Izocromatice la blocuri cu armături solicitate la smulgere.

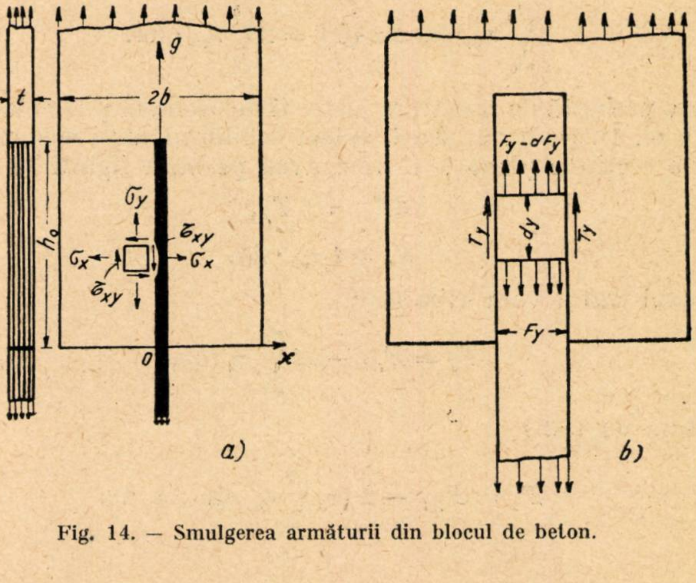

t
2b
g
h_a
σ_y
τ_{xy}
σ_x
σ_x
τ_{xy}
0
x
a)
$F_y - dF_y$
T_y
dy
T_y
F_y
b)

Fig. 14. — Smulgerea armăturii din blocul de beton.

Relația de mai sus (3.3) devine, dacă avem în vedere și simetria,

$$4\tau_0 \cdot t \cdot \int_0^b n_{xh} \cdot \mathrm{d}x = F_{tot}, \tag{3.5}$$

de unde rezultă că valoarea benzii modelului este

$$\tau_0 = \frac{F_{tot}}{4t\int_0^b n_{xh} \cdot \mathrm{d}x}. \tag{3.6}$$

Deci etalonarea materialului se face chiar pe modelul experimentat. Pentru omogeneitatea valorilor determinate experimental în diagrame se prezintă variația raportului $\frac{\tau}{\tau_{med}}$ unde

$$\tau_{med} = \frac{F_{tot}}{2 \cdot t \cdot h_0}. \tag{3.7}$$

Deci,

$$\frac{\tau}{\tau_{med}} = \frac{h_0}{2\int_0^b n_{xh} \cdot \mathrm{d}x} n_{0y} \sin 2\alpha. \tag{3.8}$$

Drept verificare trebuie să avem

$$2t\int_0^{h_0} \tau_{0y}\, \mathrm{d}y = F_{tot} = 2t\int_0^b \sigma_{hy}\, \mathrm{d}x. \tag{3.9}$$

Ținînd seama de (3.2) și (3.4) căpătăm condiția

$$\int_0^{h_0} n_{0y} \sin 2\alpha \cdot \mathrm{d}y = 2\int_0^b n_{xh} \cdot \mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Forța preluată de armătură poate fi de asemenea calculată în fiecare secțiune a ei. Într-adevăr, dacă scriem echilibrul unui element de armătură într-o secțiune plană a ei vom avea pe baza figurii 14

$$\mathrm{d}F_y = 2\ T_y, \tag{3.11}$$

$$T_y = t\ \tau_{0y} \cdot \mathrm{d}y. \tag{3.12}$$

Pentru cazul tratat vom avea deci,

$$F_y = F_{tot} - 2t\int_0^y \tau_{0y}\, \mathrm{d}y, \tag{3.13}$$

sau conform cu (3.2)

$$F_y = F_{tot} - 2\ t\tau_0 \int_0^y n_{0y} \sin 2\alpha\ \mathrm{d}y.$$

Pentru reprezentare ne folosim de mărimi adimensionale

$$\frac{F_y}{F_{tot}} = 1 - \frac{2\,t\tau_0}{F_{tot}} \int_0^y n_{0y} \sin 2\,\alpha\,\mathrm{d}y,$$

sau folosindu-ne de (3.6) căpătăm

$$\frac{F_y}{F_{tot}} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^y n_{0y} \sin 2\alpha \cdot \mathrm{d}y}{2\displaystyle\int_0^h n_{xh} \cdot \mathrm{d}x}. \tag{3.14}$$

Cazul armăturilor smulse a fost studiat și pe epruvete de tipul celor indicate în figura 15 în care se poate urmări și tablourile de izostatice.

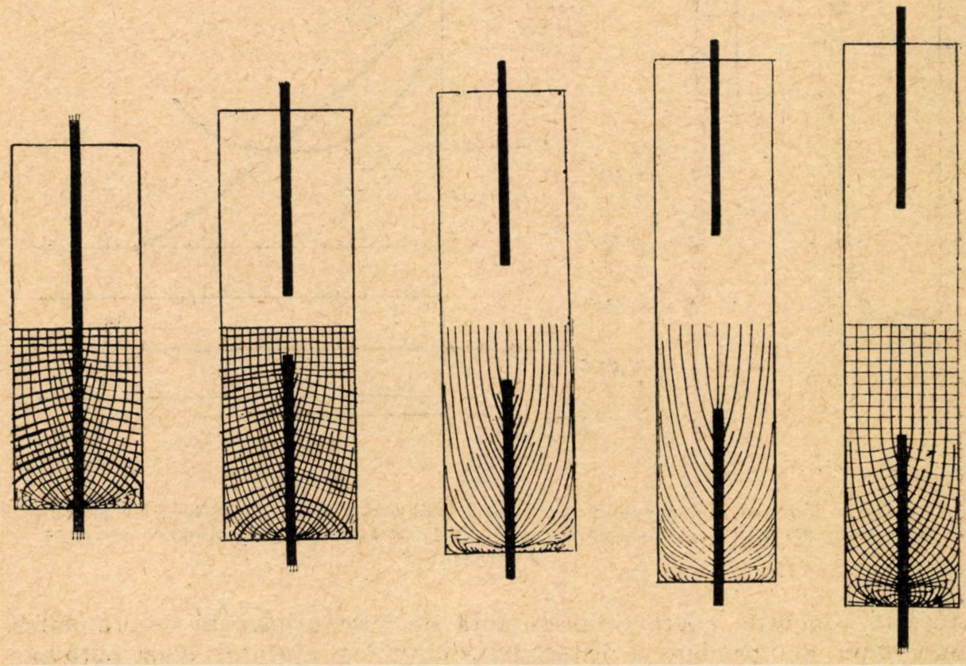


Fig. 15. — Tablouri de izostatice la epruvete cu armături smulse dispuse simetric.

Pentru a se asigura o perfectă axare a armăturilor, modelele au fost executate din două jumătăți care prin lipire au prins între ele și cele două armături. Nici o altă metodă nu a putut asigura coliniaritatea armăturilor.

În ceea ce privește diagramele $\frac{\tau}{\tau_{med}}$, și cele de $\frac{F_y}{F_{tot}}$, ele au fost identice (fig. 16 *b*) pentru toate cazurile studiate independent de distanța *l* dintre armături. Deosebirile constau numai în diagrama de eforturi normale (fig. 16 *a*) pe secțiunea transversală din zona dintre armături. Se constată că, concentrările de eforturi de la capătul armăturilor atrag în această zonă un gradient mare al lor. Diagrama acestor eforturi rezultă direct din tablourile de izocromatice (fig. 17). Se vede astfel că, zona de influență a fiecărui capăt de armătură, în care are loc o perturbație a repartiției uniforme de întindere, nu depășește 7 *d* de la capătul armăturii în zonă.

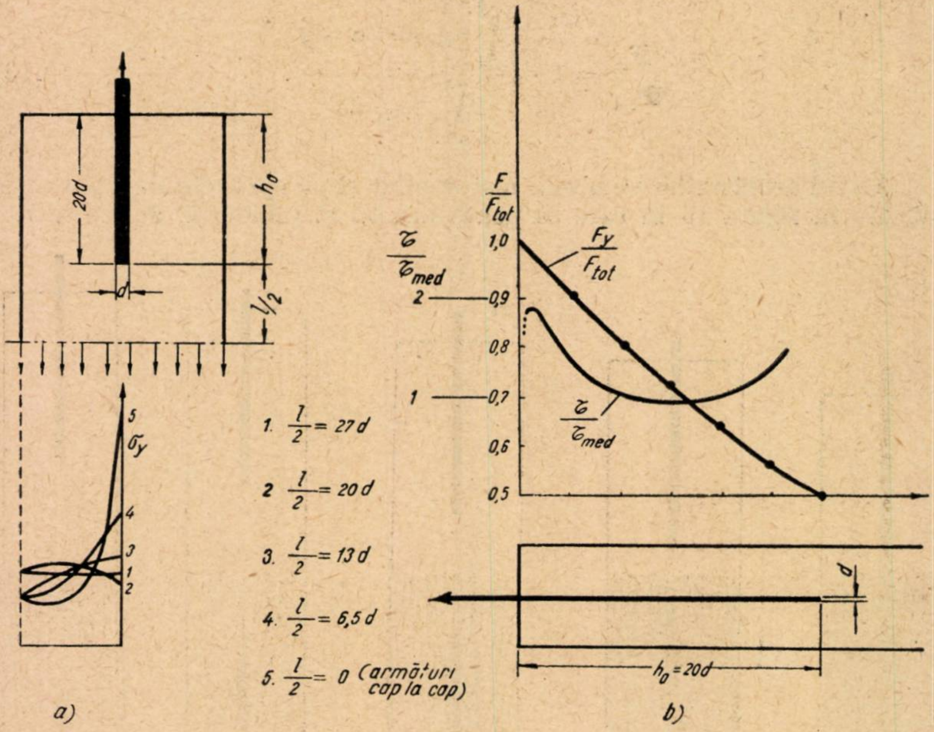


Fig. 16. — Tensiuni în epruvetele cu armături simetrice, smulse : *a*) tensiuni normale în zona dintre armături (σ_x) ; *b*) aderența și efortul în armătură, după începerea pierderii aderenței.

Această concluzie poate fi interesantă dacă se urmărește determinarea rezistenței la întindere a betonului simplu cu ajutorul unor epruvete întinse de forma celor din figura 15. Se poate determina astfel distanța minimă dintre armături.

S-a studiat de asemenea starea de eforturi în elementele de beton armat, cu armătura continuă și supusă la tracțiune, conform figurii 18. În acest caz efortul transmis prin armătura liberă este preluat, în oricare secțiune transversală atît de beton cît și de armătură, iar ecuația de echilibru (3.3) de mai sus devine

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_y^{(b)} \cdot t \cdot \mathrm{d}x + F_y = F_{tot} . \qquad (3.15)$$

Valoarea efortului din armătură se determină pe baza egalității dintre deformația betonului și a armăturii în suprafața de contact. Scriind că

$$\varepsilon_y^{(a)} = \varepsilon_y^{(b)}, \tag{3.16}$$

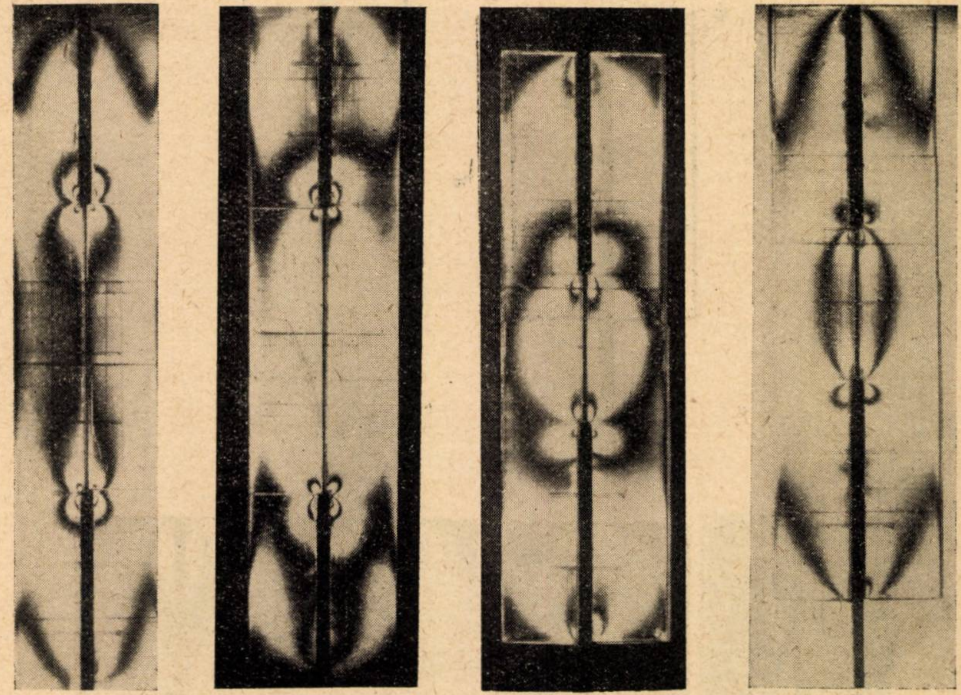


Fig. 17. — Tablouri de izocromatice la epruvetele cu armături smulse dispuse simetric.

adică

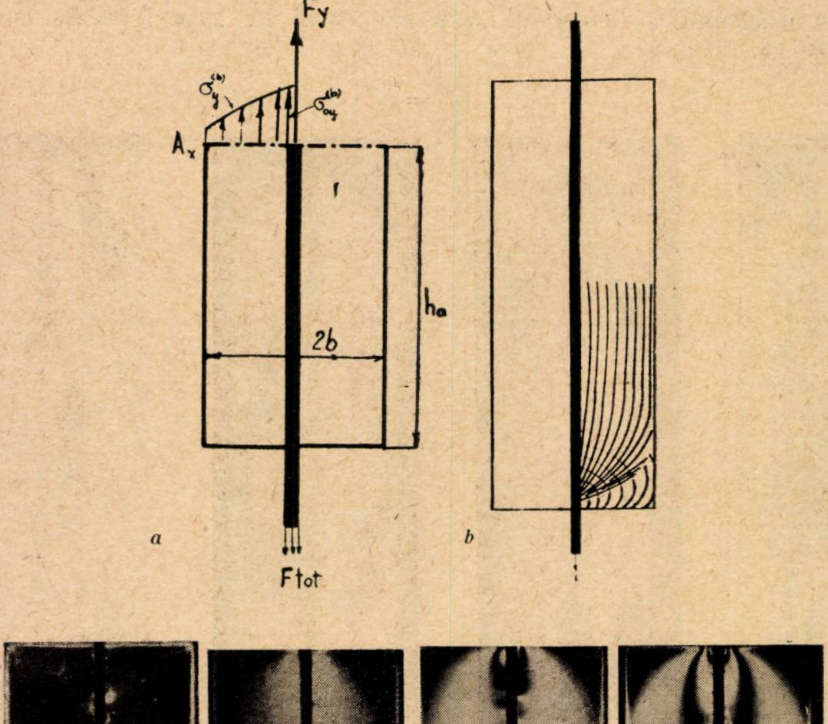
$$\frac{\sigma^{(a)}}{E_a} = \frac{1}{E_b}\left(\sigma_y^{(b)} - \mu\, \sigma_x^{(b)}\right),$$

sau

$$\sigma_y^a = \frac{E_a}{E_b}\left(\sigma_y^{(b)} - \mu\, \sigma_x^{(b)}\right). \tag{3.17}$$

Pentru secțiunea transversală din axa de simetrie $\sigma_x^{(b)} = 0$ și deci

$$\sigma_y^{(a)} = \frac{F_y}{A_a} = \frac{E_a}{E_b}\, \sigma_{0y}^{(b)}, \tag{3.18}$$


Fy
σy(a)
σoy(b)
Ax
ha
2b
Ftot
a
b

c c c c

Fig. 18. — Epruvetă cu armătură continuă supusă la tracţiune : *a*) schemă ; *b*), izostatice ; *c*) izocromatice.

unde $\sigma_{0y}^{(b)}$ s-a notat astfel pentru a marca faptul că se referă la suprafața armăturii ($x = 0$).

De aci rezultă că

$$F_y = \frac{E_a}{E_b} A_a \sigma_{0y}^{(b)}. \tag{3.19}$$

(Din 3.15) și (3.19) obținem

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_y^{(b)} \cdot t \cdot \mathrm{d}x + \frac{E_a}{E_b} A_a \sigma_{0y}^{(b)} = F_{tot} \tag{3.20}$$

și folosind notația din (3.4) căpătăm pentru valoarea benzii modelului

$$\tau_0 = \frac{F_{tot}}{4t\int_0^b n_{xh_0}\,\mathrm{d}x + 2A_a \frac{E_a}{E_b} n_{0y}} \tag{3.21}$$

(aci n_{xh_0} este ordinul de bandă în secțiunea h_0 și la distanța x de armătură).

Considerăm pentru τ_{med} valoarea

$$\tau_{med} = \frac{2t\int_0^{h_0} \tau_{0y}\,\mathrm{d}y}{2t h_0}, \tag{3.22}$$

sau cum $\tau_{0y} = n_{0y}\tau_0 \sin 2\alpha$ avem

$$\tau_{med} = \frac{2t\tau_0\int_0^{h_0} n_{0y}\sin 2\alpha\,\mathrm{d}y}{2t h_0}. \tag{3.23}$$

Deoarece relația (3.10) își păstrează valabilitatea și în cazul de față expresia (3.23) se poate scrie

$$\tau_{med} = \frac{2\tau_0\int_0^b n_{xh_0}\,\mathrm{d}x}{h_0} \tag{3.24}$$

și rezultă că

$$\frac{\tau_{0y}}{\tau_{med}} = \frac{h_0 n_{xh_0}\sin 2\alpha}{2\int_0^b n_{xh_0}\,\mathrm{d}x}. \tag{3.25}$$

Pentru $\frac{F_y}{F_{tot}}$ se menține valabilitatea relației (3.14).

În figura 19 sînt date diagramele adimensionale ale aderenței și efortului în armătură pentru o epruvetă întinsă de tipul celei din figura

18, cu $\frac{2b}{h_0} = \frac{3}{5}\, n = \frac{E_a}{E_b} = 20$, iar $\varphi = \frac{A_a}{A_b} = 0{,}05$. Forța de întindere a armăturii, a acționat în patru trepte (fig. 18 *c*) pînă la pierderea aderenței în zona de intrare în epruvetă, de fiecare dată făcîndu-se măsurătorile pentru τ și F_y. S-a constatat astfel că, diagramele $\frac{\tau}{\tau_{med}}$ și $\frac{F_y}{F_{tot}}$ sînt independente de mărimea forței și rămîn să depindă numai de dimensiunile geometrice și constantele fizice care caracterizează epruveta.

S-au efectuat experimentări și pentru cazul cînd la mijlocul epruvetei, considerate în cazul tratat mai sus, a apărut o fisură transversală provocată de ruperea prin întindere a betonului. Apariția fisurii la mijloc este justificată de faptul că în această zonă, betonul se încarcă cel mai mult. Distanța între fisuri va fi determinată de valoarea maximă a eforturilor normale apărute la mijlocul epruvetei întinse considerată în cazul anterior (fig. 18).

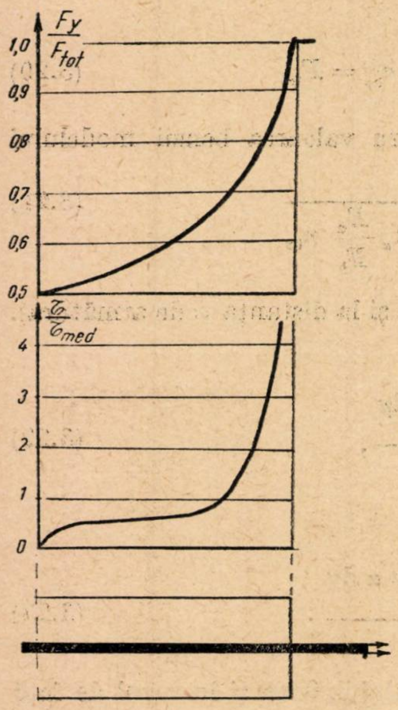


Fig. 19. — Aderența și efortul din armătură în epruveta întinsă cu armătura continuă.

Prin apariția fisurii mediane se constată, din examenul tablourilor de izocromatice (fig. 20), că epruveta s-a divizat în două jumătăți identic solicitate și avînd aceeași stare de tensiune. Realizarea experimentală a fisurării a constat în lipirea armăturii cu 4 elemente identice și simetric dispuse în raport cu armătura și fisura ; asigurîndu-se astfel o fisură extrem de fină, sub 0,2 mm. Cu toate acestea nu s-a putut constata o diferență sensibilă a distribuției eforturilor, între zona de margine a modelului și zona fisurii în care armătura este întinsă cu întreaga forță. Rezultă deci că, prin apariția fisurii, epruveta se împarte în două elemente mai scurte de aceeași lățime și identic solicitate. Schimbarea raportului între lungimea și lățimea epruvetei este cauza care determină o redistribuție a eforturilor.

Încercările efectuate au pus în evidență importanța pe care o are distanța dintre capetele libere ale armăturii asupra mărimii efortului minim din armătură și deci a efortului maxim de întindere în beton (fig. 21).

S-au făcut încercări și pentru a pune în evidență influența lățimii epruvetei, măsurîndu-se astfel zona de influență a armăturii. Tipul de epruvetă fisurată pentru patru lungimi a fost executat pentru două lățimi diferite (fig. 20). S-a putut astfel constata chiar din tablourile de izocromatice sau cele de izostatice întinderea zonei de influență (fig. 20).

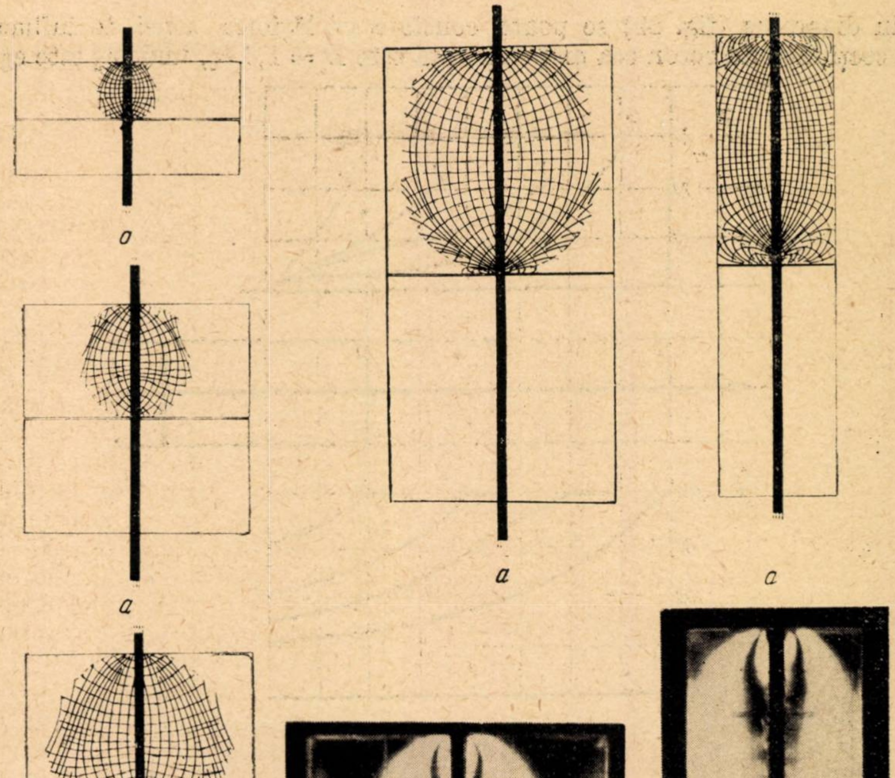


Fig. 20. — Epruvete de întindere cu fisură la mijloc : *a*) izostatice ; *b*) izocromatice.

Din diagrama (fig. 22) se poate constata că lățimea zonei de influență în secțiunea de beton cea mai solicitată este $D = 1{,}6\ h_0$, unde h_0 este egală

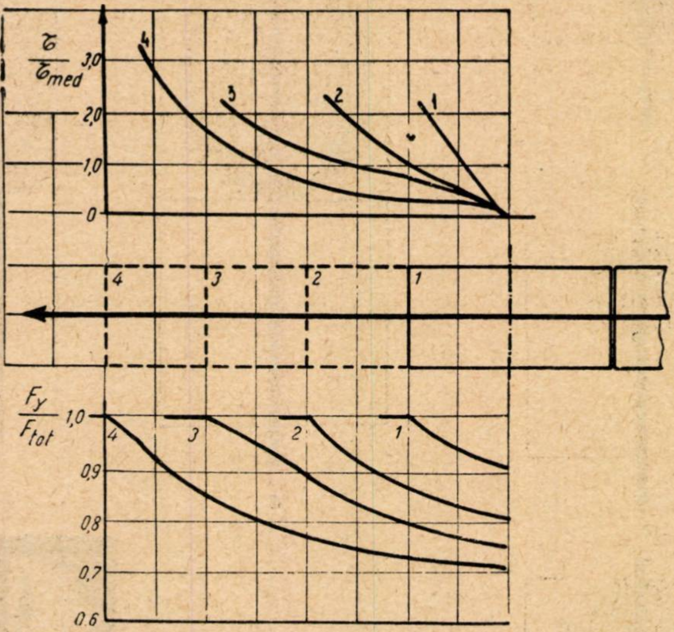


Fig. 21. — Aderența și efortul din armătură în epruvete întinse, fisurate.

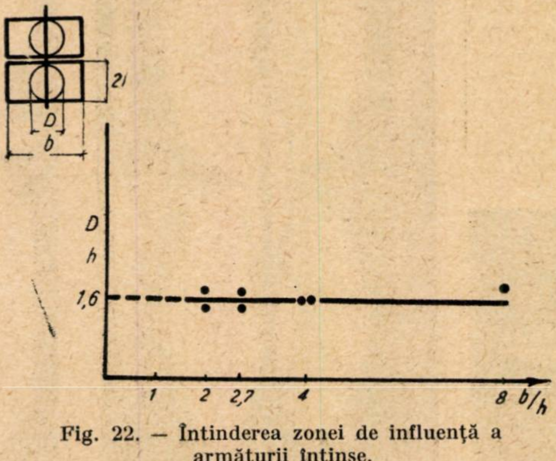


Fig. 22. — Întinderea zonei de influență a armăturii întinse.

cu semidistanța dintre capetele libere ale armăturii (sau distanța dintre fisuri). Examinînd izocromaticele se observă imediat (fig. 20) că întinderea acestei zone de influență depinde și de depărtarea secțiunii considerate de marginea liberă a armăturii.

În ceea ce privește repartiția eforturilor unitare de întindere în beton, în secțiunea mediană, cea mai solicitată, se poate constata, din examinarea izocromaticelor (fig. 20), că repartiția este cu atît mai uniformă cu cît raportul $\frac{h_0}{b}$ este mai mare. Experiențele au arătat că tensiunea normală longitudinală este relativ constantă pentru $\frac{h_0}{b} > 4$ pentru cazul de armare considerat.

4. *Concluziile* care se desprind din cercetările prezentate în lucrarea de față permit să se afirme că fotoelasticimetria, în stadiul actual este o metodă experimentală capabilă să furnizeze informații prețioase referitoare la starea de tensiuni din elementele de beton armat. Avem în vedere de sigur și faptul că valorile $n = \frac{E_a}{E_b}$ intervin în formulele de calcul alături de procentul de armare. Acționînd asupra factorului $\eta = n \cdot \varphi$, ceea ce e pe deplin posibil pentru materialele fotoelastice folosite, avînd o rezistență la deformații destul de mare (Dinox), prin alegerea armăturilor din metal (oțel sau aluminiu) cu secțiuni potrivite, se poate modela orice valoare η caracterizînd betonul armat utilizat actualmente în construcții. Metoda armăturilor aderente utilizată în laboratorul nostru a permis efectuarea studiilor referitoare la fisurare [10] și la consecințele ei asupra eforturilor din vecinătatea fisurilor.

Rezultatele obținute, cu privire la tensiunile din beton datorită aderenței și prezentate aci, permit dezvoltarea cercetărilor referitoare la aderență în elementele încovoiate din beton armat, cercetări care sînt în curs de efectuare.

Primită la redacție la 10 februarie 1960

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФОТОУПРУГОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

РЕЗЮМЕ

В работе описывается методология фотоупругого моделирования железобетонных элементов на моделях из материала Dinox с внутренними арматурами, с сцеплением или элементов с предварительно напряженной (при наличии сцепления) или посленапряженной (в отсутствии сцепления) арматурой. Арматуры с сцеплением прилипаются к моделям элементов клеем типа Araldit. При помощи соотношения, дающего положение нейтральной оси изогнутых элементов, произво-

дится экспериментальная проверка эффективности и точности предлагаемого метода.

Далее рассматривается явление сцепления между арматурой и фотоупругими моделями. Оценивается усилие, вызывающее сцепление до и после скольжения (эффект трения).

Исследуется на различных типах образцов изменение усилий сцепления вдоль арматуры, а также изменение растягивающего усилия в арматуре.

Оценивается зона влияния вокруг арматуры и распределение усилий сцепления.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Элементы с предварительно напряженной арматурой без сцепления.

Рис. 2. — Пресс для натяжения арматуры.

Рис. 3. — Картина полос в предварительно напряженном элементе.

a) — предварительное напряжение с начальным изгибающим моментом; *b*) — дополнительное нагружение, аннулирующее начальный момент; *c*) — предварительное напряжение и нагружение.

Рис. 4. — Рама для предварительного сжатия моделей с предварительно напряженной арматурой.

Рис. 5. — Элемент с предварительно напряженной арматурой при сцеплении.

Рис. 6. — Схема нагружения балки под действием постоянного изгибающего момента и диаграмма напряжений и деформаций.

Рис. 7. — Номограмма для определения положения нейтральной оси.

Рис. 8. — Изменение положения нейтральной оси, в зависимости от процента армирования. Изохроматические линии.

Рис. 9. — Сечения нагруженной балки, подверженной выдергиванию.

Рис. 10. — Значение среднего сцепления (предварительное усилие скольжения) клея типа Dinox.

Рис. 11. — Усилия сцепления при выдергивании арматуры $n = 40$; $\varphi = 0{,}02$.

Рис. 12. — Изохроматические линии в блоках с арматурами, подверженными выдергиванию и расположенными на различных глубинах.

Рис. 13. — Изохроматические линии блоков с арматурой, подверженной выдергиванию.

Рис. 14. — Выдергивание арматуры из железобетонного блока.

Рис. 15. — Изохроматические образцы с выдернутыми арматурами, расположенными симметрично.

Рис. 16. — Напряжения в образцах с симметричными выдернутыми арматурами.

a) — нормальные напряжения в зоне между арматурами (a_x), *b*) — сцепление и усилие в арматуре.

Рис. 17. — Изохроматические линии образцов с выдернутыми арматурами, расположенными симметрично.

Рис. 18. — Образец со сплошной арматурой, подверженной растягивающему усилию.

a) — схема; *b*) — изостатические линии; *c*) — изохроматические линии.

Рис. 19. — Сцепление и усилие в арматуре натянутого образца со сплошной арматурой.

Рис. 20. — Образец для натяжения с трещиной посредине. *a*) — изостатические линии; *b*) — изохроматические линии.

Рис. 21. — Сцепление и усилие в арматуре растянутых образцов при наличии трещинообразования.

Рис. 22. — Протяжение зоны влияния растянутой арматуры.

QUELQUES PROBLÈMES SOULEVÉS PAR L'ÉTUDE AU MOYEN DE MODÈLES PHOTO-ÉLASTIQUES DU BÉTON ARMÉ

RÉSUMÉ

L'auteur présente la méthodologie de l'étude des éléments de béton armé par des modèles photo-élastiques en «Dinox» à armatures englobées, adhérentes, ainsi que des éléments précontraints à armature prétensionnée (adhérente) ou post-tensionnée (non adhérente). Les armatures adhérentes sont collées aux modèles des éléments au moyen d'un adhésif du type «Araldit». La relation indiquant la position de l'axe neutre des éléments déformés par flexion permet de vérifier expérimentalement l'efficacité et la précision des méthodes recommandées.

L'auteur étudie ensuite le phénomène d'adhérence entre l'armature et le modèle photo-élastique et estime la force d'adhérence avant et après le glissement (l'effet du frottement).

Il étudie, sur divers types d'éprouvettes, la variation des contraintes d'adhérence le long de l'armature, aussi bien que la variation de l'effort de traction dans l'armature.

Il évalue, en outre, la zone d'influence autour de l'armature, ainsi que la distribution des contraintes due à l'adhérence.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Elément à armature prétensionnée sans adhérence.

Fig. 2. — Presse pour soumettre l'armature à la traction.

Fig. 3. — Isochromatiques dans l'élément précontraint : *a* — précompression à moment fléchissant initial ; *b* — charge supplémentaire annulant le moment initial ; *c* — précompression et charge.

Fig. 4. — Cadre pour la précompression des modèles à armature prétensionnées.

Fig. 5. — Elément précontraint à armatures prétensionnées adhérentes.

Fig. 6. — Schéma de la charge d'une poutre soumise à un moment fléchissant constant, et diagramme des contraintes et des déformations.

Fig. 7. — Nomogramme pour déterminer la position de l'axe neutre.

Fig. 8. — Variation de la position de l'axe neutre en fonction du pourcentage d'armement. Isochromatiques.

Fig. 9. — Sections des poutres fléchies éprouvées.

Fig. 10. — Valeur de l'adhérence moyenne (effort limite de glissement) de l'adhésif du type « Dinox ».

Fig. 11. — Forces d'adhérence lors de l'arrachement de l'armature après le commencement de la perte de l'adhérence ; $n = 40$; $\varphi = 0,02$.

Fig. 12. — Tableaux d'isostatiques dans le cas des blocs à armatures sollicitées à l'arrachement et englobées à diverses profondeurs.

Fig. 13. — Isochromatiques dans le cas des blocs à armatures sollicitées à l'arrachement.

Fig. 14. — Arrachement de l'armature d'un bloc de béton,

Fig. 15. — Tableaux d'isostatiques dans le cas des éprouvettes à armatures symétriques arrachées.

Fig. 16. — Tensions dans les éprouvettes à armatures symétriques arrachées : *a* — tensions normales dans la zone entre les armatures (axe) ; *b* — adhérence et contrainte dans l'armature après le commencement de la perte de l'adhérence.

Fig. 17. — Tableaux d'isochromatiques dans le cas des éprouvettes à armatures symétriques arrachées.

Fig. 18. — Eprouvette à armature continue, soumise à la traction : *a* — schéma ; *b* — isostatiques ; *c* — isochromatiques.

Fig. 19. — Adhérence et contrainte dans l'armature continue d'une éprouvette soumise à la traction.

Fig. 20. — Eprouvettes soumises à la traction, avec une fissure au milieu : *a* — isostatiques ; *b* — isochromatiques.

Fig. 21. — Adhérence et contrainte dans l'armature d'une épruvette avec fissure et soumise à la traction.

Fig. 22. — Etendue de la zone d'influence de l'armature soumise à la traction.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Spier, R. Iangguth, *Spannungsoptische untersuchungen von wandecheiben.* Wiss Zeischr. d. Hochschule f. Architektur u. Bauwesen, Weimar, *1* (1955).
2. E. Zellerer, *Spannungsoptische untersuchungen des 7,5 m hohere Sprungturmes im Münchener Horbad.* Die Bautechnik, Juli (1954).
3. E. Zellerer, Hanns Thiel, *Über des Kraftfeld einer Stahlbetonwand mit einer Tüöffoung unter unsymmetrisch wirkender Einzellast.* Beton u. Stahlbetonbau, Dezember (1956).
4. R. G. Boiten, *Photoelastic investigation of armoured models with an application to bending bars with cracks on the tensile side.* Appl. Sci. Res. Section A, **5** (1955).
5. A. C. Vasconcelos, *Spannungsoptische untersuchungen der Spannungsverteilung in Stahlbetonbauteilen.* Diss. München, 1955.
6. H. H. Racke, *Untersuchungen an photoelastischen Spannbetonmodellen.* Schweizer — Archiv, Mai (1956).

— *Die Spannungsverteilung im webeitragungsbereich von Spannbett — Balken ermittelt an photoelastischen Modellen mit unterschiedlicher Exzentrität der Spannghiedlage.* Schweizer Archiv. Juni (1956).

8. M. Arcan, F. Stoenescu, R. Mihail, *Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate „Dinox F 110”.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4* (1957).
9. R. Hiltscher, R. Müller, *Bemessung der Bewerung von Stahlbetonkonstruktionen mit Hilfe des spannungsoptischen Modellversuches.* Beton und Stahlbetonbau, Nov. (1959).
10. M. Arcan, M. Tannenbaum, *Unele aspecte ale problemei fisurării betonului armat studiate fotoelastic.* Studii şi cercetări de mec. aplic., *2* (1960) (acest volum, p. 397).

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

DESPRE TURTIREA ELASTICĂ A BURLANELOR DE SONDĂ SUB ACȚIUNEA PRESIUNII EXTERIOARE 1)

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU 2)

Deși ne referim la țevi în general, avem în vedere în special coloanele de burlane, care constituie cheltuiala cea mai importantă în forajul sondei din cauza greutății lor considerabile. Adîncimile tot mai mari la care se sapă sondele, au condus pe de o parte la fabricarea burlanelor din ce în ce mai groase, la ridicarea rezistenței de curgere a oțelului; iar pe de altă parte, la mărirea rigurozității în calcul, pentru a reduce cît mai mult rezistența suplimentară, introdusă prin coeficientul de siguranță. Cu alte cuvinte, fiind constrînși să reducem coeficientul de siguranță pe măsură ce crește adîncimea sondei, trebuie totuși să obținem siguranța exploatării prin mărirea preciziei în calcul.

Rezistența coloanei este coborîtă din cauza instabilității pereților supuși la presiune exterioară. Să reluăm în considerație această solicitare.

Ne referim la burlane cu secțiune circulară.

Folosim ipoteza secțiunilor plane (Bernoulli), rămînînd plane și după deformație, ipoteză care se apropie de realitate și pentru bare curbe, după cum s-a arătat [1] prin încercări.

Considerăm că fibra neutră a barelor curbe, solicitate la încovoiere pură, nu trece prin centrul de greutate al secțiunii [1], [2].

La studiul barelor curbe [3], [4], [5] se arată că

$$\frac{N}{E} = I_0 \frac{\varepsilon_0}{r_0} + I_1 \frac{\omega}{r_0^2}, \quad \frac{M}{E} = I_1 \frac{\varepsilon_0}{r_0} + I_2\, \omega, \tag{1}$$

în care

$$I_0 = \int_A \frac{r_0^3}{r_0 - y}\, dA, \quad I_1 = \int_A \frac{r_0^2\, y}{r_0 - y}\, dA, \quad I_2 = \int_A \frac{r_0\, y^2}{r_0 - y}\, dA, \tag{2}$$

---

1) Comunicare prezentată la sesiunea de comunicări I.M.A. din 23 aprilie 1959.

2) Institutul de balneologie și fizioterapie.

cu notațiile (fig. 1 *a*)

M — momentul încovoietor din secțiunea considerată,
N — forța normală pe secțiunea considerată,
A — aria secțiunii considerate,
E — modulul de elasticitate,
ω — încovoierea unitară,
ε_0 — alungirea unitară a fibrei neutre de încovoiere pură,
r_0 — raza de curbură a fibrei neutre de încovoiere pură,
y — depărtarea unei fibre de fibra neutră de încovoiere pură.

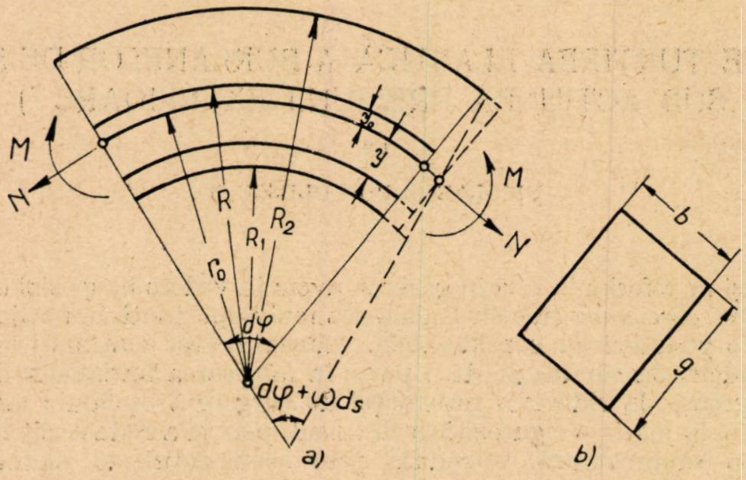


Fig. 1

Între expresiile din (2) avem relațiile

$$I_0 = I_1 + r_0^2 A, \quad I_2 = I_1 - r_0 S_z \tag{3}$$

în care

$$S_z = \int_A y\,dA. \tag{4}$$

În cazul încovoierii pure avem condiția

$$N = 0 \text{ şi deci } \varepsilon_0 = 0, \tag{5}$$

care introduse în prima relație din (1) ne dă

$$I_1 = 0, \tag{6}$$

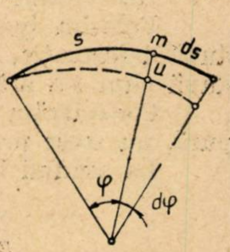


Fig. 2

cu care se calculează poziția fibrei neutre.

Cu condiția (6) ultimele relații din (1) și (3) devin

$$M = EI_2\,\omega, \quad I_2 = -r_0 S_z. \tag{7}$$

La studiul deformației arcului (fig. 2) se arată că

$$\omega = -d^2 u/ds^2 \tag{8}$$

unde u — deplasarea unui punct m la distanța s prin deformarea arcului.

Înlocuind expresia (8) în prima relație (7), se obține ecuația diferențială a fibrei neutre deformate

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{M}{E I_2} = 0, \tag{9}$$

diferită de ecuația

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{M}{E I}\left(1 - \frac{u}{r_0^2}\right) = 0, \tag{10}$$

care se folosește în general [2], [3]. Termenul al doilea din paranteză apare din a doua ecuație din (1), numai pentru $I_1 \neq 0$.

Condiția de instabilitate a arcului se obține (fig. 3) pentru

$$M = Fu. \tag{11}$$

Integrala ecuației (9), ținînd seama de (11), este

$$u = A \cos \alpha s + B \sin \alpha s, \tag{12}$$

în care

$$\alpha = F/E I_2. \tag{13}$$

Constantele A și B se determină punînd condițiile la extremitatea A și la mijlocul C al arcului AB, unde $u = 0$ și deci

$$A = 0, \quad B \sin \frac{\alpha \varphi r_0}{2} = 0. \tag{14}$$

Condiția de flambaj a arcului, care satisface ultima relație (14), este

$$\alpha \varphi r_0 = 2 k \pi \tag{15}$$

și ținînd seama de (13)

$$\frac{F}{E I_2} = \left(\frac{2 k \pi}{\varphi r_0}\right)^2. \tag{16}$$

În cazul unui inel, turtirea cea mai probabilă făcîndu-se după două loburi (fig. 4), avem

$$\varphi = \pi \text{ și } k = 1 \tag{17}$$

și relația (16) devine

$$F = 4 E I_2/r_0^2. \tag{18}$$

Observăm că relația (17) este diferită de cunoscuta formulă M. Levy

$$F = 3\,E\,I/r_0^2, \tag{19}$$

în care

$$I = \int_A y^2\,d\,A. \tag{20}$$

Un burlan cu diametrul exterior D, de lungime b și cu grosimea peretelui g, sub acțiunea presiunii exterioare p, poate fi asimilat cu inelul considerat.

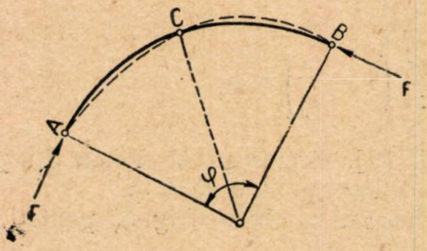


Fig. 3

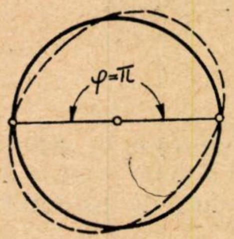


Fig. 4

Prin secționare longitudinală, apare forța de legătură F normală pe secțiune, dată de expresia

$$F = p\,D\,b/2 \tag{21}$$

și relația (18) devine

$$p = 8\,E\,I_2/D\,b\,r_0^2. \tag{22}$$

Calculul expresiei I_2 din (2) se rezolvă, dezvoltînd în serie (geometrică) expresia

$$\frac{1}{1 - y/r_0} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{y}{r_0}\right)^i. \tag{23}$$

Dacă secțiunea este dreptunghiulară, expresia (2) devine (fig. 1*b*) :

$$I_2 = b\left|\,y^3\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3+j}\left(\frac{y}{4\,r_0}\right)^j\right|_{-\left(\frac{g}{2}+y_0\right)}^{\frac{g}{2}-y_0}, \tag{24}$$

în care y_0 este distanța fibrei neutre la încovoiere pură de centrul de greutate al secțiunii.

Dezvoltînd expresia (24) se obține

$$\frac{I_2}{b}=\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i\,r_0^{i-3}}\left[\left(\frac{g}{2}-y_0\right)^i-\left(-\frac{g}{2}-y_0\right)^i\right], \tag{25}$$

care se poate pune sub forma

$$\frac{I_2}{b\,r_0^3}=\ln\frac{r_0+y_0+g/2}{r_0+y_0-g/2}-\frac{g}{r_0}\left(1-\frac{y_0}{r_0}\right). \tag{26}$$

La același rezultat se poate ajunge pentru secțiuni dreptunghiulare, observînd că

$$I_0=r_0^3\,b\int_A\frac{dy}{r_0-y}=-\,r_0^3\,b\,\Big|\ln\left(r_0-y\right)\Big|_{-\left(\frac{g}{2}+y_0\right)}^{\frac{g}{2}-y_0}. \tag{27}$$

Ținînd seama de relațiile (3), (4), (33) rezultă

$$\frac{I_0}{b\,r_0^3}=\ln\frac{r_0+y_0+g/2}{r_0+y_0-g/2} \tag{28}$$

$$\frac{I_1}{b\,r_0^3}=\ln\frac{r_0+y_0+g/2}{r_0+y_0-g/2}-\frac{g}{r_0} \tag{29}$$

și se regăsește relația (26).

Ținînd seama că :

$$R=r_0+y_0,\quad R_i=R-\frac{g}{2},\quad R_e=R+\frac{g}{2},\quad D=2\,R_e \tag{30}$$

în care (fig. 1 *a*)

R — raza de curbură a fibrei care trece prin centrul de greutate al secțiunii

R_i — raza de curbură a conturului interior,

R_e — raza de curbură a conturului exterior, relația (26) devine

$$\frac{I_2}{b\,r_0}=r_0^2\ln\frac{R_e}{R_i}-g\left(r_0-y_0\right). \tag{31}$$

Dacă y/r_0 este îndeajuns de mic ca să ne mărginim la primul termen al seriei (24) se obține expresia aproximativă

$$I_2\approx\frac{b\,g}{2}\left[\left(\frac{g}{2}\right)^2+3\,y_0^2\right]. \tag{32}$$

Momentul static S_z se calculează cu relația (4)

$$S_z=-\,b\,g\,y_0. \tag{33}$$

Introducînd expresiile (31), (33) în ecuația (7), se determină poziția fibrei neutre la încovoiere pură, astfel

$$\frac{g}{r_0} = \ln\frac{R_e}{R_i},\quad y_0 = R - g/\ln\frac{R_e}{R_i}. \tag{34}$$

Făcînd înlocuirile date de (33), (34) expresia (7) devine

$$\frac{I_2}{b\,r_0^2} = R\ln\frac{R_e}{R_i} - g \tag{35}$$

și introducînd în (22) se obține

$$p = 4\,E\left[\left(1 - \frac{g}{D}\right)\ln\frac{1}{1 - 2\,g/D} - \frac{2\,g}{D}\right]. \tag{36}$$

Dacă se ține seama de lungimea burlanelor, se înlocuiește rigiditatea EI cu rigiditatea cilindrică $E^{\star}I$ dată de formula (37)

$$E^{\star} = E/(1 - \mu^2), \tag{37}$$

și relația (36) devine

$$p = 4\,E^{\star}\left[\left(1 - \frac{g}{D}\right)\ln\frac{1}{1 - 2\,g/D} - \frac{2\,g}{D}\right]. \tag{38}$$

Relația (38) se poate pune și sub forma

$$p = 4\,E^{\star}\left[\frac{D/g - 1}{D/g}\ln\frac{D/g}{D/g - 2} - \frac{2}{D/g}\right], \tag{39}$$

diferită esențial [6] de formula asemănătoare

$$p = 2\,E^{\star}\frac{3\,\lambda}{D/g},\quad \lambda = -1 + \frac{D/g - 1}{2}\ln\frac{D/g}{D/g - 2}. \tag{40}$$

Dacă folosim pentru I_2 expresia aproximativă (32) și facem aceleași simplificări, se obțin, în mod analog, relațiile aproximative

$$y_0 \approx \frac{g^2}{12\,r_0},\quad I_2 \approx \frac{b\,g^3}{12} = I,\quad r_0 \approx \frac{D - g}{2}. \tag{41}$$

Înlocuind expresiile (41) în (22), cu aceeași observație în privința rigidității, se obține o expresie aproximativă $p^{\star}$ a presiunii critice

$$p^{\star} = \frac{8\,E^{\star}\,g^3}{3\,D\,(D - g)^2} = \frac{8}{3}E^{\star}\left(\frac{g}{D}\right)^3 S^{\star}, \tag{42}$$

unde

$$S^{\star} = 1/(1 - g/D)^2. \tag{43}$$

Formula (38) se poate pune sub forma

$$p = 4\, E^{\star}\, \psi, \tag{44}$$

în care

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \ln \frac{1}{1 - 2\, g/D} - \frac{2\, g}{D}, \tag{45}$$

se calculează cu ajutorul tabelelor, ceea ce nu este întotdeauna comod, mai ales că necesită numere mari sau zecimale multe, întrucît ultimul termen are o valoare apropiată de aceea a primului termen.

Dezvoltînd în serie logaritmul neperian, relația (45) devine

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i} - \frac{2g}{D}. \tag{46}$$

Scăzînd ultimul termen din primul termen al seriei, se obține

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i} - \frac{1}{2} \left(\frac{2g}{D}\right)^{2},$$

iar prin repetarea operației, succesiv

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i} - \frac{1}{2 \cdot 2} \left(\frac{2g}{D}\right)^{3},$$

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 2}\right) \left(\frac{2g}{D}\right)^{3} - \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{2g}{D}\right)^{4},$$

$$\psi = \left(1 - \frac{g}{D}\right) \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \left(\frac{2g}{D}\right)^{4} - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2g}{D}\right)^{5},$$

și așa mai departe, se obține în cele din urmă,

$$\psi = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{2\,(i-1) - i}{2\,(i-1)\, i} \left(\frac{2g}{D}\right)^{i}, \tag{47}$$

Făcînd înlocuirea

$$j = i - 3 \tag{48}$$

expresia precedentă se poate pune sub forma

$$\psi = \frac{2}{3} \left(\frac{g}{D}\right)^{3} S \tag{49}$$

în care

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{6\,(j+1)}{(j+2)\,(j+3)} \left(\frac{2g}{D}\right)^{j}, \tag{50}$$

sau

$$S = 1 + \frac{2g}{D} + 0{,}9\left(\frac{2g}{D}\right)^{2} + 0{,}8\left(\frac{2g}{D}\right)^{3} + 0{,}714\left(\frac{2g}{D}\right)^{4} + \ldots$$

Seria S, fiind majorată de progresia geometrică, pentru $2g/D < 1$ este convergentă. Pentru burlanele de sondă obişnuite, avem $g/D = 0{,}1 \ldots . 0{,}02$ şi deci seria S devine repede convergentă.

Din relaţiile (45) şi (49) rezultă

$$S = \frac{3}{2}\left(\frac{D}{g}\right)^{2}\left[\left(\frac{D}{g} - 1\right)\ln\frac{D/g}{\frac{D}{g} - 2} - 2\right]. \tag{51}$$

Avînd însă în vedere seria (50), suma S se mai poate pune sub forma

$$S = S_j + R_j \tag{52}$$

în care : S_j este suma a primilor j termeni,
R_j este restul respectiv.

În mod analog se poate exprima şi suma progresiei geometrice infinită S_g

$$S_g = S_{gj} + R_{gj}, \tag{53}$$

unde

$$S_{gj} = \frac{1 - (2\,g/D)^{j-1}}{1 - 2\,g/D}, \tag{54}$$

iar pentru $j = \infty$

$$S_g = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2g}{D}\right)^{j} = \frac{1}{1 - 2\,g/D} \tag{55}$$

şi ţinînd seama de (54) şi (55) relaţia (53) devine :

$$R_{gj} = S_g\,(2\,g/D)^{j-1}. \tag{56}$$

Observăm că

$$S_j < S_{gj}, \quad R_j < R_{gj} \tag{57}$$

şi avînd în vedere (55), (56)

$$R_j < (2\,g/D)^{j}/(1 - 2\,g/D). \tag{58}$$

În locul relației (51) este uneori mai comod de a folosi relația (50). Se calculează valoarea restului R_j corespunzătoare aproximației dorite, cu relația (58) și se determină j la care se limitează numărul termenilor din seria infinită (50).

Un mijloc mai expeditiv și cu un rezultat apropiat este acela de a folosi relațiile (55) sau (56) ale progresiei geometrice limitată la un număr de j termeni, încît suma progresiei să rămînă în vecinătatea valorii asimptotice a seriei căutate. Observăm că dacă suma progresiei geometrice limitată rămîne inferioară seriei căutate, progresia geometrică aproximează mai bine valoarea asimptotică decît seria noastră limitată la același număr de termeni

Tabela

D/g g/D	10 0,1	20 0,05	30 0,0333	40 0,025	50 0,020
S_{g1}	1	1	1	1	1
S_{g2}	1,2	1,1	1,0667	1,05	1,04
S_{g3}	1,24				
S	1,24386	1,10988	1,07073	1,05236	1,04149
S_{g3}		1,11	1,07115	1,0525	1,0416
S_{g4}	1,248	1,111	1,07145	1,05262	1,04166
$S_{g\infty}$	1,25	1,11111	1,07181	1,05263	1,04167
$S^\star$	1,23457	1,10803	1,0702	1,05194	1,04123
S_{g3}/S	0,99690	1,00011	1,00039	1,00014	1,00011
$S^\star/S$	0,99253	0,99833	0,99950	0,99960	0,99975

Urmărind cifrele din tabela alăturată, se observă că numărul j de termeni, la care limităm suma progresiei geometrice, pentru a rămîne sub valoarea asimptotică a seriei căutate, este de doi termeni pentru $g/D < < 0{,}1$ și de trei termeni pentru $g/D > 0{,}1$. Mai observăm că valoarea cea mai apropiată se obține în întregul interval $g/D = 0{,}1 \ldots 0{,}02$ limitînd progresia la trei termeni. Prin urmare pentru intervalul menționat o aproximație bună se obține cu formulele (54), (55) pentru $j = 3$, care devin

$$S_{g3} = 1 + \frac{2g}{D} + \left(\frac{2g}{D}\right)^2, \tag{59}$$

sau

$$S_{g3} = \frac{1}{1-2g/D} - R_{g3} = \frac{1-(2g/D)^3}{1-2g/D}, \tag{60}$$

dintre care, prima (59) este mai comodă, dacă nu ne interesează valoarea restului, iar altfel cea din urmă (60).

Mai observăm că raportul $S^\star/S$ diferă sensibil de unitate pentru burlanele groase.

O determinare expeditivă a sumei S se poate face prin interpolare între valorile date numeric în tabela alăturată, sau mai bine cu ajutorul diagramei din figura 5.

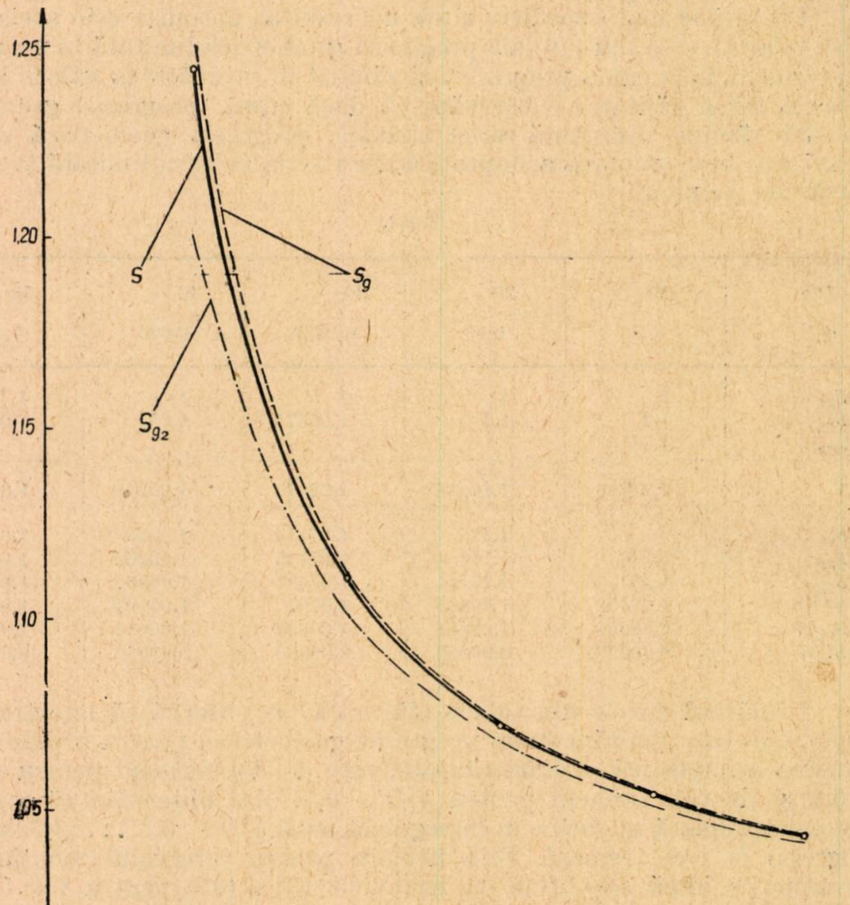


Fig. 5

După cum se vede şi pe diagramă, S majorează S_{g2} şi este majorat de S_g încît luînd una din aceste valori, eroarea este mai mică decît diferenţa $S_g - S_{g2}$.

Curbele S_{g3} şi $S^\star$ sînt aşa de apropiate de S, încît nu s-au putut trasa distinct pe diagramă.

Dacă păstrăm numai primul termen al seriei (50), avem $S = 1$ şi relaţiile (49) şi (44) devin

$$\psi \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{g}{D}\right)^3, \qquad p \geqslant \frac{8}{3} E^\star \left(\frac{g}{D}\right)^3, \tag{61}$$

formula ultimă comparabilă cu (42).

Pornind de la relaţia (19) s-a ajuns [6], [7], [8] la cunoscuta formulă

$$\bar{p} = \frac{2\, E^\star\, g^3}{D\,(D-g)^2}, \tag{62}$$

adoptată de A.P.I. [9].

Comparînd formula (42) cu (62), observăm că

$$p \approx \frac{4}{3}\, \bar{p}, \tag{63}$$

adică presiunea exterioară critică este în realitate mai mare cu cel puţin o treime decît valoarea dată de vechea formulă (62). Diferenţa provine din faptul că fibra neutră la încovoiere pură nu trece prin centrul de greutate al secţiunii, cum a fost considerat la stabilirea vechei formule (62). Astfel se explică cum s-a ajuns din experienţă la coeficienţi de siguranţă atît de mici, sub 1, 2 de exemplu, faţă de coeficientul de siguranţă real de 1,5.

Primită la redacţie la 17 iulie 1959

ОБ УПРУГОМ СПЛЮЩИВАНИИ ОБСАДНЫХ ТРУБ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ДАВЛЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Исследуется упругое сплющивание обсадной трубы, учитывая, что нейтральное волокно не проходит через центр тяжести сечения. Устанавливается дифференциальное уравнение (9) деформированного нейтрального волокна дуги, а также и условие продольного изгиба (18). Переходя к обсадным трубам, автор приходит к логарифмическому, выражению (38) внешнего критического давления, не всегда удобному для использования. Автор предлагает формулу, разложенную в ряды (44) с (49), (50), и для ее использования рекомендует алгорифм, причем степень приближения оценивается формулой остатка (58).

Предлагается также численная и графическая интерполяция с использованием прилагаемых к работе таблицы и графиков, а также и приближенных формул (49) с (59) или (60), (42) и (62).

SUR L'INSTABILITÉ ÉLASTIQUE DES PAROIS DES TUBES DE SONDES SOUS L'ACTION DE LA PRESSION EXTÉRIEURE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'instablilité élastique des parois des tubes, en tenant compte du fait que la fibre neutre ne passe pas par le centre de gravité de la section. On établit l'équation différentielle (9) de la fibre neutre déformée de l'arc, ainsi que la condition de flambage (18).

En passant aux tubes, on arrive à une expression logarithmique (38) de la pression extérieure critique, qui n'est pas toujours d'un emploi commode. L'auteur propose une formule exprimée par des série (44) avec (49), (50), et recommande un algorithme convenable, en précisant son degré d'approximation par la formule du reste (58).

Il propose en outre l'interpolation numérique et graphique, à l'aide du tableau et du diagramme donné en annexe, ainsi que les formules approximatives (49) avec (59) ou bien avec (60), (42) et (62).

BIBLIOGRAFIE

1. N. M. BELEAEV, *Rezistenţa materialelor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956, 737.
2. S. TIMOSHENKO, *Strength of Materials*. New York, 1956, Part. I, 362 şi 235, part. II, 186.
3. GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor*. Ed. a II-a, Impr. Naţională, Bucureşti, 1940, 485.
4. C. C. TEODORESCU, *Curs de rezistenţa materialelor*. Imprimeria CFR, Bucureşti, 1945.
5. Gh. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*. Ed. Inst. politehnic Bucureşti, 1951, 405.
6. W. O. CLINEDINST, *A Rational Expression for the Critical Collapsing Pressure for Pipe under External Pressure Drilling and Production Practice*. API 1939, 383.
7. N. S. PÎRVULESCU, *Calculul burlanelor de tubaj*. Petrol şi Gaze, *6*, 4 (1952).
8. — *Manualul inginerului petrolist*. 41. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, 359.
9. * * * A.P.I. Bul. 5 C 2 on Performance Properties of Casing and Tubing, mai 1957.

STUDII

REZISTENŢA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

ECUAŢIILE BARELOR SUBŢIRI ELASTICE. I

DE

HOREA SANDI [1]

INTRODUCERE

Obiectul lucrării este prezentarea sub o formă generală şi sistematizată a ecuaţiilor barelor subţiri elastice care au drept axă o curbă strîmbă arbitrară, suficient de regulată.

Calculele sînt conduse pe baza cîtorva ipoteze simplificatoare : se consideră numai bare subţiri (avînd lungimea maximă a segmentelor conţinute în secţiunea transversală mult mai mică decît razele de curbură şi torsiune), se consideră că deplasările punctelor barei sînt mici, se admite conservarea secţiunii transversale prin deformarea barei şi se presupune că materialul din care este alcătuită bara este omogen, izotrop şi liniar elastic, nedistingîndu-se energia de deformare şi constantele elastice statice de cele dinamice.

Drept sistem de referinţă în vederea studiului curbei strîmbe au fost utilizate nu lungimea arcului de curbă şi triedrul principal al lui Frenet, ci o coordonată arbitrară, z, vectorii tangenţi unitar, covariant şi contravariant şi doi vectori arbitrari, neparaleli, normali cu curbă, împreună cu reciprocii lor. Alegerea acestor mărimi de referinţă a fost dictată pe de o parte de necesitatea studiului alungirii curbei prin deplasarea punctelor sale (care nu conservă, în general, elementul de arc) şi, pe de altă parte, de posibilitatea necoincidenţei axelor principale de inerţie cu normala principală şi binormala.

În lucrare sînt prezentate relaţii geometrice ale curbei strîmbe şi barei curbe strîmbe înainte şi după deformare, relaţii referitoare la torsorii forţelor care acţionează bara şi la funcţionalele energetice, ecuaţii liniare de mişcare şi ecuaţii neliniare.

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC) Bucureşti.

Ecuațiile generale deduse în cursul lucrării în ipotezele mai sus amintite pot fi particularizate cu ușurință pentru diversele cazuri survenite în practică, eliminînd calculele necesare în vederea formulării problemelor. Utilitatea lor se face simțită în special în probleme de dinamică liniară și stabilitate, unde stabilirea ecuațiilor este uneori anevoioasă. Raționamentul utilizat în vederea deducerii ecuațiilor de instabilitate în primă aproximație este general, putînd fi utilizat și pentru studiul altor tipuri de corpuri subțiri fără a fi nevoie de un studiu special al echilibrului pe forma deformată a corpului.

În literatura consultată nu am întîlnit o prezentare generală, în ipotezele admise mai sus, a teoriei barelor elastice. Modul de dezvoltare al calculelor din prezenta lucrare este asemănător celui din [4] și [8], însă abordează un număr mai mare de probleme, ajungînd la formularea ecuațiilor generale diferențiale și integrale de mișcare și instabilitate și la expresii generale pentru funcționalele problemelor barei.

I. RELAȚII GEOMETRICE ALE CURBEI STRÎMBE ÎNAINTE ȘI DUPĂ DEFORMARE

1. Fie o curbă strîmbă dată prin ecuația vectorială

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}\,(z), \tag{1.1}$$

care definește vectorul de poziție , în funcție de un parametru z, ca funcție regulată de clasa C^3, avînd prima derivată nenulă.

Derivata vectorului de poziție în raport cu z este un vector tangent la curbă, dat de ecuația1)

$$\bar{\rho}_z = \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \tag{1.2}$$

Pentru elementul de arc în lungul curbei și mărimile legate de metrică există relațiile

$$ds^2 = d\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}_z^2\, dz^2 = a_{zz}\, dz^2 \tag{1.3}$$

$$a_{zz} = \bar{\rho}_z^{2}, \quad a_z = \sqrt{a_{zz}} = |\,\bar{\rho}_z\,| = \frac{ds}{dz}, \quad a^{zz} = \frac{1}{a_{zz}}, \quad a^z = \frac{1}{a_z}, \quad \bar{\rho}^z = a^{zz}\,\bar{\rho}_z,$$

care conduc, pentru vectorul tangent la curbă, la relațiile

$$\bar{\tau} = \frac{d\,\bar{\rho}}{ds} = a^z \bar{\rho}_z = a_z \bar{\rho}^z\,. \tag{1.4}$$

Proprietățile atribuite relației (1.1) fac ca arcul s să fie o funcție netedă și strict crescătoare de parametrul z.

---

1) Indicele z va fi considerat ca indice fix, indicii i j, k ... vor lua valorile 1, 2, iar indicii a, b, c ... vor lua valorile 1, 2, 3.

Fie doi vectori, $\bar{m}_i(z)$ normali la curbă, regulaţi de clasa C^1, nenuli şi liniar independenţi, împreună cu reciprocii lor în triedrul $(\bar{\tau}, \bar{m}_i)$, $\bar{m}^i(z)$. Vectorii $\bar{m}_i$ şi $\bar{m}^i$ vor satisface relaţiile

$$\bar{\tau}\bar{m}_i = 0, \quad \bar{m}_i\bar{m}_j = p_{ij}; \quad p = \text{det.}\,(p_{ij}) \neq 0, \quad p^{ij}\,p_{jk} = \delta^i_k;\ \bar{m}^i = $$
$$= p^{ij}\bar{m}_j, \quad \bar{m}^i\bar{m}^j = p^{ij}, \quad \bar{m}^i\bar{m}_j = \delta^i_j. \tag{1.5}$$

Pentru produsele vectoriale ale vectorilor din (1.5) există relaţiile

$$\begin{aligned}
&\bar{m}_i \times \bar{m}_j = c_{ij}\,\bar{\tau}, \quad c_{ij} + c_{ji} = 0, \quad c_{12} = \sqrt{p}\\
&\bar{m}^i \times \bar{m}^j = c^{ij}\,\bar{\tau}, \quad c^{ij} + c^{ji} = 0, \quad c^{ij} = p^{ik}p^{jl}\,c_{kl}, \quad c^{12} = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad c^{ij}\,c_{ik} = \delta^j_k\\
&\bar{m}_i = c_{ij}\,\bar{m}^j\,x\bar{\tau}, \quad \bar{\tau}x\bar{m}_i = c_{ij}\,\bar{m}^j, \quad p^{ij} = c^{ik}c^{jl}\,p_{kl}\\
&\bar{m}^i = c^{ij}\,\bar{m}_j\,x\bar{\tau}, \quad \bar{\tau}x\,\bar{m}^i = c^{ij}\,\bar{m}_j.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

În sistemul de referinţă format de vectorii tangenţi şi normali la curbă, un vector oarecare, $\bar{V}$, se poate reprezenta sub mai multe forme, ca

$$\begin{aligned}
&\bar{V} = V^z\bar{\rho}_z + V^i\bar{m}_i = V_z\bar{\rho}^z + V_i\,\bar{m}^i = V\bar{\tau} + V^i\bar{m}_i,\\
&V^z = \bar{V}\,\bar{\rho}^z, \quad V_z = \bar{V}\,\bar{\rho}_z, \quad V = \bar{V}\bar{\tau}, \quad V^i = \bar{V}\bar{m}^i, \quad V_i = \bar{V}\bar{m}_i.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Derivata a doua în raport cu z a vectorului $\bar{\rho}$ este un vector care se poate reprezenta sub o formă asemănătoare cu (1.7)

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{zz} = \frac{d\bar{\rho}_z}{dz} = \frac{d^2\bar{\rho}}{dz^2} = \Gamma_z\bar{\rho}_z + a_{zz}\,b_i\bar{m}^i = a_{zz}\,(\Gamma_z\,\bar{\rho}^z + b_i\bar{m}^i),\\
&\Gamma_z = \frac{1}{2}\,a^{zz}\,\frac{da_{zz}}{dz} = a^z\,\frac{da_z}{dz} = -\,a_z\,\frac{da^z}{dz} = -\frac{1}{2}\,a_{zz}\,\frac{da^{zz}}{dz},\\
&b^i = a^{zz}\,\bar{\rho}_{zz}\bar{m}^i, \quad b_i = a^{zz}\bar{\rho}_{zz}\bar{m}_i = p_{ij}\,b^j,\\
&\bar{\rho}^z_z = \frac{d\bar{\rho}^z}{dz} = -\,\Gamma_z\,\bar{\rho}^z + b_i\,\bar{m}^i = -\,a^{zz}\,\Gamma_z\,\bar{\rho}_z + b^i\,\bar{m}_i,\\
&\frac{d\bar{\tau}}{dz} = \frac{d}{dz}\,(a^z\,\bar{\rho}_z) = a_z\,b_i\,\bar{m}^i = a_z\,b^i\,\bar{m}_i.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Relaţiile de ortogonalitate (1.5) dau prin derivare

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{zz}\,\bar{m}_i + \bar{\rho}_z\,\bar{m}_{iz} = 0, \quad \bar{\rho}^z_z\bar{m}_i + \bar{\rho}^z\,\bar{m}_{iz} = 0, \quad \left(\bar{m}_{iz} = \frac{d\bar{m}_i}{dz}\right),\\
&\bar{\rho}_{zz}\,\bar{m}^i + \bar{\rho}_z\,\bar{m}^i_z = 0, \quad \bar{\rho}^z_z\,\bar{m}^i + \bar{\rho}^z\,\bar{m}^i_z = 0, \quad \left(\bar{m}^i_z = \frac{d\bar{m}^i}{dz}\right),\\
&b_i = \bar{\rho}^z_z\,\bar{m}_i = -\,\bar{\rho}^z\,\bar{m}_{iz}, \quad b^i = \bar{\rho}^z_z\,\bar{m}^i = -\,\bar{\rho}^z\,\bar{m}^i_z,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

astfel că rezultă pentru derivatele lui $\overline{m}_i$ relațiile

$$\overline{m}_{iz} = - b_i \bar{\rho}_z + S^j_{iz} \overline{m}_j = - b_i \bar{\rho}_z + S_{jiz} \overline{m}^j, \quad S_{jiz} = p_{jk} S^k_{iz} = \\ = \overline{m}_j \overline{m}_{iz}, \quad S^k_{iz} = \overline{m}^k \overline{m}_{iz} \tag{1.10}$$

care conduc, pentru derivatele lui p_{ij}, la

$$p_{ijz} = \frac{dp_{ij}}{dz} = \overline{m}_i \overline{m}_{jz} + \overline{m}_j \overline{m}_{iz} = S_{ijz} + S_{jiz}, \tag{1.11}$$

iar pentru $\overline{m}_{iz}$ la relațiile

$$\overline{m}_{iz} = - b_i \bar{\rho}_z + S^j_{iz} \overline{m}_j = \frac{d}{dz} (p_{ik} \overline{m}^k) = p_{ikz} \overline{m}^k + p_{ik} \overline{m}^k_z = \\ = (S_{ikz} + S_{kiz}) \overline{m}^k + p_{ik} \overline{m}^k_z, \tag{1.12}$$

care dau pentru $\overline{m}^i_z$ expresiile

$$\overline{m}^i_z = - b^i \bar{\rho}_z + p^{ik} S^j_{kz} \overline{m}_j - p^{ik} (S_{kjz} + S_{jkz}) \overline{m}^j = - b^i \bar{\rho}_z - S^i_{jz} \overline{m}^j, \tag{1.13}$$

cu verificarea

$$\frac{d\delta^i_j}{dz} = \frac{d (\overline{m}^i \overline{m}_j)}{dz} = \overline{m}^i_z \overline{m}_j + \overline{m}^i \overline{m}_{jz} = - S^i_{jz} + S^i_{jz} = 0. \tag{1.14}$$

Pentru S_{ijz} se poate scrie

$$S_{ijz} = \frac{1}{2} (p_{ijz} - q_{ijz}), \quad p_{ijz} = p_{jiz} \tag{1.15}$$

$$q_{ijz} = - q_{jiz} = S_{jiz} - S_{ijz} = \overline{m}_j \overline{m}_{iz} - \overline{m}_i \overline{m}_{jz} = c_{ij} c^{kl} \overline{m}_{kz} \overline{m}_l = c_{ij} c^{kl} S_{lkz}.$$

Ținînd seama de formulele de reprezentare (1.7) şi de formulele de derivare (1.8), (1.10), (1.13), derivata unui vector $\overline{V}$ în raport cu z va avea expresiile

$$\frac{d\overline{V}}{dz} = \frac{d}{dz} (V^z \bar{\rho}_z + V^i \overline{m}_i) = \frac{d}{dz} (V_z \bar{\rho}^z + V_i \overline{m}^i) = \frac{d}{dz} (V \bar{\tau} + V^i \overline{m}_i) = \\ = \left(\frac{dV^z}{dz} + \Gamma_z V^z - b_i V^i \right) \bar{\rho}_z + \left(\frac{dV^i}{dz} + S^i_{jz} V^j + a_{zz} b^i V^z \right) \overline{m}_i = \\ = \left(\frac{dV_z}{dz} - \Gamma_z V_z - a_{zz} b^i V_i \right) \bar{\rho}^z + \left(\frac{dV_i}{dz} - S^j_{iz} V_j + b_i V_z \right) \overline{m}^i = \\ = \left(\frac{dV}{dz} - a_z b_i V^i \right) \bar{\tau} + \left(\frac{dV^i}{dz} + S^i_{jz} V^j + a_z b^i V \right) \overline{m}_i . \tag{1.16}$$

Dacă se aplică vectorului $\overline{W} = W\bar{\tau} + c_{ij} W^j \overline{m}^i$ formula de derivare (1.16) se obține

$$\frac{d\overline{W}}{dz} = \frac{d}{dz}(W\bar{\tau} + c^{ij} W_j \overline{m}_i) = \left(\frac{dW}{dz} - a_z b_i c^{ij} W_j\right)\bar{\tau} + \left[\frac{d}{dz}(c^{ij} W_j) + \right.$$

$$\left. + S^i_{kz} c^{kj} W_j + a_z b^i W\right]\overline{m}_i = \left(\frac{dW}{dz} - a_z b^j c_{ji} W^i\right)\bar{\tau} + \tag{1.16'}$$

$$+\left(\frac{dW^i}{dz} + S^i_{jz} W^j + a_z b_j c^{ji} W\right)\overline{m}_i \times \bar{\tau}$$

deoarece

$$\left[\frac{d}{dz}(c^{ij} W_j) + S^i_{kz} c^{kj} W_j + a_z b^i W\right]\overline{m}_i = \left[c_{il}\frac{d}{dz}(c^{ij} W_j) + \right.$$

$$\left. + c_{il} S^i_{kz} c^{kj} W_j + a_z c_{il} b^i W\right]\overline{m}^l \times \bar{\tau} = \left[\frac{dW_l}{dz} + c_{il}\left(\frac{dc^{ij}}{dz} + S^i_{kz} c^{kj}\right) W_j + \right.$$

$$\left. + a_z c_{il} b^i W\right]\overline{m}^l \times \bar{\tau} = \left[\frac{dW_i}{dz} - S^j_{iz} W_j + a_z b^j c_{ji} W\right]\overline{m}^i \times \bar{\tau} = \left[\frac{dW^i}{dz} + S^i_{jz} W^j + \right.$$

$$\left. + a_z b_j c^{ji} W\right]\overline{m}_i \times \bar{\tau}$$

$$\text{și} \quad \frac{d(c_{ij} c^{ik})}{dz} = \frac{d(\delta^k_j)}{dz} = 0, \quad \frac{dc_{ij}}{dz} = \frac{d(\overline{m}_i \overline{m}_j \bar{\tau})}{dz} = c_{ik} S^k_{jz} + c_{kj} S^k_{iz}\,.$$

Aplicînd formulele (1.16) vectorilor de referință tangenți, se ajunge la (1.8). Aplicînd însă aceste formule lui $\bar{\rho}_{zz}$ sau $\bar{\rho}^z_z$, se pot obține noi relații, ca

$$\bar{\rho}_{zzz} = \frac{d\bar{\rho}_{zz}}{dz} = \frac{d}{dz}(\Gamma_z \bar{\rho}_z + a_{zz} b^i \overline{m}_i) = \left(\frac{d\Gamma_z}{dz} + \Gamma_z\Gamma_z - a_{zz} b^i b_i\right)\bar{\rho}_z +$$

$$+\left(\frac{db^i}{dz} + S^i_{jz} b^j + 3\, b^i \Gamma_z\right) a_{zz}\overline{m}_i. \tag{1.17}$$

Componenta lui $a^{zz}\bar{\rho}_{zzz}$ ortogonală lui $\bar{\rho}_z$ și $b^i \overline{m}_i$, $\overline{C}_z$, este

$$\overline{C}_z = \left(\frac{db^i}{dz} + S^i_{jz} b^j\right)\overline{m}_i - \left(\frac{db^i}{dz} + S^i_{jz} b^j\right)\frac{b_i}{b_l b^l} b^m \overline{m}_m, \quad \overline{C}_z b_l \overline{m}^l = 0$$

$$b_l b^l \overline{C}_z = b_l\left[b^l \frac{db^k}{dz} - b^k \frac{db^l}{dz} + b^j (b^l S^k_{jz} - b^k S^l_{jz})\right]\overline{m}_k =$$

$$= b_l c^{lk} c_{mn}\left(b^m \frac{db^n}{dz} + b^j b^m S^n_{jz}\right)\overline{m}_k = c_{mn} b^m\left(\frac{db^n}{dz} + S^n_{jz} b^j\right) b_l \bar{\tau} \times \overline{m}^l. \tag{1.18}$$

Dacă se raportează curba la arcul s şi triedrul principal, derivatele vectorului de poziţie se vor particulariza

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau}, \quad \bar{\tau}^2 = 1 \tag{1.19}$$

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = b\bar{\nu} = b_i\,\bar{m}^i, \quad \bar{\nu}^2 = 1, \quad (b)^2 = b_i\,b^i = \frac{1}{R^2}, \quad \bar{\nu} = \frac{b_i\,\bar{m}^i}{\sqrt{b_j b^j}}, \quad b^i =$$

$$= b\,\bar{\nu}\,\bar{m}^i, \quad \bar{\tau}\,\bar{\nu} = 0,$$

$$\frac{d^3\bar{\rho}}{ds^3} = \frac{db}{ds}\bar{\nu} + b\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -(b)^2\bar{\tau} + \frac{db}{ds}\bar{\nu} + bc\bar{\beta}, \quad \bar{\beta} = \bar{\tau}\times\bar{\nu}, \quad c = \frac{1}{R_t},$$

unde b şi c sînt, respectiv, curbura şi torsiunea curbei. Aceste mărimi sînt coeficienţi în relaţiile lui Frenet,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = b\bar{\nu}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{ds} = -b\bar{\tau} + c\bar{\beta}, \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds} = -c\bar{\nu}. \tag{1.20}$$

Dacă se notează $\bar{m}_1 = \bar{m}^1 = \bar{\nu}$, $\bar{m}_2 = \bar{m}^2 = \bar{\beta}$, atunci rezultă

$$b_1 = b^1 = b, \; b_2 = b^2 = 0, \; p_{ij} = \delta_{ij}, \tag{1.21}$$

$$S^1_{1s} = S_{11s} = S^2_{2s} = S_{22s} = 0, \quad S^2_{1s} = S_{21s} = -S^1_{2s} = -S_{12s} = \frac{1}{2}q_{12s} = -\frac{1}{2}q_{21s} = c,$$

$$\bar{C}_s = a^z\,\bar{C}_z = bc\,\bar{\tau}\times\bar{\nu} = bc\,\bar{\beta} = \left(\frac{d^3\bar{\rho}}{ds^3}\,\bar{\beta}\right)\bar{\beta}.$$

Formula de reprezentare (1.7) devine

$$\bar{V} = V\bar{\tau} + V_1\bar{\nu} + V_2\,\bar{\beta}, \tag{1.22}$$

iar formulele de derivare (1.16) dau

$$\frac{d\bar{V}}{ds} = \left(\frac{dV}{ds} - bV_1\right)\bar{\tau} + \left(\frac{dV_1}{ds} + bV - cV_2\right)\bar{\nu} + \left(\frac{dV_2}{ds} + cV_1\right)\bar{\beta}. \tag{1.23}$$

Din relaţiile (1.11) rezultă

$$\frac{d}{ds}(p_{ij}) = \frac{d}{ds}(\delta_{ij}) = 0. \tag{1.24}$$

2. Deplasarea punctelor curbei este echivalentă cu o variaţie a poziţiei acesteia în spaţiu. Curba deformată prin această variaţie va avea ecuaţia

$$\bar{\rho}^\star(z,t) = \bar{\rho}(z) + \Delta\bar{\rho}(z,t) = \bar{\rho}(z) + \bar{u}(z,t)$$

$$\Delta\bar{\rho} = \bar{u} = u_s\bar{\tau} + v^i\,\bar{m}_i = u^z\,\bar{\rho}_z + v^i\,\bar{m}_i = u_z\,\bar{\rho}^z + v_i\,\bar{m}^i \tag{2.1}$$

unde vectorul deplasare $\bar{u}$ va fi presupus regulat şi mic de clasa C^2 (patratele sale şi primelor două derivate sînt neglijabile în raport cu unitatea).

Derivata vectorului de poziţie al curbei deformate va fi

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}_z^{\star} = \bar{\rho}_z + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = (1+\alpha)\,\bar{\rho}_z + \varphi_z^i\,\overline{m}_i\,,\\
&\alpha = a^z \frac{\partial u}{\partial z} - b_i\, v^i, \qquad\qquad (2.2)\\
&\varphi_z^i = a_z\,\varphi^i = \frac{\partial v^i}{\partial z} + S_{jz}^i\, v^j + a_z\, b^i\, u,
\end{aligned}
$$

ceea ce conduce, pentru metrica curbei deformate, la relaţiile

$$
\begin{aligned}
&a_{zz}^{\star} = \bar{\rho}_z^{\star}\,\bar{\rho}_z^{\star} = a_{zz}(1+2\alpha), \quad a_z^{\star} = \sqrt{a_{zz}^{\star}} = a_z(1+\alpha),\\
&a^{\star zz} = \frac{1}{a_{zz}^{\star}} = a^{zz}(1-2\alpha), \quad a^{\star z} = \sqrt{a^{\star zz}} = a^z(1-\alpha), \qquad\qquad (2.3)\\
&\bar{\rho}^{\star z} = a^{\star zz}\,\bar{\rho}_z^{\star} = (1-\alpha)\,\bar{\rho}^z + a^z\,\varphi^i\,\overline{m}_i\,,\\
&\alpha = \frac{a_{zz}^{\star} - a_{zz}}{2\,a_{zz}} = \frac{a_z^{\star} - a_z}{a_z} = \frac{ds^{\star} - ds}{ds}\,.
\end{aligned}
$$

Formulele (2.2), (2.3) pun în evidenţă variaţia metricii longitudinale, adică alungirea curbei. Pentru studiul variaţiei vectorilor $\overline{m}_i$, se va presupune că aceştia rămîn normali la curba deformată, iar metrica p_{ij} este invariantă în raport cu deformarea curbei, ceea ce conduce la

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}_z^{\star}\,\overline{m}_i^{\star} = 0, \quad \overline{m}_i^{\star}\,\overline{m}_{j_1}^{\star} = p_{ij}, \quad \overline{m}^{\star i} = p^{ij}\,\overline{m}_j^{\star}\,,\\
&\overline{m}_i^{\star} = -\,\varphi_i\,\bar{\tau} + \overline{m}_i + \psi\, c_{ij}\,\overline{m}^j = \overline{m}_i + \bar{\mu}_i = \overline{m}_i + \Delta\overline{m}_i\,, \qquad\qquad (2.4)\\
&\overline{m}^{\star i} = -\,\varphi^i\,\bar{\tau} + \overline{m}^i + \psi\, c^{ij}\,\overline{m}_j = \overline{m}^i + \bar{\mu}^i = \overline{m}^i + \Delta\overline{m}^i.
\end{aligned}
$$

Mărimile $\sqrt{p_{ii}}\,\varphi^i$ au sensul de rotaţii ale versorului tangent în planul $(\bar{\tau}, \overline{m}_i)$, în sensul vectorului $\overline{m}_i$, iar mărimea ψ are sensul de înşurubare în jurul tangentei. Într-adevăr, din (2.2) şi (2.4) rezultă

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}_z^{\star}\,\overline{m}_i = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\,\overline{m}_i = a_z\,\varphi_i\,,\\
&\bar{\mu}_i\,\overline{m}_j = \psi\, c_{ij}\,. \qquad\qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Sub formă mai concentrată, relațiile (2.2) se pot scrie

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_z^{\star} &= (1+\alpha)\,\bar{\rho}_z + \bar{\theta} \times \bar{\rho}_z, \\ \bar{m}_i^{\star} &= \bar{m}_i + \bar{\theta} \times \bar{m}_i, \\ \bar{\theta} &= \psi\bar{\tau} + c_{ij}\varphi^i\bar{m}^j = \psi\bar{\tau} + \bar{\rho}^z \times \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vectorul rotație, $\bar{\theta}$, se va presupune și el regulat și mic de clasa C^2. În vederea studiului variației curburii și torsiunii, adică al curbării și răsucirii curbei, trebuie calculate derivatele lui $\bar{\rho}_z^{\star}$ și $\bar{m}_i^{\star}$ conform formulelor (1.16)

$$\bar{\rho}_z^{\star z} = \left\{\frac{\partial\,[a^z(1-\alpha)]}{\partial z} - b_i\varphi^i\right\}\bar{\tau} + \left\{\frac{\partial(a^z\varphi_i)}{\partial z} - S_{iz}^j\,a^z\varphi_j + b_i(1-\alpha)\right\}\bar{m}^i \tag{2.7}$$

$$\bar{m}_{iz}^{\star} = \left\{-a^z\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} - b_i - \psi c_{ik}b^k\right\}\bar{\rho}_z + \left\{\left[\frac{\partial(\psi c_{ik})}{\partial z} - S_{kz}^l\psi c_{li}\right]p^{kj} - a_z b^j\,\varphi_i + S_{iz}^j\right\}\bar{m}_j.$$

Curbura și curbarea curbei vor fi, respectiv, (v. relațiile (1.9)),

$$\begin{aligned} b_i^{\star} &= \bar{\rho}_z^{\star z}\bar{m}_i^{\star} = b_i(1-\alpha) + \Gamma_z a^z\varphi_i + \frac{\partial(a^z\varphi_i)}{\partial z} - S_{iz}^j a^z\varphi_j + \psi c_{ij}b^i = -\bar{\rho}^{\star z}\bar{m}_{iz}^{\star}, \\ \beta_i &= \Delta b_i = b_i^{\star} - b_i = -\alpha b_i + a^z\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} - S_{iz}^j\varphi_j\right) + \psi c_{ij}b^j, \\ \beta^i &= p^{ij}\beta_j = -\alpha b^i + a^z\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} + S_{jz}^i\varphi^j\right) + \psi c^{ij}b_j. \end{aligned} \tag{2.8}$$

La fel se va putea calcula răsucirea curbei,

$$\begin{aligned} S_{jiz}^{\star} &= \bar{m}_j^{\star}\bar{m}_{iz}^{\star} = b_i\varphi_{jz} + S_{jiz} + \frac{\partial(\psi c_{ij})}{\partial z} - S_{jz}^k\psi c_{ik} - b_j\varphi_{iz} + S_{iz}^k\psi c_{jk} = \\ &= S_{jiz} + a_z(b_i\varphi_j - b_j\varphi_i) + \frac{\partial(\psi c_{ij})}{\partial z} + \psi(S_{iz}^k c_{jk} - S_{jz}^k c_{ik}), \\ \Sigma_{jiz} &= S_{jiz}^{\star} - S_{jiz} = a_z c_{ij}\gamma, \\ a_z\gamma &= a_z c^{ij}b_i\varphi_j - \psi S_{kz}^k + \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial(\psi\sqrt{p})}{\partial z} = a_z c^{ij}b_i\varphi_j + \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pentru curbare şi răsucire se pot obţine expresii şi în funcţie de u, v^i şi ψ

$$\beta_i = \psi c_{ij} b^j + \left\{ b_i b_j + a^z \left[\frac{d(a^z S_{ijz})}{dz} - a^z S^k_{jz} S_{kiz} \right] \right\} v^j + a^{zz} (2 S_{ijz} - \Gamma_z p_{ij}) \frac{\partial v^j}{\partial z} +$$

$$+ a^{zz} p_{ij} \frac{d^2 v^j}{dz^2} + \left(\frac{db_i}{dz} - S^j_{iz} b_j \right) a^z u,$$

$$\beta^i = \psi c^{ij} b_j + \left\{ b^i b_j + a^z \left[\frac{d(a^z S^i_{jz})}{dz} + a^z S^i_{kz} S^k_{jz} \right] \right\} v^j + a^{zz} (2 S^i_{jz} - \Gamma_z \delta^i_j) \frac{\partial v^j}{\partial z} +$$

$$+ a^{zz} \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} + \left(\frac{db^i}{dz} + S^i_{jz} b^j \right) a^z u, \tag{2.10}$$

$$a_z \gamma = c^{ij} b_i \left(\frac{\partial v_j}{\partial z} - S^k_{jz} v_k + a_z b_j u \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

Ţinînd seama de (2.6), derivatele lui $\overline{u}$ şi $\overline{\theta}$ vor avea expresiile

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \alpha \overline{\rho}_z + \varphi^i_z \overline{m}_i = a_z (\alpha \overline{\tau} + \varphi^i \overline{m}_i),$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = \gamma \overline{\rho}_z + a_z (\beta_i + \alpha b_i) c^{ij} \overline{m}_j = \gamma \overline{\rho}_z + a_z \beta_i c^{ij} \overline{m}_j + \alpha \overline{\rho}_z \times \overline{\rho}^z_z =$$

$$= a_z (\gamma \overline{\tau} + \beta_i c^{ij} \overline{m}_j + \alpha \overline{\tau} \times \overline{\rho}^z_z),$$

$$\alpha = \overline{\rho}^z \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}, \tag{2.11}$$

$$\varphi^i = a^z \overline{m}^i \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = c^{ij} \overline{m}_j \overline{\theta} = (\overline{\theta} \, \overline{\tau} \, \overline{m}^i), \quad \overline{m}^i \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{\theta} \times \overline{\rho}_z \right) = 0,$$

$$\beta_i = \overline{\rho}^z \left(\overline{m}_i \times \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - b_i \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right), \quad \beta_i + \alpha b_i = \left(\overline{\rho}^z \overline{m}_i \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \right),$$

$$\gamma = \overline{\rho}^z \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} .$$

În cazul raportării la triedrul principal și la elementul de arc, relațiile de definiție pentru α, φ^i, β_i și γ se simplifică sub forma

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\partial u}{\partial s} - bv_1,\\
\varphi_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial s} - cv_2 + bu,\\
\varphi_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial s} + cv_1,\\
\beta_1 &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} + (b^2 - c^2)v_1 - 2c\frac{\partial v_2}{\partial s} - \frac{dc}{\partial s}v_2 + \frac{db}{ds}u, \qquad (2.12)\\
\beta_2 &= \frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2} - c^2 v_2 + 2c\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{dc}{ds}v_1 + cbu - b\psi,\\
\gamma &= c^\star - c = b\frac{\partial v_2}{\partial s} + bcv_1 + \frac{\partial \psi}{\partial s}.
\end{aligned}$$

3. Atît mărimile geometrice, cît și cele mecanice, se reprezintă prin mărimi geometrice, fapt posibil datorită existenței unui isomorfism între aceste specii de mărimi. În majoritatea cazurilor, în relațiile mecanice, aceste mărimi sînt reprezentate prin vectori, care, ca figuri geometrice, sînt invarianți în raport cu transformările de coordonate (care conduc doar la transformări ale componentelor vectorilor considerați).

Dacă se dau două baze nesingulare, $\bar{e}_a$ și $\bar{\varepsilon}_\alpha$, un vector $\bar{V}$ va avea în aceste baze componentele contravariante V^a și, respectiv $\widetilde{V}^\alpha$ definite prin

$$\bar{V} = V^a\bar{e}_a = \widetilde{V}^\alpha\bar{\varepsilon}_\alpha, \quad V^a = \bar{V}\bar{e}^a, \quad \widetilde{V}^\alpha = \bar{V}\bar{\varepsilon}^\alpha, \quad \bar{e}^a\bar{e}_b = \delta^a_b, \quad \bar{\varepsilon}^\alpha\bar{\varepsilon}_\beta = \delta^\alpha_\beta. \qquad (3.1)$$

Între bazele $\bar{e}_a$ și $\bar{\varepsilon}_\alpha$ se pot stabili corespondențe biunivoce, care conduc la formule de transformare pentru componentele vectorului :

$$\begin{aligned}
&\bar{e}_a = h^\alpha_a\bar{\varepsilon}_\alpha, \quad \bar{\varepsilon}_\alpha = \widetilde{h}^a_\alpha\bar{e}_a, \quad \widetilde{h}^a_\alpha h^\alpha_b = \delta^a_b, \quad V^a = \widetilde{h}^a_\alpha\widetilde{V}^\alpha, \quad \widetilde{V}^\alpha = h^\alpha_a V^a, \qquad (3.2)\\
&\bar{e}^a = \widetilde{h}^a_\alpha\bar{\varepsilon}^\alpha, \quad \bar{\varepsilon}^\alpha = h^\alpha_a\bar{e}^a, \quad h^\alpha_a\widetilde{h}^a_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad V_a = h^\alpha_a\widetilde{V}_\alpha, \quad \widetilde{V}_\alpha = \widetilde{h}^a_\alpha V_a.
\end{aligned}$$

În cazul că transformarea h^α_a diferă de transformarea identică δ^α_a prin cantități χ^α_a de patrat neglijabil, transformarea inversă are și ea o formă asemănătoare, fapt ce se verifică ușor

$$h^\alpha_a = \delta^\alpha_a + \chi^\alpha_a, \quad \widetilde{h}^a_\alpha = \delta^a_\alpha - \chi^a_\alpha, \quad h^\alpha_a\widetilde{h}^a_\beta = \delta^\alpha_\beta + \chi^\alpha_\beta - \chi^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta. \qquad (3.3)$$

Dacă se consideră, în cazul curbei strîmbe, drept repere $\bar{e}_a$ şi $\bar{\varepsilon}_\alpha$ sistemele de referinţă Lagrange $(\bar{\rho}_z, \overline{m}_i)$ şi, respectiv, Euler $(\bar{\rho}_z^\star, \overline{m}_i^\star)$, corespondenţele dintre ele sînt (v. relaţia (3.3)),

$$\bar{\rho}_z^\star = (1+\alpha)\,\bar{\rho}_z + \varphi_z^i \overline{m}_i, \qquad \bar{\rho}_z = (1-\alpha)\,\bar{\rho}_z^\star - \varphi_z^i \overline{m}_i^\star,$$

$$\overline{m}_i^\star = -\,\varphi_i^z \bar{\rho}_z + (p_{ij} + \psi c_{ij})\,\overline{m}^j, \quad \overline{m}_i = \varphi_i^z \bar{\rho}_z^\star + (p_{ij} - \psi c_{ij})\,\overline{m}^{\star j}. \tag{3.4}$$

Pentru vectorii $\overline{\mathcal{R}} = N^z \bar{\rho}_z + Q^i \overline{m}_i$ şi, respectiv, $\overline{\mathcal{M}} = T^z \bar{\rho}_z + c_{ij} M^j \overline{m}^i$, relaţiile (3.1) şi (3.4) conduc la formule de transformare

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}^z &= (1-\alpha)\,N^z + \varphi_i^z Q^i, & N^z &= (1+\alpha)\,\widetilde{N}^z - \varphi_i^z \widetilde{Q}^i,\\
\widetilde{Q}^i &= -\,\varphi_z^i N^z + (p^{ij} + \psi c^{ij})\,Q_i, & Q^i &= \varphi_z^i \widetilde{N}^z + (p^{ij} - \psi c^{ij})\widetilde{Q}_j,\\
\widetilde{T}^z &= (1-\alpha)\,T^z + \varphi_i^z c_{\ast}^{ij} M_j, & T^z &= (1+\alpha)\,\widetilde{T}^z - \varphi_i^z c^{ij} \widetilde{M}_j,\\
\widetilde{M}^i &= c^{ij}\varphi_{zj} T^z + (p^{ij} + \psi c^{ij})\,M_j, & M^i &= -\,c^{ij}\varphi_{zj}\widetilde{T}^z + (p^{ij} - \psi c^{ij})\widetilde{M}_j.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ţinînd seama de faptul că şi derivatele lui $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}$ din (3.5), respectiv $\dfrac{d\overline{\mathcal{R}}}{dz}$ şi $\dfrac{d\overline{\mathcal{M}}}{dz}$, sînt vectori, relaţiile (3.5) se conservă pentru componentele acestor derivate, calculate, respectiv, după (1.16) şi (1.16′).

În general, vor fi utilizate, pentru un vector $\overline{V}$, caracteristic curbei nedeformate, vectorul $\overline{V}^\star$, corespunzător lui $\overline{V}$, caracteristic curbei deformate, şi $\overline{V}^0$, diferenţa lor, următoarele notaţii în cele două sisteme de referinţă.

Vectorul reprezentat	Reprezentarea Lagrange	Reprezent. Euler	
$\overline{V}$,	V^z, V^i,	$\widetilde{V}^z, \widetilde{V}^i$,	
$\overline{V}^\star$,	$V^{\star z}, V^{\star i}$,	$\widetilde{V}^{\star z}, \widetilde{V}^{\star i}$,	(3.6)
$\overline{V}^0 = \overline{V}^\star - \overline{V}$,	V^{0z}, V^{0i},	$\widetilde{V}^{0z}, \widetilde{V}^{0i}$.	

II. RELAŢII GEOMETRICE ALE BAREI CURBE

4. Vectorul de poziţie $\bar{r}$ al unui punct al unei bare curbe strîmbe subţiri a cărei axă are ecuaţia (1.1) este determinat în mod biunivoc sub forma

$$\bar{r} = \bar{r}\,(z,\ x^i) = \bar{\rho}\,(z) + x^i \overline{m}_i. \tag{4.1}$$

Bara curbă strîmbă este un corp material ce acopere un domeniu mărginit de o frontieră S dată prin relaţia

$$f\,(z,\ x^i) = 0, \tag{4.2}$$

unde $f(z, x^i)$ este o funcție regulată de clasa C^1, satisfăcînd relația

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial z}\right|_{(z,\, x^i)\in S} < K, \tag{4.3}$$

Intersecția planului întins de vectorii $\overline{m}_i$, cu domeniul Ω, se va numi secțiune transversală, $\mathcal{A}$, iar aria ei se va nota cu A.

Faptul că bara curbă este subțire va fi exprimat prin relațiile

$$\begin{gathered}(b_i x^i)^2_{(x^i)\in\mathcal{A}} \ll 1, \\ |\, p^{kl} S_{kiz} S_{ljz} x^i x^j \,|_{(x^i)\in\mathcal{A}} \ll 1.\end{gathered} \tag{4.4}$$

La barele curbe subțiri, care constituie obiectul lucrării de față, mărimile din membrii stîngi ai inegalităților (4.2) se vor neglija în raport cu unitatea.

Din expresia (4.1) rezultă pentru mărimile diferențiale de ordinul I ale vectorului de poziție expresiile

$$\begin{aligned} d\overline{r} &= (\overline{\rho}_z + x^i \overline{m}_{iz})\, dz + \overline{m}_i dx^i = (1 - b_i x^i)\, \overline{\rho}_z dz + S^j_{iz} \overline{m}_j x^i dz + \overline{m}_i dx^i, \\ \frac{\partial \overline{r}}{\partial z} &= (1 - b_i x^i)\, \overline{\rho}_z + S^j_{iz} x^i \overline{m}_j, \\ \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i} &= \overline{m}_i . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Vectorii $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial z}$, $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}$, formează un sistem de referință local. Între acest sistem de referință și sistemul $(\overline{\tau}, \overline{m}_i)$ există relațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{r}}{\partial z} = a_z (1 - b_i x^i)\, \overline{\tau} + S^j_{iz} x^i \overline{m}_j, &\quad \overline{\tau} &= \frac{1}{a_z (1 - b_i x^i)} \frac{\partial \overline{r}}{\partial z} - \frac{S^j_{iz} x^i}{a_z (1 - b_k x^k)} \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^j}, \\ &\frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i} = \overline{m}_i, & \overline{m}_i &= \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i} . \end{aligned} \tag{4.6}$$

În sistemul de referință $\left(\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial z}, \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}\right)$, elementul de arc al barei va avea expresia

$$dl^2 = d\overline{r}^2 = g_{ab} dy^a dy^b, \quad y^i = x^i, \quad y^3 = z, \tag{4.7}$$

$$g_{ij} = p_{ij}, \quad g_{jz} = g_{zi} = S_{jiz} x^i, \quad g_{zz} = a_{zz} (1 - b_i x^i)^2 + p^{jl} S_{jiz} S_{lkz} x^i x^k .$$

Elementul de arie determinat de doi vectori, $\underset{(1)}{d\overline{r}}$ și $\underset{(2)}{d\overline{r}}$, în planul secțiunii transversale, va avea expresia

$$dA = \overline{\tau}\, \underset{(1)}{d\overline{r}}\, \underset{(2)}{d\overline{r}} = \overline{\tau}\, \overline{m}_i \overline{m}_j\, \underset{(1)}{dx^i} \underset{(2)}{dx^j} = c_{ij}\, \underset{(1)}{dx^i}\, \underset{(2)}{dx^j}, \tag{4.8}$$

Elementul de volum determinat de trei vectori oarecare, $\underset{(1)}{d\bar{r}}$, $\underset{(2)}{d\bar{r}}$, $\underset{(3)}{d\bar{r}}$, va avea expresia

$$dV = \underset{(1)}{d\bar{r}}\,\underset{(2)}{d\bar{r}}\,\underset{(3)}{d\bar{r}} = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^a}\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^b}\frac{\partial\bar{r}}{\partial y^c}\right)\underset{(1)}{dy^a}\,\underset{(2)}{dy^b}\,\underset{(3)}{dy^c} = c_{abc}\,\underset{(1)}{dy^a}\,\underset{(2)}{dy^b}\,\underset{(3)}{dy^c}.$$

$$c_{abc} = -c_{bac} = -c_{acb},\quad c_{123} = c_{231} = c_{312} = \sqrt{g}, \tag{4.9}$$

$$g = p\,[a_{zz}(1-b_ix^i)^2 + p^{ij}S_{ikz}S_{jlz}x^kx^l - p_{mn}c^{mi}c^{nj}S_{ikz}S_{jlz}x^kx^l] = pa_{zz}(1-b_ix^i)^2,$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{p}\,a_z(1-b_ix^i) = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^2}\right) = \sqrt{p}\,\bar{\tau}\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}.$$

Originea sistemului de coordonate x^i va fi în centrul de greutate al secțiunii transversale (invariant în raport cu centroafinitățile în plan normal la axă).

Tensorul de inerție A^{ij} și tensorul de girație a^{ij} se definesc prin relațiile

$$\begin{aligned} &A^{ij} = \int_{\mathcal{A}} x^ix^j dA,\quad A^i_j = p_{jk}A^{ik},\quad A_{ij} = p_{ik}p_{jl}A^{kl},\\ &a^{ij} = \frac{1}{A}A^{ij},\quad a^i_j = p_{jk}a^{ik},\quad a_{ij} = p_{ik}p_{jl}a^{kl}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

avînd invarianții liniari (momentul de inerție polar și patratul razei de girație polare) respectiv

$$\begin{aligned} &I_0 = p_{ij}A^{ij} = p_{ij}\int_{\mathcal{A}} x^ix^j dA = \int_{\mathcal{A}} (\bar{r}-\bar{\rho})^2\,dA,\\ &i_0^2 = p_{ij}a^{ij} = \frac{1}{A}I_0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Reciprocii mărimilor a^{ij} și A^{ij}, vor fi, respectiv, b_{ij} și B_{ij}, dați de relațiile

$$\begin{aligned} &a^{ij}\,b_{jk} = \delta^i_k,\\ &A^{ij}\,B_{jk} = \delta^i_k. \end{aligned} \tag{4.12}$$

În cazul axelor ortogonale, $p_{ij} = \delta_{ij}$, expresiile pentru momentele de inerție și razele de girație sînt

$$\begin{aligned} &I_{ij} = I_0\,\delta_{ij} - A_{ij},\ I_{11} = I_x,\ I_{22} = I_y,\ I_{12} = I_{xy},\\ &i_{ij} = i_0^2\,\delta_{ij} - a_{ij},\quad i_{11} = i_x^2,\ i_{22} = i_y^2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

iar aceste mărimi satisfac relațiile

$$\begin{aligned} &I_x + I_y = I_0,\\ &i_x^2 + i_y^2 = i_0^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

5. Vectorul de poziție al unui punct al barei deformate va fi

$$\bar{r}^\star = \bar{\rho}^\star + x^i \bar{m}_i^\star = \bar{r} + \bar{w}. \tag{5.1}$$

S-a văzut (4.7) că metrica barei nedeformate este definită de mărimile a_{zz}, b_i, p_{ij}, S_{ijz}. Metrica barei deformate va fi definită cu ajutorul mărimilor omologe, $a_{zz}^\star$, $b_i^\star$, $p_{ij}^\star$, $S_{ijz}^\star$, caracteristice stării deformate, iar variațiile metricii vor caracteriza însăși deformația mediului.

Tensorul metric în stare deformată este

$$g_{ab}^\star = \bar{r}_a^\star \bar{r}_b^\star = g_{ab} + \Delta g_{ab} = g_{ab} + 2 e_{ab}, \tag{5.2}$$

$$g_{ij}^\star = p_{ij};\ g_{zj}^\star = g_{jz}^\star = S_{jiz}^\star x^i,\ g_{zz}^\star = a_{zz}^\star (1 - b_i^\star x^i)^2 + p^{ij} S_{ikz}^\star S_{jlz}^\star x^k x^l.$$

Tensorul deformație are expresia

$$2 e_{ab} = g_a^\star - g_{ab},$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}^\star - g_{ij}) = 0, \tag{5.3}$$

$$e_{jz} = \frac{1}{2}(g_{jz}^\star - g_{jz}) = \frac{1}{2}\left(S_{jiz} + \Sigma_{jiz}\right) x^i - \frac{1}{2} S_{jiz} x^i = \frac{1}{2} \Sigma_{jiz} x^i = \frac{1}{2} a_z c_{ij} \gamma x^i,$$

$$e_{zz} = \frac{1}{2}(g_{zz}^\star - g_{zz}) = \frac{1}{2} a_{zz}(1 + 2\alpha)\left[1 - (b_i + \beta_i) x^i\right]^2 + \frac{1}{2} p^{ij}\left(S_{ikz} + \right.$$

$$\left. + \Sigma_{ikz}\right)\left(S_{jlz} + \Sigma_{jlz}\right) x^k x^l - \frac{1}{2} a_{zz}(1 - b_i x^i)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} p^{ij} S_{ikz} S_{jlz} x^k x^l = a_{zz}\left[\alpha (1 - b_i x^i)^2 -\right.$$

$$\left. - \beta_i x^i (1 - b_j x^j)\right] + p^{ij} S_{ikz} S_{jlz} x^k x^l.$$

Aceste expresii sînt asociate reperului local $\bar{e}_a = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^a}$. Pentru a avea o interpretare mai simplă a stării de deformație, este utilă trecerea la reperul $(\bar{\tau}, \bar{m}_i)$, care, pentru a se aplica formulele (3.2), va fi considerat drept reper $\bar{\varepsilon}_\alpha$. În aceste condiții, coeficienții de transformare h_a^α și $\tilde{h}_\alpha^a$ vor fi dați, respectiv, de formulele (4.6).

În reperul $\bar{\varepsilon}_\alpha$, componentele deformației, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, vor avea respectiv expresiile

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \tilde{h}_\alpha^a \tilde{h}_\alpha^b e_{ab}, \tag{5.4}$$

care, dezvoltat, vor apare sub forma

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} = 0,$$

$$\varepsilon_{j\tau} = \frac{1}{a_z (1 - b_i x^i)} e_{jz} - \frac{S_{kz}^i x^k}{a_z (1 - b_l x^l)} e_{ij} = \frac{\gamma c_{ij} x^i}{1 - b_k x^k},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\tau\tau} = \frac{1}{[a_z (1 - b_i x^i)]^2} e_{zz} - \frac{2 S_{iz}^j x^i}{[a_z (1 - b_k x^k)]^2} e_{jz} + \frac{S_{kz}^i x^k S_{lz}^j x^l}{[a_z (1 - b_m x^m)]^2} e_{ij} = \tag{5.5}$$

$$= \alpha - \frac{\beta_i x^i}{1 - b_j x^j} + \frac{p^{ij} S_{ikz} \Sigma_{jlz} x^k x^l}{[a_z (1 - b_m x^m)]^2} - \frac{S_{lz}^j x^l \Sigma_{jiz} x^i}{[a_z (1 - b_m x^m)]^2} = \alpha - \frac{\beta_i x^i}{1 - b_j x^j}.$$

Ţinînd seama de (4. 4), expresiile pentru alungirea ε şi lunecările $\varepsilon_{i\tau}$ vor lua expresiile simplificate

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha - \beta_i\, x^i (1 + b_j\, x^j) = \alpha - \beta_i\, x^i - b_i\, \beta_j\, x^i\, x^j \\ \varepsilon_{j\tau} &= \frac{1}{2}\, c_{ij}\, x^i (1 + b_k\, x^k)\, \gamma = \frac{1}{2} (c_{ij}\, x^i + c_{ij}\, b_k\, x^i\, x^k)\, \gamma. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ipoteza conservării secţiunii transversale, introdusă prin aplicarea relaţiilor (2.4), conduce la expresiile (5.3), (5.5), (5.6) pentru deformaţii. Aceste expresii nu sînt satisfăcătoare din punct de vedere fizic, fapt ce va apare net în evidenţă la studiul tensiunilor. Pentru bare subţiri erorile astfel introduse sînt însă acceptabile. Teoria rezistenţei materialelor este construită tocmai pe baza unor astfel de ipoteze. Dealtfel, au fost dezvoltate în literatură studii mai riguroase cu privire la modul de deformare numai pentru cazuri particulare de bare şi în anumite ipoteze simplificatoare.

III. FORŢE, ENERGIE DE DEFORMARE, LUCRU MECANIC

6. Din expresiile (5.6) ale deformaţiilor rezultă pentru tensiuni expresiile [1])

$$\begin{aligned} \sigma &= E\, \varepsilon = E\, (\alpha - \beta_i\, x^i - b_i\, \beta_j\, x^i\, x^j), \\ \sigma_{i\tau} &= 2\, G\, \varepsilon_{i\tau} = G\, (c_{ji}\, x^j + c_{ji}\, b_k\, x^j\, x^k)\, \gamma, \\ \sigma_{ij} &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Torsorul rezultant pe secţiunea transversală al acestor tensiuni, $(\mathcal{R}, \mathcal{M})$, va fi

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}} &= N\, \overline{\tau} + Q^i\, \overline{m}_i = \int_{\mathcal{A}} d_A\, \overline{\mathcal{R}}, \\ \overline{\mathcal{M}} &= T\, \overline{\tau} + c_{ij}\, M^j\, \overline{m}^i = \int_{\mathcal{A}} (\overline{r} - \overline{\rho}) \times d_A\, \overline{\mathcal{R}}, \\ d_A\, \overline{\mathcal{R}} &= (\sigma\, \overline{\tau} + \sigma_{i\tau}\, \overline{m}^i)\, d\, A. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Efectuînd integralele (6.2) şi ţinînd seama de aproximaţiile admise rezultă pentru N, Q^i, T, M^i, expresiile

$$\begin{aligned} N &= \int_{\mathcal{A}} E\, (\alpha - \beta_i\, x^i - b_i\, \beta_j\, x^i\, x^j)\, d\, A = E\, A\, (\alpha - a^{ij}\, b_i\, \beta_j), \\ Q^i &= p^{il} \int_{\mathcal{A}} G\, (c_{jl}\, x^j + c_{jl}\, b_k\, x^j\, x^k)\, d\, A = G\, A\, c^{ji}\, a_{jk}\, b^k, \\ T &= \int_{\mathcal{A}} G\, x^l\, c_{lm}\, p^{mi} (c_{ji}\, x^j + c_{ji}\, b_k\, x^j\, x^k)\, d\, A \approx G\, A\, i_0^2\, \gamma, \\ M^i &= \int_{\mathcal{A}} x^i\, E\, (\alpha - \beta_j\, x^j - b_j\, \beta_k\, x^j\, x^k)\, d\, A \approx - E\, A\, a^{ij}\, \beta_j. \end{aligned} \tag{6.3}$$

---

[1]) Materialul din care este alcătuită bara va fi presupus omogen, izotrop şi liniar elastic.

Expresiile pentru N şi M^i din (6.3) vor fi acceptate, însă cele pentru Q^i şi T, fiind mult diferite de cele exacte, vor fi înlocuite. Pentru Q^i se va determina expresia din relaţiile mecanice pentru bara luată în ansamblu, iar pentru T se va introduce în locul momentului de inerţie polar, I_0, momentul de inerţie la torsiune, J. Astfel, relaţiile între deformaţiile axei barei şi torsorul tensiunilor pe secţiune vor lua forma

$$\begin{aligned} N &= EA(\alpha - a^{ij} b_i \beta_j), & EA\alpha &= N - b_i M^i, \\ M^i &= -EA a^{ij} \beta_j, & EA\beta_i &= -b_{ij} M^j, \\ T &= GJ\gamma, & GJ\gamma &= T, \end{aligned} \tag{6.4}$$

care conduce, pentru σ (v. relaţiile (6.1)), la expresia

$$\sigma = \frac{N}{A}\,[1 - b_i e^i + b_{ij} e^j x^i (1 + b_k x^k)], \quad e^i = \frac{M^i}{N}\,\cdot \tag{6.5}$$

Pentru $\sigma_{i\tau}$ expresia (6.1) este inacceptabilă, deoarece contrazice, în general, proprietatea de simetrie a tensiunilor pe frontieră.

Din relaţia (6.5) rezultă faptul că la bare curbe există o axă neutră dreaptă doar atunci cînd sînt satisfăcute relaţiile echivalente

$$\begin{aligned} c^{ij} b_i b_{jk} e^k &= 0, \\ c_{ij} e^i a^{jk} b_k &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

7. Forţele care solicită bara se împart în două categorii : forţe exterioare şi forţe interioare.

Se va presupune că forţele exterioare sînt funcţii continue şi derivabile de parametrul z, avînd un torsor faţă de axa barei, raportat la parametrul z, $(\overline{\mathfrak{r}}_z, \overline{\mathfrak{m}}_{cz})$.

Forţele interioare au un torsor pe secţiunea curentă stîngă $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_c)$ dat de (6.2) şi care se presupune continuu şi derivabil în raport cu z.

Vor fi utilizate reprezentările

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{r}}_z &= n_z \overline{\tau} + q^i_z m_i, & & \\ \overline{\mathfrak{m}}_z &= t_z \overline{\tau} + c_{ij} m^j_z \overline{m}^i, & \overline{\mathfrak{m}}_z &= \overline{\mathfrak{m}}_{cz}, \\ \overline{\mathcal{R}} &= N \overline{\tau} + Q^i \overline{m}_i, & & \\ \overline{\mathcal{M}} &= T \overline{\tau} + c_{ij} M^j \overline{m}^i, & \overline{\mathcal{M}} &= \overline{\mathcal{M}}_c. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Împreună cu torsorii reprezentaţi prin (7.1) se vor introduce încă doi torsori : $(\overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{M}})$ şi $(\bar{R}, \bar{M})$, presupuşi continui şi derivabili şi definiţi prin

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial z} + \bar{\mathfrak{r}}_z,\\
&\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\mathcal{M}}}{\partial z} + \bar{\mathfrak{p}}_z \times \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathfrak{m}}_z,\\
&\frac{\partial \bar{R}}{\partial z} = \bar{\mathfrak{r}}_z - \frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial z},\\
&\frac{\partial \bar{M}}{\partial z} = \overline{\mathfrak{m}}_z - \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{\mathcal{M}}}{\partial z} - \bar{\mathfrak{p}}_z \times \overline{\mathcal{R}}.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Pentru ca bara să fie în echilibru, este necesar ca torsorul $(\overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{M}})$ să fie identic nul.

Torsorul forţelor exterioare este dat, în general, pentru starea nedeformată a barei. Deformarea barei poate să influenţeze acest torsor, producînd o variaţie $(\Delta \bar{\mathfrak{r}}_z, \Delta \overline{\mathfrak{m}}_z)$ a sa. Printre cauzele care pot să aibă o astfel de influenţă, principalele sînt următoarele :

a) Variaţia excentricităţii forţelor exterioare. Dacă forţa $\bar{\mathfrak{r}}_z$ se aplică cu o excentricitate $\bar{c}$, prin rotaţia $\bar{\theta}$ va apare o nouă excentricitate, $\theta \times \bar{c}$, care va face să crească cuplul distribuit cu $(\bar{\theta} \times \bar{c}) \times \bar{\mathfrak{r}}_z$. Deci, în acest caz,

$$\begin{aligned}
&\Delta \bar{\mathfrak{r}}_z = 0\\
&\Delta \overline{\mathfrak{m}}_z = (\bar{\theta} \times \bar{c}) \times \bar{\mathfrak{r}}_z = -c_i q_z^i \psi \bar{\tau} + (c_i \varphi^i q_z^j c_{kj} + \psi n_z c_k) \overline{m}^k.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

b) Rotaţia forţei distribuite. Dacă forţa $\bar{\mathfrak{r}}_z$ se aplică după o direcţie ce se roteşte solidar cu bara, apare o creştere

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\mathfrak{r}}_z &= \bar{\theta} \times \bar{\mathfrak{r}}_z = -\varphi_i q_z^i \bar{\tau} + (n_z \varphi_i + \psi q_z^j c_{ji}) \overline{m}^i\\
\Delta \overline{\mathfrak{m}}_z &= \bar{c} \times (\bar{\theta} \times \bar{\mathfrak{r}}_z) + (\bar{\theta} \times \bar{c}) \times \bar{\mathfrak{r}}_z = \bar{\theta} \times (\bar{c} \times \bar{\mathfrak{r}}_z) =\\
&= -c^{ij} \varphi_i c_j n_z \bar{\tau} + (\psi n_z c_i - c_{mn} q_z^m c^n \varphi_i) \overline{m}^i.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Mai general, dacă forţa se roteşte cu unghiul $\bar{\chi}$, care este o funcţie liniară de torsorul $(\bar{u}, \theta)$, în locul lui (7.4) va apare

$$\begin{aligned}
&\Delta \bar{\mathfrak{r}}_z = \bar{\chi} \times \bar{\mathfrak{r}}_z,\\
&\Delta \overline{\mathfrak{m}}_z = \bar{\chi} \times (\bar{c} \times \bar{\mathfrak{r}}_z),
\end{aligned} \tag{7.5}$$

unde $\bar{\chi}$ va avea forma

$$\bar{\chi} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta}. \tag{7.6}$$

c) Cîmpul de accelerații variabil în spațiu. Dacă bara se găsește într-un cîmp de accelerații $\bar{g}(\bar{r})$, cunoscut, variația poziției barei va produce o variație a cîmpului cu $\frac{d\bar{g}}{d\bar{r}}\,[\bar{u} + \bar{\theta} \times (\bar{r} - \bar{\rho})]$. Efectul asupra torsorului distribuit va fi

$$\Delta \bar{\mathrm{r}}_z = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\, \frac{d\bar{g}}{d\bar{r}}\, [\bar{u} + \bar{\theta} \times (\bar{r} - \bar{\rho})]\, dA = \rho a_z A \frac{d\bar{g}}{d\bar{r}} (\bar{u} - b_i \bar{\theta} \times \bar{m}_j a^{ij})$$

$$\Delta \bar{\mathrm{m}}_z = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)(\bar{r} - \bar{\rho})_x \left\{ \frac{d\bar{g}}{d\bar{r}}\, [\bar{u} + \bar{\theta} \times (\bar{r} - \bar{\rho})] \right\} dA = \tag{7.7}$$

$$= \rho a_z A\, a^{ij}\, \bar{m}_j \times \left[\frac{d\bar{g}}{d\bar{r}} (\bar{\theta} \times \bar{m}_i - b_i \bar{u}) \right]$$

d) Forțe proporționale locale. Dacă punctual, pe suprafața barei, apare un torsor de forțe proporțional cu torsorul deplasărilor, prin sumarea efectelor pe conturul segmentului elementar de bară se obține o creștere, ai cărei coeficienți se vor calcula de la caz la caz,

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathrm{r}}_z &= \frac{\partial \bar{\mathrm{r}}_z}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial \bar{\mathrm{r}}_z}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta}, \\ \Delta \bar{\mathrm{m}}_z &= \frac{\partial \bar{\mathrm{m}}_z}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial \bar{\mathrm{m}}_z}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

De altfel, formula (7.8) generalizează formulele (7.3), (7.4), (7.5), (7.7) ce reprezentau cazurile anterioare.

e) Forțe de contact. Dacă există condiții de contact cu corpuri deformabile, problema se complică în general mult, fiind necesar studiul ansamblului bară-corpuri adiacente. Aceasta este o problemă specială, care nu va fi abordată mai jos (în acest caz, în locul relațiilor (7.8) ar interveni funcționale cu nucleu în general necunoscut, de deplasările barei).

Trebuie remarcat faptul că mărimea $\rho a_z A$ este un invariant în raport cu deformarea barei, această proprietate rezultînd din conservarea masei segmentului de bară.

8. Dacă se cunoaște torsorul deplasărilor, $(\bar{u}, \bar{\theta})$, se poate determina torsorul forțelor pe secțiune $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}})$, prin intermediul relațiilor geometrice (2.2), (2.8), (2.9), (2.10), fizice (6.4) și statice (7.2) (presupunînd cunoscut torsorul $(\bar{R}, \bar{M})$).

Se pune problema inversă : fiind dat torsorul forțelor interioare, să se determine torsorul deplasărilor. Din relațiile (2.11), în care se înlocuiesc deformațiile conform relațiilor (6.4), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{N - b_i M^i}{EA} \bar{\rho}_z + a_z (\bar{\theta} \bar{\tau} \bar{m}^i) \bar{m}_i = \frac{N - b_i M^i}{EA} \bar{\rho}_z = \bar{\theta} \times \bar{\rho}_z, \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \frac{T}{GJ} \bar{\rho}_z + a_z \left(- \frac{b_{ij} M^j}{EA} + b_i \frac{N - b_j M^j}{EA} \right) c^{ik} \bar{m}_k \end{aligned} \tag{8.1}$$

Efectuînd o integrare prin părți în prima ecuație (8.1) și reordonînd termenii, rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u} - \bar{\theta} \times \bar{\rho}) = \frac{N - b_i M^i}{EA}\,\bar{\rho}_z - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \times \bar{\rho}, \\ &\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{T}{GJ}\,\bar{\rho}_z + a_z \frac{b_i N - b_{ij} M^j}{EA}\, c^{ik} \overline{m}_k. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Din (8.2) rezultă că, în ipoteza anulării torsorului forțelor interioare, vor apare expresiile

$$\begin{aligned} &\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 = \text{const.}, \\ &\bar{u} - \bar{\theta} \times \bar{\rho} = \bar{u}_0 = \text{const.}, \\ &\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{\theta}_0 \times \bar{\rho}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

care arată că, în acest caz, bara nu poate să efectueze decît o deplasare rigidă.

Pentru determinarea comportării barei este necesar să se studieze condițiile la extremitățile ei. În general, aceste condiții au un caracter funcțional, rezultînd din condiția de contact cu corpurile deformabile adiacente barei considerate. Acest gen de condiții implică însă determinarea comportării nu numai a barei, ci și a corpurilor adiacente considerate. În cele de mai jos vor fi luate în considerație condiții la limită locale, ce vor permite studiul barei independent de corpurile adiacente. Ca cel mai general caz de astfel de condiții, va fi considerat acela al contactului local, elastic (în particular, încastrare sau extremitate cu condiții statice), care conduce, pentru o extremitate a barei, la condiții de forma

$$\overline{F}_i = \overline{A}_i \qquad (i = 1,2) \tag{8.4}$$

$$\overline{F}_i = \frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \overline{\overline{\mathcal{R}}}}\,\overline{\mathcal{R}} + \frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \overline{\overline{\mathcal{M}}}}\,\overline{\mathcal{M}} + \frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \bar{u}}\,\bar{u} + \frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \bar{\theta}}\,\bar{\theta}, \quad \overline{A}_i = \text{const.},$$

care exprimă faptul că două funcții liniare vectoriale de torsorii deplasărilor și, respectiv, forțelor interioare, au valori date (în (8.4) unii dintre coeficienții tensoriali ai componentelor torsorilor pot fi unitari sau nuli, dar cu satisfacerea unor condiții ce vor apare mai jos).

Liniaritatea tuturor ecuațiilor barei implică posibilitatea sumării efectelor. În consecință, nu se vor studia mai jos, dată fiind ipoteza liniarității, decît bare cu condiții la limită omogene, $\overline{A}_i = 0$.

Cu privire la corpurile elastice cu care bara este în contact (numite curent reazeme), se vor admite cîteva ipoteze :

a) au inerția neglijabilă comparativ cu inerția barei, forțe masice independente de deplasările și tensiunile de contact cu bara ;

b) au, pe cîte o parte a frontierei lor contact cu bara, pe cîte o altă parte, deplasări nule, iar pe restul frontierei, tensiuni nule ;

c) contactul cu bara este de așa natură, încît este imposibilă o deplasare de forma (8.3).

În aceste condiții se poate demonstra că, dacă se dau pe suprafața de contact $\mathcal{A}$ două sisteme de tensiuni împreună cu deplasările respective $(\overset{(1)}{\bar{\sigma}}_n, \overset{(1)}{\bar{w}})$ și, respectiv $(\overset{(2)}{\bar{\sigma}}_n, \overset{(2)}{\bar{w}})$, apare relația de simetrie

$$\int_{\mathcal{A}} \overset{(1)}{\bar{\sigma}}_n \overset{(2)}{\bar{w}}\, dA = \int_{\mathcal{A}} \overset{(2)}{\sigma}_n \overset{(1)}{\bar{w}}\, dA \tag{8.5}$$

care, în ipoteza admiterii deplasării rigide, $\bar{w} = \bar{u} + \bar{\theta} \times (\bar{r} - \bar{\rho})$, revine la

$$\overset{(1)}{\bar{\mathcal{R}}}\, \overset{(2)}{\bar{u}} + \overset{(1)}{\bar{\mathcal{M}}}\, \overset{(2)}{\bar{\theta}} = \overset{(2)}{\bar{\mathcal{R}}}\, \overset{(1)}{\bar{u}} + \overset{(2)}{\bar{\mathcal{M}}}\, \overset{(1)}{\bar{\theta}}\,. \tag{8.6}$$

Ținînd seama de ipotezele admise cu privire la reazeme, va apare pentru fiecare reazem m $(m = 1{,}2)$, în cazul existenței unui sistem de forțe și deplasări pe frontiera de contact cu bara, relația

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_n \bar{w}\, dA \geqslant 0. \tag{8.7}$$

Avînd în vedere, pe de altă parte, faptul că deplasarea $\bar{w}$ este rigidă și principiul acțiunii și reacțiunii, rezultă, pentru bara avînd extremitățile axei în punctele P_1 și P_2,

$$\frac{1}{2}\left[\bar{\mathcal{R}}\bar{u} + \bar{\mathcal{M}}\bar{\theta}\right]_{P_1}^{P_2} = -W_{P1} - W_{P2} \leqslant 0. \tag{8.8}$$

9. Energia de deformare a unui corp elastic are expresia generală[1]

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{ab} e_{ab}\, d\Omega. \tag{9.1}$$

În cazul barei avînd extremitățile axei în P_1 și P_2, expresia (9.1) conduce la

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial W}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} \left[\int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)(\sigma\varepsilon + 2\sigma_{i\tau}\varepsilon_{i\tau})\, dA \right] a_z dz. \tag{9.2}$$

Energia de deformare specifică, $\dfrac{\partial W}{\partial z}$, va avea deci forma

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{a_z}{2} \mathrm{E} \int_{\mathcal{A}} [\alpha(1 - b_i x^i) - \beta_i x^i][\alpha - \beta_j x^j - b_j \beta_k x^j x^k]\, dA + \tag{9.3}$$

$$+ \frac{a_z}{2} G \int_{\mathcal{A}} p^{il} \gamma^2 (c_{ji} x^j + c_{ji} b_k x^j x^k) c_{ml} x^m\, dA \approx$$

$$\approx \frac{a_z}{2} [EA(\alpha^2 + a^{ij}\beta_i\beta_j) + GJ\gamma^2] = \frac{a_z}{2} [(N - b_i M^i)\alpha - M^i \beta_i +$$

$$+ T\gamma] = \frac{a_z}{2} \left[\frac{N^2 - 2b_i M^i N + b_{ij} M^i M^j}{EA} + \frac{T^2}{GJ} \right].$$

---

[1] Nu se va face distincție în cele de mai jos între constantele elastice statice și cele dinamice ale materialului barei.

Se vede din (9.3) că $\frac{\partial W}{\partial z}$ este o formă patratică pozitiv definită de variabilele α, β_i, γ, deci şi de variabilele N, M^i, T, iar W este o funcțională patratică pozitivă de aceleaşi mărimi.

Dacă se consideră o variație a torsorului deplasărilor, $(\delta\bar{u}, \delta\bar{\theta})$, acestei variații îi va corespunde o variație a deformațiilor, $(\delta\alpha, \delta\beta^i, \delta\gamma)$ şi o variație a energiei de deformare

$$\delta W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \delta \frac{\partial W}{\partial z}\, dz \tag{9.4}$$

$$\delta \frac{\partial W}{\partial z} = a_z\,[EA\,(\alpha\delta\alpha + a^{ij}\beta_i\delta\beta_j) + GJ\gamma\delta\gamma] = a_z\,[(N - b_iM^i)\,\delta\alpha - M^i\delta\beta_i + T\delta\gamma].$$

Formei patratice $\frac{\partial W}{\partial z}$ îi corespunde o formă biliniară simetrică,

$$\frac{\partial \overset{12}{W}}{\partial z}, \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial \overset{12}{W}}{\partial z} = a_z\,[EA\,(\overset{(1)}{\alpha}\,\overset{(2)}{\alpha} + a^{ij}\overset{(1)}{\beta_i}\overset{(2)}{\beta_j}) + GJ\,\overset{(1)}{\gamma}\,\overset{(2)}{\gamma}\,] = a_z\,[(\overset{(1)}{N} - b_i\overset{(1)}{M^i})\,\overset{(2)}{\alpha} - \overset{(1)}{M^i}\,\overset{(2)}{\beta_i} +$$

$$+ \overset{(1)}{T}\,\overset{(2)}{\gamma}\,] = a_z\,[(\overset{(2)}{N} - b_i\overset{(2)}{M^i})\overset{(1)}{\alpha} - \overset{(2)}{M^i}\overset{(1)}{\beta_i} + \overset{(2)}{T}\,\overset{(1)}{\gamma}\,] =$$

$$= a_z\left[\frac{\overset{(1)}{N}\,\overset{(2)}{N} - b_i\,(\overset{(1)}{M^i}\overset{(2)}{N} + \overset{(2)}{M^i}\overset{(1)}{N}) + b_{ij}\overset{(1)}{M^i}\overset{(2)}{M^j}}{EA} + \frac{\overset{(1)}{T}\,\overset{(2)}{T}}{GJ}\right].$$

care are sensul de energie de deformare specifică a forțelor unui sistem $(\overset{(1)}{\bar{u}}, \overset{(1)}{\bar{\theta}})$, prin deplasările celuilalt sistem, $(\overset{(2)}{\bar{u}}, \overset{(2)}{\bar{\theta}})$.

Alături de energia de deformare $W_{P_1P_2}$ a barei se va considera şi funcționala energetică $V_{P_1P_2}$ definită prin

$$V_{P_1P_2} = W_{P_1P_2} + W_{P_1} + W_{P_2} = W_{P_1P_2} - \frac{1}{2}\,[\bar{\mathcal{R}}\bar{u} + \bar{\mathcal{M}}\bar{\theta}\,]_{P_1}^{P_2} \tag{9.6}$$

Variația funcționalei patratice V va avea expresia (avînd în vedere (8.7), (8.8)),

$$\delta V_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \delta \frac{\partial W}{\partial z}\, dz - [\bar{\mathcal{R}}\delta\bar{u} + \bar{\mathcal{M}}\delta\bar{\theta}]_{P_1}^{P_2} \tag{9.7}$$

În mod analog cu funcționala biliniară $\overset{12}{W}_{P_1P_2}$ se defineşte o funcțională biliniară $\overset{12}{V}_{P_1P_2}$ prin relația

$$\overset{12}{V}_{P_1P_2} = \overset{12}{W}_{P_1P_2} - [\overset{(1)}{\bar{\mathcal{R}}}\overset{(2)}{\bar{u}} + \overset{(1)}{\bar{\mathcal{M}}}\,\overset{(2)}{\bar{\theta}}\,]_{P_1}^{P_2} \tag{9.8}$$

(ea este simetrică datorită simetriei lui W şi a relației (8.6)).

Fiind o sumă de funcţionale pozitive, funcţionala V este şi ea o funcţională pozitivă. Se poate arăta că, în anumite condiţii, V este chiar pozitiv definită. În cele de mai jos va fi demonstrată această proprietate pentru cazul extremităţii P_1 perfect încastrate. Din (2.11) rezultă

$$\bar{\theta}_P = \int_{P_1}^{P_2} [\gamma\bar{\tau} + (\beta_i + \alpha b_i)\, c^{ij}\bar{m}_j]\, a_z dz. \tag{9.9}$$

După o serie de calcule,

$$|\bar{\theta}_P| \leqslant \int_{P_1}^{P} |\gamma\bar{\tau} + (\beta_i + \alpha b_i)\, c^{ij}\bar{m}_j \,|\, a_z dz \leqslant \int_{P_1}^{P_2} |\gamma\bar{\tau} + (\beta_i + \alpha b_i)\, c^{ij}\bar{m}_j \,|\, a_z dz$$

$$[\bar{\theta}_P]^2 \leqslant [\int_{P_1}^{P_2} |\gamma\bar{\tau} + (\beta_i + \alpha b_i)\, c^{ij}\bar{m}_j \,|\, a_z dz]^2 \leqslant l \int_{P_1}^{P_2} [\gamma\bar{\tau} + (\beta_i + \alpha b_i)\, c^{ij}\bar{m}_j]^2 a_z dz =$$

$$= l \int_{P_1}^{P_2} [b^2\alpha^2 + 2b_i\beta^i\alpha + p^{ij}\beta_i\beta_j + \gamma^2]\, a_z dz \leqslant 2l \int_{P_1}^{P_2} (b^2\alpha^2 + p^{ij}\beta_i\beta_j +$$

$$+ \gamma^2)\, a_z dz \leqslant 2lk \int_{P_1}^{P_2} [EA\,(\alpha^2 + a^{ij}\beta_i\beta_j) + GJ\gamma^2]\, a_z dz = 4lk\, W_{P_1P_2} \leqslant 4lk V_{P_1P_2}$$

$$k = \sup. \left\{\frac{b^2}{EA}; \frac{p^{ij}\beta_i\beta_j}{EAa^{ij}\beta_i\beta_j}; \frac{1}{GJ}\right\},$$

rezultă inegalitatea

$$\int_{P_1}^{P_2} [\bar{\theta}]^2 a_z dz \leqslant \int_{P_1}^{P_2} 4lk\, V_{P_1P_2} a_z dz = 4l^2k\, V_{P_1P_2}. \tag{9.10}$$

Din (2.11) rezultă de asemenea

$$\bar{u}_P = \int_{P_1}^{P_2} [\alpha\bar{\tau} + \bar{\theta} \times \bar{\tau}]\, a_z dz. \tag{9.11}$$

După o nouă serie de calcule,

$$|\, \bar{u}_P \,| \leqslant \int_{P_1}^{P} |\alpha\bar{\tau} + \bar{\theta} \times \bar{\tau} \,|\, a_z dz \leqslant \int_{P_1}^{P_2} |\alpha\bar{\tau} + \bar{\theta} \times \bar{\tau} \,|\, a_z dz,$$

$$[\bar{u}_P]^2 \leqslant [\int_{P_1}^{P_2} |\, \alpha\bar{\tau} + \bar{\theta} \times \bar{\tau} \,|\, a_z dz]^2 \leqslant l \int_{P_1}^{P_2} [\alpha\bar{\tau} + \bar{\theta} \times \bar{\tau}]^2\, a_z dz \leqslant l \int_{P_1}^{P_2} (\alpha^2 + \bar{\theta}^2)\, a_z dz =$$

$$= l \int_{P_1}^{P_2} \alpha^2 a_z dz + l \int_{P_1}^{P_2} [\bar{\theta}]^2\, a_z dz \leqslant \frac{2l}{\inf. \{EA\}}\, W_{P_1P_2} + 4l^3k\, V_{P_1P_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{2l}{\inf. \{EA\}} + 4l^3k\right] V_{P_1P_2},$$

rezultă inegalitatea

$$\int_{P_1}^{P_2} [\bar{u}]^2 a_z dz \leqslant \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{2l}{\text{inf.}\,\{EA\}} + 4l^3k \right] V_{P_1P_2}\, a_z dz = \left[\frac{2l^2}{\text{inf.}\,\{EA\}} + 4l^4k \right] V_{P_1P_2}. \tag{9.12}$$

Inegalitățile (9.10), (9.12), sînt echivalente cu sistemul

$$\begin{gathered} V_{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{4l^2k} \int_{P_1}^{P_2} [\bar{\theta}]^2 a_z dz, \\ V_{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{\dfrac{2l^2}{\text{inf.}\,\{EA\}} + 4l^4k} \int_{P_1}^{P_2} [\bar{u}]^2 a_z dz. \end{gathered} \tag{9.13}$$

Din sistemul (9.13) rezultă, sumînd,

$$\begin{gathered} V_{P_1P_2} \geqslant \frac{1}{\dfrac{4l^2}{\text{inf.}\,\{EA\}} + 8l^4k} \int_{P_1}^{P_2} [\bar{u}]^2\, a_z dz + \frac{1}{8l^2k} \int_{P_1}^{P_2} [\bar{\theta}]^2 a_z dz \geqslant h^2 \int_{P_1}^{P_2} (k_1^2 \bar{u}^2 + k_2^2 \bar{\theta}^2) a_z dz \\ h^2 = \text{inf.} \left\{ \frac{1}{k_1^2 \left[\dfrac{4l^2}{\text{inf.}\,\{EA\}} + 8l^4k \right]} ; \frac{1}{8l^2kk_2^2} \right\}. \end{gathered} \tag{9.14}$$

Din (9.14) rezultă faptul că, orice coeficienți pozitivi k_1^2 și k_2^2 s-ar alege, în vederea definirii unei norme a torsorului $(\bar{u}, \bar{\theta})$, funcționala V este pozitiv definită în ipotezele admise. Aceasta este echivalent cu o teoremă de existență și unicitate pentru problema statică formulată în deplasări. Demonstrația de mai sus, deci teorema de existență și unicitate sînt extensibile și la alte condiții la limită, dacă acestea satisfac relația (8.8), făcînd imposibilă o deplasare rigidă (8.3).

Funcția de forță, $U_{P_1P_2}$, a problemei barei va fi definită prin

$$\delta U_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z}\, \delta \bar{u} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\, \delta \bar{\theta} \right] dz, \tag{9.15}$$

$$U_{P_1P_2} = \int_0^{(\bar{u},\, \bar{\theta})} \delta U_{P_1P_2}.$$

Dacă se consideră o variație a poziției deformate a barei, forțele care acționează asupra barei vor produce o variație a lucrului mecanic,

$$
\begin{aligned}
\delta L^{W}_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} [\bar{\mathfrak{r}}_z \delta\bar{u} + \bar{\mathfrak{m}}_z \delta\bar{\theta}]\, dz + [\bar{\mathcal{R}} \delta\bar{u} + \bar{\mathcal{M}} \delta\bar{\theta}]_{P_1}^{P_2} = \\
&= \int_{P_1}^{P_2} \Big[\Big(\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial z} + \bar{\mathfrak{r}}_z \Big) \delta\bar{u} + \Big(\frac{\partial \bar{\mathcal{M}}}{\partial z} + \bar{\rho}_z \times \bar{\mathcal{R}} + \bar{\mathfrak{m}}_z \Big) \delta\bar{\theta} + \\
&\qquad + \bar{\mathcal{R}} \frac{\partial \delta\bar{u}}{\partial z} - (\bar{\mathcal{R}} \delta\bar{\theta} \bar{\rho}_z) + \bar{\mathcal{M}} \frac{\partial \delta\bar{\theta}}{\partial z} \Big] dz = \\
&= \int_{P_1}^{P_2} \Big(\frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}}{\partial z} \delta\bar{u} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{M}}}{\partial z} \delta\bar{\theta} \Big) dz + \int_{P_1}^{P_2} \Big[\bar{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial \delta\bar{u}}{\partial z} - \delta\bar{\theta} \times \bar{\rho}_z \Big) + \bar{\mathcal{M}} \frac{\partial \delta\bar{\theta}}{\partial z} \Big] dz.
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

Ultima integrală din ultimul membru este egală cu variația energiei de deformare. Într-adevăr,

$$
\begin{aligned}
&\int_{P_1}^{P_2} \Big[\bar{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial \delta\bar{u}}{\partial z} - \delta\bar{\theta} \times \bar{\rho}_z \Big) + \bar{\mathcal{M}} \frac{\partial \delta\bar{\theta}}{\partial z} \Big] dz = \int_{P_1}^{P_2} \Big[\bar{\mathcal{R}} \Big(\delta \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \delta\bar{\theta} \times \bar{\rho}_z \Big) + \bar{\mathcal{M}} \delta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big] dz = \\
&= \int_{P_1}^{P_2} [\bar{\mathcal{R}} \bar{\tau} \delta\alpha + T \delta\gamma - M^i (\delta\beta_i + b_i \delta\alpha)]\, a_z dz = \int_{P_1}^{P_2} [(N - b_i M^i)\, \delta\alpha - \\
&\qquad - M^i \delta\beta_i + T \delta\gamma]\, a_z dz = \delta W_{P_1P_2}
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

Ținînd seama de (9.15) și (9.17), relația (9.16) se poate scrie

$$
\delta L^{W}_{P_1P_2} = \delta W_{P_1P_2} + \delta U_{P_1P_2}. \tag{9.18}
$$

Dacă se consideră numai lucrul mecanic al torsorului distribuit ($\bar{\mathfrak{r}}_z$, $\bar{\mathfrak{m}}_z$), în locul lui (9.16) se va scrie

$$
\begin{aligned}
\delta L^{V}_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} (\bar{\mathfrak{r}}_z \, \delta\bar{u} + \bar{\mathfrak{m}}_z \delta\bar{\theta})\, \mathrm{d}z = \delta L^{W}_{P_1P_2} - \\
&\quad - [\bar{\mathcal{R}} \delta\bar{u} + \bar{\mathcal{M}} \delta\bar{\theta}]_{P_1}^{P_2} = \delta V_{P_1P_2} + \delta U_{P_1P_2}.
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

Din relațiile (9.18) și (9.19) rezultă

$$
\delta L^{W}_{P_1P_2} - \delta W_{P_1P_2} = \delta L^{V}_{P_1P_2} - \delta V_{P_1P_2} = \delta U_{P_1P_2}. \tag{9.20}
$$

Din simetria mărimilor $\delta W_{P_1P_2}$ și $\delta V_{P_1P_2}$ rezultă și simetria mărimilor $\delta (L^{W}_{P_1P_2} - U_{P_1P_2})$ și, respectiv, $\delta (L^{V}_{P_1P_2} - U_{P_1P_2})$.

Dacă se consideră o deplasare virtuală ($\delta\bar{u}$, $\delta\bar{\theta}$), rezultă, din satisfacerea ecuațiilor (7.2), condiția

$$
\begin{aligned}
\delta F_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \Big[\Big(- \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \Big) \delta\bar{u} + \Big(- \frac{\partial \bar{\mathcal{M}}}{\partial z} - \bar{\rho}_z \times \bar{\mathcal{R}} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial z} \Big) \delta\bar{\theta} \Big] dz = \\
&= \delta V_{P_1P_2} - \int_{P_1}^{P_2} (\delta\bar{u}\, d_z \bar{R} + \delta\bar{\theta}\, d_z \bar{M}) = 0.
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

Dacă torsorul $\left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{M}}{\partial z}\right)$ este dat, determinarea soluţiei $(\bar{u}, \bar{\theta})$ se reduce la găsirea minimului funcţionalei $F_{P_1P_2}$,

$$F_{P_1P_2} = V_{P_1F_2} - \int_0^{(\bar{u}, \bar{\theta})} \left[\int_{P_1}^{P_2} (\delta \bar{u}\, d_z \bar{R} + \delta \bar{\theta}\, d_z \bar{M})\right], \tag{9.22}$$

pe mulţimea torsorilor $(\bar{u}, \bar{\theta})$ compatibili cu condiţiile la limită.

10. Simetria funcţionalelor biliniare $\overset{12}{W}$ şi $\overset{12}{V}$ conduce la simetria funcţionalelor biliniare echivalente

$$\begin{aligned} (L^W_{P_1P_2} \overset{12}{-} U_{P_1P_2}) &= \overset{12}{L^W_{P_1P_2}} - \overset{12}{U}_{P_1P_2} = \overset{12}{W}_{P_1P_2}, \\ (L^V_{P_1P_2} \overset{12}{-} U_{P_1P_2}) &= \overset{12}{L^V_{P_1P_2}} - \overset{12}{U}_{P_1P_2} = \overset{12}{V}_{P_1P_2}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Efectuînd calculele, se constată uşor că se poate scrie

$$\begin{aligned} (L^V_{P_1P_2} \overset{12}{-} U_{P_1P_2}) &= \int_{P_1}^{P_2} \left[\left(\overset{(1)}{\bar{\mathfrak{r}}}_z - \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{\mathfrak{R}}}}{\partial z}\right) \overset{(2)}{\bar{u}} + \left(\overset{(1)}{\bar{\mathfrak{m}}}_z - \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{\mathfrak{M}}}}{\partial z}\right) \overset{(2)}{\bar{\theta}}\right] dz = \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \overset{(1)}{\bar{R}}}{\partial z} \overset{(2)}{\bar{u}} + \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{M}}}{\partial z} \overset{(2)}{\theta}\right) dz = \int_{P_1}^{P_2} (d_z \overset{(1)}{\bar{R}} \overset{(2)}{u} + d_z \overset{(1)}{\bar{M}} \overset{(2)}{\bar{\theta}}). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Simetria funcţionalei $(L^V_{P_1P_2} \overset{12}{-} U_{P_1P_2})$ ia deci forma

$$\int_{P_1}^{P_2} (d_z \overset{(1)}{\bar{R}} \overset{(2)}{\bar{u}} + d_z \overset{(1)}{\bar{M}} \cdot \overset{(2)}{\bar{\theta}}) = \int_{P_1}^{P_2} (d_z \overset{(2)}{\bar{R}} \overset{(1)}{\bar{u}} + d_z \overset{(2)}{\bar{M}} \overset{(1)}{\bar{\theta}}). \tag{10.3}$$

Din (8.2) rezultă, în ipoteza admisă la punctul 8, a imposibilităţii apariţiei deplasării rigide, că torsorul $(\bar{u}, \bar{\theta})$ este o funcţională de torsorul $\left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{M}}{\partial z}\right)$,

$$\begin{aligned} \bar{u}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \bar{M}_Q\right), \\ \bar{\theta}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \bar{M}_Q\right). \end{aligned} \tag{10.4}$$

Introducînd expresiile (10.4) în (10.3), rezultă simetria identică a expresiei

$$\begin{aligned} (L^V_{P_1P_2} \overset{12}{-} U_{P_1P_2}) = \int_{P_1}^{P_2}\int_{P_1}^{P_2} \Bigg[&\left(\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \overset{(2)}{\bar{R}}_Q + \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \overset{(2)}{\bar{M}}_Q\right) d_z \overset{(1)}{\bar{R}}_P + \\ &+ \left(\frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \overset{(2)}{\bar{R}}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \overset{(2)}{\bar{M}}_Q\right) d_z \overset{(1)}{\bar{M}}_P \Bigg], \end{aligned} \tag{10.5}$$

care conduce la relațiile de simetrie

$$\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{R}_Q} = \frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{R}_P}\,; \quad \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{M}_Q} = \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{R}_P}\,; \quad \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{M}_Q} = \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{M}_P} \tag{10.6}$$

pentru nucleii tensoriali din (10.4). Relațiile (10.6) sînt echivalente cu relațiile lui Maxwell de la bara dreaptă, generalizate pentru cazul evoluției dinamice a barei subțiri oarecare.

Relațiile de simetrie (10.6) conduc la o expresie echivalentă cu (10.4), avînd o semnificație energetică,

$$\begin{aligned} \bar{u}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{R}_P} d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{R}_P} d_z \bar{M}_Q \right), \\ \bar{\theta}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{M}_P} d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{M}_P} d_z \bar{M}_Q \right). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Expresiile (10.7) se puteau deduce și pe altă cale, derivînd în raport cu $\bar{R}$ și $\bar{M}$ în (10.3).

Efectuînd o integrare prin părți în (10.7), se obțin (v. relațiile (9.6), (9.16), (10.1), (10.2)) formulele de calcul pentru torsorul $(\bar{u}, \bar{\theta})$, echivalente cu formulele Maxwell—Mohr,

$$\begin{aligned} \bar{u}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \alpha_Q}{\partial \bar{R}_P} (N_Q - b_i M^i_Q) - \frac{\partial \beta_{iQ}}{\partial \bar{R}_P} M^i_Q + \frac{\partial \gamma_Q}{\partial \bar{R}_P} T_Q \right] (a_z dz)_Q - \left[\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{R}_P} \bar{\mathcal{R}}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{R}_P} \bar{\mathcal{M}}_Q \right]_{P_1}^{P_2} \\ \bar{\theta}_P &= \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \alpha_Q}{\partial \bar{M}_P} (N_Q - b_i M^i_Q) - \frac{\partial \beta_{iQ}}{\partial \bar{M}_P} M^i_Q + \frac{\partial \gamma_Q}{\partial \bar{M}_P} T_Q \right] (a_z dz)_Q - \left[\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{M}_P} \bar{\mathcal{R}}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_Q}{\partial \bar{M}_P} \bar{\mathcal{M}}_Q \right]_{P_1}^{P_2} \end{aligned} \tag{10.8}$$

Dacă se efectuează în (10.4) derivări în raport cu z_P, se pot obține relații de definiție funcționale asemănătoare pentru α_P, β^i_P, γ_P, $\bar{\mathcal{R}}_P$, $\bar{\mathcal{M}}_P$.

Nucleii funcționalelor considerate mai sus au semnificația generală de funcții de influență tensoriale.

Cu ajutorul nucleilor adoptați la punctul 10 se poate da o nouă definiție energiei de deformare W, și funcționalei energetice V, pe baza relațiilor (10.1)

$$\begin{aligned} W_{P_1P_2} &= \frac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} (\bar{u}\, d_z \bar{R} + \bar{\theta}\, d_z \bar{M}) + \frac{1}{2} [\bar{u} \bar{\mathcal{R}} + \bar{\theta} \bar{\mathcal{M}}]_{P_1}^{P_2} = V_{P_1P_2} + \frac{1}{2} [\bar{u} \bar{\mathcal{R}} + \theta \bar{\mathcal{M}}]_{P_1}^{P_2} \\ V_{P_1P_2} &= \frac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \bar{R}_P\, d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \bar{R}_P\, d_z \bar{M}_Q + \right. \\ &\left. \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{R}_Q} d_z \bar{M}_P\, d_z \bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{M}_Q} d_z \bar{M}_P\, d_z \bar{M}_Q \right) \end{aligned} \tag{10.9}$$

şi ţinînd seama de

$$\frac{1}{2}\,[\bar{u}\,\bar{\mathcal{R}} + \bar{\theta}\,\bar{\mathcal{M}}]_{P_1}^{P_2} = \frac{1}{2}\left[\bar{\mathcal{R}}_P \int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}\, d_z\,\bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{M}}_Q}\, d_z\,\bar{M}_Q\right) + \right. \qquad (10.10)$$

$$\left. + \bar{\mathcal{M}}_P \int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}\, d_z\,\bar{R}_Q + \frac{\partial \bar{\theta}_P}{\partial \bar{\bar{M}}_Q}\, d_z\,\bar{M}_Q\right)\right]_{P_1}^{P_2}$$

Dacă se consideră forma polară a mărimilor din (10.10), se poate obţine din (8.6) o relaţie de simetrie pentru funcţionala biliniară din membrul doi (10.10) sau pentru o funcţională echivalentă obţinută prin înlocuirea nucleului pe baza relaţiilor (10.6).

În timp ce formulele (9.2), (9.3), (9.8), dau expresiile funcţionalelor energetice ca funcţionale asociate unor operatori diferenţiali aplicaţi torsorului ($\bar{u}$, $\bar{\theta}$), formulele (10.9), (10.10) dau aceleaşi mărimi ca funcţionale asociate unor operatori funcţionali aplicaţi torsorului ($\bar{R}$, $\bar{M}$). Se pot utiliza în concluzie metodele funcţionale nu numai pentru problemele referitoare la bara elastică formulate diferenţial, ci şi pentru aceleaşi probleme formulate funcţional, fapt care oferă puternice metode de calcul, în special în studiul calitativ şi problemele de valori proprii.

Primită la redacţie la 28 martie 1959, o nouă versiune la 26 iulie 1959

УРАВНЕНИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ. I

РЕЗЮМЕ

В работе приводятся общие уравнения упругих тонких стержней, имеющих в качестве оси произвольную, но достаточно правильную пространственную кривую.

В первой части работы излагаются элементы геометрии пространственной кривой и пространственного кривого стержня до и после деформации, отношения касающиеся сил и энергетических функционалов стержня, а вторая часть посвящается уравнениям движения и неустойчивости.

Геометрические соотношения кривой исследуются при помощи общей системы отсчета, принимая параметр z вдоль кривой, производные позиционного вектора и два произвольных вектора нормальных к кривой вместе с обратными им величинами. Выявляются геометрические величины кривой (продольная метрика, кривизна, кручение), до и после деформации, причем даются общие выражения удлинения, искривления и увеличения кручения и соотношения между лагранжевыми и эйлеровыми представлениями векторов.

Геометрические соотношения пространственного кривого стержня изучаются таким же образом. При исследовании деформации стержня

автор исходит из предположения неизменности поперечного сечения, получая таким образом выражения деформации материала стержня, в зависимости от деформации оси стержня.

Соотношения между деформациями оси стержня устанавливаются на основании закона Гука. Исследуется влияние деформации стержня на внешние силы, задача определения перемещений при известных деформациях и граничных условиях.

Даются выражения таких энергетических функционалов, как энергия деформации стержня и опор, функция силы, механическая работа и минимальный функционал задачи равновесия стержня. Указывается, что общая энергия деформации является положительно определенной, откуда вытекает теорема существования и единственности задачи равновесия стержня.

ÉQUATIONS DES BARRES ÉLASTIQUES MINCES. I

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente, sous une forme générale, les équations des barres élastiques minces dont l'axe est une courbe gauche arbitraire, suffisamment régulière.

Dans la première partie du travail, il expose les éléments introductifs de la géométrie de la courbe gauche et de la barre courbe gauche, avant et après sa déformation, et des relations concernant les forces et les fonctionnelles énergétiques de la barre. La seconde partie comprendra les équations du mouvement et de l'instabilité.

Les relations géométriques de la courbe gauche sont étudiées au moyen d'un système de référence général, en prenant un paramètre z le long de la courbe, les dérivées du vecteur de position et deux vecteurs normaux à la courbe, arbitraires, ainsi que leurs réciproques. L'auteur fait ressortir les grandeurs géométriques de la courbe (métrique longitudinale, courbure, torsion), avant et après la déformation, et donne des formules générales exprimant l'allongement, la flexion et l'accroissement de la torsion, ainsi que des relations entre les représentations de Lagrange et d'Euler pour les vecteurs.

Les relations géométriques de la barre courbe gauche sont étudiées de la même manière. Dans l'étude de la déformation de la barre on prend comme point de départ l'hypothèse de la conservation de la section transversale et l'on exprime ainsi les déformations du matériel de la barre en fonction des déformations de l'axe de cette barre.

Les relations entre les déformations de l'axe de la barre et les forces agissant sur la section transversale sont établies en vertu de la loi de Hooke. L'auteur étudie l'influence de la déformation de la barre sur les forces extérieures, le problème de la détermination des déplacements dans le cas où les déformations sont connues, et les conditions aux limites.

Il fournit des formules pour les fonctionnelles énergétiques, telles que l'énergie de déformation de la barre et des appuis, la fonction de force, le travail et la fonctionnelle minimum du problème de l'équilibre de la barre. Il montre que l'énergie totale de déformation est positivement définie, d'où il résulte un théorème d'existence et d'unicité dans le problème de l'équilibre de la barre.

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. БАБАКОВ, *Теория колебаний.* ГИТТЛ, Москва, 1958.
2. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем.* ГИТТЛ, Москва, 1956.
3. H. GOLDSTEIN, *Классическая механика.* ГИТТЛ. Москва, 1957.
4. А. И. ЛУРИЕ, *Общая теория упругих тонких оболочек*, ПММ, **IV**, *2*, Москва, 1940.
5. С. Г. МИХЛИН, *Прямые методы в математической физике.* ГИТТЛ, Москва, 1950.
6. Я. Л. НУДЕЛБМАН, *Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем.* Гостехиздат, 1949.
7. П. Ф. ПАПКОВИЧИ, *Строительная механика корабля.* II. Судпромгиз, Ленинград, 1941.
8. С. Д. ПОНОМАРЕВ, etc., *Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini.* **II** Editura tehnică, Bucureşti, 1956.
9. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем.* ГИТТЛ, Москва, 1955.
10. С. ТИМОШЕНКО, *Устойчивость упругих систем*, ГИТТЛ, Москва, 1955.

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR, ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

UNELE PROBLEME ALE TORSIUNII BARELOR CILINDRICE CU STRAT EXTERIOR DE MATERIAL DIFERIT

DE

N. BOICU

În practică se întîlnesc numeroase piese în formă de bare cilindrice la care constantele elastice ale stratului exterior de material sînt diferite de ale miezului piesei. Astfel sînt de exemplu bare cilindrice metalizate sau supuse unor tratamente termice şi de suprafaţă care schimbă caracteristicile elastice ale stratului exterior. Lucrarea de faţă se ocupă de studiul torsiunii unor astfel de piese.

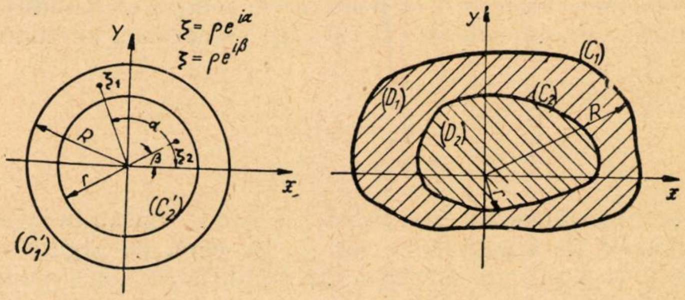


Fig. 1

1. Să considerăm o bară cilindrică (fig. 1) formată din două materiale diferite, μ_1 fiind constanta lui Lammé a stratului exterior iar μ_2, a miezului.

Problema torsiunii unei asemenea bare cilindrice revine la a determina două funcţii ψ_1 şi ψ_2 care să îndeplinească următoarele condiţii în domeniile lor de definiţie :

$$\Delta\psi_1 = 0 \text{ în } D_1\,; \ \Delta\psi_2 = 0 \text{ în } D_2\,; \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

iar pe conturul exterior și de separație a materialelor să satisfacă condițiile la limită :

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{2}\,\mathcal{R}^2 + K \text{ pe } C_1 \\
\varphi_1 &= \varphi_2 \qquad\qquad \text{pe } C_2 \\
\mu_1\,\psi_1 - \mu_2\,\psi_2 &= (\mu_1 - \mu_2)\,\frac{t^2}{2} \text{ pe } C_2 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Prin φ_1 și φ_2 s-au notat funcțiile conjugate armonic ale funcțiilor ψ_1 respectiv ψ_2. Prima din relațiile (2) este dedusă din condiția ca suprafața exterioară a barei cilindrice (în secțiune transversală conturul C_1) să fie liberă de tensiuni, a doua este condiția ca deformațiile pe suprafața de separație (c_2) a celor două materiale să fie egale iar ultima relație este condiția ca tensiunile pe suprafața de separație (C_2) să fie egale și de semn contrar. Suprafața exterioară este liberă de tensiuni și eforturile sînt egale pe suprafața de separație a materialelor la orice bară cilindrică. Deformațiile însă sînt egale doar dacă cele două materiale lucrează solidar. Dintr-un anumit punct de vedere acesta reprezintă un caz extrem. Celălalt caz extrem este cazul în care cele două materiale nu sînt solidarizate pe suprafața de separație, deci materialele se contrag în mod diferit. Se arată ușor că în acest caz materialele se comportă ca și cum ar fi torsionate independent, momentul de torsiune fiind preluat proporțional cu rigiditățile și cu constantele lui Lammé.

2. Problemei enunțate i se poate scrie soluția utilizîndu-se transformările conforme ale domeniilor (D_1) și (D_2) pe coroana circulară, respectiv pe cerc.

Fie

$$
\begin{aligned}
z_1 &= f_1(\zeta_1), \\
z_2 &= f_2(\zeta_2),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

funcțiile de transformare conformă, ζ_1 fiind variabila complexă pe coroana circulară de argument α iar ζ_2 pe cerc, de argument β. Între argumentele α și β se scrie o relație din condiția ca două puncte ζ_1 și ζ_2 de pe cercul (C_2') prin cele două transformări conforme (3) să se transforme în unul și același punct, z, de pe conturul de separație (C_2).

$$
f_1(\zeta_1) = f_2(\zeta_2) \text{ pe } C_2' . \tag{4}
$$

Tot din (3) se obțin și expresiile pentru $\mathcal{R}^2$ și t^2, pe care le luăm de forma unor serii Fourier :

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1\bar{z}_1}{2} &= \frac{\mathcal{R}^2(\alpha)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha) \text{ pe } (C_1), \\
\frac{\bar{z}_1 z_1}{2} &= \frac{t^2(\alpha)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha) \text{ pe } (C_2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Vom căuta funcțiile ψ_1 și ψ_2 de forma

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(a_n \rho^n + \frac{b_n}{\rho^n}\right) \cos n\alpha + \left(c_n \rho^n - \frac{d_n}{\rho^n}\right) \sin n\alpha\right], \\ \psi_2(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} (h_n \rho^n \cos n\beta - g_n \rho^n \sin n\beta). \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru conjugatele armonice ale funcțiilor ψ_1 și ψ_2, se obțin expresiile

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(c_n \rho^n + \frac{d_n}{\rho^n}\right) \cos n\alpha - \left(a_n \rho^n - \frac{b_n}{\rho^n}\right) \sin n\alpha\right], \\ \varphi_2(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} (g_n \rho^n \cos n\beta + h_n \rho^n \sin n\beta). \end{aligned} \tag{7}$$

Constantele a_n, b_n, c_n, d_n, h_n, g_n se determină din condițiile la limită (2).

Considerînd (fig. 1) că cercul de rază R se transformă prin funcția de transformare $z_1 = f_1(\zeta_1)$ în conturul (C_1) din prima condiție la limită (2) și expresiile (5) și (6) se obține

$$\begin{aligned} a_p R^p + \frac{b_p}{R^p} &= A_p, \\ c_p R^p - \frac{d_p}{R^p} &= B_p. \end{aligned} \tag{8}$$

Notînd cu r raza cercului care prin funcția $z_1 = f_1(\zeta_1)$ se transformă în conturul (C_2) și făcînd printr-o omotetie ca funcția $z_2 = f_2(\zeta_2)$ să transforme interiorul conturului C_2 pe interiorul unui cerc de rază r, din condițiile la limită (2) cu expresiile (5), (6) și (7) se găsesc din încă patru serii de relații. Acestea împreună cu relațiile (8), determină după cum se va vedea în mod unic cele șase șiruri de necunoscute ale problemei

$$\mu_1 \pi \left(a_p r^p + \frac{b_p}{r^p}\right) - \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (g_n r^n I'_{np} + h_n r^n I''_{np}) = (\mu_1 - \mu_2)\, \pi\, C_p, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \pi \left(c_p r^p - \frac{d_p}{r^p}\right) - \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (g_n r^n I'''_{np} + h_n r^n I^{\mathrm{IV}}_{np}) &= (\mu_1 - \mu_2)\, \pi\, D_p, \\ \pi \left(c_p r^p + \frac{d_p}{r^p}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (h_n r^n I'_{np} - g_n r^n I'''_{np}) &= 0, \\ \pi \left(a_p r^p - \frac{b_p}{r^p}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (h_n r^n I'''_{np} - g_n r^n I^{\mathrm{IV}}_{np}) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

I'_{np}, I''_{np}, I'''_{np} și I^{IV}_{np} au expresiile

$$I'_{np} = \oint \cos n\beta \cos p\alpha\, d\alpha; \quad I''_{np} = \oint \sin n\beta \cos p\alpha\, d\alpha,$$

$$I'''_{np} = \oint \cos n\beta \sin p\alpha\, d\alpha; \quad I^{\mathrm{IV}}_{np} = \oint \sin n\beta \sin p\alpha\, d\alpha.$$

Se observă că seriile modulelor coeficienţilor I_{np} sînt absolut convergente.

Suma în raport cu p

$$S'_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left| \oint \cos n\beta \cos p\alpha \, d\alpha \right| \tag{11}$$

este convergentă, deoarece reprezintă suma modulelor coeficienţilor dezvoltării în serie Fourier a funcţiei $\cos n\beta$, care în anumite condiţii este o funcţie netedă pe porţiuni de argumentul α. În acelaşi mod se arată că şi seriile

$$S''_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left| I''_{np} \right|, \quad S'''_{np} = \sum_{p=0}^{\infty} \left| I'''_{np} \right|, \quad S^{IV}_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left| I^{IV}_{np} \right|$$

sînt convergente.

Suma în raport cu n, $S'_p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| I'_{np} \right|$, poate fi pusă sub forma

$$S'_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \oint \left(\frac{d\alpha}{d\beta} \cos p\alpha \right) \cos n\beta \, d\beta \right| \tag{12}$$

considerînd că $\frac{d\alpha}{d\beta} \cos p\alpha$ este o funcţiune netedă pe porţiuni de argumentul β, rezultă că şi suma S' are sens. În aceleaşi condiţii, seriile

$$S''_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| I''_{np} \right|, \quad S'''_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| I'''_{np} \right|, \quad S^{IV}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| I^{IV}_{np} \right|,$$

sînt de asemenea convergente.

Cazul acesta corespunde condiţiei ca linia de separaţie să nu aibă puncte unghiulare. În acest ultim caz, sistemul de ecuaţii algebric liniar infinit al problemei (ecuaţiile (8) şi (9)) este un sistem normal. Acest sistem poate fi adus în virtutea ultimei observaţii la forma unui sistem infinit normal în care apar doar necunoscutele g_n şi h_n.

Seriile ψ_1 şi ψ_2 care se obţin din rezolvarea sistemului infinit normal sînt convergente în domeniile în care au fost presupuse de forma (6), deoarece soluţia căutată a problemei este unică, dezvoltările în serii de forma (6) a funcţiilor armonice ψ_1 şi ψ_2 sînt de asemenea unice iar soluţia sistemului infinit este şi ea unică.

3. Prin particularizări se obţin din sistemul infinit scris anumite soluţii cunoscute, ca şi cazuri noi.

a) În cazul în care cele două funcţii de transformare conformă coincid, argumentul α de pe coroana circulară şi argumentul β de pe cerc, pe cercul C_2 coincid ($\alpha = \beta$), integralele I'_{np}, I''_{np}, I'''_{np}, I^{IV}_{np} se anulează pentru orice n şi p diferiţi iar pentru $n = p$ devin : $I'_{np} = I''_{np} = I'''_{np} = I^{\mathrm{IV}}_{np} = \pi$. Sistemul infinit (8), (9) are soluţia

$$
\begin{aligned}
a_p &= \frac{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^p}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,A_p + \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^p}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,C_p,\\
b_p &= \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}r^p}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,D_p + \frac{2r^{2p}+\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,\frac{B_p}{R^p},\\
c_r &= \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^p}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,D_p + \frac{2r^{2p}+\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\cdot\frac{B_p}{R^p},\\
d_p &= \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^pR^{2p}}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,D_p + \frac{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^pr^{2p}}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,B_p,\\
g_p &= \frac{2\frac{\mu_1}{\mu_2}R^p}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\,A_p + \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)(R^{2p}+r^{2p})}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\cdot\frac{C_p}{r^p},\\
h_p &= \frac{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)(R^{2p}+r^{2p})}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\cdot\frac{D_p}{r^p} + \frac{2r^{2p}+2\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}}{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)R^{2p}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)r^{2p}}\cdot\frac{B_p}{R^p}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Alegînd pentru r o valoare apropiată de raza exterioară, se obţin contururi (C_2) care urmăresc forma conturului exterior (C_1). Pe această cale se obţin rezultate utilizabile pentru studiul torsiunii unor piese care au la exterior un strat subţire de material cu proprietăţi elastice diferite de ale miezului piesei. Astfel se poate găsi influenţa asupra rigidităţii la torsiune şi asupra repartiţiei şi mărimii eforturilor de torsiune a metalizării în straturi subţiri sau a tratamentelor termice şi de suprafaţă, care schimbă constanta lui Lammé a stratului exterior. Deşi straturile superficiale de acest fel sînt în general subţiri, influenţa lor în cazul torsiunii este totuşi apreciabilă, deoarece straturile exterioare sînt cele mai puternic solicitate iar rigiditatea piesei de asemenea este substanţial influenţată de aceste straturi, mai ales pentru piesele de dimensiuni transversale mici. Pentru scrierea funcției de torsiune este necesară în acest caz funcția de transformare conformă a interiorului conturului (C_1) pe cerc.

b) Luînd în sistemul infinit (8), (9) $\mu_2 = 0$, se obține cazul tuburilor cilindrice. Rezolvînd în acest caz sistemul, se obțin pentru coeficienții funcției ψ_1 expresiile

$$a_n = \frac{A_n - \left(\frac{r}{R}\right)^n C_n}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}}\,; \quad b_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{C_n - \left(\frac{r}{R}\right)^n A_n}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}}, \tag{14}$$

$$c_n = \frac{B_n - \left(\frac{r}{R}\right)^n D_n}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}}, \quad d_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{B_n \left(\frac{r}{R}\right)^n - D_n}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}},$$

$$h_n = g_n = 0.$$

Pentru tuburile cilindrice este suficientă utilizarea funcției de transformare conformă a domeniului dublu conex al secțiunii transversale a barei pe coroana circulară.

c) Luînd cele două constante Lammé ale materialelor egale $(\mu_1 = \mu_2)$ şi făcînd $r = 0$, se găseşte funcția de torsiune pentru bara cilindrică plină. Pentru coeficienții funcției de torsiune rezultă expresiile :

$$a_n = \frac{A_n}{R^n}, \qquad c_n = \frac{B_n}{r^n}, \qquad b_n = d_n = g_n = h_n = 0. \tag{15}$$

Pentru cunoaşterea funcției de torsiune este suficientă transformarea conformă a secțiunii pline a barei pe cerc.

d) Soluția sistemului infinit (8), (9) poate fi scrisă pînă la capăt şi în cazul în care din relațiile (4) se poate explicita argumentul β în funcție de α printr-o relație de forma

$$e^{in\beta} = \sum_{r=0}^{\infty} A_{nr}\, e^{ir\alpha}, \tag{16}$$

în care coeficienții A_{nr} au valori sau numai reale sau numai imaginare. Cazul valorilor reale corespunde în general unor contururi cu simetrie față de axa x. Cazul în care coeficienții A_{nr} au numai valori imaginare corespunde unor contururi cu simetrie față de axa y.

Să ne fixăm asupra valorilor reale pentru coeficienții A_{nr}. În mod similar stau lucrurile în cazul valorilor imaginare. Integralele (10) care apar în sistemul infinit (9) devin (17) :

$$I'_{np} = I^{\mathrm{IV}}_{np} = \pi A_{np}, \quad I''_{np} = I'''_{np} = 0. \tag{17}$$

În sistemul infinit (9), în virtutea faptului că acest sistem este normal, putem face substituția

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n I'_{np} &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n I^{\mathrm{IV}}_{np} = u_p , \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n r^n I'_{np} &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n r^n I^{\mathrm{IV}}_{np} = v_p . \end{aligned} \tag{18}$$

Cu această substituție din cele 6 șiruri de ecuații se determină a_p, b_p, c_p, d_p, eliminîndu-se u_p și v_p. Se obține

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{r^p(\mu_1-\mu_2)C_p}{r^{2p}(\mu_1-\mu_2)-R^{2p}(\mu_1-\mu_2)} - \frac{R^p(\mu_1+\mu_2)A_p}{r^{2p}(\mu_1-\mu_2)-R^{2p}(\mu_1+\mu_2)} , \\ b_p &= \frac{R^{2p}r^{2p}(\mu_1-\mu_2)A_p}{r^{2p}(\mu_1-\mu_2)-R^{2p}(\mu_1+\mu_2)} - \frac{R^{2p}r^{2p}(\mu_1-\mu_2)C_p}{r^{2p}(\mu_1-\mu_2)-R^{2p}(\mu_1-\mu_2)} , \end{aligned} \tag{19}$$

$c_p = 0$
$d_p = 0$ cu care funcțiile φ_1, ψ_1, sînt complet determinate.

Cunoscînd funcțiile φ_1 și ψ_1 se găsesc valorile funcțiunilor φ_2 și ψ_2 pe cercul C_2. Mai departe funcțiile φ_2 și ψ_2 se scriu ca funcții armonice ale căror valori pe cerc sînt cunoscute.

e) În cele de pînă acum au fost evidențiate cîteva cazuri în care sistemul infinit algebric liniar de tip normal cu care se determină coeficienții funcțiilor de torsiune — ecuațiile (8) și (9) — se poate rezolva ușor, reducîndu-se la un sistem finit. În cazul general însă, rezolvarea sistemului infinit se face prin metode aproximative, care diferă de la caz la caz. Faptul că sistemul este de tip normal dă posibilitatea să se calculeze fără teama de a efectua calcule formale, care să conducă la rezultate eronate.

Vom aplica modul de abordare a problemei la studiul unui arbore cilindric circular cu gol interior excentric și cu strat exterior circular de material diferit. Acesta poate fi de exemplu un arbore metalizat.

Să considerăm un arbore ca în figura 2. Transformările conforme (3) ale domeniilor D'_1 și D'_2 pe D_1 respectiv pe D_2 sînt

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta_1 , \\ z_2 &= \frac{\zeta_2 - a}{1 - a\zeta_2} \cdot \quad \zeta_1 = \rho e^{i\alpha},\ \zeta_2 = \rho e^{i\beta} . \end{aligned} \tag{20}$$

Luînd pentru a și $|\zeta_2|$ valorile $a = \frac{3}{4}$ și $|\zeta_2| = \frac{1}{4}$, prin transformările conforme (20), din cercurile concentrice C'_1, C'_2 și C'_3 se obțin cercurile C_1, C_2 respectiv C_3 (fig. 2).

Relația (4) dintre argumentele α și β în acest caz este

$$e^{i\alpha} = \frac{e^{i\beta} - a}{1 - ae^{i\beta}} . \tag{21}$$

Integralele lor se calculează cu multă ușurință cu ajutorul teoremei reziduurilor. Se observă că aceste integrale se pot scrie sub forma

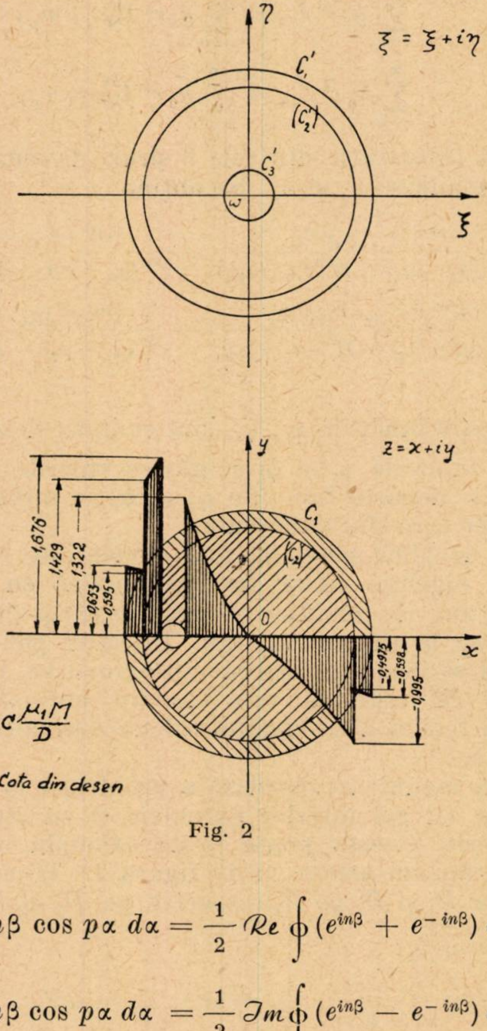

η
ζ = ξ + iη
C₁'
(C₂')
C₃'
ξ
y
z = x + iy
C₁
(C₂)
0
x
1,676
1,429
1,322
0,653
0,595
-0,4975
-0,598
-0,995
Y_z = - c μ₁M/D
C = Cota din desen

Fig. 2

$$I'_{np} = \oint \cos n\beta \cos p\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \oint (e^{in\beta} + e^{-in\beta}) \, e^{ip\alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \, d\beta,$$

$$I''_{np} = \oint \sin n\beta \cos p\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{I}m \oint (e^{in\beta} - e^{-in\beta}) \, e^{ip\alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \, d\beta,$$

$$I'''_{np} = \oint \cos n\beta \sin p\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{I}m \oint (e^{in\beta} + e^{-in\beta}) \, e^{ip\alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \, d\beta,$$

$$I^{IV}_{np} = \oint \sin n\beta \sin p\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \oint (e^{in\beta} - e^{-in\beta}) \, e^{ip\alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \, d\beta.$$

Înlocuind în expresiile de mai sus termenii $e^{ip\alpha}$ și $\frac{d\alpha}{d\beta}$ prin valorile date de (21), notînd $e^{i\beta} = z$ şi ţinînd seama de teorema reziduurilor, pentru integralele scrise se obţine

$$I''_{np} = I'''_{np} = 0,$$

$$I'_{np} = I^{\mathrm{IV}}_{np} = \frac{1-a^2}{2i}\oint \frac{(z-a)^{p-1}}{(1-az)^{p+1}}\, z^{-n}\, dz. \tag{22}$$

Modulele pătratelor razelor pe cele trei cercuri C'_1, C'_2 şi C'_3 date anterior de formulele (5), se scriu sub forma :

$$\frac{R^2(\alpha)}{2} = \frac{R^2}{2} \text{ pe } C'_1, \quad A_0 = \frac{1}{2}\left[a^2 + \frac{(1-a^2)^2 r^2}{1-a^2 r^2}\right],$$

$$\frac{r^2(\alpha)}{2} = \frac{1}{2} \text{ pe } C'_2, \quad A_p = -\frac{(1-a^2)(1-r^2)}{1-a^2r^2}\,(ar)^p, \tag{23}$$

$$\frac{r^2(\beta)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\beta \text{ pe } C'_3.$$

Funcţiile ψ_1 şi ψ_2 -- expresiile (6) şi (7) — ţinînd seama de simetria figurii şi de faptul că şi domeniul D_2 este cu dublă conexiune, trebuie luate de forma

$$\psi_1(\alpha) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho^n + \frac{b_n}{\rho^n}\right)\cos n\alpha.$$

$$\psi_2(\beta) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n\rho^n + \frac{j_n}{\rho^n}\right)\cos n\beta. \tag{24}$$

Pentru conjugatele armonice (7) ale funcţiilor ψ_1 şi ψ_2 se găsesc expresiile

$$\varphi_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{\rho^n} - a_n\rho^n\right)\sin n\beta,$$

$$\varphi_2(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{j_n}{\rho^n} - h_n\rho^n\right)\sin n\beta. \tag{25}$$

Condiţiile la limită ale problemei (2), se completează cu condiţia ca pe suprafaţa generată de conturul C_3 tensiunile să fie nule. Aceste condiţii la limită sînt

$$a_p R^p + \frac{b_p}{R^p} = 0,$$

$$h_p r^p + \frac{j_p}{r^p} = A_p$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)\sin n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}(j_n - h_n)\sin n\beta, \tag{26}$$

$$\mu_1\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)\cos n\alpha - \mu_2\sum_{n=1}^{\infty}(h_n + j_n)\cos n\beta.$$

Eliminînd j_n din ultimele două ecuații, multiplicîndu-le corespunzător, adunîndu-le și scăzîndu-le, sistemul (26) se transcrie ca mai înainte.

$$a_p R^p + \frac{b_p}{R^p} = 0$$

$$j_p = A_p r^p - h_p r^{2p}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} [b_n (\mu_2 \sin n\alpha + \mu_1 \cos n\alpha) + a_n (\mu_1 \cos n\alpha - \mu_2 \sin n\alpha)] = \\ = \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n [(1 - r^{2n}) \cos n\beta - (1 + r^{2n}) \sin n\beta] + \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \times \\ \times (\sin n\beta + \cos n\beta), \qquad (27) \\ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (\mu_1 \cos n\alpha + \mu_2 \sin n\alpha) + b_n (\mu_1 \cos n\alpha - \mu_2 \sin n\alpha)] = \\ = \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n [(1 - r^{2n}) \cos n\beta + (1 + r^{2p}) \sin n\beta] + \\ + \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n (\cos n\beta - \sin n\beta),\end{gathered}$$

ultimele două egalități (27) impun aceleași condiții coeficienților a_n, b_n și h_n. Pentru determinarea acestora se poate folosi oricare din egalități. Se observă că se pot neglija termenii r^{2n} $\left(r = \frac{1}{4}\right)$ și astfel se pot elimina coeficienții h_n și determina coeficienții a_n și b_n. Efectuînd calculele se găsește

$$a_p = \frac{-2\mu_2 S_p}{\pi [\mu_1 (R^{2p} - 1) + \mu_2 (R^{2p} + 1)]}, \tag{28}$$

$$b_p = - a_p R^{2p}, \qquad S_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n I'_{np}.$$

Funcția complexă de torsiune este

$$f_1 (\zeta_1) = \varphi_1 + i\psi_1 + i \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \zeta_1^n + \frac{b_n}{\zeta_1^n}\right), \tag{29}$$

iar efortul complex se calculează cu relația

$$X_{z_1} - iY_{z_1} = \frac{\mu_1 M}{D} \left(\frac{df_1}{dz_1} - i\bar{z}_1\right). \tag{30}$$

Calculînd numeric pentru valorile $a = \frac{3}{4}$; $|\zeta_2| = r = \frac{1}{4}$; $R = 1{,}2$ și $\mu_2 = 2\mu_1$ se găsește în domeniul D_1 distribuția de tensiuni din figura 2.

Pentru calculul coeficienților h_n se utilizează aceleași relații (27) în care se neglijează termenii r^{2n}. Se găsește:

$$h_n = \frac{S'_p}{2\pi}, \quad S'_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) - b_n \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right] I^{\mathrm{V}}_{np} \tag{31}$$
$$I^{v}_{np} = \oint \cos n\alpha \cos p\beta \, d\beta.$$

Integralele I^{V}_{np} se calculează ca și integralele I'_{np}. Se obține expresia

$$I^{\mathrm{V}}_{np} = \frac{1}{2i} \oint \frac{(z-a)^p}{(1-az)^p} z^{-(n+1)} \, dz. \tag{32}$$

Efectuînd calculele numerice se găsește starea de tensiuni reprezentată în figura 2.

Suprafețele hașurate reprezintă efortul tangențial Y_z în lungul liniei $y = 0$. În lungul aceleiași linii efortul X_{z2} este nul.

Primită la redacție la 26 iunie 1959, completată la 8 septembrie 1959

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОКРЫТИЕМ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается задача кручения цилиндрических стержней с покрытием из другого материала. При помощи конформных преобразований задача сводится к решению системы алгебраических уравнений нормального типа. В частных случаях бесконечная система решается без применения приближенных методов. Приводится также численное применение, в котором бесконечная система решается с использованием приближения, которому можно дать численную оценку.

QUELQUES PROBLÈMES DE LA TORSION DES BARRES CYLINDRIQUES À COUCHE EXTERNE D'UN MATÉRIEL DIFFÉRENT

RÉSUMÉ

Le travail traite de la torsion des barres cylindriques, dont la couche extérieure est d'un matériel différent. En utilisant des transformations conformes, le problème se réduit à résoudre un système d'équations algébriques de type normal. On obtient, par des particularisations, certains cas où le système infini est résolu sans recourir à des méthodes approximatives. On y présente, aussi, une application numérique où le système infini est résolu à l'aide d'une approximation qui peut être évaluée numériquement.

STUDII

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

ASUPRA ADERENȚEI STRATURILOR METALIZATE PE SUPRAFEȚE PLANE

DE

V. MARCU și P. FREUND

În ultimii ani procedeul de metalizare prin pulverizare a fost îmbogățit prin numeroase aparate și metode; astfel au apărut aparate care utilizează curenți de înaltă frecvență [1], aparate cu injector, metode de sudură prin metalizare [2] etc. Problemele cu privire la topirea și pulverizarea materialului de aport au fost rezolvate în mare măsură.

Cea mai dificilă problemă este cea a aderenței stratului de aport cu materialul de bază, în special pe suprafețe plane [3].

1. NOȚIUNI GENERALE

Aderența stratului metalizat, denumit strat de aport, la metalul de bază este de natură pur mecanică. Fenomene punctiforme de sudură la rece apar în mod cu totul izolat.

Aderența pe suprafețe de revoluție este o problemă tratată într-o lucrare anterioară [4]. Pentru precizarea noțiunilor vom reaminti unele definiții și rezultate.

Prin aderență înțelegem forța necesară pentru desprinderea unității de suprafață a stratului metalizat de pe piesa de bază. După direcția de acționare a acestei forțe deosebim aderența tangențial-axială (f_{tx}) tangențială (f_t) și radială sau normală ($f_{r.n}$) (fig. 1).

Aderența pe suprafețele de revoluție se realizează pe baza presiunii de fretaj care apare între stratul de aport și materialul de bază. Aderența depinde

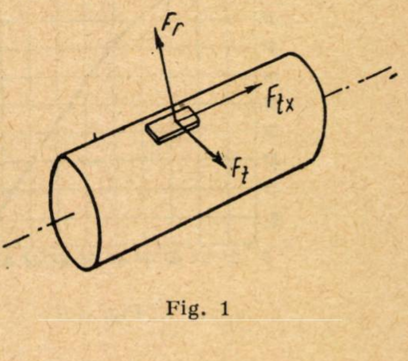


Fig. 1

deci de presiunea de fretaj (p) natura materialelor, coeficientul de frecare (μ) precum şi de orientarea asperităţilor de pe suprafaţa de bază (k)

$$f_{t,tx} = \frac{dF_{t,tx}}{dA} = p\mu k = p\mu'.$$

Valoarea presiunii de fretaj, p, este dată de relaţia

$$p = \frac{E_1 \alpha \Delta T}{\frac{2}{3} + 2K_E\left(\frac{1}{1-m^2} - \frac{1}{3}\right)} \tag{1.1}$$

unde

E_1 = modulul de elasticitate al materialului de bază

α = coeficientul de dilatare al materialului de aport

ΔT = diferenţa de temperatură

$K_E = \frac{E_1}{E_2}$, E_2 fiind modulul de elasticitate al materialului de aport.

$m = \frac{R_b}{R_e}$, raportul razelor (fig. 2 a)

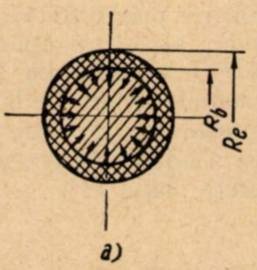


Fig. 2 a

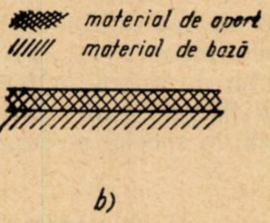


Fig. 2 b

În fig. 3 redăm reprezentarea relaţiei teoretice (a) alături de valorile obţinute pe cale experimentală (b), în cazul aderenţei tangenţial axiale [5].

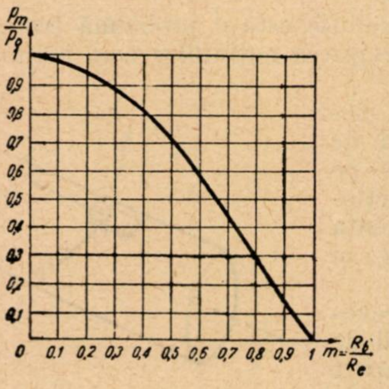


Fig. 3 a

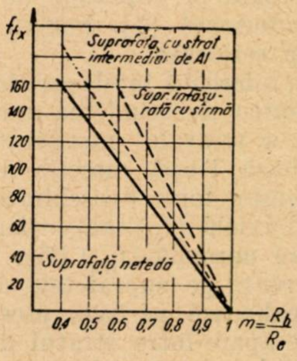


Fig. 3 b

Spre deosebire de suprafețele de revoluție convexe, în cazul suprafețelor plane ne interesează aderența normală (f_n). Problema aderenței pe suprafețe plane se pune mai cu seamă în cazul aplicării metalizării la protecția contra coroziunii. La asemenea utilizări grosimea stratului de aport este cuprinsă între 0,05 și 0,3 mm. În cazul metalizării anticorozive sau ca grund pentru lac, a recipienților de dimensiuni mari (rezervoare, cisterne) aderența mecanică de fretaj a stratului depus este foarte redusă. Acest fapt rezultă și din relația (1.1). Astfel în cazul metalizării unui rezervor cu raza de 1000 mm rezultă pentru coeficientul $m = \frac{R_b}{R_b + \delta} = \frac{1000}{1000 + 0,2}$, în cazul unei grosimi de metalizare $\delta = 0,2$ mm, o valoare foarte apropiată de 1. Din aceeași relație rezultă că presiunea de fretaj în acest caz tinde spre 0.

2. ADERENȚA PE SUPRAFEȚE PLANE

Importanța aderenței este și mai evidentă în cazul suprafețelor plane (fig. 2.*b*), unde nu mai poate fi vorba de fretaj.

În cazul suprafețelor plane aderența se obține prin măsuri speciale de pregătire a suprafeței, astfel ca să se permită ancorarea particulelor stratului de aport pe suprafața de bază. Există numeroase metode de pregătire a suprafeței, scopul lor fiind crearea de rugozități. Metoda cea mai răspîndită este sablarea. Cu toate măsurile luate în vederea măririi posibilităților de ancorare a particulelor metalizate, straturile depuse în mod obișnuit sînt limitate la grosimi de 0,1 — 0,3 mm. Rezultatele experimentale arată scăderea aderenței o dată cu creșterea grosimii stratului. În cele ce urmează ne vom ocupa de fenomenele mecanice și termice care duc la tensionarea stratului metalizat și provoacă desprinderea (exfolierea) lui.

2.1. IPOTEZE DE CALCUL

Vom admite cîteva ipoteze care sînt foarte apropiate de realitate.

1. — Grosimea „δ" a stratului metalizat este redusă.

2. — Dimensiunile în plan ale stratului metalizat sînt infinite.

Din aceste ipoteze rezultă că deformația termică a grosimii „δ" este neglijabilă față de celelalte două dimensiuni. Astfel grosimea „δ" este de ordinul 10^{-1} mm, pe cînd dimensiunile în plan sînt de ordinul $10^2 \div 10^3$ mm, raportul lor fiind de $10^{-3} \div 10^{-4}$, deci erorile introduse sînt neglijabile.

3. — Temperatura este constantă pe grosimea „δ" a stratului metalizat.

4. — Stratul metalizat este solicitat datorită dilatărilor împiedecate.

5. — Stratul este solicitat normal pe suprafața de separație datorită forței de aderență normală.

2.2. ADERENŢA PE SUPRAFEŢE PLANE

Ipotezele de mai sus ne permit a ne situa în cazul deformațiilor plane ; vom scrie legea generalizată a lui Hooke, ținînd seama și de deformațiile termice, care au aceeași expresie după cele 3 axe de coordonate. Sistemul de axe de coordonate este cel din figura 4.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}\right) + \alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{E}\right) + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}\right) + \alpha T \end{aligned} \qquad (2.1)$$

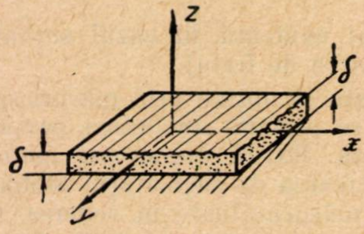


Fig. 4

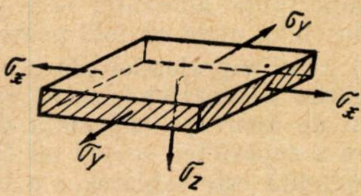


Fig. 5

unde

$\varepsilon_{x,y,z}$; lungirea specifică după direcția x, y, z.
$\sigma_{x,y,z}$; efortul unitar normal în direcția x, y, z.
α; coeficientul de dilatare liniar.
T; diferența de temperatură care produce dilatarea.

Ținînd seama că avem de-a face cu o stare plană de deformații, (fig. 5) și punînd condiția ca deformația stratului δ în direcția axei z să fie nulă, avem

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}\right) + \alpha T \cdot \qquad (2.2)$$

Din relația 2.2. rezultă valoarea efortului unitar normal pe suprafața de separație,

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - E_a \alpha_a T_a \quad \cdot \qquad (2.3)$$

În cele ce urmează indicii ,,*a*'' se referă la stratul de aport iar ,,*b*'' la stratul de bază.

Eforturile unitare σ_x și σ_y sînt produse datorită dilatărilor împiedecate a stratului metalizat în direcția x și y. Considerînd aceeași repartiţie de temperatură în direcţia x şi y, egală cu temperatura medie a stratului metalizat, rezultă că

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma = E_a \alpha_b T_b - E_a \alpha_a T_a. \tag{2.4}$$

Din relaţiile 2.3. şi 2.4. rezultă

$$\sigma_z = 2\mu (E_a \alpha_b T_b - E_a \alpha_a T_a) - E_a \alpha_a T_a = E_a \alpha_a T_a (2\mu\Phi - 2\mu - 1)$$

sau

$$\sigma_z = E_a \alpha_a T_a (0{,}6\, \Phi - 1{,}6) \tag{2.5}$$

unde

$\Phi = \dfrac{\alpha_b T_b}{\alpha_a T_a}$, o funcţie care depinde de caracteristicile mecanice şi termice ale materialelor.

$\mu = 0{,}3$ coeficientul lui Poisson.

Rezultă deci că dilatările împiedecate produc un efort unitar normal σ_z. Desprinderea stratului are loc cînd efortul unitar σ_z însumat cu aderenţa (f_n) dă o rezultantă nulă sau negativă. Deci pentru a avea aderenţă între metalul de bază şi cel de aport este necesară respectarea condiţiei

$$f_n + \sigma_z \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Din relaţiile 2.5 şi 2.6 rezultă

$$f_n \geqslant E_a \alpha_a T_a (1{,}6 - 0{,}6\, \Phi) \tag{2.7}$$

condiţie care se realizează dacă

$$1{,}6 - 0{,}6\, \Phi \leqslant 0. \tag{2.8}$$

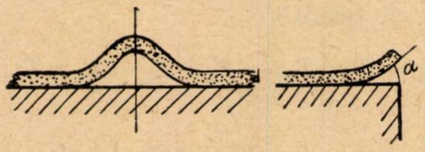
Aceste relaţii ne determină condiţiile de temperatură pentru a realiza aderenţa pe suprafeţe plane. Cunoscînd caracteristicile mecanice şi termice ale celor două materiale putem determina relaţia care trebuie să existe între T_a şi T_b. Din ecuaţia 2.8 rezultă

$$1{,}6 - 0{,}6 \times \frac{\alpha_b T_b}{\alpha_a T_a} \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad \frac{T_b}{T_a} \geqslant k. \tag{2.9}$$

3. INFLUENŢA ZONELOR MARGINALE

În cele de mai înainte ne-am ocupat cu studiul aderenţei stratului metalizat în cazul lungimii infinite. În practică nu se ivesc asemenea cazuri, astfel încît vom căuta să corectăm rezultatele obţinute ţinînd seama de zonele marginale ale stratului metalizat.

În general desprinderea stratului metalizat apare în cursul procesului de metalizare, deci atunci cînd stratul este cald. Aceste desprinderi apar pe suprafața piesei fie sub formă de umflături (*a*) (cazul lungimilor infinite) fie sub formă de desprinderi marginale (*b*) (fig. 6).



a) b)

Fig. 6 *a* și *b*

Se obișnuiește a se spune că stratul se desprinde deoarece grosimea lui este prea mare. Pe baza celor de mai înainte se constată că desprinderea are loc în momentul în care nu se mai respectă relația 2.8, adică temperatura stratului de aport a depășit limitele admisibile fixate de această relație. Într-o lucrare anterioară (6) s-a arătat dependența dintre grosimea și temperatura stratului metalizat.

Influența zonelor marginale o vom analiza sub două aspecte: 1. influența marginii 2. influența colțului.

3.1. INFLUENȚA MARGINII

Această influență apare în special în cazul metalizării suprafețelor mici. Dacă vom considera un element din stratul metalizat astfel ca una din laturile elementului să fie liberă, observăm că solicitarea elementului este asimetrică (fig. 7), în direcția axei x. Pentru ca un asemenea element să fie în echilibru trebuie ca suprafața de separație, pe care lucrează forța $\sigma_\varepsilon \times 1 \times 1$ să fie normală pe rezultanta forțelor care lucrează asupra elementului considerat (laturile elementului sînt considerate ca fiind egale cu unitatea, iar grosimea, δ). Unghiul de înclinare a rezultantei și deci de desprindere a stratului este

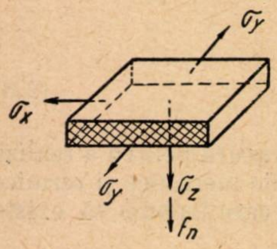


Fig. 7

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta\sigma_x}{\sigma_z + f_n} = \frac{\delta(\Phi - 1)}{2\mu(\Phi - 1) - 1 + f_n \dfrac{1}{E_a \alpha_a T_a}}. \tag{3.1}$$

Termenul $\dfrac{f_n}{E_a \alpha_a T_a}$ din relația (3.10) poate fi neglijat față de ceilalți termeni; astfel rezultă o formă aproximativă a relației (3.10)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta(\Phi - 1)}{2\mu(\Phi - 1) - 1}. \tag{3.2}$$

Rezultînd o valoare negativă a unghiului α înseamnă că desprinderea stratului are loc în sensul indicat în figura 6 *b*.

3.2. INFLUENŢA COLŢURILOR

Considerînd un element din stratul metalizat situat în zona de colţ (fig. 8), printr-un raţionament similar celui de la 3.1., rezultă următoarea valoare a unghiului de desprindere

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}\,\delta(\Phi - 1)}{2\mu(\Phi - 1) - 1}. \qquad (3.3)$$

Din relaţiile (3.2) şi (3.3) rezultă că pericolul de desprindere a stratului metalizat este mai mare în regiunile de colţ. În relaţiile de mai înainte nu s-a ţinut seama de faptul că stratul metalizat de la margini se ancorează şi pe direcţia perpendiculară a suprafeţei metalizate, astfel încît în practică sînt posibile şi asemenea metalizări însă pînă la valori limitate ale lui δ.

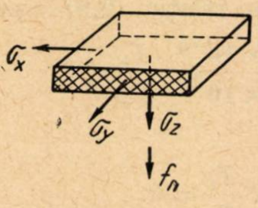


Fig. 8

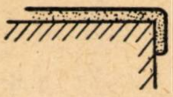


Fig. 9

4. CONCLUZII

Din cele prezentate, rezultă că în cazul metalizării pe suprafeţe plane se recomandă o preîncălzire a suprafeţei de bază în vederea măririi aderenţei. Aceste rezultate au fost confirmate experimental de încercările făcute de unii autori (7) care dau valorile din tabelul de mai jos:

Tabelul 1

Material de aport	Materialul de bază			
	Rece		Încălzit la 250°C	
	Grosimea stratului mm	fn Kgf/cm²	Grosimea stratului mm	fn Kgf/cm²
oţel 0,1% C	0,195	60,5	0,462	> 95
aluminiu	0,32	31,5	0,234	81
zinc	0,145	42,9	0,137	>104
cupru	0,147	35,9	0,137	105

5. APLICAŢIE PRACTICĂ

Vrem să determinăm raportul ce trebuie să fie între T_a şi T_b în cazul metalizării unei suprafeţe plane cu oţel. Caracteristicile celor două materiale sînt indicate în tabelul 2.

Tabelul 2

	U.m.	Material de bază	Material de aport
Modulul de elasticitate E	Kg^{f}/cm^{2}	$2{,}1 \times 10^{6}$	$0{,}6 \times 10^{6}$
Coeficientul de dilatare termică	$^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$	12×10^{-6}	10×10^{-6}

Înlocuind valorile numerice în relaţia (2.9) rezultă

$$1{,}6 - 0{,}6\,\frac{12 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-6}} \cdot \frac{T_b}{T_a} \leqslant 0$$

sau

$$1{,}6 - 0{,}72\,\frac{T_b}{T_a} \leqslant 0.$$

Rezultă deci că $T_b \geqslant 2{,}20\ T_a$. În condiţiuni normale de metalizare temperatura stratului de aport nu depăşeşte 100—150°C, şi deci pentru îmbunătăţirea aderenţei materialul de bază trebuie să fie preîncălzit în medie la temperatura $T_b \geqslant 220^{\circ}\mathrm{C}$.

Primită la redacţie la 23 noiembrie 1959

О ПРИЛИПАНИИ МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫХ СЛОЕВ НА ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В последнее время металлизация распылением получила большое развитие, распространившись от восстановления изношенных деталей и на область противокоррозионной защиты.

В настоящей статье рассматривается прилипание металлизированных слоев на плоские поверхности применительно к защите от коррозии.

Основываясь на некоторые упрощающие гипотезы, очень близкие к действительности, как например незначительная толщина металли-

зированного слоя, по сравнению с остальными двумя размерами в плоскости металлизированного слоя, задачу рассматривают как задачу плоских деформаций.

В расчетах учитываются и тепловые напряжения, появляющиеся в металлизированном слое в результате вынужденных расширений.

На основании полученных результатов определяется зависимость, которая должна иметь место между температурой основного слоя и покрывающим слоем для осуществления прилипания. Также показывается положительное влияние подогрева материала покрытия на прилипание.

В статье показывается и влияние краевых зон на отрыв металлизированных слоев в зависимости от толщины покрывающего слоя.

В статье приводятся численный пример и некоторые экспериментальные проверки полученных теоретических результатов.

SUR L'ADHÉRENCE AUX SURFACES PLANES DES COUCHES MÉTALLISÉES

RÉSUMÉ

Depuis plusieurs années, la métallisation par pulvérisation s'est beaucoup développée, son domaine comprenant aussi bien la remise en état des pièces usagées que la protection contre la corrosion.

Les auteurs étudient dans cet article l'adhérence aux surfaces planes des couches métallisées, ainsi que leur application à la protection contre la corrosion.

En adoptant quelques hypothèses simplificatrices, très proches de la réalité, telle qu'une épaisseur réduite de la couche métallisée par rapport aux deux autres dimensions dans le plan de la couche métallique, le problème est réduit à un problème de déformations planes. Dans les calculs, on tient compte, en outre, des sollicitations thermiques apparaissant dans la couche métallisée à cause des dilatations empêchées.

En vertu des résultats obtenus, les auteurs déterminent la dépendance nécessaire entre la température de la couche de base et celle du métal d'apport, afin d'obtenir l'adhérence. Ils indiquent, en outre, l'influence positive, exercée sur l'adhérance, par le réchauffage du métal d'apport, ainsi que l'influence des zones marginales sur le decollement des couches métallisées, en fonction de l'épaisseur de la couche d'apport.

L'article comprend aussi un exemple de calcul ainsi que quelques données expérimentales, vérifiant les résultats théoriques obtenus.

BIBLIOGRAFIE

1. K. SABINKOV, *Folosirea instalațiilor de înaltă frecvență pentru metalizare prin pulverizare.* — Mașino-tractornaia stanția, XIV (1954), nr. 11, p. 38—39.
2. H. GEORGI, *Posibilități de sudură prin metalizare* Schweisstechnik 7, 4 (1957) 130 — 137.

3. E. GEBHARDT și H. D. SEGHEZZI, Caracteristicile zincului metalizat V D I, nr. 2 (1956), p. 41–45.
4. V. MARCU, P. FREUND și colaboratori, Studii asupra unor caracteristici ale straturilor obținute prin electrometalizare. Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 2, (1956).
5. — Isledovania po metalizații raspîleniem — R.M.A., T. II, nr. 1/57.
6. V. MARCU, P. FREUND, Cercetări asupra metalizării prin pulverizare a suprafețelor concave. Studii și cercetări de mecanică aplicată X, 2, (1959).
7. I. M. CAWAN, Aderența și pregătirea suprafeței pentru metalizare. ELECTROPLATING — nr. 2,3/54.

STUDII

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

ASUPRA VARIAŢIILOR REZISTENŢEI LA PENETRARE A SOLURILOR

DE

C. I. FLORESCU[1] şi M. VASILESCU[2]

Studiilor fizico-mecanice ale solurilor li se acordă o importanţă crescîndă, deoarece pe această cale se pot obţine criteriile ştiinţifice necesare progresului în construcţia maşinilor agricole pentru lucrările solului şi a exploatării lor raţionale [1].

Această cale de studiu este relativ nouă, iar dezvoltarea ei este îngreuiată de lipsa unei teorii unitare asupra naturii fizice a solului, de imposibilitatea practică a dirijării factorilor în experimentările de cîmp, de dificultăţile de transpunere a rezultatelor obţinute pe medii de laborator, în condiţii naturale etc.

Datele necesare construcţiei şi exploatării maşinilor agricole s-au obţinut, în cea mai mare parte, empiric pe baza folosirii unor metode de măsură cu caracter limitat. Printre metodele de măsură mai des folosite în acest scop se numără dinamometrarea [2], care prezintă însă o serie de greutăţi în aplicarea ei pe scară largă, precum şi alte metode mai puţin cunoscute.

În această direcţie se simte în mod deosebit nevoia elaborării unor metode de măsură capabile de a completa, sau înlocui pe acelea folosite pînă acum, spre a se putea trece la lărgirea bazei experimentale şi teoretice.

Cercetîndu-se fenomenele fizico- mecanice ce au loc la interacţiunea sol-maşină agricolă, s-a admis ipoteza că rezistenţa opusă de sol la diferite solicitări mecanice este influenţată asemănător de variaţiile factorilor fizico-mecanici, în limitele obişnuite pentru lucrările agricole, ca şi rezistenţa la penetrare.

Această ipoteza a fost admisă şi prin comparaţie cu metodele folosite în prelucrarea metalelor, unde apare ca un factor determinant duritatea lor.

---

[1] ICAR.

[2] Ministerul Agriculturii.

Cercetătorii din domeniul prelucrării mediilor continui au căutat să stabilească şi pentru soluri o mărime similară cu duritatea, prin care să se poată aprecia în mod cantitativ şi obiectiv starea fizico-mecanică a unui sol la un moment dat. Între metodele considerate se enumără şi rezistenţa la penetrare a solului, înţelegîndu-se prin aceasta rezistenţa opusă de sol la pătrunderea unui corp etalon.

Academicianul V. P. Goriacikin, întemeietorul mecanicii agricole, a elaborat printre altele, un tip propriu de penetrometru.

În literatura de specialitate nu se cunoaşte o metodică unitară şi o aparatură corespunzătoare, pe baza cărora să se poată obţine rezultate comparabile ale diverselor experimentări de mecanică a solurilor [3], [4].

Datorită acestei situaţii cercetările iniţiale au fost conduse spre elaborarea unei metodice şi aparaturi originale de măsură a rezistenţei la penetrare în cîmp [5] şi [6].

Cu ajutorul aparaturii elaborate s-a putut stabili gradul de omogenitate a solului din acest punct de vedere. În figura 1 se prezintă rezultatele a 200 măsurători ale rezistenţei la penetrare făcute pe un teren de 50 × 20 m.

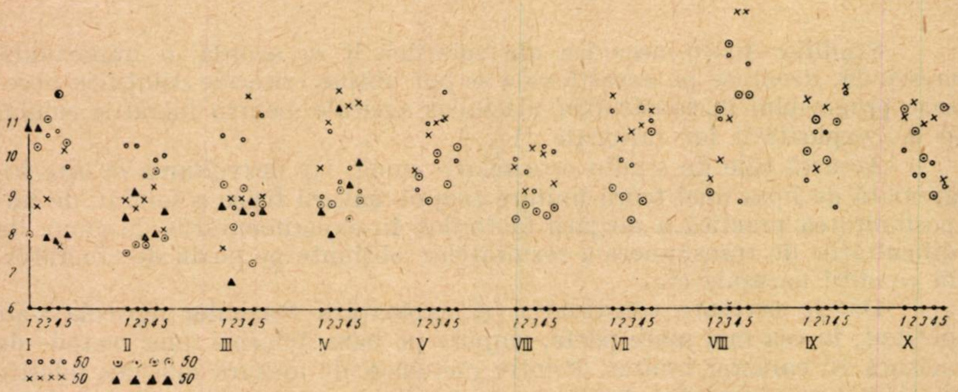


Fig. 1. — Împrăştierea aparentă a rezultatelor măsurătorilor rezistenţei la penetrare a solului.

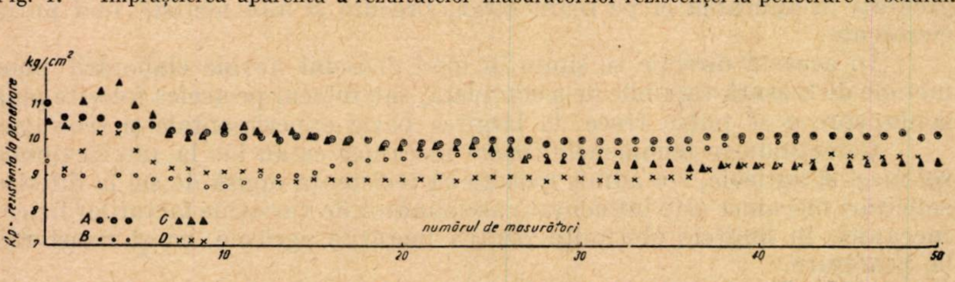


Fig. 2. — Variaţia valorii medii a rezistenţei la penetrare în funcţie de numărul măsurătorilor.

Se observă o mare împrăştiere a rezultatelor măsurătorilor. Împrăştierea acestor date se datoreşte faptului că fiecare punct măsurat suferă influenţa unui mare număr de factori locali, care pot apărea cu semnul plus sau minus. În aceste situaţii metodele statice de calcul pot fi aplicate cu bune rezultate.

Aplicînd metoda statistică de calcul unui număr suficient de măsurători, ridicate cu o precizie ± 0,5 mm, se constată că pe solurile cercetate se pot obţine valori medii constante, ce pot fi utilizate ca un indice de caracterizare mecanică a stării solului la un moment dat.

În figura 2 se redau rezultatele obţinute pe un sol brun roşcat de pădure de la Băneasa Bucureşti.

Se constată că prin mărirea numărului măsurătorilor valoarea medie a rezistenţei la penetrare tinde spre o valoare constantă.

Din cercetările executate reiese că putem considera rezistenţa la penetrarea solului ca pe o variabilă aleatorie (după unii autori semi-aleatorie). Pentru aprecierea evoluţiei rezistenţei la penetrare s-a determinat distribuţia acestor valori.

În general, acest gen de mărimi admit o distribuţie normală. Valoarea medie a celor două sute de măsurători din exemplul de mai sus este $K_p = 9{,}78$ kg/cm², iar $\sigma = \pm 1{,}25$. Cu aceste valori funcţia de distribuţie capătă următoarea expresie

$$J = 0{,}32\, e^{-\frac{(9{,}78 - K_p)^2}{5{,}12}}.$$

În tabela 1 prezentăm şirul statistic al rezultatelor experimentale de mai sus.

Tabela 1

Rezistenţa la penetrare k_p în kg/cm²	7 – 8	8 – 9	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13
frecvenţa absolută	15	41	56	50	24	5
frecvenţa relativă	0,078	0,2	0,29	0,26	0,12	0,026

În figura 3 prezentăm grafic curba teoretică şi rezultatele experimentale.

Din graficul de mai sus se poate constata o suprapunere corespunzătoare a rezultatelor experimentale peste curba teoretică, ceea ce ne permite să considerăm rezistenţa la penetrare o mărime cu distribuţie normală.

În cazul distribuţiilor normale se poate determina comod volumul selecţiei şi erorile ce intervin.

Pentru determinarea volumului selecţiei (numărul de penetrări) se poate utiliza următoarea formulă [7], [8]

$$N = 10\left(\frac{\sigma 100}{K_P} \cdot \frac{1}{p\%}\right)^2 + 5,$$

unde p = precizia cu care dorim să lucrăm,
σ = abaterea medie patratică.

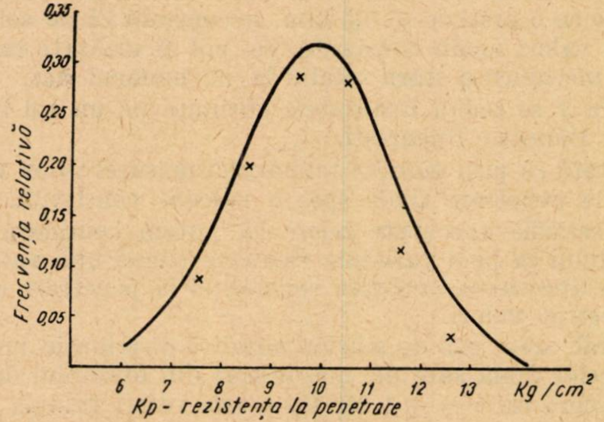


Fig. 3. — Reprezentarea grafică a funcţiei de distribuţie şi a rezultatelor experimentale.

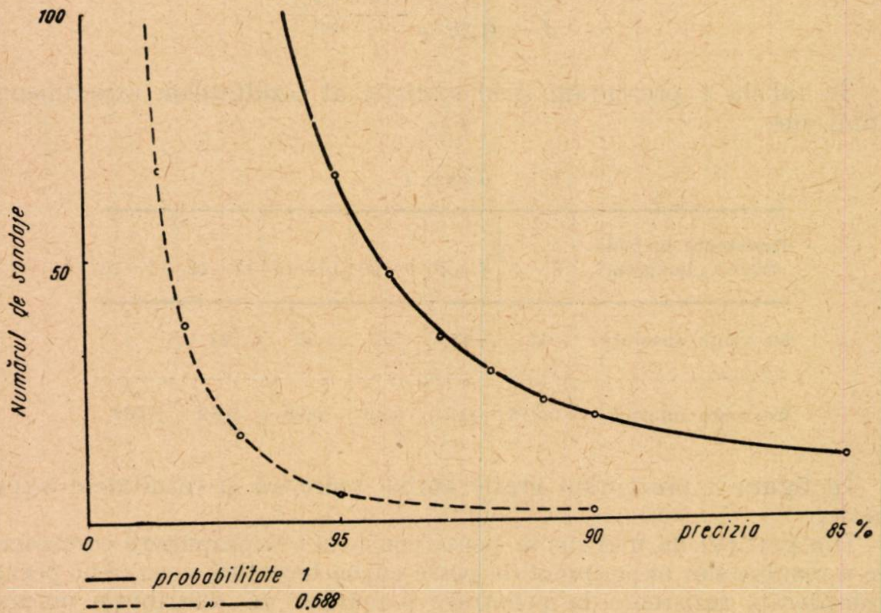


Fig. 4. — Variaţia volumului selecţiei în funcţie de precizia dorită.

Utilizarea acestei formule ne dă certitudinea (probabilitate egală cu unitatea) că rezultatul măsurătorilor noastre se încadrează în intervalul $K_p \pm p\,\%$, faţă de rezistenţa reală a terenului. Variţia volumului selecţiei în funcţie de precizia dorită ($N = f(p)$), pentru rezultat din măsurătorile executate este reprezentată în figura 4.

În aplicațiile practice se caută a se reduce numărul necesar de penetrări cît mai mult posibil.

Dacă acceptăm o probabilitate de 0,683, ca rezistența terenului să rămînă în limite $K_p \pm p\%$, se poate folosi următoarea formulă:

$$N = \left(\frac{\sigma \cdot 100}{K_p} \cdot \frac{1}{p\%}\right)^2,$$

pentru determinarea numărului necesar de penetrări.

Volumul selecției fiind astfel stabilit prezintă importanță modul ei de formare.

Într-un articol precedent [4] s-au publicat rezultatele experimentale obținute prin aplicarea a șase scheme de formare a selecției pe soluri naturale.

Pentru rafinarea rezultatelor s-a experimentat o schemă de volum mai mare. Pe o parcelă de 40 × 50 m s-au făcut 400 de sondaje. Această experiență a avut drept scop stabilirea efectelor locale asupra valorii medii a rezistenței la penetrare. În acest scop s-a aplicat o schemă de 80 de penetrări situate pe 8 rînduri distanțate la 5 × 5 m. Aplicîndu-se o translație de 25 cm fiecărei scheme față de precedenta, pe o direcție oarecare, aceeași pentru toate schemele.

Experimentarea s-a executat pe un teren plan, uniform ca aspect exterior, luat de mulți ani în cultură, situat pe un sol brun roșcat de pădure, la Băneasa București.

Rezultatele măsurătorilor sînt cuprinse în tabela 2.

Din aceste date se constată că prin deplasarea de cinci ori a schemei de penetrare, rezistența medie la penetrare a terenului experimentat a variat sub limitele admise în acest domeniu.

Tabela 2

Translația schemei de penetrare Poziția	Rezistența medie la penetrare $K_p$kg/cm²
1	15,3
2	15,5
3	15,7
4	16,1
5	16,1

Pentru scopurile mai sus amintite cunoașterea variației rezistenței solului în plan vertical prezintă aceeași importanță.

În figura 5 se redă variația rezistenței la penetrare în funcție de adîncime pe un sol luto-argilos din Lunca Jiului¹). Dispunînd de un aparat

---

¹) Lucrările din reg. Craiova au fost efectuate în colaborare cu prof. ing. M. Modiga, lector ing. St. Căproiu, asistent D. Tîrcomnicu.

de măsură suficient de sensibil (Penetrograful IMA-II) a devenit posibilă calcularea acestei variații din cm în cm. În acest mod se poate reda mai corect variațiile pe verticală ale rezistenței la penetrare.

Pe adîncimea de penetrare de 50 cm luată în studiu se pot deosebi 4 zone de variație. Prima zonă, avînd o rezistență la penetrare de 10 kg/cm², se termină la cca 18 cm. A doua zonă de la 18 la 27 cm prezintă o creștere continuă a rezistenței la penetrare de la 10 la 20 kg/cm². A treia zonă de la 27 la 33 cm prezintă o rezistență la penetrare de 20 kg/cm². În zona a patra se înregistrează o scădere a rezistenței la penetrare la 17 kg/cm². Punctele prezentate pe diagramă prezintă media a cîte 10 sondaje. Pe aceeași figură se prezintă și variația umidității pe intervale de 10 cm.

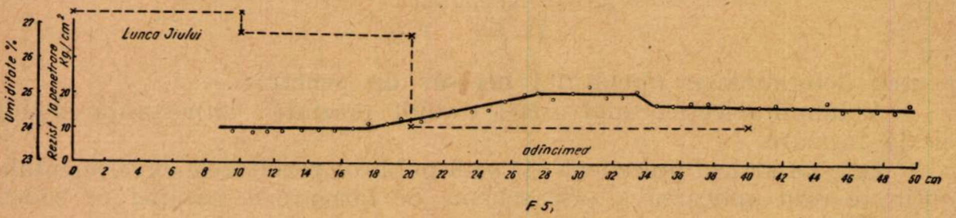


Fig. 5. — Variația rezistenței la penetrare în funcție de adîncimea unui sol luto-argilos din Lunca Jiului.

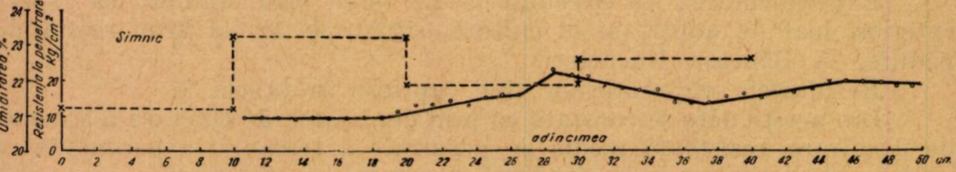


Fig. 6. — Variația rezistenței la penetrare în funcție de adîncime pe un sol luto-argilos din Simnic reg. Craiova.

Pe o categorie apropiată de sol (Simnic, reg. Craiova) se constată variația redată în figura 6.

Prima zonă sfîrșindu-se tot la 18 cm, are rezistența medie la penetrare de 9,7 kg/cm², deci de același ordin de mărime cu a primului teren. Zona a doua prezintă o creștere a rezistenței la penetrare de la 9,5 la 23 kg/cm², ce crește oarecum continuu pînă la adîncimea de 28 cm, unde prezintă un maxim, urmează un minim la adîncimea de 37 cm, unde rezistenta la penetrare este de 13 kg/cm², după care rezistența la penetrare crește la 20 kg/cm² la adîncimea de 45 cm mergînd pe acest palier pînă la 50 cm.

Pentru cuprinderea unui domeniu de variație cît mai larg s-au executat aceleași experimentări pe soluri ușoare nisipoase din Tîmburești reg. Craiova. În această regiune se găsesc dune fixate luate de mai mulți ani în cultură. Agrotehnica acestor soluri este puțin cunoscută, iar din punct de vedere mecanic nu au fost studiate.

În figura 7 se prezintă variația rezistenței la penetrare în funcție de adîncime pe forma locală de relief interdună.

Se constată sfîrşitul primei zone la cca 20 cm, avînd rezistența la penetrare de 9,5 kg/cm², apoi o creştere continuă pînă la 30 cm adîncime unde are valoarea de 14 kg/cm², valoare ce se menține pe un palier de cîțiva cm, urmînd o scădere la 10 kg/cm², valoare ce se menține constantă pînă la 50 cm adîncime.

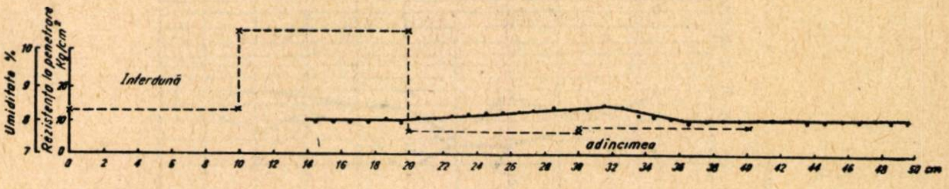


Fig. 7. — Variaţia rezistenţei la penetrare pe un sol nisipos, în funcţie de adîncime. Interdună.

Pe forma locală de relief dună variația rezistenței la penetrare prezintă o mare asemănare (fig. 8).

Prima zonă se termină şi aici în jurul a 18 cm adîncime, avînd însă o rezistență la penetrare de numai 7 kg/cm², valoarea ei creşte pînă la 28 cm, cu o mică modificare între 20—22 cm, atingînd valoarea de 19,5 kg/cm², unde după un palier de cîțiva cm urmează o descreştere pînă la 40 cm unde are valoarea de 12 kg/cm², valoare ce se menține pînă la 50 cm.

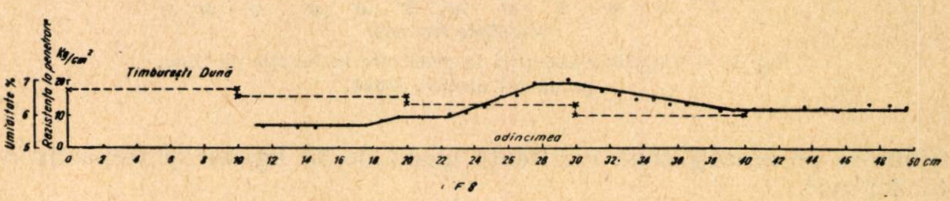


Fig. 8. — Variaţia rezistenţei la penetrare pe un sol nisipos, în funcţie de adîncime. Dună.

În general, se poate spune că alura curbei este asemănătoare pe terenurile cercetate, cu unele particularități datorite marii diferențe dintre solurile luate în experimentare.

Variația în timp a rezistenței solului este de asemenea prea puțin cunoscută, iar pentru țara noastră aceste studii sînt de-abia într-un stadiu de început.

Pentru a ne orienta în privința variației în timp a rezistenței solului s-au executat măsurători ale rezistenței la penetrare pe aceleaşi soluri între anii 1957—1959.

În figura 9 redăm variația rezistenței la penetrare în funcție de timp, pe dună.

În anul 1957 măsurătorile s-au executat pe un timp umed. Pe dună între 0—20 cm umiditatea a fost în medie de 6,6%. Pe aceeași adîncime rezistența la penetrare a fost de 7 kg/cm². În anul 1958 măsurătorile s-au executat pe un timp secetos, de asemenea și în anul 1959, înregistrîndu-se pe aceeași zonă rezistențe medii de 30 kg/cm² și respectiv de 42 kg/cm².

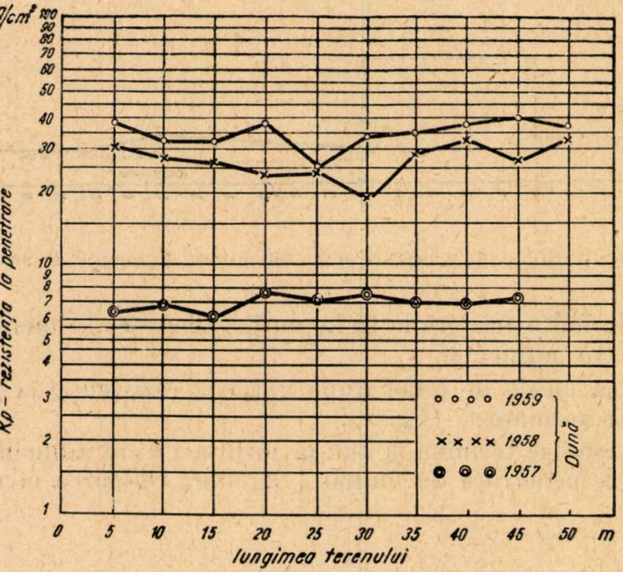


Fig. 9. — Variația rezistenței la penetrare în funcție de timp, pe un sol nisipos. Dună.

Pe interdună, în aceeași zonă, rezistenta la penetrare a fost de 7 kg/cm², iar umiditatea medie de 9%. În anii 1958 și 1959 a fost de 35 și 48 kg/cm² (fig. 10)

Pe terenurile grele din Lunca Jiului și Simnic, pe aceeași zonă, în anul 1957 s-a înregistrat rezistența medie la penetrare de 9 și respectiv 8 kg/cm² la umidități medii de 27% și 22,25%.

În anul 1958 rezistența la penetrare a crescut la 57 kg/cm² la Lunca Jiului și 55 kg/cm² la Simnic.

Dacă se compară rezultatele măsurătorilor din anii 1958 și 1959 executate pe solurile nisipoase (dună și interdună) considerate în actuala clasificare mecanică a solurilor drept soluri ușoare, cu rezultatele măsurătorilor rezistenței la penetrare executate în anul 1957 pe solurile din Lunca Jiului și Simnic, soluri considerate ca grele în actuala clasificare mecanică a solurilor, se constată că în condițiile respective, solurile considerate ca ușoare au solicitat organele active ale mașinilor pentru lucrările solurilor, cu mult mai puternic decît au solicitat solurile considerate ca grele, aceleași organe de mașini în anul 1957.

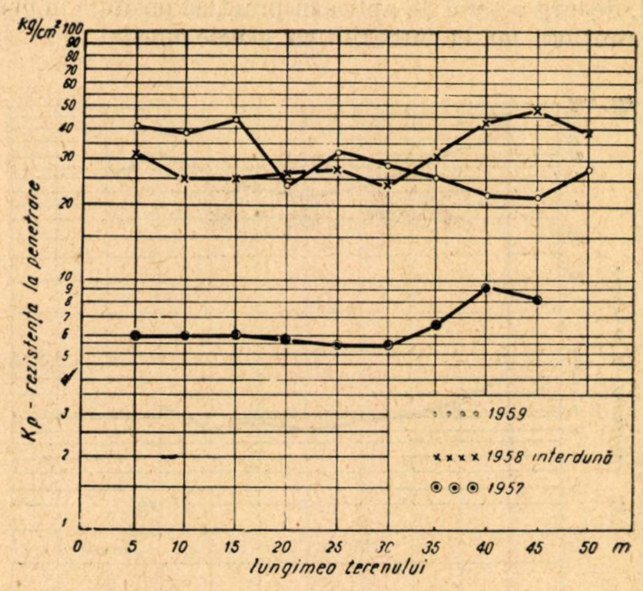


Fig. 10. — Variaţia rezistenţei la penetrare în funcţie de timp, pe un sol nisipos. Interdună.

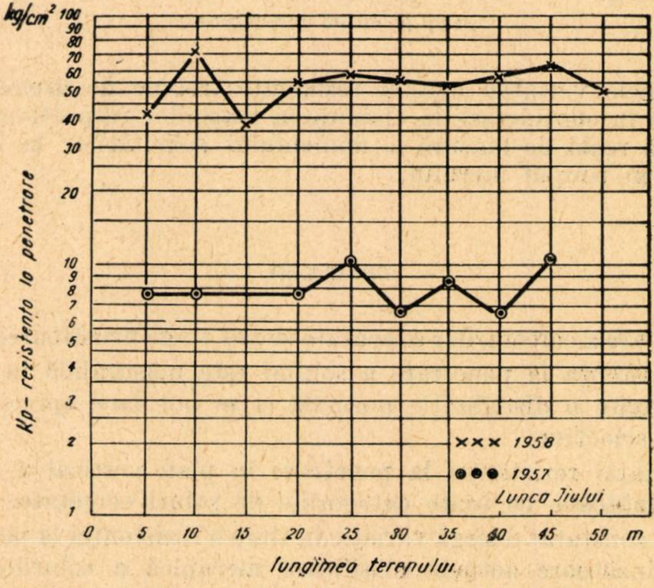


Fig. 11. — Variaţia rezistenţei la penetrare în funcţie de timp, pe un sol luto-argilos. Lunca Jiului.

De aici, decurg o serie de aplicaţii practice posibile în elaborarea normelor şi diferenţiera lor la lucrările cu aceste maşini.

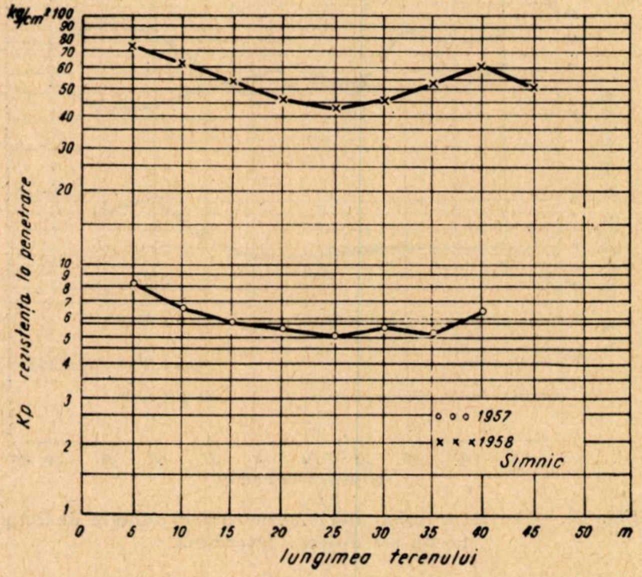


Fig. 12. — Variaţia rezistenţei la penetrare în funcţie de timp pe un sol luto-argilos.

Extremele variaţiei acestei rezistente trebuie de asemenea cunoscute şi luate în considerare la elaborarea maşinilor respective, ele constituind o bază reală de măsură a domeniului solicitărilor la care vor fi ele supuse în timpul lucrului.

CONCLUZII

Ca urmare a cercetărilor executate se pot trage următoarele concluzii :

— Rezistenţa la penetrare a solului este măsurabilă în condiţii de cîmp, ea admite o distribuiţie normală şi se pot face aprecieri pe baza rezultatelor selective.

— Variaţia rezistenţei la penetrare în plan vertical a prezentat o alură asemănătoare pe toate categoriile de soluri cercetate.

— S-a constatat o largă variaţie în timp a rezistenţei la penetrare care face necuprinzătoare actuala clasificare mecanică a solurilor.

— Prin continuarea şi extinderea acestor cercetări se pot acumula noi cunoştinţe în domeniul fizicii şi mecanicii solurilor, precum şi în partea practică de elaborare şi exploatare a maşinilor pentru lucrările solurilor.

ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ СОПРОТИВЛЕНИЯ ГРУНТОВ НА ВНЕДРЕНИЕ

РЕЗЮМЕ

Работа содержит экспериментальные результаты, полученные на нескольких типах грунтов в течение трех лет.

Отмечается, что сопротивление грунтов на внедрение можно измерить в полевых условиях, что оно допускает нормальное распределение и что его можно оценить на основании выборных результатов.

Изменение сопротивления на внедрение выявило одинаковый ход кривой для всех исследуемых категорий грунта.

Обнаружено широкое изменение во времени сопротивления грунта.

Продолжение и распространение этих исследований дадут возможность накопить новые сведения в области физики и механики грунтов.

SUR LES VARIATIONS DE LA RÉSISTANCE À LA PÉNÉTRATION DES SOLS

RÉSUMÉ

Le travail présente les résultats expérimentaux obtenus pendant trois ans, dans plusieurs catégories de terrains.

Les auteurs mettent en évidence les faits suivants : la résistance des sols à la pénétration peut être mesurée dans les conditions rencontrées dans la pratique ; cette résistance présente une distribution normale ; la possibilité de faire des estimations en vertu des résultats sélectifs.

L'étude de la variation de la résistance à la pénétration a fait ressortir une allure similaire dans toutes les catégories de sol étudiées.

On a constaté, en outre, une large variation avec le temps de la résistance du sol.

La continuation et l'extension de ces études permettront d'accumuler de nouvelles connaissances dans le domaine de la physique et de la mécanique des sols.

BIBLIOGRAFIE

1. M. N. LETOȘNEV, *Mașini Agricole* — Editura Agrosilvică — București, 1959.
2. A. CANARACHE, *Rezistența la arat și umiditatea optimă pentru efectuarea arăturilor pe solul brun roșcat de pădure de la Moara Domnească și pe cernoziomul castaniu de la Mărculești.* — Probleme de Pedologie — București, 1958.

3. A. N. Zelenin, *Bazele fizice ale teoriei tăierii solului* — Moscova, 1950.
4. P. J. Bahtin, *Dinamica însuşirilor fizico-mecanice ale solurilor în legătură cu problemele lucrărilor agricole.* Moscova, 1954.
5. C. I. Florescu şi colab., *Cercetări asupra rezistenţei la penetrare a solului* — Studii şi cercetări de mecanică aplicată — Bucureşti, 1957.
6. C. I. Florescu şi colab., *Penetrograf dinamic pentru sol, cu acţionare manuală*, tip IMA — II — Studii şi cercetări de mecanică aplicată, Bucureşti, 1957.
7. Tudor Dorin, *Elemente de calcul statistic pentru silvicultori* — Editura Agrosilvică — Bucureşti, 1955.
8. A. G. Worthing şi O. I. Geffner, Prelucrarea datelor experimentale — Editura tehnică — Bucureşti, 1959.

NOTE

ASUPRA NUMĂRULUI MACH LIMITĂ AL SCURGERII ÎNTR-UN TUB DE ŞOC

DE

LUCIAN DUMITRESCU

Se ştie că, într-un tub de şoc de secţiune uniformă, numărul Mach al scurgerii quasi-permanente din spatele undei de şoc, atinge o valoare maximă limită, atunci cînd raportul Ξ al presiunilor iniţiale din camera de presiune, p_1, şi cea de vid p_0, ($\Xi = p_1/p_0$) creşte nelimitat.

În multe lucrări, acest număr Mach limită este dat ca fiind $M_{\max} = 5/\sqrt{7} \approx 1{,}89$ (pentru aer). Totuşi această valoare nu este corectă, după cum se poate vedea imediat. Să notăm pentru aceasta cu ξ intensitatea undei de şoc ($\xi = p/p_0$), cu c_0 viteza iniţială a sunetului şi cu M_S viteza de propagare a undei de şoc, raportată la c_0. Dacă iniţial, în cele două compartimente ale tubului se află acelaşi gaz şi la aceeaşi temperatură, se deduc uşor următoarele relaţii [1], [2]:

$$\Xi = \xi\left[1 - \frac{(\varkappa - 1)(\xi - 1)}{\sqrt{2\varkappa[\varkappa - 1 + (\varkappa + 1)\xi]}}\right]^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}}, \tag{1}$$

$$M^2 = \frac{2(\xi - 1)^2}{\varkappa\xi[\varkappa + 1 + (\varkappa - 1)\xi]}, \tag{2}$$

$$M_S^2 = \frac{\varkappa - 1 + (\varkappa + 1)\xi}{2\varkappa}, \tag{3}$$

$\varkappa$ fiind coeficientul adiabatic al gazului. Atunci cînd Ξ tinde către infinit, intensitatea undei de şoc atinge o valoare finită

$$\xi_{\max} = \frac{2\varkappa^2 - \varkappa + 1 + \varkappa\sqrt{5\varkappa^2 - 6\varkappa + 5}}{(\varkappa - 1)^2}. \tag{4}$$

Pentru aer, se obţine $\xi_{\max} = 44{,}136$.

Rezultă valoarea numărului Mach maxim $M_{\max} \approx 1{,}73$ precum şi $M_{S_{\max}} \approx 6{,}16$.

Valoarea dată în literatură, $M_{\max} = 1{,}89$, se obţine făcînd $\xi \to \infty$, ceea ce nu este posibil decît dacă şi raportul temperaturilor iniţiale din tubul de şoc este mărit la infinit [3].

În realitate, disociaţia şi ionizarea aerului modifică toate aceste valori limită, astfel încît s-au obţinut experimental numere Mach de circa 3.

Cele de mai sus nu afectează numărul Mach M_2, din spatele suprafeţei de discontinuitate care se propagă în tubul de şoc; acest număr creşte nedefinit o dată cu raportul presiunilor iniţiale.

Primită la redacţie le 24 octombrie 1959.

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ МАХА ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ТРУБЕ

РЕЗЮМЕ

Максимальное число Маха течения за ударной волной, когда исходное отношение давлений в ударной трубе безгранично увеличено, равно примерно 1,73 для воздуха, вместо обычно приведенного в литературе значения 1,89.

Интенсивность и максимальная скорость ударной волны равна соответственно 44,136 и 6,16 c_0.

ON THE VALUE OF THE MAXIMUM MACH NUMBER IN A SHOCK-TUBE

ABSTRACT

The maximum theoretical value of the Mach number behind the shock wave when the initial pressure ratio in the shock tube is increased indefinitely, is found to be about 1·73 for air, instead of 1·89, which is usually given in the literature. The maximum shock strength and velocity are respectively 44·136 and 6·16 c_0.

BIBLIOGRAFIE

1. L. D. LANDAU, E. M. LIFŞIT, *Mehanika sploşnih sred.* Gostehizdat, Moskva, 1953.
2. R. COURANT, K. O. FRIEDERICHS, *Supersonic Flow and Shock waves.* Interscience Publishers, New York, 1948.
3. B. D. HENSHALL, *Some Notes on the Flow Durations Occurring in Hypersonic Shock Tubes.* Aeronautical Research Council C.P., *290,* Londra, 1956.

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

DENSITOMETRU CU SEMICONDUCTORI PENTRU DOZIMETRIA CU FILM

DE

D. PAVELESCU şi I. ILIUC

În laboratorul de metode radioactive al Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., se lucrează cu radiaţi nucleare, atît electromagnetice penetrante (X şi γ), cît și radiaţii corpusculare (în special β).

Ca surse de radiaţii X, există o instalaţie Röntgen (120 kV), iar ca sursă de radiaţii γ o instalaţie de tipul GUP — Co—0,5. În afară de acestea sînt utilizaţi şi diverşi izotopi γ şi β-activi, a căror activitate este mai mare în special în cercetările de uzură.

În această situaţie, se întîlnesc, deci, fie fascicule de radiaţii fie surse radioactive, organismul operatorului putînd fi iradiat în general prin expunere externă¹).

Regulile de protecţie individuală, impun însă cunoaşterea precisă a dozei primite de experimentator, înregistrarea dozelor făcîndu-se fie cu dozimetre cu contori sau camere de ionizare, fie cu plăci sau filme fotografice ; aceste mijloace de înregistrare nu exceptează însă calcularea dozelor, care în general se face preventiv. Prin diferite mijloace de protecţie, se urmăreşte să nu se depăşească doza maximă permisă, care în ţara noastră este de 0,03 remi/săptămînă²) (în cazul radiaţiilor X, γ şi a electronilor). Metodele dozimetrice sînt necesare pentru a se putea cunoaşte gradul în care a fost posibil să se respecte doza admisibilă, cu atît mai mult cu cît efectele biologice pe care le produc radiaţiile nucleare nu sînt percepute de organele de simţ şi nu ajung în conştiinţa fiinţei vii, în momentul în care ele acţionează.

Radiaţiile nucleare electromagnetice sau corpusculare, produc în general acelaşi tip de efect biologic, unele fiind mai efective decît altele, funcţie de energie mai mare sau mai mică pe care o transferă ţesutului, pentru a provoca acelaşi efect.

Se poate spune, fără a greşi, că numai urmările sînt acelea care diferenţiază interacţiunea radiaţiilor cu substanţa vie sau cu cea lipsită de viaţă, deoarece în general în ambele cazuri energia absorbită de la radiaţii este utilizată pentru excitarea şi ionizarea atomilor substanţei organice sau anorganice. La radiaţiile menţionate mai sus, proprietatea de ionizare a substanţei este diferită, fiind mai mare la radiaţiile corpusculare (α şi β).

---

¹) Iradierea internă, nu poate fi sesizată cu mijloacele de care se ocupă lucrarea de faţă.

²) Remul este *doza biologică*, care produce în ţesutul iradiat acelaşi efect biologic ca *doza absorbită* de un rad (100 erg/g) de radiaţie standard (radiaţia standard fiind radiaţia Roentgen de 200 kV, uşor filtrată).

În general, pe această proprietate se bazează aparatele și dispozitivele de înregistrare a dozelor.

Spre deosebire de debitmetrele de laborator care indică numărul de impulsuri pe unitatea de suprafață și timp, sau doza pe unitatea de timp, pentru protecția experimentatorului, sînt deosebit de necesare dozimetrele individuale (stilo-dozimetrele cu citire directă sau prin descărcare), care indică doza pe un interval de timp, prin insumare.

În afară de acestea din urmă, se utilizează, în general, în paralel — și dozimetrele cu film fotosensibil, care prezintă următoarele avantaje:

— sînt mai sigure, mai accesibile și permit în plus și localizarea sursei;

— pot fi plasate în diferite părți ale corpului și a mîinilor, în număr suficient de mare, fără a stînjeni operațiile.

Deși procedeul este descoperit de fapt, o dată cu radioactivitatea, o bună perioadă de timp el a fost neglijat, pentru ca mai ales în ultimii ani să i se acorde aceeași importanță ca sistemelor electrice, înregistrarea pe film sau plăci fotografice, avînd însemnate perspective în special în cercetările de fizică nucleară.

Acțiunea radiațiilor menționate, asupra peliculei fotosensibile, este în fond asemănătoare cu acțiunea fotonilor de lumină; în ambele cazuri ionul negativ de brom, din rețeaua cristalină a bromurii de argint, pierde un electron care neutralizează un atom de argint din apropiere. Acești atomi de Ag constituie centrele în jurul cărora se va dezvolta acțiunea revelatorului. În procesul de revelare intervine de fapt o *amplificare chimică*, care poate ajunge pînă la ordinul 10^{12}, proprietate care face ca metoda fotografică, să concureze din punctul de vedere al sensibilității, cu metodele electrice.

În cazul unei densități uniforme de radiație înnegrirea materialului fotosensibil este uniformă pe întreaga suprafață a sa. Densitatea înnegririi filmului depinde însă de mai mulți factori: duritatea[1] și intensitatea[2] radiației, timpul de expunere, proprietățile emulsiei fotografice, compoziția și temperatura revelatorului și timpul de developare.

Trebuie menționat faptul că capacitatea de interacțiune a radiațiilor electromagnetice, scade cu creșterea energiei cuantelor.

În cazul menținerii constante a diverșilor parametri ce influențează înnegrirea, se obține o corespondență reproductibilă, între doză și înegrire[3], fapt care stă la baza dozimetriei cu film.

Descrierea aparatului

Măsurarea înnegririlor și deci citirea dozelor se face cu aparate optice speciale, denumite mai curent în literatură densitometre, ochiul omenesc neputînd distinge o diferență de înnegrire mai mică de 0,02[4].

Densitometrul realizat în cadrul laboratorului de metode radioactive I.M.A., spre deosebire de aparatele ce se cunosc, utilizează ca element fotosensibil două fotorezistențe sovietice de tipul FS-K2; elementul semiconductor fotosensibil, sulfura de cadmiu, este prezentată sub forma unui disc cu un diametru de 8 mm, cu o grosime de 0,6—0,8 mm, lipit pe o placă de sticlă, montată într-un corp de masă plastică, cu electrozi pentru conectare la suport standardizat[1]). Stratul semiconductor formează o rezistenţă chimică care la întuneric are o rezistenţă de ordinul cîtorva megaohmi, ce scade de îndată ce fotorezistenţa este luminată.

---

[1] Energia radiațiilor se exprimă în electron-volt ($1 \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-12}$ ergi). Radiațiile γ sînt cele mai dure, energia lor ajungînd la cîtiva MeV.

[2] Intensitatea unei substanțe radioactive se exprimă prin numărul de dezintegrări pe secundă ($1 \text{ curie} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ dez/s).

[3] Densitatea optică a înnegririi este definită, ca fiind logaritmul raportului dintre intensitatea fluxului luminos înainte și după străbaterea peliculei, fiind o măsură a atenuării fasciculului luminos ce trece prin film.

[4] Din atenuarea fluxului luminos $\left(\text{logaritmul raportului } \frac{I_2}{I_1}\right)$ rezultă scara de înnegrire; pentru obținerea unei densități de înnegrire (exceptînd voalul) egală cu 0,1 filmul trebuie să fie influențat de 10^6-10^8 electroni pe 1 cm^2 de emulsie.

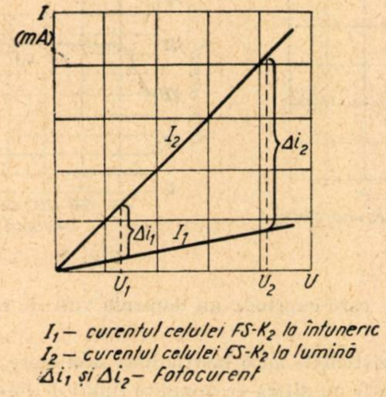


Fig. 1

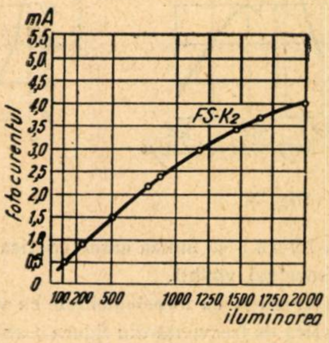


Fig. 2

În figura 1 se arată caracteristica volt-amper luată la întuneric şi la o iluminare de 200 lumeni.

Se constată că mărimea fotocurentului este funcţie de tensiunea aplicată, crescînd cu valoarea acesteia; în schimb variaţia relativă a mărimii rezistenţei la o anumită iluminare nu depinde de diferenţa de potenţial aplicată.

Considerîndu-se o dependenţă liniară a fotocurentului de tensiune aplicată, se poate determina de pe diagramă sensibilitatea specifică $k = \frac{\Delta i}{\Phi v}$ unde

Δi — fotocurentul egal cu diferenţa curenţilor de întuneric şi lumină (microamperi);

Φ — fluxul de lumină (lumeni)[2])

V — tensiunea aplicată elementului (volţi).

Caracteristicile fotorezistenţei FS-K2 sînt următoarele:

— Suprafaţa activă 28,8 mm^2,

— Rezistenţa la întuneric $\geqslant 10^6$ Ω,

— Sensibilitatea specifică $\geqslant 2500$ μA/lumen, V/,

— Tensiunea limită de lucru 300 V,

— Variaţia relativă medie a rezistenţei 98%,

— Multiplicitatea medie de variaţie a rezistenţei $\geqslant 35$,

— Coeficientul mediu de temperatură al fotocurentului, în intervalul 0 — + 40°C, — 0,12%/C,

— Puterea la dispersie sub sarcină constantă 0,15 W,

— Idem sub sarcina de impuls cu raportul de desime a impulsurilor 1 :10 2,5 W,

— Constanta de timp în intervalul 10—100 Hz $30 \cdot 10^{-3}$ s: (10^{-5} lm)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Aceste caracteristici sînt obţinute pentru iluminarea de 200 lumeni şi tensiunea 100 V cc.

În figura 2 este prezentată caracteristica de lumină care indică gradul de nelinearitate.

---

[1]) Gabaritul exterior: 28 × 12,5 × 4,5 mm.

[2]) $\Phi = 10^{-4}$ SL; S supraf. strat fotosensibil (cm^2); L iluminare.

De la această fotorezistenţă s-au putut obţine într-un impuls de scurtă durată fotocurenţi pînă la 100 miliamperi, pentru un impuls de lumină pînă la 3 s. 20—25 mA şi pentru iluminare continuă 1—1,5 m A.

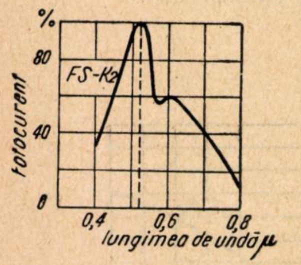


Fig. 3

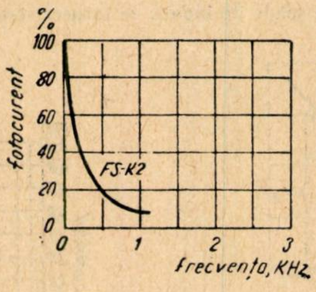


Fig. 4

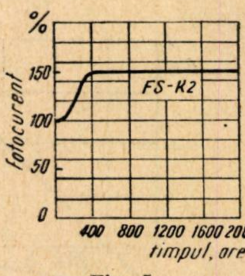


Fig. 5

În figura 3 se indică caracteristica spectrală, care cuprinde un domeniu vast de radiaţii inclusiv spectrul vizibil.

Comparativ cu fotoelementele cu vid, fotorezistenţele au o inerţialitate mai mare, totuşi caracteristica de frecvenţă din figura 4 arată că practic nu diferă de anumite tipuri de fotocelule cu gaz.

În figura 5 se arată stabilitatea la funcţionare în condiţii normale, timp de 2 000 ore şi la puterile nominale ale dispersării. Se observă că după o perioadă de stabilizare a proprietăţilor (300—400 ore) sensibilitatea fotorezistenţei creşte cu circa 50% ; cu cît mai mică va fi puterea de dispersie cu atît mai mică va fi îmbătrînirea fotoelementului.

După cum se remarcă uşor din cele de mai sus aceste fotorezistenţe se caracterizează prin marea sensibilitate, bună stabilitate şi o putere electrică însemnată.

Pînă în prezent cunoaştem numai densitometre, realizate în străinătate cu celule fotoelectrice; aceste traductoare spre deosebire de semiconductorii utilizaţi în densitometrul IMA, prezintă importante dezavantaje : o putere electrică redusă, care conduce la necesitatea utilizării unei celule amplificatoare între traductor şi instrumentul de citire ; o stabilitate în funcţionare mai mică, uzura în timp fiind apreciabilă. Deoarece celulele amplificatoare de curent continuu sînt dificile în exploatare, se recurge în general la modularea fluxului luminos cu un obturator rotativ (motor electric), ceea ce conduce la necesitatea utilizării unor celule de amplificare în curent alternativ, complicîndu-se instalaţia electrică.

Prin folosirea elementelor semiconductoare indicate mai sus, s-au eliminat aceste complicaţii realizîndu-se un montaj simplu şi mult mai robust. Din caracteristicile indicate rezultă posibilitatea comandării directe de către aceste fotorezistenţe a unui instrument de măsură (microampermetru) de tip obişnuit.

În condiţiile de temperatură (pînă la 45°C.) şi umiditate (sub 80%) aceşti traductori semiconductori au o durată de funcţionare practic nelimitată, la orice variaţie a fluxului de lumină.

În figura 6 a este prezentată schema de principiu a aparatului şi fotografia aparatului (fig. 6-*b*) ; modul de funcţionare decurge în mod clar după această schemă.

Montajul adoptat este de tipul *montaj în punte* cu două elemente fotosensibile şi cu o singură sursă de lumină. În acest fel, au fost eliminate în mare măsură influenţele sursei de alimentare şi a sursei de iluminare. Posibilitatea de compensare aleasă, presupune caracteristici cît mai asemănătoare ale elementelor fotosensibile, condiţii care în cazul fotorezistenţelor utilizate este îndeplinită în mod satisfăcător.

Metoda de măsură folosită este cea diferențială, indicația dată de instrumentul electric fiind rezultatul raportării la un etalon doză. Astfel sînt eliminate în mod automat influențele opacității suportului (pelicula de nitroceluloză) înnegrirea inițială a emulsiei și ale condițiilor de developare. În special, din cauza erorilor ce pot fi introduse de condițiile diferite de developare, considerăm că este necesar ca măsurătorile să nu se execute pe baza unei gradări inițiale a scalei de măsură (în miliremi) ci să se utilizeze numai metoda diferențială cu etalon.

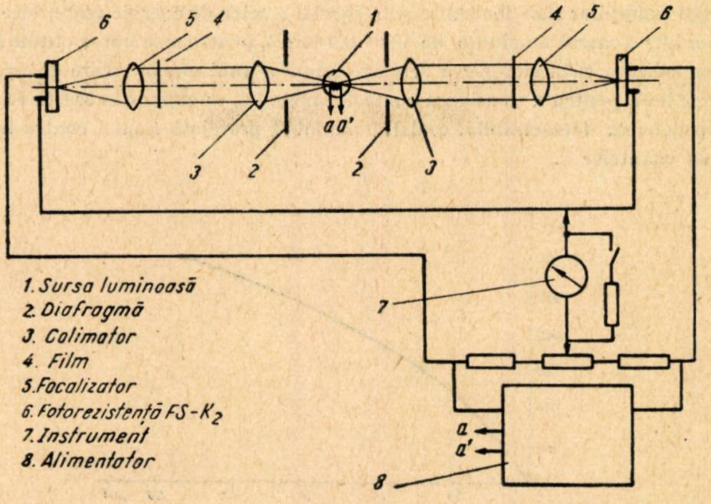

6
5
4
1
4
5
6
a a'
3
2
2
3
1. Sursa luminoasă
2. Diafragmă
3. Colimator
4. Film
5. Focalizator
6. Fotorezistență FS-K2
7. Instrument
8. Alimentator
7
a
a'
8

Fig. 6 a

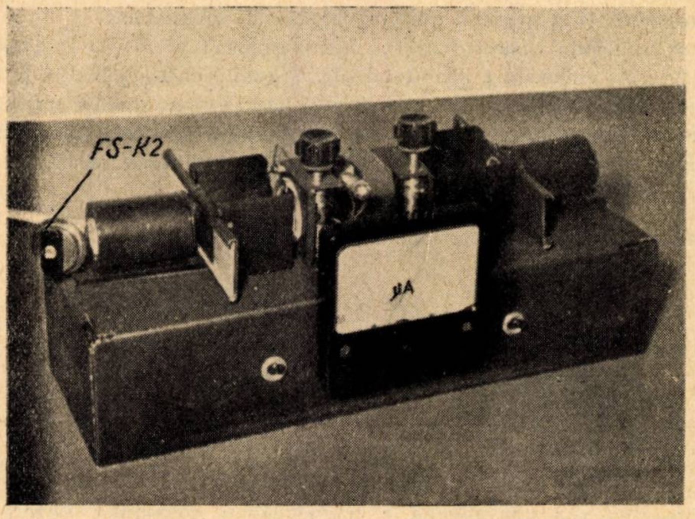


Fig. 6 b

Etaloanele au fost obţinute prin iradierea unui număr de plăci fotografice, la diferite doze binecunoscute. S-a lucrat cu film Agfa Röntgen, cu emulsie pe ambele părţi ale suportului. Grosimea stratului sensibil este cuprinsă între 10—20 μ (2—4 mg/cm^2) iar granulaţia halogenurii de argint (înainte de developare) este între 1—3,5 μ.

În cazul radiaţiilor slab ionizante şi în special a celor de energie mare, este necesar să se expună filmul într-o casetă de plumb de 0,2—0,4 mm[1]), pentru a se putea obţine o multiplicare a particulelor ionizate, prin smulgerea de către fotoni a unui număr mare de electroni din Pb. Şi în acest caz însă, pentru a se asigura controlul metodei, se expune în caseta de plumb numai jumătate din pelicula fotosensibilă, cealaltă rămînînd protejată numai contra luminii, şi deci expusă numai cuantelor γ.

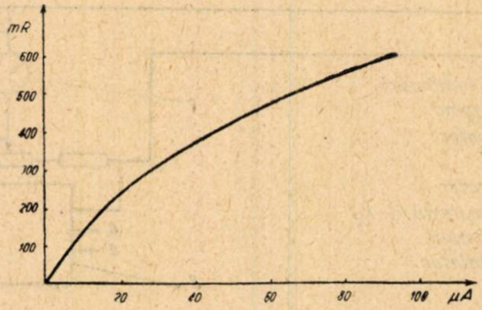


Fig. 7

Metoda casetelor cu plumb de mică grosime dă rezultate mult mai bune decît cea a casetelor din alte materiale şi în special a substanţelor speciale scintilatoare.

În condiţiile lucrului cu acest film şi cu o sursă gamma (Co^{60}; $E_\gamma = 1{,}13$ MeV) s-a obţinut următoarea curbă de etalonare a aparatului (fig. 7) (doza mR — curentul μ A).

În concluzie acest tip de aparat ce utilizează fotorezistenţe prezintă o sensibilitate mare, o simplificare şi o îmbunătăţire faţă de densitometrele obţinute cu celule fotoelectrice, utilizate pînă în prezent, el putînd fi adoptat de toate laboratoarele ce utilizează raze X sau diferiţi radioizotopi.

Primită la redacţie la 30 decembrie 1959

ПЛОТНОМЕР С ПОЛУПРОВОДНИКАМИ ДЛЯ ДОЗИМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОТОПЛЕНКИ

РЕЗЮМЕ

Описывается тип плотномера с применением советских фотосопротивлений ФС-К2, построенный в виде дифференциального мостика, что привело к более простому решению, чем в случае применения фотоэлементов с внешним эффектом.

Указывается способ работы эталонами (фотопленка), позволяющий чтение дозы в миллиремях.

---

[1]) Grosimea nu trebuie să fie depăşită din cauza parcursului redus al electronilor în Pb.

SEMI-CONDUCTOR DENSIMETER FOR FILM DOSIMETRY

ABSTRACT

Paper presents a densimeter, constructed with the Soviet photo-resistances *FS-K2* and designed under the form of a differential bridge, which leads to a simpler solution than that obtained by using photo-electric cells with external effect.

The method of employment with films allowing the reading of ose in milirems is indicated.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Ж. ХАИН, Г. БРАУНЕЛЛ, *Радиационная дезиметрия*. Изд. Иностранной литературы, Москва, 1958.
2. I. S. KVLIVOV, I. A. POPOV, *Folosirea izotopilor radioactivi*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. M. C. ONCESCU, *Fizica protecţiei contra radiaţiilor* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1958.
4. A. S. SANIELEVICI, *Radioactivitatea*. Vol. I. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
5. L. K. TATOCENKO, S. V. MEDVEDIEV, *Aplicaţiile defectoscopiei cu raze gama în industrie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
6. * * * *Фотосопративления*. Comitetul de Stat pentru radioelectrică al Consiliului de Miniştri U.R.S.S., Moscova, 1958.

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

APARAT PENTRU CALORIMETRAREA PROCESELOR DE UZURĂ

DE

GH. MARIN

Studiul uzurii, privit sub aspect energetic, a pus unele condiţii de funcţionare a instalaţiilor experimentale existente în laborator, la care acestea fie că nu au putut răspunde din motive constructive, fie că mînuirea lor a fost dificilă şi rezultatele nesatisfăcătoare.

Pentru a remedia această situaţie s-a conceput o instalaţie experimentală (fig. 1) la care să se poată reproduce majoritatea fenomenelor care intervin în procesul uzurii, înregistrînd, în acelaşi timp, parte din parametrii funcţionali. Instalaţia poate urmări în timp, evoluţia acestor parametri în vederea stabilirii bilanţului energetic, în care intervin efecte mecanice, căldură etc.

Principalele caracteristici constructive ale acestui aparat experimental sînt prezentate în cele ce urmează.

GENERALITĂŢI

Aparatul este de tip sabot-tambur şi permite realizarea procesului de frecare fie în baie de ulei, fie în atmosferă lubrifiantă sau nelubrifiantă.

Antrenarea se face axial prin intermediul unei cuple izolate din punct de vedere caloric, a unei cuple dinamometrice şi a unei cutii de viteză.

Încărcarea se face printr-o pîrghie de multiplicare acţionată prin greutăţi sau printr-un arc etalonat.

Blocul activ al aparatului este izolat termic de exterior şi poate fi cufundat într-un vas calorimetric mobil.

Instalaţia se poate folosi atît cu aparataj electronic cît şi cu înregistrări fotografice sau citiri directe.

DESCRIEREA APARATULUI PE SUBANSAMBLE, MODUL DE FUNCŢIONARE ŞI PERFORMANŢE

a) Gama de viteze necesară este asigurată de o cutie de viteze (*a*, fig. 2) cu patru trepte şi schimbarea roţii de antrenare montată pe arborele electromotorului cu roţi al cărui număr de dinţi variază. În acest scop electromotorul este montat pe două glisiere care îi dau libertatea de a face mişcare de translaţie radială. Prin acest sistem s-a realizat, cu un electromotor de 1380 rot/min, o gamă de viteze cuprinsă între 550 şi 3000 rot/min, în 24 trepte distincte. Schimbarea electromotorului cu altul de turaţii diferite, ridică sau coboară valoarea treptelor de viteză, mărind astfel intervalul posibil de lucru al aparatului.

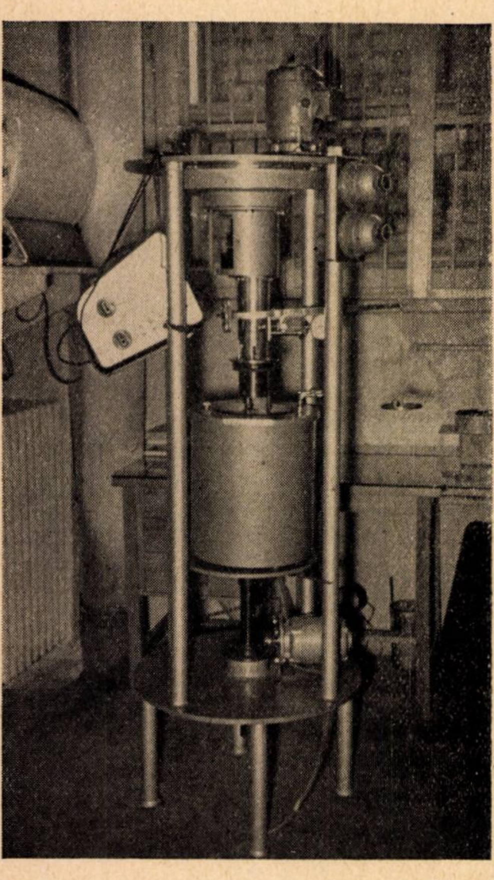


Fig. 1

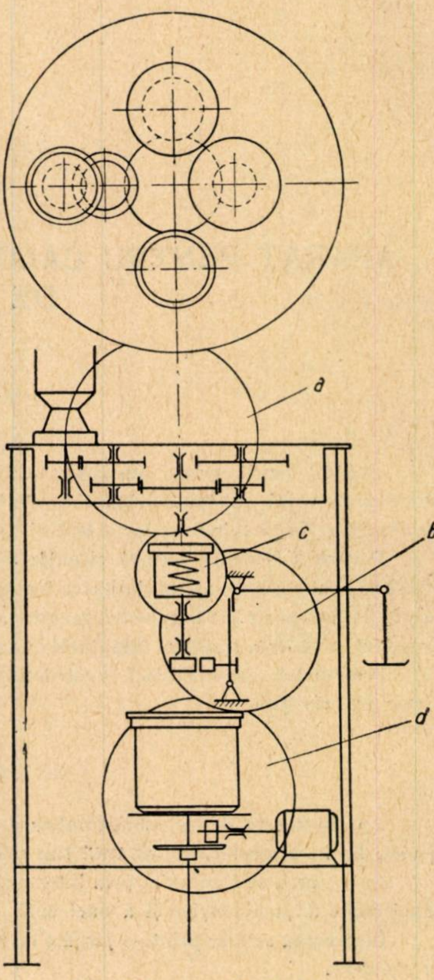


Fig. 2. — *a*. cutia de viteze, *b*. sistemul de prindere şi de încărcare a epruvetelor, *c*. dispozitiv pentru măsurarea momentului de frecare, *d*. calorimetru.

Pinioanele de antrenare şi cele ale cutiei de viteză, au fost construite cu dinţi înclinaţi la 30^0.

b) Montarea tamburului-epruvetă se face în capul arborelui de lucru, pe con, iar a sabotului într-o casetă care culisează pe un canal.

Sistemul de încărcare este format dintr-o pîrghie cuplată cu un platan pentru greutăţi, sau cu un arc etalonat la care se poate citi deplasarea cu ajutorul unui disc gradat (*b*, fig. 2).

Datorită raportului mare de încărcare (1/80) se poate ajunge pînă la sarcini de 200—250 kg/cm^2.

Pentru măsurarea grosieră a uzurii deplasarea capătului pîrghiei este urmărită de un ceas comparator, care la pornire este adus la zero (sistemul este util în special pentru studiul materialelor care au uzura mare ; de exemplu ferodouri).

Aparatul mai este prevăzut cu un dispozitiv cu ajutoru căruia se poate studia ş uzura roţilor dinţate.

c) Dispozitivul pentru măsurarea momentului de frecare este construit pe arborele central şi preia mişcarea de rotaţie de la cutia de viteze pe care o transmite arborelui de lucru prin intermediul unui resort spiral (*c*, fig. 2). Capetele resortului sînt fixate împreună cu două discuri ; unul gradat la 360° iar celălalt avînd un ac indicator reglat static la 0°.

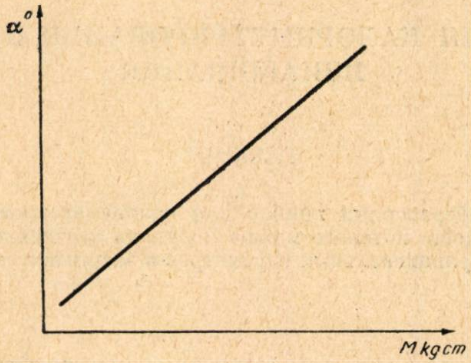


Fig. 3

Momentul de frecare al fusului conduce la o decalare a celor două discuri funcţie de mărimea sarcinii. Citirea unghiului se face cu ajutorul unui stroboscop.

Curba de etalonare a dispozitivului pentru măsurarea momentului de frecare (fig. 3) este liniară pe intervalul de 0,5—25 kgcm.

Dispozitivul este completat cu un sistem de măsurarea momentului de frecare maxim (la pornire) compus dintr-un inel antrenat de acul indicator la punctul de moment maxim unde rămîne pînă la terminarea experimentării. Momentul maxim poate fi citit la oprirea aparatului.

d) Pentru calorimetrare, epruvetele împreună cu sistemul de prindere sînt introduse într-un pahar cu ulei. Partea de sus a paharului se reazimă pe o garnitură moale de mase plastice, pentru ca la barbotare, uleiul să nu fie centrifugat afară. Întregul dispozitiv este montat într-un calorimetru care este adus la înălţimea paharului prin intermediul unui electromotor de mică putere (*d*, fig. 2).

Un termometru fixat la blocul metalic indică permanent variaţia temperaturii în timpul experienţei.

e) Comanda electromotoarelor este asigurată de un întrerupător cu trei faze, pentru cutia de viteze, şi de un inversor de faze şi un buton, pentru cel al calorimetrului. Instalaţia este montată la partea superioară a aparatului pentru uşurarea manipulării.

CONCLUZII

Aparatul pentru calorimetrarea proceselor de uzură asigură funcţionarea pe gamă întinsă în ceea ce priveşte turaţia, încărcarea şi temperatura de lucru.

Este, de asemenea, înzestrat cu instalaţiile necesare pentru măsurarea şi urmărirea în timp a evoluţiei unor parametri funcţionali, în vederea stabilirii bilanţului energetic în procesele de frecare şi uzură.

În timpul lucrărilor efectuate aparatul s-a dovedit uşor de manipulat, iar rezultatele obţinute au fost reproductibile.

Primită la redacţie la 10 februarie 1960

ПРИБОР ДЛЯ КАЛОРИМЕТРИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ИЗНАШИВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Описывается лабораторный прибор для калориметрирования процессов трения и износа, при помощи которого можно получить переменные условия работы с целью установления функциональных параметров и энергетического баланса.

APPAREIL POUR LES MESURES CALORIMÉTRIQUES DES PROCESSUS D'USURE

RÉSUMÉ

L'auteur présente un appareil qui permet d'effectuer les mesures calorimétriques concernant les phénomènes de frottement et d'usure. L'appareil permet d'obtenir des conditions de fonctionnement variables, ainsi que de déduire les paramètres fonctionnels et le bilan énergétique.

RECENZII

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых (Teoria mecanismelor pentru reproducerea curbelor plane)* Издательство Академии Наук, Москва, 1959, 254 pag.

Mecanismele de reproducere a traiectoriilor date își găsesc aplicarea azi pe scară tot mai largă într-o serie de aparate de precizie, la dispozitivele mașinilor de calcul și în diferitele programări cerute azi de multiplele procese tehnologice.

În cartea de față acad. I. I. Artobolevski prezintă rezultatele unei susținute activități științifice în acest domeniu, generalizînd totodată rezultatele obținute de specialiștii din U.R.S.S. cît și din alte țări.

Plecînd de la cele mai noi cercetări în domeniul teoriei mecanismelor de trasat traiectorii date, evidențiază rolul pe care aceste mecanisme îl joacă în diferitele construcții de mașini și aparate automate, prin obținerea unor dependențe funcționale variate.

În tratarea acestor probleme autorul folosește metoda analitică și geometrică, îmbinate într-un tot armonios ce apare astfel ca o trăsătură deosebit de originală a lucrării.

Sînt atacate rînd pe rînd teoria mecanismelor cu cuple cinematice superioare de clasa IV, cu cuple cinematice inferioare de clasa V, teoria și sinteza mecanismelor exacte directoare rectilinii și directoare circulare.

În continuare, se prezintă mecanisme de trasare punctuală sau tangențială, cum ar fi mecanismele elipsografe, hiperbolografe, parabolografe.

Teoria mecanismelor privind traiectoria curbelor de ordinul al III-lea este tratată în continuare.

Teoria și sinteza mecanismelor de reproducere a curbelor algebrice de ordinul al IV-lea face obiectul unui alt capitol, ca și teoria reproducerii mecanice a unor clase de curbe algebrice de un ordin superior lui 4. Sînt, de asemenea, prezentate și probleme de sinteza mecanismelor de reprodus curbe transcendente uzuale ca și curbe uzuale de tip parabolic și hiperbolic de ordin superior.

Prin bogatul material prezentat, prin metodele originale folosite, cartea acad. I. I. Artobolevski reprezintă o nouă și valoroasă contribuție în domeniul teoriei mecanismelor menită să răpundă unui șir întreg de probleme actuale și moderne ce se pun construcției de mașini automate.

Traducerea în limba romînă a acestei cărți ar prezenta o completare remarcabilă adusă literaturii de specialitate în limba romînă, făcînd astfel accesibil specialiștilor un bogat și deosebit de interesant material documentar de primă necesitate.

Radu C. Bogdan

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, Н. И. ЛЕВИТСКИЙ, С. А. ЧЕРКУДИНОВ, *Синтез плоских механизмов* (*Sinteza mecanismelor plane*). Физматгиз, Москва, 1084 ст. — 1959.

Mecanizarea complexă și automatizarea proceselor de producție reprezintă, azi, linia generală a progresului tehnic. Astfel, problemele ce se pun, constructorului modern de mașini, sînt crearea mașinilor și mecanismelor cu funcționare automată, precum și crearea unor dispozitive și aparate automate pentru reglarea și controlul proceselor de producție.

Construirea unor astfel de mașini și dispozitive automate implică însă o cunoaștere adîncă a teoriei și metodelor de calcul și proiectare a acestora.

În acest sens, sinteza mecanismelor, acel capitol al teoriei mecanismelor care studiază metodele de proiectare ale mecanismelor capătă un nou conținut și o dezvoltare deosebită. Ea cere constructorilor cunoașterea unor metode de proiectare rapide și raționale care să poată satisface cerințele tehnicii moderne, o perfectă cunoaștere a teoriei, pe baza căreia să se poată dezvolta procedeele practice de proiectare. În acest sens, apar ca instrumente de documentare valoroase, acele lucrări care prezintă stadiul cercetărilor într-o anumită perioadă de timp, punînd la dispoziție specialiștilor metode de proiectare utile.

Cartea prof. I. I. Artobolevski, N. I. Levițkii, S. A. Cerkudinov apărută recent constituie o contribuție deosebită în acest domeniu.

Volumul de față reprezintă o dezvoltare a lucrării *Sinteza mecanismelor* de Artobolevski, Bloch și Dobrovolski, publicată la Moscova în 1944. El este completat cu bogate rezultate ale cercetării științifice, legate de această activitate, a autorilor, precum și cu rezultatele noi obținute de atunci, în diferite alte țări.

Așa cum se arată și în prefață, autorii au căutat să cuprindă în această lucrare, metodele de bază ale sintezei mecanismelor, pe care le-ar putea folosi constructorii de mașini în lucrările lor practice.

După cum reiese și din titlu, sînt prezentate metodele de sinteză a mecanismelor plane. În anumite cazuri însă, se dau și indicații privind posibilitățile de extindere asupra mecanismelor spațiale, de anumite forme particulare.

După o introducere în care se prezintă un istoric al dezvoltării sintezei mecanismelor, bogatul material cuprins în volumul de față este împărțit în trei părți.

În prima parte (cap. I și II) sînt tratate în mod succint probleme de structură a mecanismelor și geometria cinematică a mecanismelor.

În partea a II-a (cap. III—VIII) sînt prezentate metodele exacte de sinteză a mecanismelor. Aici sînt expuse probleme de sinteza mecanismelor centroidale cu trei elemente ; mecanisme cu 4 sau 5 elemente și cuplă centroidală de rostogolire, cu alunecare. În continuare este studiată sinteza mecanismelor cu cuple cinematice inferioare. Trebuie relevat în mod special sinteza unor serii de conicografe, a mecanismelor trasoare de ordin sau clasă superioare ca și acele mecanisme ce reproduc unele dependențe funcționale. Sinteza mecanismelor cu came și a mecanismelor, așa numite cruci de Malta, constituie de asemenea obiectul altor studii cuprinse în această parte.

Teoria metodelor de aproximație, privind sinteza mecanismelor este tratată în partea a III-a a cărții (cap. IX—XVI). În aceste capitole se înfățișează sinteza mecanismelor de transmisie și sinteza mecanismelor directoare aproximative, sinteza mecanismelor de transmisie prin metoda de interpolare sau metoda celei mai bune aproximații, ca și sinteza mecanismelor cu opriri intermitente.

Metodele folosite sînt atît cea geometrică cît și cea algebrică. Un bogat material bibliografic și o serie de aplicații ce își găsesc finalitatea imediată în practică completează în mod foarte util lucrarea prof. Artobolevski, Levițkii și Cerkudinov, punînd astfel la îndemîna specialiștilor și referințe foarte prețioase.

Lucrarea formează un tot perfect unitar deși este opera a 3 autori (cap. I, II, III, IV, V. VI sînt scrise de I. I. Artobolevski, cap. VII, IX, X, aparțin lui N. I. Levițkii, iar cap. VIII, XI, XII—XVI, sînt elaborate de S. A. Cerkudinov, la care se adaugă și colaborarea la cap. VIII și XVI a lui N. V. Speranskii).

Cartea *Sinteza mecanismelor plane* reprezintă o contribuție valoroasă și deosebit de utilă adusă literaturii mondiale de specialitate. Ea constituie un îndreptar prețios pentru inginerii proiectanți, profesorii, lucrătorii științifici și studenții familiarizați cu bazele teoriei mecanismelor.

În acest sens, traducerea în limba romînă a acestei lucrări ar prezenta un interes cu totul special.

Radu C. Bogdan

* * * *Повышенные прочности элементов конструкций и деталей машин (Mărirea rezistenței pieselor și organelor de mașini)* Гос. Научно-техн., изд. маш. лит., Москва, 1959, 212 pag.

Acest volum constituie o culegere de articole, publicate sub redacția prof. dr. I. V. Kudriavțev, reprezentînd lucrări efectuate în cadrul Institutului central de cercetări științifice în domeniul tehnologiei și construcțiilor de mașini (ȚNIITMAȘ).

Problema măririi rezistenței pieselor și organelor de mașini este deosebit de importantă, atît din considerente de ordin economic cît și pentru a putea construi mașini de calitate mai bună. Aceasta se poate obține atît prin efectuarea unui calcul mai judicios, cunoscînd cît mai bine proprietățile mecanice ale materialelor, cît și prin îmbunătățirea acestor proprietăți mecanice prin diferite procedee. În acest volum sînt prezentate numeroase studii în aceste direcții, atît de natură teoretică cît și mai ales de natură experimentală.

O primă grupă de lucrări se ocupă de determinarea stării de tensiune în diferite organe de mașini. Remarcăm astfel studiul lui I. V. Kudriavțev asupra influenței tensiunilor remanente asupra rezistenței la oboseală a oțelului. V. M. Zavarțeva a făcut cercetări pe cale fotoelastică asupra unor grinzi curbe și asupra unui disc inelar, cu un intrînd în cercul interior, acționat de sarcini interioare.

Al doilea grup de lucrări se ocupă de consolidarea organelor de mașini, prelucrate superficial. Unele articole se ocupă de tehnologia prelucrării pieselor.

Alte lucrări cuprind probleme legate de proprietățile oțelurilor la temperaturi obișnuite și la temperaturi înalte. Menționăm astfel articolul lui I. V. Kudriavțev și T. V. Naumova cu privire la influența deformațiilor plastice mari asupra proprietăților de rezistență ale oțelurilor austenitice.

O lucrare a lui S. I. Ia̦tkevici și N. E. Naumcenkov privește problema utilajului nou în încercările de rezistență.

Culegerea se adresează constructorilor, tehnologilor și cercetătorilor din domeniul construcțiilor de mașini, consultarea ei fiind de un real folos.

Petre P. Teodorescu

* * * *Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz,* mit Beiträgen von A. N. Kolmogorov, A. M. Obuchow, A. M. Jaglom, A. I. Monin (Culegere referitoare la teoria statistică a turbulenței, cu contribuții de A. N. Kolmogorow, A. M. Obuhov, A. M. Iaglom, A. S. Monin), Akademie-Verlag, Berlin, 1958, IV + 228 p, 22,50 DM.

Teoria statistică a turbulenței își are punctul de plecare într-o lucrare a savanților sovietici. A. A. Fridman și L. V. Keller, publicată cu mai bine de treizeci de ani în urmă. Ideea de a se introduce momentele de corelație, adică valorile medii ale produselor pulsațiilor mărimilor hidrodinamice fundamentale (viteză, presiune, temperatură etc.) în două puncte diferite, s-a dovedit fundamentală pentru studiul turbulenței pe baze statistice. A fost însă necesar să se recurgă la anumite simplificări, dintre care cea mai importantă este aceea de a se considera cazul special al turbulenței statistic omogene și izotrope, pentru a se ajunge la rezultate de o certă valoare calitativă și în oarecare măsură cantitativă.

Școala sovietică are merite deosebite în dezvoltarea acestor idei, multe din lucrările fundamentale aparținînd cunoscuților oameni de știință A. N. Kolmogorov, A. M. Obuhov și A. M. Iaglom. Consultarea lor în original de către specialiștii străini fiind în unele cazuri dificilă, din cauza lipsei publicațiilor în care au apărut, inițiativa de a se edita în limba germană o culegere cuprinzînd aceste lucrări este foarte bine venită. În același timp, prezentarea într-un singur volum a rezultatelor obținute de mai mulți cercetători separat, permite să se degajeze și ideile conducătoare care au fost urmărite în dezvoltarea școlii de cercetare respectivă.

Volumul conține un număr de 13 (treisprezece) lucrări, publicate între anii 1949 și 1954 în diferite periodice științifice sovietice, conținînd rezultate cu un caracter general, fie considerații asupra unor probleme mai restrînse. Astfel, primul studiu, datorit lui A. M. Obuhov și intitulat *Descrierea statistică a cîmpurilor continui,* reprezintă o trecere în revistă sistematică a problemelor principale din teoria cîmpurilor aleatorii, scalare și vectoriale. Această teorie formează mijlocul de investigație utilizat în studiul turbulenței și s-a dezvoltat chiar pe baza rezolvării unor probleme concrete. Aplicațiile posibile se extind însă și în alte domenii, ca de pildă în geofizică. Din amplul studiu al lui A. M. Obuhov semnalăm în special teorema referitoare la descompunerea funcțiilor de corelație în componente care corespund componentelor solenoidale și potențiale ale unui cîmp. Acest rezultat original a fost găsit de autor mai înainte, dar a fost publicat pentru prima oară în lucrarea la care ne referim.

Al doilea studiu cuprins în acest volum are ca autor pe A. M. Iaglom și poartă titlul *Turbulența omogenă și izotropă într-un fluid vîscos compresibil.* În cercetarea teoretică a fenomenului, se ține seama de vîscozitatea și de conductibilitatea termică a fluidului. Pe lîngă faptul că se consideră turbulența omogenă și izotropă, se mai admite că momentele de corelație de ordinul al treilea sînt neglijabile în comparație cu cele de ordinul al doilea. Autorul utilizează rezultatele teoriei spectrale a cîmpurilor aleatorii omogene și în felul acesta introduce, drept mărimi fundamentale caracteristice, densitățile spectrale corespunzătoare funcțiilor de corelație. În felul acesta, se obține o simplificare destul de apreciabilă a calculelor legate de rezolvarea problemei. Lucrarea conține și tratarea cazului mai simplu al unui fluid incompresibil, pe aceeași cale.

În continuare, sînt date în acest volum două din lucrările importante ale lui A. N. Kolmogorov. Prima dintre ele, intitulată *Structura locală a turbulenței într-un fluid vîscos incompresibil la numere Reynolds foarte mari,* conține definirea turbulenței local omogene și local izotrope precum și bine cunoscutele ipoteze de similitudine referitoare la această turbulență. Cealaltă lucrare și anume *Disipația energiei pentru turbulența local izotropă* este o continuare a celei menționate mai înainte. Prin introducerea momentelor de corelație de ordinul al doilea şi al treilea, se ajunge la o ecuaţie analoagă cu aceea dată de Kármán pentru turbulenţa izotropă în sensul lui Taylor. Pe baza acestei ecuaţii, sînt stabilite apoi relaţii între energia de disipaţie medie şi momentele de corelaţie.

Studiul lui A. M. Obuhov intitulat *Asupra repartiţiei energiei în spectrul unei scurgeri turbulente* are ca punct de plecare noţiunea de spectru al unei scurgeri şi aceea de repartiţie a energiei în acesta. Pentru a se obţine funcţia care reprezintă repartiţia de energie, autorul utilizează consideraţii asupra bilanţului de energie şi a staţionarităţii unui cîmp turbulent. Rezultatele sînt aplicate la o problemă de difuziune turbulentă în atmosferă.

O lucrare amplă este aceea datorită lui A. M. Obuhov şi A. M. Iaglom care tratează despre *Microstructura unei scurgeri turbulente*. Teoria lui A. N. Kolmogorov asupra izotropiei locale a scurgerilor turbulente este completată prin rezultatele obţinute în acest studiu. Cercetările expuse în el au ca obiect calculul funcţiilor de structură ale cîmpului de viteze şi de presiuni precum şi calculul funcţiilor de corelaţie pentru cîmpul de acceleraţii.

Cele două lucrări care urmează în volum se referă la problema structurii cîmpului de temperaturi într-o scurgere turbulentă. În prima dintre acestea, A. M. Obuhov tratează problema introducînd ca mărime structurală caracteristică media patratică a diferenţei de temperatură în două puncte ale scurgerii. Intensitatea oscilaţiilor de temperatură este caracterizată prin dependenţa acestei mărimi de distanţa pînă la punctele de observaţie. Pe baza teoriei turbulenţei local izotrope, se determină teoretic această dependenţă şi se apreciază apoi ordinul de mărime al mărimilor caracteristice ale cîmpului de temperaturi atmosferice.

În cealaltă lucrare, datorită lui A. M. Iaglom, se arată că rezultatele expuse mai înainte ale lui A. M. Obuhov pot fi deduse cu ajutorul ecuaţiilor hidrodinamice şi precizate în oarecare măsură.

În continuare, sînt cuprinse în volum alte două lucrări ale lui Kolmogorov. În aceea intitulată *Despre degenerarea turbulenţei izotrope într-un fluid viscos incompresibil*, autorul arată că pentru cazul turbulenţei izotrope în sensul lui Taylor, pentru un timp mare, numărul lui Reynolds, în care lungimea caracteristică este scara turbulenţei, are valori mici. În această situaţie finală de degenerare a turbulenţei, se poate aplica o teorie în care se neglijează momentele de ordinul al treilea. Cu ajutorul ipotezelor anterioare ale autorului, se determină energia de disipaţie medie, valoarea medie a vitezei şi scara turbulenţei, ca funcţii de timp.

Experienţele executate de alţi autori asupra pulverizării în apă a picăturilor fluide insolubile i-au servit lui A. N. Kolmogorov ca un mijloc de a verfica ipotezele sale asupra structurii locale a turbulenţei, lucru care a fost făcut în lucrarea *Asupra pulverizării picăturilor într-o scurgere turbulentă*.

În studiul său intitulat *Despre influenţa neomogenităţilor atmosferei asupra propagării sunetului şi luminii*, A. M. Obuhov examinează problema propagării undelor într-un mediu cu indice de refracţie oscilant. Aplicaţiile au ca obiect acustica atmosferei şi scintilaţia stelelor. Se dă mai întîi soluţia problemei obţinută prin liniarizarea ecuaţiei şi se trece apoi la tratarea statistică a problemei.

Tot A. M. Obuhov este autorul lucrării *Cercetarea microstructurii vîntului în stratul de lîngă sol al atmosferei*. Deşi conţine o scurtă introducere teoretică, lucrarea are un caracter experimental predominant. Se descrie astfel o metodă de măsură, cu ajutorul sondelor cu fir cald, a pulsaţiilor vitezei vîntului. Sînt date apoi rezultatele măsurilor, în comparaţie cu concluziile teoriei turbulenţei local izotrope. În încheiere, se prezintă metoda utilizată pentru măsurarea componentei verticale a vitezei vîntului şi determinarea tensiunilor turbulente.

Ultimul studiu din acest volum este intitulat, *Legile fundamentale ale amestecului turbulent în stratul de lîngă sol al atmosferei* şi are ca autori pe A. S. Momin şi A. M. Obuhov. Articolul conţine generalizări ale datelor empirice asupra repartiţiei vitezei vîntului în diferite condiţii de stratificare termică. Se dă, de asemenea, o metodă pentru determinarea mărimilor caracteristice de schimb pe baza măsurătorilor vitezei vîntului şi gradienţilor de temperatură.

Scurta trecere în revistă a conţinutului studiilor publicate în această culegere arată că este vorba de cercetări deosebit de interesante, multe dintre ele cu caracter fundamental. Parcurgerea lor este utilă atît cercetătorilor din domeniul de specialitate cît şi matematicienilor care doresc să studieze probleme cu caracter fizic.

T. Oroveanu

J. O. HINZE, *Turbulence. An introduction to the Mechanism and Theory* (Turbulenţa. Introducere în mecanism şi teorie). Mc Graw — Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, 1959, 586 pag.

Cartea prof. J. O. Hinze are două însuşiri importante :

1. Este scrisă într-un stil care o face atractivă atît pentru fizician cît şi pentru matematician, atît pentru începător cît şi pentru cel care s-a preocupat mai de mult de marea problemă a mişcării turbulente.

2. În cuprinderea materialului, actualizat prin ultimele cercetări de specialitate, se simte prezenţa unui punct de vedere critic foarte precis, care nu elimină nici o concepţie mai veche de interes practic (teoria lungimii de amestec), dar în acelaşi timp acordă accentul cuvenit teoriilor statistice moderne. Autorul ocoleşte cu judicios tact ştiinţific interpretările pur teoretice, nefondate fizic, ca şi cunoaşterea pur experimentală, limitativă, căutînd permanent să se găsească pe un teren sigur, al unor adevăruri cîştigate, desvăluind limpede lacunele cunoştinţelor actuale (teoria turbulenţei neomogene).

Lucrarea e împărţită în 7 capitole pe care le vom expune pe scurt.

Cap. 1. *Introducerea generală şi concepte.* Este descrisă natura fizică a turbulenţei, conceptele de mediere, ecuaţiile lui Reynolds, ecuaţia conservării unei cantităţi transferabile, noţiunea de corelaţie, difuziunea turbulenţei, scara de turbulenţă, descompunerea spectrală a energiei turbulente, relaţii de bilanţ energetic în scurgerea turbulentă.

Cap. 2. *Principiile metodelor şi tehnicilor de măsurare în scurgerea turbulentă.* Accentul cade pe anemometria cu fir cald, indicîndu-se sumar şi metodele inducţiei electromagnetice şi ale vizualizării scurgerii.

Cap. 3. *Turbulenţa izotropică.* Sînt deduse tensiuni de corelaţie şi ecuaţia comportamentului dinamic al turbulenţei izotropice, în termeni de corelaţie cît şi în termeni spectrali, amortizarea turbulenţei, observaţii asupra efectului compresibilităţii.

Cap. 4. *Turbulenţa anizotropă.* Extrem de puţine date, dinamica corelaţiilor duble şi a spectrului, fără soluţii.

Cap. 5. *Procese de transport în scurgerile turbulente.* Teoria lungimii de amestec, difuziunea în turbulenţă omogenă, difuziunea de la o sursă fixă, difuziunea unei particule discrete, analogii în transportul turbulent.

În aceste cinci capitole au fost expuse problemele turbulenţei care au fost prinse în concepte matematice verificate satisfăcător de experienţă.

Ultimele două capitole sînt consacrate turbulenţei anizotrope, pentru care sînt date toate rezultatele experimentale, obţinute în condiţii îngrijite de laborator.

Cap. 6. *Turbulența anitzotropă liberă.* Sînt arătate rezultatele experimentale privind distribuțiile de mărimi medii și fluctuante, spectre de energie, bilanț energetic pentru dîre și jeturi.

Cap. 7. *Turbulența anizotropă la perete.* Diagrame analoage precedentelor obținute în cazul stratului limită, a canalelor și tuburilor.

În ambele capitole se analizează structura turbulenței, adică se caută o fixare în spațiu a vîrtejurilor de diferite ordine ce conțin energia turbulentă.

Prin accesibilitatea și nivelul ei această carte este un instrument util în mîna inginerului mecanic sau chimist, a fizicianului și a cercetătorului științific.

Șt. Săvulescu

В. Н. СЕЛОАЧЕВ, *Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме* (Exploatarea stratelor petrolifere și acvifere în regim elastic) — Государственное Научно-техническое издательство Нефтянной и Горно-топливной литературы — Moskva, 1959.

Profesorul V. N. Seloacev, cunoscut specialist în domeniul curgerii fluidelor prin medii poroase aduce o prețioasă contribuție prin publicarea lucrării *Exploatarea stratelor petrolifere și acvifere în regim elastic.*

Importanța acestei cărți constă în aplicabilitatea teoriilor expuse la rezolvarea unor probleme fundamentale, de interes practic, necesare realizării unei exploatări raționale.

Scopul principal este descrierea și analiza particularităților de comportare a sondelor, stratelor petrolifere și acvifere în timpul exploatării, în cazul existenței regimului sus amintit.

În general, curgerea fluidelor în aceste condiții de exploatare este nestaționară și descrierea matematică conduce la rezolvarea unei ecuații parabolice, analoagă ecuației conductibilității termice, cu diferite condiții inițiale și la limită.

Materialul este complet și judicios expus introducînd progresiv pe cititor în problemele de bază ale teoriei exploatării în regim elastic. Acest lucru, ușurează mult înțelegerea problemelor tratate și contribuie la înlăturarea dificultăților inerente întîlnite în înțelegerea aspectelor fizice, extrem de complexe, care de obicei apar în alte lucrări similare, unde aceste probleme nu sînt tratate suficient de larg și profund, din acest punct de vedere.

Meritul autorului constă în faptul că a reușit să ne prezinte o lucare de sinteză, care conține cele mai importante rezultate obținute în ultimul timp în acest domeniu, făcînd, în același timp, ca materialul expus să fie accesibil unui cerc larg de tehnicieni.

Astăzi utilitatea cunoașterii particularităților de curgere, care constituie premisele teoretice necesare elaborării metodelor de prevedere a comportării în timp într-un regim elastic al zăcămintelor cu o avansare a apelor din acviferul adiscent și a metodelor de cercetare a sondelor, în regim nestaționar, a devenit unanim recunoscută.

Cartea oferă cititorului posibilitatea explicării unor fenomene observate în cursul exploatării sondelor și totodată, în urma analizei critice a rezultatelor obținute, ridică probleme noi pentru acei ce vor să adîncească studiul curgerii fluidelor compresibile prin medii poroase, în condițiile exploatării zăcămintelor petrolifere.

Trebuie menționat că aplicarea teoriilor expuse și a rezultatelor prezentate în lucrare, la proiectarea exploatării primare, permite obținerea unor concluzii teoretice și practice extrem de importante.

Cu toate că lucrarea nu conține o expunere matematică detaliată, cei interesați pot găsi, pentru aprofundarea acestor aspecte ale problemelor, indicații prețioase în literatura de specialitate redată într-o bogată bibliografie.

Lucrarea trebuie privită ca o primă etapă în dezvoltarea teoriei regimului elastic în exploatarea stratelor petrolifere și acvifere. Din acest motiv, conținutul și forma de expunere a principalelor probleme se dezvoltă pe larg fără a se utiliza raționamentele matematice, formulele fiind redate numai pentru înțelegerea și explicarea anumitor concluzii strict necesare din punct de vedere fizic ; rezolvarea lor efectuîndu-se plecînd de la analiza cazurilor simple la cele complexe.

Autorul își propune ca într-o viitoare lucrare să prezintă și să analizeze detaliat, în mod critic, metodele matematice utilizate în soluționarea problemelor hidrodinamice ale regimului elastic.

Capitolul I—VII și X se referă la comportarea sondelor, stratelor petrolifere și acvifere în timpul exploatării lor în cazul curgerii nestaționare monofazice a unui lichid elastic printr-un mediu poros, omogen și izotrop. Analiza metodelor speciale de cercetare hidrodinamică a sondelor, care au o importanță deosebită în teoria exploatării, sînt tratate în capitolul IX.

Capitolul VIII este dedicat metodelor aproximative de rezolvare a problemelor legate de teoria regimului elastic.

În ceea ce privește capitolele XI—XIII, acestea trebuie privite ca o anexă la textul de bază.

Formularea matematică a fiecărei probleme cercetate anterior și indicarea în linii generale a metodelor de rezolvare se redau în capitolul XIII.

Proprietățile privind elasticitatea fluidelor conținute în zăcămînt și a mediului poros sînt examinate pe larg în capitolele XI și XII.

În afară de acestea, în capitolul XII se trec în revistă toate cunoștințele dobîndite în lumina cercetărilor efectuate pînă în prezent referitoare la influența elasticității stratului și lichidului asupra comportării acesteia în procesul de exploatare.

Unele capitole, de exemplu : I—III, VI, VII, X, XI pot servi ca baza de studiu atît pentru studenți cît și pentru elevii școlilor medii de petrol.

Cartea conține, de asemenea numeroase tabele și grafice, construite după formule frecvent utilizate, care ușurează mult efectuarea calculelor numerice extrem de laborioase.

H. Pascal și *V. Dumitru*

D. F. GUNDER, D. A. STUART, *Engineering Mechanics* (Mecanica inginerului). John Wiley, New York, 1959, 391 pag.

Obiectivul acestei cărți pare a fi să dea un răspuns satisfăcător următoarei probleme : care este forma minimă a unui tratat de mecanică, care ar putea da inginerului posibilitatea să atace studiul problemelor pe care le întîlnește la ora actuală în mod curent, respectînd totuși caracterul de știință a naturii al acestei mecanici, care nu este numai o simplă colecție de formule și rețete. În mod implicit, cartea își propune să răspundă și la o a doua problemă : care este minimul de cunoștințe matematice necesare inginerului care trebuie să știe să formuleze o problemă de mecanică, eventual s-o rezolve sau cel puțin să înțeleagă pe deplin rezolvarea pentru a o putea aplica.

Iată mai întîi cum este tratată această din urmă chestiune în cartea de față. Autorii presupun că au de-a face cu un cititor cunoscînd elementele geometriei și analizei vectoriale tridimensionale. Cu toate că mărimi ca forța, viteza sau accelerația sînt introduse cu toate precauțiile necesare pentru a nu forța interpretarea fizică și cu toate că proprietățile lor sînt prezentate în mod corelativ, ca mărimi mecanice și geometrice, în același timp, cunoașterea prealabilă a principiilor matematice a mînuirii lor este necesară.

Tot atît de necesară este și cunoașterea proprietăților calculului integral în înțelesul clasic, pentru a putea înțelege clar conceptul de lucru mecanic ; de asemenea, cunoașterea noțiunii de integrală în raport cu distribuția de masă, care are un rol esențial în prezentarea capitolului privind mecanica corpului solid.

Cartea presupune de asemenea, cunoașterea precisă a teoriei ecuațiilor diferențiale, care constituie expresia directă a legilor dinamicii.

Mișcarea naturală a unui sistem material și ecuația diferențială corelativă sînt obiecte atît de strîns legate între ele, încît studiul lor este identic.

Volumul începe printr-o parte descriptivă, care reprezintă forța ca un vector și studiază caracteristicile principale ale acesteia.

Capitolul III tratează problemele de echilibru considerate ca probleme fizice cu situațiile or particulare. Un apendice prezentînd metodele de analiză grafică, încheie acest capitol ale cărui probleme sînt reexaminate, de asemenea, în capitolul următor destinat noțiunilor de lucru mecanic și energie.

Problemele speciale ridicate de frecare, pe de o parte, de sistemele deformabile cum sînt acele formate din cabluri, pe de altă parte, sînt tratate fiecare într-un capitol aparținînd de asemenea primei părți descriptive.

Autorii stabilesc teoremele lor asupra forței, cu ajutorul a trei axiome, a unei legi, a unor principii și a unui număr de definiții. Prima axiomă arată că două forțe sînt în echilibru numai dacă ele au aceeași mărime, au direcții opuse și sînt aplicate în același punct.

A doua axiomă prezintă legea paralelogramului, iar a treia transmibilitatea forței de-a lungul direcției sale în cazul corpurilor solide.

A treia lege a lui Newton asupra egalității între acțiune și reacțiune este considerată de autorii cărții ca un principiu.

Nu ne propunem să criticăm aici folosirea acestor legi și principii, rămînînd totuși în cadrul mecanicii lui Newton. Faptul că ele sînt criticabile nu împiedică faptul că folosirea lor prezintă o mare simplicitate în exprimarea fenomenelor mecanice.

Partea a II-a consacrată dinamicii este scrisă sub semnul obiectului mecanicii epocii noastre : racheta.

Dacă notăm ca impulsie (în englezește momentul) produsul între masă și viteza punctului material, primele două legi ale lui Newton capătă conținutul lor general bine cunoscut. Capitolele VII și VIII, care tratează despre mișcarea particulei (ceea ce numim în mod obișnuit punctul material) conțin de asemenea cazul particulei cu masă variabilă sub cele două forme ale sale : particula încărcată, care pierde sau cîștigă materia în timpul mișcării și masa variabilă urmînd legea lui Einstein.

Studiul mișcării relative și acel al corpului solid sînt redate cu o foarte mare claritate.

Ultimul capitol este consacrat studiului vibrațiilor.

Un mare număr de exerciții luate din practica inginerească prezintă o mare utilitate pentru cititor.

O. Onicescu

WUNIBALD KUNZ, Dr. JOSEF SCHINTLMEISTER, *Tabellen der Atomkerne* (Tabelele nucleelor atomice). Akademie-Verlag, Berlin. *Teil I. Eigenschaften der Atomkerne* (Partea I. Proprietățile nucleului atomic). Band 1. *Die Elemente Neutron bis Zinn.* 1958, 465 p. (Vol. I. Elementele neutron pînă la cositor). Band 2. *Die Elemente Antimon bis Nobelium.* 1959, 642 p. (Vol. II. Elementele stibiu pînă la nobelium).

În laboratoarele în care se studiază nucleul atomic sau este utilizată energia atomică sub multiplele ei aspecte, tabelele cu proprietățile nucleelor atomice reprezintă un auxiliar prețios.

Lucrarea dr. Wunibald Kunz și a prof. dr. Iosef Schintlmeister care reunește toate proprietățile nucleelor atomice ale elementelor începînd cu neutronul și sfîrșind cu nobeliumul, este împărțită în două părți.

Prima parte *Proprietățile nucleelor atomice* conține toate datele asupra nucleelor stabile și radioactive și anume : numărul atomic, masa nucleului, conținutul procentual în amestecul natural, felul dezintegrării și procentul, timpul de înjumătățire, energia particolelor, energia cuantelor, reacții de obținere și coeficientul de conversie pentru pătura K, L, M.

Pentru cele mai multe cazuri este dată și schema de dezintegrare.

Partea a doua, care urmează să apară, conține date asupra secțiunii eficace, nivelelor energetice ale nucleului, energiei de reacție și asupra măsurătorilor distribuției unghiulare. Datele necesare pentru întocmirea tabelelor au fost obținute prin consultarea în marea majoritate a cazurilor în original, a unui mare număr de lucrări. Dacă există mai multe determinări pentru aceeași mărime, valorile obținute de diferiți autori au fost clasificate în ordinea siguranței și preciziei, iar în cazurile în care a fost posibil, s-a extras o medie.

Pentru fiecare valoare citată este indicată lucrarea care a servit drept sursă. Au fost prelucrate datele apărute pînă la 1 ianuarie 1958.

Grija deosebită pentru aranjarea materialului și redactarea lucrării, permite o rapidă orientare în conținutul ei. Astfel, de exemplu, pe fiecare pagină este trecut numai un singur element.

În concluzie, se poate spune că lucrarea *Tabelele nucleelor atomice* este de nivel superior fiind prezentată într-o execuție tehnică foarte îngrijită.

I. Iliuc

S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (Teoria plăcilor plane și curbe subțiri). Ed. a II-a, Eng. Soc. Monographs, Mc Graw — Hill Book Co., Inc., New York — Toronto — London, 1959, 580 pag.

Această a doua ediție a tratatului, devenit clasic, al lui S. P. Timoshenko, este mult îmbogățită — prin contribuția celui de-al doilea dintre autori. Între timp au apărut noi probleme, s-au dezvoltat noi metode de calcul care sînt cuprinse în lucrare, ca și o literatură vastă apărută de la 1940 (data de apariție a primei ediții) pînă în prezent.

Volumul se ocupă cu studiul stării de deformație și de tensiune a corpurilor elastice pentru care una din dimensiuni (grosimea plăcii plane sau curbe) este mică în raport cu celelalte două dimensiuni, care sînt de același ordin de mărime. În special sînt studiate plăcile plane (13 capitole), plăcile curbe subțiri fiind prezentate mai rezumativ (3 capitole).

Primele două capitole tratează unele probleme mai simple, cu caracter introductiv : încovoierea cilindrică a plăcilor plane, precum și încovoierea simplă (pură) a lor. Cu această ocazie se arată cum se pot introduce influențe de diferite feluri : influența variației de temperatură, influența modului diferit de rezemare, între care și influența rezemării pe un mediu elastic etc. Se tratează astfel, de o manieră elementară, diferite probleme dificile, care sînt reluate ulterior.

Capitolul 3 cuprinde încovoierea axial simetrică a plăcilor plane circulare, o problemă importantă pentru practică. Sînt tratate pe larg diferitele cazuri care pot interveni, cum sînt de exemplu plăcile inelare.

În capitolul 4 se tratează teoria generală de încovoiere a plăcilor plane subțiri, probleme variaționale, precum și includerea acestor rezultate — bazate pe ipoteza simplificatoare a lui G. R. Kirchhoff — în teoria generală asupra corpurilor elastice.

Problema plăcii plane dreptunghiulare simplu rezemată este cuprinsă în capitolul 5 iar problema aceleiași plăci supusă la diferite alte condiții de rezemare, în capitolul 6. Aceste capitole sînt foarte dezvoltate, cuprinzînd studiul a multe cazuri de încărcare, precum și cazul conturului încastrat, a unor laturi libere etc. Afară de încovoierea datorită momentelor de încovoiere, se face un studiu special cu privire la influența forțelor tăietoare asupra deformației plăcii plane, fiind redată teoria lui E. Reissner, precum și rezultatele lui A. E. Green. Cazul plăcilor plane de grosime variabilă este de asemenea luat în considerare.

Capitolul 7 cuprinde cazul plăcilor dreptunghiulare continue iar capitolul 8 cazul plăcilor, plane pe mediu elastic — fiind un capitol introdus nou în această ediție a cărții. În ultimul capitol se iau în considerare atît plăcile dreptunghiulare cît, mai ales, cele cu contur circular.

În capitolul 9 se studiază plăci de diferite forme, în diferite cazuri de rezemare : plăci eliptice, triunghiulare, în formă de sector de cerc etc. Menționăm de asemenea studiul stării de tensiunea în jurul unor goluri în placă.

Diferite metode aproximative de calcul sînt cuprinse în capitolul 10. Relevăm în special metodele operaționale de calcul, precum și problema singularităților, cu ajutorul cărora s-au construit suprafețe de influență, după A. Pucher. Se folosesc de asemenea metodele variaționale de calcul și metoda diferențelor finite ; rezultatele experimentale sînt expuse pe larg.

Un alt capitol, nou, introdus în această ediție, este capitolul 11, care se ocupă de încovoierea plăcilor plane anizotrope. Se studiază plăcile eliptice, circulare și dreptunghiulare în diferite cazuri mai interesante de anizotropie.

Capitolul 12 tratează problema încovoierii plăcilor plane sub acțiunea simultană a unor sarcini normale pe planul lor median și a unor sarcini cuprinse în acest plan. Se consideră plăcile circulare și dreptunghiulare, precum și cele cu o mică curbură inițială.

Ultimul capitol care se ocupă de plăci plane (cap. 13), cuprinde problema deformațiilor mari ale acestora. Se studiază în special plăcile circulare, dîndu-se unele rezultate și pentru plăcile cu contur dreptunghiular.

În capitolul 14 se studiază plăcile curbe subțiri oarecare în teorie de membrană. Se consideră mai ales cazul plăcilor cilindrice și de revoluție (în special sferice), pentru care se dau rezultate pentru diferite cazuri de încărcare.

Capitolul 15 cuprinde teoria de încovoiere a plăcilor cilindrice. Se dau rezultate pentru rezervoare, pentru plăci de acoperiș etc. Diferite moduri de rezemare sînt luate în considerare insistîndu-se, în special, asupra influenței perturbațiilor provocate de acestea. Menționăm utilizarea funcțiilor de tensiune introduse de V. Z. Vlasov.

Ultimul capitol (cap. 16) tratează teoria de încovoiere a plăcilor de revoluție de grosime constantă, dînd amănunte mai ales asupra plăcilor sferice și conice.

Cartea este însoţită de foarte bogate indicaţii bibliografice atît din literatura occidendală cît şi din literatura sovietică.

Ca şi celelalte tratate ale lui S. P. Timoshenko, şi acesta este scris la un înalt nivel ştiinţific, totuşi într-un stil clar, uşor accesibil. Cele mai importante rezultate, mai ales în domeniul plăcilor plane, cunoscute pînă în prezent, sînt cuprinse în acest volum. De altfel, nu credem că în prezent există o lucrare mai cuprinzătoare asupra plăcilor plane decît aceasta.

Acest volum reprezintă o contribuţie importantă în mecanica corpului solid deformabil şi poate fi consultat cu deosebit folos atît de proiectanţi şi practicieni cît şi de cercetătorii ştiinţifici.

P. P. Teodorescu

* * * *Proceedings of the second Japan congress on testing materials* (Comunicările celui de-al doilea Congres japonez pentru încercări de materiale). The Japan Society for Testing Materials, Kyoto, Japan, 1959, 244 + 88 + X pag.

În afara unei interesante prezentări a stadiului actual al industriei japoneze într-un apendice de 88 p., lucrarea conţine un număr de 67 comunicări din cele 119 comunicări prezentate la al doilea Congres japonez pentru încercări de materiale, care a avut loc în octombrie 1958.

Un număr de 36 de comunicări se ocupă de materialele metalice. Menţionăm în special comunicările privind rezistenţa la oboseală a acestor materiale, precum şi comportarea lor la solicitări variabile. Alte lucrări se ocupă de probleme de fluaj. Metode foarte moderne de încercare sînt utilizate, abordîndu-se problema proprietăţilor mecanice ale materialului legate de structura atomică a acestuia.

Alte 25 de comunicări tratează problema materialelor nemetalice. Multe din aceste studii privesc betonul, din punctul de vedere al compoziţiei sale, din punctul de vedere al rezistenţei la temperaturi scăzute, din punctul de vedere al lucrabilităţii etc. Remarcăm o comunicare interesantă privind modulul de elasticitate în caz static şi în caz dinamic. Alte studii privesc diferite materiale sintetice, obţinute prin polimerizare. Fenomenele sînt privite prin prisma teoriei plasticităţii şi a reologiei, insistîndu-se în special asupra fenomenului de relaxare.

Metode de încercare şi probleme de aparataj fac obiectul altor 6 comunicări. Remarcăm astfel un aparat pentru încercarea materialelor de construcţii şi a construcţiilor gata executate la viteze mari, precum şi diferite vibrografe.

Articolele publicate sînt foarte interesante pentru cercetătorii care se ocupă cu încercări de materiale. De asemenea, faptul că se publică anual cumunicări în această direcţie denotă o preocupare continuă a cercetătorilor japonezi în domeniul încercărilor de materiale.

P. P. Teodorescu

* * * *Traité pratique de technique du vide* (Tratat practic de tehnica vidului). Ed. G.E.P., Paris, 1958, 387 pag.

Este caracteristică pentru epoca actuală în dezvoltarea tehnicii răspîndirea din ce în ce mai mare a utilizării în practică, a stărilor extreme : tensiuni elastice înalte, viteze de mişcare foarte mari, temperaturi foarte ridicate sau joase, presiuni extrem de înalte sau dimpotrivă, vid înaintat.

Astfel, în prezent, folosirea instalațiilor de producere a presiunilor scăzute devine comună atît cercetărilor nucleare cît și industriei electronice, metalurgiei, chimiei și altor domenii ; în special în aerodinamica modernă, la realizarea sufleriilor aerodinamice în care se simulează zborul la mari înălțimi, în tuburile de șoc, sau la cercetările de dinamica gazelor rarefiate, realizarea vidului avansat în incinte ca volum deseori important, este esențială. Din acest motiv, se simte tot mai acut nevoia pentru cercetătorii și tehnicienii din cele mai diverse domenii de a căpăta informații asupra stadiului actual al tehnicii vidului, deși se află în afară de stricta lor specialitate.

În acest sens *Tratatul practic de tehnica vidului* publicat sub conducerea prof. Max Morand și C. Roy-Pochon prezintă o valoare deosebită.

Tratatul se adresează cu precădere celor pe care vidul îi interesează ca utilizatori și reușește dificila performanță de a furniza acestora un ansamblu corespunzător de cunoștințe esențiale, fără a intra în amănunte, care interesează numai pe specialiști. Analiza tablei de materii poate justifica afirmația de mai sus. Într-adevăr, lucrarea începe cu un scurt paragraf în care se enunță unitățile fundamentale de măsură ale tehnicii vidului, după care se prezintă legile generale ale gazelor, pe baza teoriei cinetice, insistîndu-se asupra noțiunilor și teoremelor fundamentale, precum și asupra formulelor simple uzuale.

Urmează un capitol în care se expun problemele descărcărilor electrice în gaze, după care în 4 capitole mari, se tratează pe scurt fizica-chimia vidului : legile generale, schimbările de stare, adsorbția și absorbția gazelor. Peste tot, expunerea bazelor teoretice este urmată de informațiile practice pentru utilizatori, cum ar fi de exemplu, calitățile adsorbante ale diferitelor materiale etc.

În partea a II-a a lucrării, caracterul practic al conținutului este și mai accentuat. Capitolele succesive tratează despre materialele folosite în tehnica vidului, pompele de vid de diferite tipuri, accesoriile din tehnica vidului (racorduri, robinete, condensatoare etc.) măsurarea presiunilor joase, proiectarea unui ansamblu de pompe și în sfîrșit detectarea neetanșităților.

Este extrem de prețioasă această concentrare de material faptic într-o singură lucrare, care altfel nu se poate găsi decît în diferite articole și lucrări de specialitate, mai greu accesibile unui nespecialist. Volumul limitat al lucrării a necesitat desigur eliminarea multor amănunte deși am fi dorit poate o mai mare extindere a capitolelor despre instalațiile pentru producerea vidului și măsurarea acestuia.

Trebuie remarcat ca o caracteristică de natură să sporească valoarea lucrării, faptul că deși fiecare capitol este scris de alt autor, specialist recunoscut în domeniul respectiv, ansamblul volumului se prezintă bine închegat, sub forma unui veritabil tratat și nu a unei culegeri de articole, astfel încît subiectul este tratat în mod complet și sistematic.

Lectura cărții ne-a prilejuit și o remarcă cu caracter mai general ; ea pornește dela constatarea că expunerea unor probleme de fizică teoretică din domenii destul de diferite (termodinamică, teoria cinetică a gazelor, fizica stărilor de agregare și a solidului, teoria descărcărilor în gaze), ocupă un loc însemnat în economia lucrării. Cazul domeniului de care ne ocupăm nu este însă izolat. Și în tehnica vidului, ca și în toate domeniile științei aplicate, progresul tehnic este întovărășit în zilele noastre de pătrunderea în sfera aplicației practice a unor probleme care pînă recent erau considerate ca pur teoretice sau de laborator. Tendința de specializare tot mai îngustă a cercetătorilor și tehnicienilor se împletește astfel cu necesitatea de a poseda cunoștințe asupra fundamentelor unui număr din ce în ce mai mare de domenii ale științei. În acest sens, tratatul care face obiectul acestor rînduri se dovedește cu deosebire util.

Lucian Dumitrescu

* * * *III Convegno di Geotecnica — Torino, 1957* (Cel de-al treilea Congres de geotehnică). Atti dell'Associazione Geotecnica Italiana, vol. I, Ed. Istituto Propaganda Internazionale. Milano, 1958, 241 pag.

Volumul cuprinde comunicările prezentate la cel de-al treilea Congres național organizat de Asociația geotehnică italiană, în mai 1957 (primul a avut loc la Napoli în 1953, iar cel de-al doilea la Roma în 1954).

Lucrările au un caracter tematic, majoritatea referindu-se la proiectarea și metodele de execuție a digurilor și barajelor din materiale granulare. Primele două comunicări tratează, în general, despre caracteristicile terenului de fundație și ale materialelor de construcție, tehnica experimentală și criteriile de calcul (A. Croce), precum și despre tipurile constructive, metodele și utilajele necesare execuției și problemele economice respective (F. Finzi).

Următoarele 13 comunicări prezintă diferite probleme legate de realizarea celor mai importante diguri și baraje executate în Italia în ultimii 17 ani. Se dau detalii interesante cu privire la condițiile de fundare, dispozitivele de etanșare și de drenare, amenajările anexe: conducte de descărcare, galerii de deviație etc.

S-a acordat o mare atenție construirii barajelor pe terenuri puternic compresibile. În legătură cu aceasta, C. Marcello prezintă un nou tip de baraj, alcătuit din cuburi de beton slab așezate în coloane verticale, separate prin rosturi de pietriș. Sistemul s-a dovedit favorabil realizării unor paramente cu pante mari (2 : 1), fiind aplicat pînă acum la trei baraje în Italia și unul în America de Sud. Pentru o lucrare fundată pe praf argilos moale, R. Noccioli și G. Meardi au folosit un sistem de drenare accelerată cu piloți de nisip.

E. Nonveiller descrie experiențele pe modele întreprinse pentru precizarea condițiilor de stabilitate ale digurilor, alcătuite din straturi succesive de pămînt și pietriș, aducînd corecții metodei de calcul bazată pe considerarea suprafețelor circulare de lunecare.

O interesantă comunicare se referă la măsurătorile efectuate timp de trei ani, atît la suprafața, cît și în interiorul unui dig de pămînt de 12 m înălțime. Tasările terenului de fundație au fost separate de cele ale corpului digului. Măsurătorile s-au extins și asupra presiunilor statice și ale apei din pori.

R. Sollazzo prezintă o amplă expunere asupra realizării unui dig de peste 1200 m lungime, cu sîmbure impermeabil de bentonită, construit în vederea barării albiei unui torent. Un dig asemănător, executat peste un alt torent, este prezentat de către S. Testi, care insistă mai mult asupra caracteristicilor geotehnice ale materialelor utilizate, precum și asupra fenomenelor de infiltrație prin corpul digului și prin nucleu, dînd date referitoare la filtrele și sistemele de drenare adoptate.

Construcția unui alt mare dig de pămînt, pe valea rîului Volturno, formează obiectul comunicării prof. A. Groce și P. Vecellio. Digul, avînd înălțimea maximă de 28 m și volumul de 400 000 m^3, a fost fundat pe un teren argilos, fiind realizat din pietriș și nisip. Autorii scot în relief rolul naturii terenului de fundație asupra stabilirii formei și dimensiunilor digului.

Problema neconcordanței dintre rezultatele încercărilor de laborator și a situației reale de pe teren este tratată de A. Zanovelli, care arată că permeabilitatea reală a straturilor superficiale de argilă și praf este de multe ori mult mai mare decît reiese din determinările pe probe de dimensiuni reduse, datorită prezenței fisurilor și macroneomogenității terenului. Se arată că, în astfel de cazuri, injecțiile cu suspensie de argilă dau, de obicei, rezultate negative. Autorul propune un sistem de drenaj de adîncime, alcătuit dintr-un șir de filtre verticale unite la partea superioară printr-un dren orizontal, avînd la mijloc un tub de evacuare.

A doua parte a volumului cuprinde 6 comunicări, avînd ca subiect diferite probleme din fizica şi mecanica pămînturilor, care preocupă actualmente pe geotehnicienii italieni. P. Cossu prezintă o doză piezometrică avînd ca element sensibil un tensometru rezistiv, montat pe o placă de plexiglas, într-o cutie de lemn. La încercările pe model, astfel de doze, plasate într-un mediu necoeziv, au dat rezultate bune.

De Angelis şi Novelli expun, într-o scurtă dar substanţială comunicare, cîteva caracteristici specifice ale argilei grase de pe insula Ponza, folosită la impermeabilizări : granulozitate, compoziţie chimică şi proprietăţi optice. Se insistă asupra analizei termice diferenţiale, difracţiei electronice şi analizei spectrale în infra-roşu. Se arată că proprietăţile impermeabilizante ale argilei se datoresc nu numai structurii montmorillonitice, ci şi prezenţei particulelor de silice coloidală.

Un grup de cercetători descriu experienţele efectuate în laborator şi pe şantier cu privire la folosirea sgurei active în amestec la injecţii de impermeabilizare în rocile de fundaţie de la un baraj. G. Moraldi propune adaptarea unor metode rapide de determinare a limitei de curgere la pămînturi, aplicate în străinătate, la condiţiile din Italia. A. Rebaudi descrie construirea unor instalaţii de derivare a rîului Po, necesare unei uzine hidroelectrice. În sfîrşit, C. Veder caută explicaţia unor anumite fenomene de lunecare a argilelor, în procesele electro-osmotice care produc înmuierea pămîntului în zona planului de lunecare, şi propune drept metodă de consolidare scurt-circuitarea straturilor prin electrozi metalici.

Volumul, care se încheie cu discuţii asupra unora dintre comunicările prezentate, este realizat în foarte bune condiţii grafice şi cuprinde desene clare şi amănunţite. În totalitatea lor, lucrările acestui congres constituie o valoroasă contribuţie la precizarea şi rezolvarea multor probleme preocupînd pe cercetătorii din domeniul geotehnicii.

I. Antonescu

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

— Leonid Ivanovici Sedov, Izdat. A.N.S.S.S.R., 1959, 44 p.
— Petr Ivanovici Lukirskii, ,, ,, 1959, 40 p.
— Pavel Aleksandrovici Baranov, ,, 1959, 52 p.
— Dmitrii Sergheevici Korjinski, ,, 1959, 45 p.
T. I. ŞAMOV, *Recinîe nanosî.* Ghimiz, Leningrad, 1959, 377 p.
I. V. BOGOLIUBOVA, *Solevîe potoki i ih rasprostranenia na teritorii SSSR.* Ghimiz, Leningrad, 1957, 151 p.
A. P. MURANOV, *Reka Jantzî.* Ghimiz, Leningrad, 1959, 122 p.
A. P. MURANOV, *Reka Huanhe.* ,, ,, 1957, 86 p.
— *Trudî Seminara po kacestvu poverhnosti.* Institut Mașinovedenia, Sbornik, 4, Moscova, 1959.
— *Trudî Leningradskogo Politehniceskogo Instituta.* Nr. 198, 200, 1959.
— *Trudî Instituta Energhetika Alma Ata.* T.I, 1958.
— *Naucinie Trudî Novocerkasskogo Politehniceskogo Instituta.* t. 39, 42.
— *Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta.* Nr. 118/1957, Nr. 156, 162/1959.
— *Trudî Moskovskogo Energheticeskogo Instituta.* Vîpusk XXIII, XXIX, XXXI, 1958.
— *Trudî Harkovskogo Aviaționnogo Instituta.* Ucebnoe posobie. Vîpusk 1—11, 1958.
W. KUNZ, J. SCHINTLMEISTER, *Tabellen der Atomkerne.* Teil I. Eigenschaften der Atomkerne. Band 2. Die Elemente Antimon bis Nobelium. Berlin, Akademie-Verlag, 1959, 642 p. + tabele.
M. DONEL, *Zementinjektionen an setzungsempfindlichem, sandigem Baugrund.* Leipzig, 1959, 50 p.
— *Soubor vedeckych a odbornych praci.* Z. III, Vedecke konference vysokoho uceni technickeho v Brne. 1957, Praha, 1958.
— *Sbornik vysokoho uceni technickeno v Brne.* 1959, 1—2.
V. KOZLIK, *Hospodarnost a ucinnost brazdovanie v boji préti vodnej erozii pody.* Bratislava, 1959, 153 p.
ST. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells.* Second Edition, McGraw-Hill Company, London, 1959, 580 p.
ST. CRANDALL, N. G. DAHL, *An introduction to the mechanics of solids.* McGraw-Hill Company, London, 1959, 444 p.
M. FÉNAIN, D. VALLÉE, *Formulaire et tables pour le calcul des ailes en flèche effilées en régime supersonique et sonique.* ONERA, 1959, 124 p. + tab.
M. VIANNA DE VASCONCELLOS, *O fator humano na industria.* 1958, Recife, 179 p.
T. VAN LANGENDONCK, *Inequacaes lineares.* Rio de Janeiro, 1959, 61 p.

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. Mühlheim

— Berichte —

W. REINHARDT, *Radar-Bibliographie.* 1959, 105 p.

A. TIMME, *Über Eigenschaften von Wirbelstrassen.* 1959, 41 p.

K. OSWATITSCH, *Antriebe mit Heizung bei Überschallgeschwindigkeiten.* 1959, 30 p.

H. SÖHNGEN, E. MEISTER, *Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters.* 1958, 24 p.

H. MATTES, *Filter aus Leitungsstücken wechselnden Wellenwiderstandes.* 1959, 136 p.

H. GÖRTLER, *Über eine Analogie zwischen den Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden.* 1959, 12 p.

C. KLEEGREWE, *Bau eines Wolkenradargerätes zur gleichzeitigen Messung bei 3,2 cm und 0,86 cm Wellenlänge.* 1959, 43 p.

G. WINTERFELD, *Ähnlichkeitskennzahlen bei Verbrennungsvorgängen in Brennkammern von Strahltriebwerken.* 1959, 40 p.

D. HUHNT, *Stabile Formen und Übergangserscheinungen der Flachwasserströmung auf einer schwach geneigten ebenen Platte.* 1959, 62 p.

F. KEUNE, *Über eine Näherungstheorie zur Berechnung der auftrieblosen Strömung um schlanke Körper bei Schallanströmung.* 1959, 40 p.

Publications de l'École Polytechnique de l'Université de Lausanne

A. GARDEL, *Les pertes de charge dans les écoulements au travers de branchements en T.* 1957, 24 p.

TH. BOVET, *Contribution à l'étude du phénomène d'érosion par frottement dans le domaine des turbines hydrauliques.* 1958, 15 p.

J. P. STUCKY, *Appréciation de la qualité du béton.* 1958, 8 p.

D. BONNARD, ş.a., *Les fondations des chaussées.* 1958, 8 p.

D. BONNARD, ş.a., *Influence du gel sur la stabilité des voies ferrées.* 1958, 7 p.

L. BOREL, *Essai de systématisation de l'étude du réglage d'un groupe hydroélectrique.* 1959, 19 p.

TH. BOVET, *Evolution et état actuel de la construction des turbines hydrauliques.* 1959, 15 p.

E. JUILLARD, *De l'auto-excitation d'une machine asynchrone polyphasée.* 1959, 8 p.

A. GARDEL, *Le rôle de l'énergie nucléaire dans l'économie.*

B. VITTOZ, *Les fondements et les domaines de validité des théories de l'état critique des réacteurs atomiques.* 1959, 30 p.

Disertații primite de la Institutul politehnic Aachen

F. ALTENWERTH, *Abtrieb und Phasengrenzflächenreaktionen bei der Zerspannung an den Kontaktzonen der Werkzeuge und ihre Abhängigkeit von der Zusammensetzung und dem Gefügebau der Hartmetall-Legierungen.* 1958, 70 p.

W. BOSCH, *Untersuchungen zur instationären reibenden Strömung in Druckleitungen von Einspritzsystemen.* 1958, 75 p.

E. WEIDEMANN, *Relaxation von Spinsystemen.* 1959, 53 p.

A. KLEINE-ALBERS, *Die fertigungsgerechte Warmformgebung von hartgestelltem Polyvinylchlorid, Acryl-Copolymerisat und Acrylglas im thermoelastischen Zustand.* 1958, 116 p.

H. RANKERS, *Angenäherte Getriebe-Synthese durch harmonische Analyse der vorgegebenen periodischen Bewegungsverhältnisse.* 1958, 117 p.

N. MAAS, *Das dynamische Verhalten von Lastschaltgetrieben.* 1959, 118 p.

W. DOMKE, *Über die Eigenspannungen in induktiv oberflächengehärteten Stahlzylindern.* 1958, 53 p.

H. NIEMEYER, *Greensche Tensoren und asymptotisches Verhalten von Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen elektromagnetischer Schwingungen in Hohlräumen.* 1958, 62 p.

H.-J. BUTTERWECK, *Mikrowellenbandfilter unter Verwendung mehrerer Eigenschwingungen in einem Hohlraum.* 1959, 106 p.

F. GEBHARDT, *Über Viskositätsmessungen an Gasen und Dämpfen im Hochdruckgebiet und bei höheren Temperaturen.* 1959, 82 p.

E. MENZENBACH, *Die Anwendbarkeit von Sonden zur Prüfung der Festigkeitseigenschaften des Baugrundes.* 1959, 215 p.

Disertații de la Institutul Politehnic Darmstadt

H. ERFURT, *Über das Kraft-Dehnungs-Verhalten von Papier im gesamten Bereich der praktisch vorkommenden Trockengehalte.* 1959, 345 p.

H. J. WITTNEBEN, *Ein Beitrag zur Berechnung elastisch gebetteter regelmässig gegliederter Scheiben.* 1959, 62 p.

H. WITTE, *Die Lösung von Kipp-Problemen mit der Energiemethode.* 1959, 53 p.

H. WEISS, *Beitrag zur Kenntnis des Holzschleifprozesses.* 1959, 101 p.

W. MANN, *Ein Beitrag zur Berechnung freitragender Wendelflächen, nach der Schalentheorie.* 1959, 53 p.

De la Institutul Politehnic Hannover

— *Jahrbuch der Technischen Hochschule Hannover.* 1955—1958, 204 p.

— *Dissertationen der Technischen Hochschule Hannover.* 1958, 324 p.

R

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

3
ANUL XI
1960

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

MŰSZAKI KÖZPONTI 1848 KÖNYVTÁRA

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. POROFIRI ;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic Bucureşti ;
M. ARCAN, şef secţie ; Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (I.N.C.E.R.C.) Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate științifice și tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări științifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

— *Aerodinamică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*).

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 3 1960

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

E. CARAFOLI şi S. SĂNDULESCU, Mişcarea oscilatorie armonică a ampenajelor în regim supersonic 557

HIDROMECANICĂ

D. DUMITRESCU, V. IONESCU şi C. CRĂCIUN, Mişcarea fluidelor grele deversante într-un plan vertical 569

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

N. TIPEI, Lubrificaţia tridimensională a suprafeţelor de alungire mică, la viteze mari . 595
ALEŠ TONDL, Cîteva rezultate experimentale privind mişcarea fusului în lagăr . . . 603

TEORIA MECANISMELOR

CHR. PELECUDI şi V. I. CALCAN, Contribuţii la sinteza mecanismelor curbelor ciclice 627

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE—PLASTICITATE—REOLOGIE

M. MIŞICU, Asupra propagării perturbaţiilor secundare şi primare ale cîmpului total . 651
ALEXANDER HANUŠKA, Despre posibilitatea aplicării funcţiilor proprii pentru calculul plăcilor în formă de patrulater oarecare 675
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei spaţiale a elastodinamicii 681
NICOLAE S. PÎRVULESCU, Despre modulul de superelasticitate 695
V. VISARION, Calculul dinamic al unor părţi componente ale carcaselor autobuzelor prin utilizarea teoriei plăcilor ortotrope curbe 711
RADU PRIŞCU şi CONST. IAMANDI, Consideraţii asupra dimensionării barajelor de greutate cu profilul trapezoidal 735

Pag.

T. CĂRARE şi C. AMZULESCU, Asupra unor sistematizări în calculul static al cadrelor monotone multiple prin ecuaţii cu diferenţe finite 747

MIHAIL IFRIM, Influenţa perturbaţiilor seismice asupra structurilor elastice 771

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

I. ILIUC şi P. FREUND, Aparat pentru determinarea grosimii straturilor protectoare pe cale nedestructivă 785

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

RADU C. BOGDAN, Congresul de mecanisme — Aachen — 1959 793

RECENZII 797

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 807

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI, № 3 1960

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА Стр.

Э. КАРАФОЛИ и Ш. СЭНДУЛЕСКУ, Колебательное гармоническое движение оперений в сверхзвуковом режиме 557

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. ДУМИТРЕСКУ, В. ИОНЕСКУ и К. КРЭЧУН, Движение тяжелых переливающихся жидкостей в вертикальной плоскости 569

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ, Трехмерная смазка поверхностей малого удлинения при больших скоростях 595
А. ТОНДЛЬ, Некоторые экспериментальные результаты в связи с движением цапфы в подшипнике 603

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

К. ПЕЛЕКУДИ и В. И. КАЛКАН, К синтезу механизмов циклических кривых 627

УПРУГОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

М. МИШИКУ, О распространении вторичных и первичных возмущений общего реомагнитного поля 651
АЛЕКСАНДРУ ГАНУШКА, О возможности использования собственных функций для расчета изгиба произвольных четырехугольных плит 675
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, К пространственной задаче эластодинамики 681
Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, О модуле суперупругости 695
В. ВИСАРИОН, Динамический расчет некоторых составляющих частей автобусных каркасов путем применения кривых автотропных пластинок 711
Р. ПРИШКУ и К. ЯМАНДИ, Соображения в связи с определением размеров гравитационных плотин трапецоидального профиля 735

Стр.

Т. КЭРАРЕ и К. АМЗУЛЕСКУ, О систематизации при статическом расчете монотонных многократных рам при помощи уравнений с конечными разностями 747
М. ИФРИМ, Влияние сейсмических возмущений на упругие конструкции 771

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

И. ИЛЮК и П. ФРЕЙНД, Прибор для определения толщины защитных слоев неразрывным методом 785

УЧАСТИЕ В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ЗА РУБЕЖОМ

РАДУ К. БОГДАН, Конгресс по механизмам. Аахен, 1959 793

РЕЦЕНЗИИ 797

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 807

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„*РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*"

публикует :

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(«ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE»)

publie :

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— *Aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;

— *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*)*;*

— *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus)* ;

— *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*)*;*

— *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (*environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte*).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, nº 3 1960

SOMMAIRE

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

Page

E. CARAFOLI et S. SĂNDULESCU, Le mouvement oscillatoire harmonique des empennages, en régime supersonique 557

HYDROMÉCANIQUE

D. DUMITRESCU, V. IONESCU et C. CRĂCIUN, Le mouvement des fluides pesants déversants, dans un plan vertical 569

LUBRIFICATION–FROTTEMENT–USURE

N. TIPEI, Lubrification tridimensionnelle des surfaces à petit allongement, aux grandes vitesses 595
ALEŠ TONDL, Quelques résultats expérimentaux concernant le mouvement d'un arbre dans un palier 603

THÉORIE DES MÉCANISMES

CHR. PELECUDI et V. I. CALCAN, Contribution à la synthèse des mécanismes des courbes cycliques 627

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX – ELASTICITÉ – PLASTICITÉ – RHÉOLOGIE

M. MIȘICU, On the propagation of secondary and primary perturbations of the total rheomagnetic field 651
ALEXANDER HANUŠKA, Über die Anwendungsmöglichkeit der Eigenfunktionen zur Berechnung nichtrechteckiger Viereckplatten 675
P. P. TEODORESCU, On the spatial problem of elastodynamics 681
NICOLAE S. PÎRVULESCU, Sur le module d'hyperélasticité 695
V. VISARION, Calcul dynamique de certaines parties composantes des caissons d'autobus au moyen de la théorie des plaques orthotropes courbes 711
RADU PRIȘCU et CONST. IAMANDI, Considérations sur le calcul des barrages-poids à profil trapézoïdal 735

Page

T. CĂRARE et C. AMZULESCU, Quelques systématisations dans le calcul statique des cadres monotones multiples, par des équations aux différences finies 747
MIHAIL IFRIM, Influence des perturbations séismiques sur les structures élastiques . 771

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

I. ILIUC et P. FREUND, Appareil pour la détermination de l'épaisseur des couches protectrices, sans les endommager 785

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

RADU C. BOGDAN, Congrès de Mécanismes — Aix-la-Chapelle — 1959. 793

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 797

LIVRES REÇUS DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 807

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

AEROMECANICĂ

MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ A AMPENAJELOR ÎN REGIM SUPERSONIC

DE

E. CARAFOLI şi Ş. SÂNDULESCU

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Vom considera în această lucrare, unele probleme privind scurgerea supersonică nepermanentă în jurul unui ampenaj raportat la un sistem ortogonal de coordonate $O\ x_1 x_2 x_3$, avînd originea în vîrful ampenajului (fig. 1).

Se ştie că în cazul unei variaţii armonice în timp a potenţialului, acesta se poate pune sub forma [1]

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) = U_\infty e^{i(\omega t + K x_1)}\,\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{1}$$

unde $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ este denumit *potenţial redus*, ω este pulsaţia mişcării, iar K şi λ sînt coeficienţi definiţi de relaţiile

$$\lambda = \frac{\omega c}{U_\infty},\ K = -\frac{\lambda}{c}\,\frac{1+B^2}{B^2}$$
$$\left(B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right), \tag{2}$$

în care U_∞ este viteza curentului neperturbat, M_∞ numărul Mach corespunzător, iar c o lungime de referinţă.

Cunoscînd că perturbaţiile mişcării sînt mici şi avînd în vedere relaţia (1), se găseşte că *potenţialul redus* satisface ecuaţia

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} =$$
$$= \frac{\lambda^2}{c^2}\,\frac{1+B^2}{B^2} \approx 0, \tag{3}$$

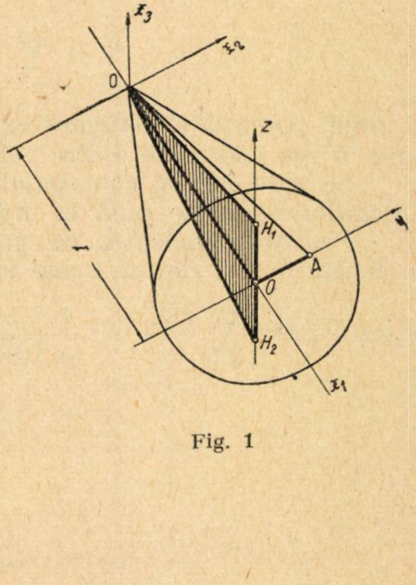


Fig. 1

unde am presupus de la început că frecvența mișcării este joasă, fapt care justifică neglijarea membrului drept al ecuației (3).

În această situație, *potențialul redus* $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ se comportă în mod analog potențialului unei mișcări supersonice permanente.

Să presupunem acum că punctele suprafeței orizontale și verticale au o mișcare armonică definită de relațiile [2] [3]

$$Z = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{P}_m(x_1, x_2), \quad Y = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{r-1} Q_m(x_1, x_3), \tag{4}$$

$\mathcal{P}_m(x_1, x_2)$ și $Q_m(x_1, x_3)$ fiind polinoame omogene de ordin m.

În acest caz componentele vitezei normale la suprafața orizontală și respectiv cea verticală sînt definite de formulele

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial Z}{\partial x_1} = U_\infty e^{i\omega t}\left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial x_1} + \frac{i\omega}{U_\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{P}_m\right], \tag{5 a}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial Y}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial Y}{\partial x_1} = U_\infty e^{i\omega t}\left[\sum_{m=0}^{r-1} \frac{\partial Q_m}{\partial x_1} + \frac{i\omega}{U_\infty} \sum_{m=0}^{r-1} Q_m\right], \tag{5 b}$$

și ținînd mai departe seama de relația (1), se găsesc pentru componentele *vitezei normale reduse* expresiile

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \beta \approx \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial x_1} + i\frac{\lambda}{c}\left[\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{P}_m + \frac{1+B^2}{B^2} x_1 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial x_1}\right], \tag{6 a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \nu \approx \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\partial Q_m}{\partial x_1} + i\frac{\lambda}{c}\left[\sum_{m=0}^{r-1} Q_m + \frac{1+B^2}{B^2} x_1 \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\partial Q_m}{\partial x_1}\right], \tag{6 b}$$

pe suprafața orizontală și respectiv pe cea verticală.

În baza formulelor (6 a) și (6 b) rezultă că *potențialul redus* al scurgerii în jurul ampenajului este de forma

$$\Phi = \sum_{m=1}^{s-1} \Phi_m + i\frac{\lambda}{c} \sum_{m=1}^{s} \Phi_m, \tag{7}$$

Φ_m fiind potențialul scurgerii omogene de ordin m în jurul ampenajului, iar s ia cea mai mare dintre valorile n și r.

Se vede deci că potențialul redus al mișcării este suma potențialelor mișcărilor omogene pînă la ordinul s.

Pentru coeficientul de presiune, neglijînd de asemenea termenii ce conțin puteri ale lui λ mai mari decît unu, se găsește expresia

$$C_p \approx -2e^{i\omega t}\left[\sum_{m=1}^{s-1} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} - i\frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{B^2}\sum_{m=1}^{s-1} \Phi_m - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1+B^2}{B^2} x_1 \sum_{m=1}^{s-1} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}\right)\right], \tag{8}$$

din care se vede că, pentru a cunoaşte repartiţia de presiune pe ampenaj, este necesar să cunoaştem vitezele axiale reduse şi potenţialele reduse care intervin în formula de mai sus.

Pe această cale, se pot rezolva o serie de probleme privind scurgerea armonică în jurul unui ampenaj, care prezintă interes din punct de vedere aplicativ.

Astfel, putem considera cazul real al ampenajului plasat în curentul perturbat şi armonic nestaţionar din spatele aripii (spre exemplu datorită vibraţiilor aripii).

Scurgerea în jurul acestui ampenaj este de aşa natură încît anulează componentele vitezei normale la cele două suprafeţe, lucru care se poate realiza presupunînd că aceste suprafeţe au deformaţie variabilă în timp definită de o sumă de polinoame omogene de semn contrar cu cele care definesc componentele normale ale vitezei din scurgerea reală.

Pentru generalitate se poate presupune că aceste polinoame sînt de ordine de omogenitate diferite pentru suprafaţa orizontală şi pentru cea verticală.

Un alt caz interesant este acela al oscilaţiilor ampenajului în jurul centrului de greutate al avionului. În legătură cu această problemă vom face în continuare o aplicaţie.

2. MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ A AMPENAJULUI

Vom considera oscilaţiile de mică frecvenţă şi amplitudine ale ampenajului, în jurul unei axe care are o poziţie oarecare în spaţiu.

Această mişcare poate fi descompusă după cele trei axe de coordonate în trei rotaţii

$$\Theta_a = E_a e^{i\omega t}, \tag{9 a}$$

$$\Theta_b = E_b e^{i\omega t}, \tag{9 b}$$

$$\Theta_c = E_c e^{i\omega t}, \tag{9 c}$$

şi respectiv două translaţii, care pot fi luate în considerare

$$\Delta_b = D_b e^{i\omega t}, \tag{10 a}$$

$$\Delta_c = D_c e^{i\omega t}. \tag{10 b}$$

În acest caz, rezultă pentru deplasările unui punct oarecare situat pe suprafaţa orizontală sau respectiv pe suprafaţa verticală, expresiile

$$Z = e^{i\omega t} (D_c + E_a x_2 - E_b x_1) = e^{i\omega t} (\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1), \tag{11 a}$$

$$Y = e^{i\omega t} (D_b + E_c x_1 - E_a x_3) = e^{i\omega t} (\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1). \tag{11 b}$$

Aplicînd mai departe formulele (6 a) şi (6 b), vom găsi pentru *vitezele verticale reduse* pe cele două suprafeţe, relaţiile

$$\beta \approx - E_b + i \frac{\lambda}{c} \left(D_c + E_a x_2 - E_b x_1 \frac{1 + 2B^2}{B^2} \right), \tag{12 a}$$

$$\nu \approx E_c + i \frac{\lambda}{c} \left(D_b - E_a x_3 + E_c x_1 \frac{1 + 2B^2}{B^2} \right). \tag{12 b}$$

Observînd că în formula (7) $s = 2$ rezultă că potenţialul redus al mişcării considerate poate fi pus sub forma,

$$\Phi \approx \Phi_1 + i\frac{\lambda}{c}(\Phi_1^* + \Phi_2), \tag{13}$$

şi problema este adusă la studiul mişcărilor conice de ordinul unu definite de potenţialele Φ_1 şi Φ_1^*, şi al mişcării conice de ordinul doi, definită de potenţialul Φ_2.

Deoarece ne-am situat în ipoteza perturbaţiilor mici, vom putea studia separat fiecare mişcare conică şi vom putea descompune *vitezele reduse normale* la cele două suprafeţe (12 a) şi (12 b), corespunzătoare celor trei mişcări conice, după cum urmează:

a) Mişcarea conică de potenţial Φ_1

$$\beta_{01} = -E_b, \quad \nu_{01} = 0, \tag{14 a}$$

$$\beta_{02} = 0, \quad \nu_{02} = E_c. \tag{14 b}$$

b) Mişcarea conică de potenţial Φ_1^*

$$\beta_{01}^* = D_c, \quad \nu_{01}^* = 0, \tag{15 a}$$

$$\beta_{02}^* = 0, \quad \nu_{02}^* = D_b. \tag{15 b}$$

c) Mişcarea conică de ordinul doi

$$\beta_{11} = -E_b\frac{1+2B^2}{B^2}x_1 + E_a x_2, \quad \nu_{11} = -E_a x_3, \tag{16 a}$$

$$\beta_{12} = 0, \quad \nu_{12} = E_c\frac{1+2B^2}{B^2}x_1. \tag{16 b}$$

Vitezele reduse definite de formulele (14 b), (15 b) şi (16 b) corespund mişcărilor oscilatorii armonice ale unei aripi izolate, identică ca formă cu suprafaţa verticală, problemă care a fost studiată în lucrări anterioare [1], [4] pe căi diferite.

Mişcările conice corespunzătoare *vitezelor reduse* (14 a), (15 a) şi (16 a), prin care se ia în consideraţie interferenţa dintre suprafaţa orizontală şi cea verticală vor fi studiate în această lucrare.

Contribuţia la coeficientul de presiune a mişcării considerate mai sus, care ţine seama de interferenţa dintre cele două suprafeţe este dată de relaţia

$$C_p \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - i\frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{B^2}\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1+B^2}{B^2}x_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)\right], \tag{17}$$

care este perfect determinată dacă se cunosc expresiile

$$u_0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}, \quad u_0^* = \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_1}, \quad u_1 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}, \quad \Phi_1, \tag{18}$$

u_0 şi u_0^* fiind numite *viteze axiale reduse* ale mişcărilor conice de ordinul unu de potenţiale Φ_1 şi Φ_1^*, iar u_1 este *viteza axială redusă* a mişcării conice de ordinul doi.

Pentru a calcula aceste *viteze axiale reduse* şi *potenţiale reduse* care definesc coeficientul de presiune (17), vom reaminti notaţiile pe care le-am utilizat în lucrările noastre anterioare [5], [6], [7]:

— planul fizic Oyz (fig. 1) normal pe axa Ox_1 la distanţa

$$x_1 = 1, \quad \left(y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}\right);$$

— planul auxiliar $O\eta\zeta$ obţinut prin transformarea lui Busemann

$$Br = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2); \tag{19}$$

— planul auxiliar $x = y + i z$ definit de transformarea conformă

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad (x = y + i z, \quad \xi = \eta + i\zeta), \tag{20}$$

care reproduce ampenajul orizontal în adevărata mărime şi modifică dimensiunile suprafeţei verticale, adică

$$\mathfrak{h} = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2h^2}}; \tag{21}$$

— planul X obţinut prin transformarea

$$X^2 = x^2 + \mathfrak{h}^2 \tag{22}$$

care ne conduce la configuraţia din figura 2, în care suprafaţa orizontală este reprezentată pe segmentul O_1A iar suprafaţa verticală pe segmentul O_2O_1.

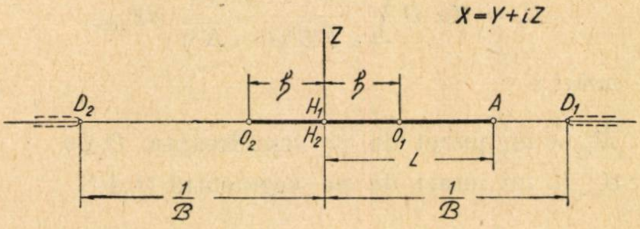


Fig. 2

De asemenea, vom reaminti relaţiile de compatibilitate care stabilesc legătura dintre diferitele derivate parţiale ale potenţialului în raport cu x_1, x_2 şi respectiv x_3,

$$\begin{aligned} dF_{n,0,0} &= -\sqrt{X^2 - \mathfrak{h}^2}\, dF_{n-1,0,0} = \frac{\sqrt{\mathfrak{h}^2 - X^2}}{B\sqrt{1/\mathcal{B}^2 - X^2}}\, dF_{n-1,0,1} = \\ &= -\frac{i}{B}\frac{X^2 - \mathfrak{h}^2}{\sqrt{1/\mathcal{B}^2 - X^2}}\, dF_{n-2,1,1}, \left(1/\mathcal{B} = \sqrt{1/B^2 + \mathfrak{h}^2}\right), \ (n = 1, 2), \end{aligned} \tag{23}$$

în care funcţiile analitice care apar în expresiile de mai sus sînt definite de relaţii de forma

$$F_{p,q,r} = \Phi_{p,q,r} + i\Phi'_{p,q,r}, \quad (p + q + r = n), \tag{24}$$

a căror parte reală este formată din derivatele $\Phi_{p,q,r}$ ale potenţialului (p fiind ordinul de derivare în raport cu x_1, q în raport cu x_2 şi r în raport cu x_3), iar partea imaginară din nişte funcţii armonice asociate [6]. Vom observa că pentru $n = 1$ sînt valabile numai primele două egalităţi din (23).

3. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE REDUSE A MIŞCĂRII CONICE

Utilizînd rezultatele generale obţinute în lucrări anterioare [6] [7], se găseşte pentru *viteza axială redusă* a mişcării conice de ordinul unu, expresia

$$u_0 = \mathcal{R}e\, F_{100} = \mathcal{R}e\, \frac{\sqrt{X + \mathfrak{k}}\,(A_0 + C_0 X)}{X\sqrt{L - X}}, \quad (L = \sqrt{l^2 + \mathfrak{k}^2}), \tag{25}$$

care este valabilă şi pe suprafaţa orizontală şi pe cea verticală.

Pentru a determina constantele A_0 şi C_0 vom folosi următoarele două relaţii

$$\left(\frac{du_0}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{du_0}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}\right)_{X=-\mathfrak{k}} = 0, \tag{26 a}$$

$$E_b = \mathcal{R}e\, B\int_{M_d}^{S_{or}} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2X^2}}{\sqrt{\mathcal{B}^2(\mathfrak{k}^2 - X^2)}}\, dF_{100}, \tag{26 b}$$

în care am notat :

$$\begin{aligned} M_d &= \text{un punct de pe semidreapta } D_1\infty, \\ S_{or.} &= \text{un punct de pe segmentul } O_1A. \end{aligned} \tag{27}$$

Relaţia (26 a) este dedusă din condiţia de continuitate a *vitezei laterale reduse* în punctul $X = -\mathfrak{k}$, iar (26 b) din relaţiile de compatibilitate.

După efectuarea calculelor sîntem conduşi la următoarele expresii pentru cele două constante :

$$A_0 = C_0\mathfrak{k}, \tag{28 a}$$

$$C_0 = -\frac{BE_b}{2\mathcal{B}}\cdot\frac{\sqrt{(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}\,(L - \mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}\mathfrak{k})}{\mathcal{B}(L - \mathfrak{h})\,\mathbf{K}(k) - (1 + \mathcal{B}L)\,\mathbf{E}(k)} \tag{28 b}$$

în care $\mathbf{K}(k)$ şi $\mathbf{E}(k)$ sînt integrale eliptice complete de speţa întîi şi respectiv speţa a doua, avînd modulul

$$k = \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}L)(1 + \mathcal{B}\mathfrak{k})}{(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}}. \tag{29}$$

Pentru *viteza axială redusă* a mişcării conice de potenţial Φ_1^* se găseşte o relaţie analoagă cu (25),

$$u_0^* = \mathcal{R}e\, F_{100}^* = \mathcal{R}e \frac{\sqrt{\mathfrak{k} + X}\,(A_0^* + C_0^* X)}{X\sqrt{L - X}}, \tag{30}$$

constantele A_0^* şi C_0^* fiind date de formulele (28 a) şi (28 b) în care se înlocuieşte E_b prin $-D_c$.

4. DETERMINAREA POTENŢIALULUI MIŞCĂRII CONICE

Să considerăm formula lui Euler pentru funcţiile omogene de ordinu unul

$$\Phi_1 = x_1\,(\Phi_{100} + y\,\Phi_{010} + z\,\Phi_{001}), \tag{31}$$

în care y şi z sînt coordonatele din planul fizic ($x_1 = 1$) definit mai sus (fig. 1).

Vom înlocui în această formulă pe y şi z cu expresiile corespunzătoare din planul X (22), iar apoi vom introduce în locul derivatelor *potenţialului redus* Φ_{100}, Φ_{010} şi Φ_{001} funcţiile analitice corespunzătoare.

Ţinînd seama şi de relaţiile de compatibilitate (23), rezultă că pe suprafaţa orizontală O_1A, ($z = 0$ sau $\mathfrak{k} < Y < L$) *potenţialul redus* este definit de expresia

$$\Phi_{1\,or.} = x_1\,\mathcal{R}e\sqrt{X^2 - \mathfrak{k}^2}\int_{M_d}^{S_{or.}} F_{100}\frac{X\,dX}{(X^2 - \mathfrak{k}^2)^{3/2}} \tag{32}$$

iar pentru potenţialul valabil pe suprafaţa verticală O_2O_1 ($-\mathfrak{k} < Y < \mathfrak{k}$) se obţine

$$\Phi_{1\,v.} = x_1\,\mathcal{R}e\frac{\mathcal{B}^2\sqrt{(X^2 - \mathfrak{k}^2)}}{B^2\sqrt{1 - \mathcal{B}^2X^2}}\int_{M_s}^{S_{v.}} F_{100}\frac{X\,dX}{\sqrt{(X^2 - \mathfrak{k}^2)^3(1 - \mathcal{B}^2X^2)}} \tag{33}$$

în care limitele integralei din formula (32) sînt definite de (27) iar pentru limitele integralei din (33) s-a notat

$$\begin{aligned} S_v &= \text{un punct de pe segmentul } O_2O_1, \\ M_s &= \text{un punct de pe semidreapta } -\infty D_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Înlocuind în formulele (32) și (33) pe F_{100} cu expresia sa și efectuînd calculele, s-au obținut pentru potențialele respective relațiile

$$\Phi_{1\,or.} = \frac{2C_0 x_1}{L\mathfrak{k}}\,\mathcal{R}e\sqrt{(X+\mathfrak{k})(L-X)}\,, \tag{35 a}$$

$$\Phi_{1\,v.} = \frac{2C_0\mathcal{B}\,x_1}{B^2\sqrt{(1+\mathcal{B}L)(1-\mathcal{B}\mathfrak{k})^2(1+\mathcal{B}\mathfrak{k})}}\,\mathcal{R}e\sqrt{\frac{\mathcal{B}^2(\mathfrak{k}^2-X^2)}{1-B^2\mathfrak{k}^2}}\Bigg[(\mathcal{B}\mathfrak{k}-1)\,\mathbf{F}(\varphi,k)-$$

$$-2\,\frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}+\frac{2}{1-k^2}\,\mathbf{E}(\varphi,k)\Bigg], \tag{35 b}$$

în care constanta C_0 este dată de formula (28 b), $\mathbf{F}(\varphi, k)$ și $\mathbf{E}(\varphi, k)$ sînt integrale eliptice de speța întîi și a doua, de modul k (29) și argument φ dat de formula

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}\mathfrak{k})(1+\mathcal{B}X)}{(1+\mathcal{B}\mathfrak{k})(1-\mathcal{B}X)}}\,. \tag{36}$$

5. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE REDUSE A MIȘCĂRII CONICE DE ORDINUL DOI ($n = 2$)

Pentru a stabili expresiile *vitezelor axiale reduse* ale mișcării conice de ordinul doi, utilizăm de asemenea formula lui Euler

$$u_1 = x_1(\Phi_{200} + y\,\Phi_{110} + z\,\Phi_{101})\,. \tag{37}$$

Utilizînd un procedeu analog celui utilizat la determinarea potențialelor $\Phi_{1\,or.}$ și $\Phi_{1\,v.}$ rezultă din formula (37) pentru *viteza axială redusă* pe suprafața orizontală expresia

$$u_{1\,or.} = -\,x_1\,\mathcal{R}e\sqrt{X^2-\mathfrak{k}^2}\int_{M_d}^{S_{or.}} F_{200}\,\frac{X\,dX}{(X^2-\mathfrak{k}^2)^{3/2}}\,, \tag{38}$$

și respectiv pe suprafața verticală,

$$u_{1\,v.} = -\,x_1\,\mathcal{R}e\,\frac{\mathcal{B}^2\sqrt{X^2-\mathfrak{k}^2}}{\mathrm{B}^2\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}\int_{M_s}^{S_{v.}} F_{200}\,\frac{X\,dX}{(X^2-\mathfrak{k}^2)^{3/2}\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}\,, \tag{39}$$

în care limitele de integrare sînt definite de (27) și (34).

Se vede din formulele (38) și (39) necesitatea determinării funcției analitice F_{200}, a cărei parte reală este Φ_{200}.

Modul de determinare al funcțiilor analitice $F_{n,0,0}$ a fost indicat în lucrările noastre anterioare [6], [7].

În cazul de față ($n = 2$), F_{200} are următoarea expresie:

$$F_{200} = \frac{\sqrt{\mathfrak{k} + X}\,(A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + A_4X^4)}{X^3 (L - X)^{3/2}}, \tag{40}$$

iar constantele $A_0, \ldots, A_4$ urmează să fie determinate astfel încît să fie satisfăcute condițiile la limită ale problemei.

Pentru aceasta avem la dispoziție următoarele cinci relații:

$$-E_b \frac{1 + 2B^2}{B^2} = B \int_{M_d}^{S_{or.}} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}{\sqrt{\mathcal{B}^2 (\mathfrak{k}^2 - X^2)}}\, dF_{200}, \tag{41 a}$$

$$E_a = i \frac{B}{\mathcal{B}} \int_{M_d}^{S_{or.}} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}{X^2 - \mathfrak{k}^2}\, dF_{200}, \tag{41 b}$$

$$-E_a = i \frac{B}{\mathcal{B}} \int_{M_s}^{S_{v.}} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}{X^2 - \mathfrak{k}^2}\, dF_{200}, \tag{41 c}$$

$$0 = i \frac{B}{\mathcal{B}} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}{X^2 - \mathfrak{k}^2}\, dF_{200}, \tag{41 d}$$

$$(dF_{200})_{X = -\mathfrak{k}} = 0, \tag{41 e}$$

limitele integralelor (M_d, M_s, $S_{or.}$, S_v) fiind definite tot de (27), şi (34) iar γ este un semicerc mic în jurul punctului $X = 0$.

Din formulele (41 d) şi (41 e) se deduc două condiții,

$$A_0 (L + 3\mathfrak{k}) + 2A_1 L \mathfrak{k} = 0, \tag{42 a}$$

$$A_0 - A_1\mathfrak{k} + A_2\mathfrak{k}^2 - A_3\mathfrak{k}^3 + A_4\mathfrak{k}^4 = 0, \tag{42 b}$$

care asigură continuitatea funcției F_{011} în punctul $X = 0$ şi respectiv $X = -\mathfrak{k}$.

Înlocuind în formulele (38) şi (39) pe F_{200} cu expresia găsită mai sus, făcînd toate calculele şi avînd în vedere de asemenea relațiile (42 a) şi (42 b), s-au găsit pentru vitezele *axiale reduse* pe suprafața orizontală şi respectiv suprafața verticală următoarele expresii:

$$u_{1\,or.} = x_1 \mathcal{R}e \frac{\sqrt{X + \mathfrak{k}}\,(K_0X^2 + K_1X + K_2)}{X\sqrt{L - X}}, \tag{43 a}$$

$$u_{1\,v.} = x_1 \mathcal{R}e \frac{\mathcal{B}^2 \sqrt{\mathfrak{k}^2 - X^2}}{B^2 \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}} \left[\frac{K_2 \sqrt{(1 - \mathcal{B}^2X^2)(X - L)(X - \mathfrak{k})}}{L\mathfrak{k}X} + \right.$$

$$\left. + K_3\mathbf{F}(\varphi, k) + K_4\mathbf{E}(\varphi, k) + G(\varphi) \right], \tag{43 b}$$

în care $\mathbf{F}(\varphi, k)$ şi $\mathbf{E}(\varphi, k)$ sînt integrale eliptice de speța întîi şi a doua, modulul φ şi argumentul k fiind definite de formulele (29) şi (36).

În aceste relaţii s-au utilizat notaţiile

$$K_0 = \frac{1}{(\mathfrak{k} - L)\,\mathfrak{k}L}\left[-2D_0\,\mathfrak{k}L + 2D_1\,\mathfrak{k}L - D_2\,(\mathfrak{k} - L)\right], \tag{44 a}$$

$$K_1 = \frac{1}{(\mathfrak{k} - L)\,\mathfrak{k}L}\left[2D_0\,\mathfrak{k}L^2 - 2D_1\,\mathfrak{k}^2L - D_2\,(\mathfrak{k}^2 - L^2)\right], \tag{44 b}$$

$$K_2 = -D_2 \tag{44 c}$$

$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}}\left[-\frac{2D_0\mathcal{B}^2}{(1 + \mathcal{B}\mathfrak{k})} + \frac{2D_1\mathcal{B}^2}{(1 - \mathcal{B}L)} - \frac{D_2(L + \mathfrak{k})}{L\mathfrak{k}}\right], \tag{44 d}$$

$$K_4 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}}\left[\frac{4D_0\mathcal{B}^2}{(1 - \mathcal{B}^2\mathfrak{k}^2)(1 - k^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{4D_1\mathcal{B}^2}{(1 - \mathcal{B}^2L^2)(1 - k^2)} - \frac{D_2}{\mathcal{B}L\mathfrak{k}\,(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}\right], \tag{44 e}$$

$$G(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}}\left[-\frac{4D_0\mathcal{B}^2}{1 - \mathcal{B}^2\mathfrak{k}^2}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{(1 - k^2)} + \right.$$
$$+ \frac{4D_1\mathcal{B}^2k^2}{(1 - \mathcal{B}^2L^2)(1 - k^2)}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} -$$
$$\left. - \frac{D_2}{\mathcal{B}L\mathfrak{k}\,(1 - \mathcal{B}\mathfrak{k})(1 + \mathcal{B}L)}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{(1 + \mathcal{B}\mathfrak{k})\sin^2\varphi + 1 - \mathcal{B}\mathfrak{k}}\right]. \tag{44 f}$$

Constantele D_0, D_1 şi D_2, care apar în expresiile de mai sus pot fi determinate direct din relaţiile (41 a), (41 b) şi (41 c) şi sînt funcţii de $A_0 \ldots A_4$.

Primită la redacţie la 9 martie 1960

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ОПЕРЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается гармоническое движение оперения, расположенного в сверхзвуковом потоке.

Движение же могут порождать возмущения на оперении, индуктированные неоднородным гармоническим неустановившимся потоком, происходящим от колебания крыла, или колебательным гармоническим движением оперения вокруг некоторой оси.

При этом, если считать, что нормальные скорости к двум поверхностям определяются суммами однородных многочленов (6 a) и (6 b),

и что амплитуда и частота движения сравнительно малы, задача сводится к исследованию некоторых конических движений высшего порядка, потенциалы которых удовлетворяют уравнению (3).

Специально был исследован случай колебаний оперения с дозвуковыми передними кромками, причем оперение с одной сверхзвуковой кромкой или всеми сверхзвуковыми кромками можно изучать таким же путем.

Из граничных условий задачи было замечено, что колебательное движение оперения можно получить путем наложения двух эффектов: колебательного движения изолированного крыла, форма которого идентична форме вертикальной поверхности, и комплексного движения, происходящего от взаимодействия между двумя поверхностями. Так как результаты, касающиеся колебательного гармонического движения изолированного крыла, известны, то мы занимаемся исследованием взаимодействия между двумя поверхностями оперения.

Для этого, применяя ранее изложенный метод, мы определили выражения приведенных осевых скоростей и приведенного потенциала, определяющие влияние взаимодействия двух поверхностей на коэффициент давления.

LE MOUVEMENT OSCILLATOIRE HARMONIQUE DES EMPENNAGES, EN RÉGIME SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient le mouvement harmonique d'un empennage situé dans un courant supersonique.

Le mouvement peut être déterminé par les perturbations induites sur l'empennage par le courant non uniforme et harmonique non stationnaire, produit par les oscillations de l'aile ou bien par le mouvement oscillatoire harmonique de l'empennage autour d'un axe.

Dans cette situation, en tenant compte que les vitesses normales aux deux surfaces sont définies par des sommes de polynômes homogènes (6 a), (6 b) et que l'amplitude et la fréquence du mouvement sont relativement petites, le problème se réduit à l'étude de quelques mouvements coniques d'ordre supérieur, dont les potentiels satisfont à l'équation (3).

C'est le cas des oscillations de l'empennage à bords d'attaque subsoniques qui fait surtout l'objet de cette étude, attendu que l'empennage ayant un bord ou tous les bords supersoniques peut être étudié de la même manière.

Les conditions à la limite du problème ont permis d'observer que le mouvement oscillatoire de l'empennage peut être obtenu par la superposition de deux effets : le mouvement oscillatoire d'une aile isolée ayant une forme identique à la surface verticale et le mouvement complexe dû à l'interférence entre les deux surfaces. Les résultats concernant le mou-

vement oscillatoire harmonique d'une aile isolée étant connus, les auteurs ont accordé une attention particulière à l'étude de l'interférence entre les deux surfaces de l'empennage.

A cette fin, en utilisant une méthode antérieurement exposée, ils ont déterminé les expressions des *vitesses axiales réduites* et du *potentiel réduit* qui définissent la contribution du coefficient de pression lors de l'interférence des deux surfaces.

BIBLIOGRAFIE

1. JOHN W. MILES, *On Harmonic Motin on Supersonic Speeds.* Journ. Aero. Sci., *16*, 378 (1949).
2. E. CARAFOLI, S. SĂNDULESCU, *Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique.* Archiwum Mechaniki Stosovanej, 6, 1958.
3. — *Modern developments in fluid dynamics.* G. Temple, High Speed Flow., Oxford University Press. Oxford, 1956, 225.
4. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *9—10* (1952).
5. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).
6. E. CARAFOLI et collab., *L'écoulement supersonique homogène d'ordre supérieur autour d'une aile cruciforme. Application au mouvement oscillatoire.* Le IXème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, Sept. (1956).
7. E. CARAFOLI et collab., *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *2* (1957).
8. E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
9. E. A. КРАСИЛЬЩИКОВА, *Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке.* Гостехстройиздат, Москва, 1952.

MIŞCAREA FLUIDELOR GRELE DEVERSANTE ÎNTR-UN PLAN VERTICAL

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

V. IONESCU şi C. CRĂCIUN

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat mişcarea cu suprafaţă liberă a unui fluid greu într-un plan vertical, care cade liber sub formă de lamă deversantă. Studiul făcut a condus la rezultatul că, în cazul în care se consideră mişcarea fluidului în întregime (inclusiv punctul de la infinit aval al lamei deversante), nu se poate afirma precis că soluţia problemei există. Această problemă va trebui să fie reluată şi tratată separat.

În vederea definitivării unei soluţii care să cuprindă şi punctul de la infinit aval, soluţie fără o prea mare importanţă practică, ne vom mărgini în lucrarea de faţă să studiem scurgerea unui fluid greu sub formă de lamă deversantă, într-un domeniu limitat de două suprafeţe echipotenţiale dintre care una situată la infinit amonte, iar cealaltă în aval, la o distanţă finită de punctul de detaşare al suprafeţei libere inferioare al lamei deversante.

În prima parte a lucrării sînt formulate ipotezele de calcul, condiţiile la limită şi soluţia problemei la limită sub formă de aproximaţii succesive, în care intră ca un parametru esenţial numărul Froude al mişcării.

În partea a doua, se studiază convergenţa şirului de aproximaţii succesive. Din expresia generală a aproximaţiilor succesive se constată că modul de convergenţă depinde de valoarea numărului Froude, ceea ce era de aşteptat. Studiul detaliat al convergenţei şi limitele între care poate varia numărul Froude pentru ca soluţiile obţinute să fie acceptabile şi din punct de vedere fizic, vor fi reluate o dată cu problema semnalată spre rezolvare mai sus şi anume a comportării lamei la infinit aval.

În partea a treia a lucrării se studiază, spre exemplificare, scurgerea peste un deversor cu muchie ascuţită pentru $\mathfrak{F}_r \approx 10$. Datele mişcării au fost alese în aşa fel încît aplicarea rezultatelor teoretice obţinute să prezinte cît mai puţine dificultăţi de calcul.

Sînt în curs de executare şi alte exemplificări numerice cu aplicaţii direct tehnice care vor face obiectul unor lucrări ulterioare.

IPOTEZE DE CALCUL, CONDIŢII LA LIMITĂ, SOLUŢIA PROBLEMEI LA LIMITĂ

IPOTEZE DE CALCUL

Pentru rezolvarea problemei propuse, ne situăm în următoarele ipoteze : mişcarea este considerată plană, fluidul perfect şi greu, suprafaţa de mişcare (S) este oarecare cu singura condiţie ca la infinit amonte să tindă asimptotic către orizontală. Notăm cu $V(A)$ viteza la infinit amonte a fluidului şi cu H înălţimea suprafeţei libere în acest punct. Notăm, de asemenea cu V viteza fluidului pe suprafaţa liberă, θ, înclinarea vitezei pe suprafaţa de scurgere (S) şi cu $y = y(x)$ ecuaţia suprafeţelor libere raportate la un sistem rectangular, în care axa absciselor este paralelă cu direcţia asimptotică a suprafeţei (S).

După ce fluidul părăseşte suprafaţa (S) în punctul (B) cade liber în cîmpul gravitaţiei sub formă de lamă deversantă. Aşa cum am arătat mai sus, mărginim studiul mişcării la domeniul $ABCC'A'$ delimitat în aval de secţiunea CC'. Curba CC' este o linie echipotenţială a mişcării aleasă la o distanţă convenabilă de punctul B.

CONDIŢII LA LIMITĂ, PROBLEMA LA LIMITĂ

Problema studiului mişcării în ipotezele adoptate revine la determinarea potenţialului complex al mişcării în domeniul D ocupat de fluid (fig. 1), în aşa fel încît pe frontiera domeniului să fie satisfăcute următoarele condiţii la limită :

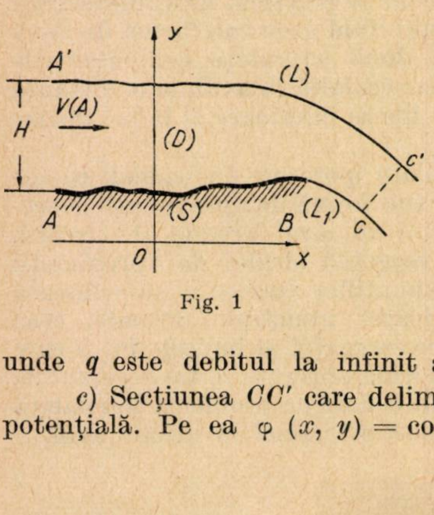


Fig. 1

a) Suprafaţa de scurgere (S) şi porţiunea BC a suprafeţei libere inferioare (necunoscută a priori) sînt linii de curent ale mişcării şi pe ele trebuie să fie satisfăcută condiţia $\psi\ (x,y) = 0$.

b) Suprafaţa liberă superioară (L) trebuie să fie de asemenea o linie de curent a mişcării şi pe ea trebuie să fie satisfăcută condiţia $\psi\ (x,y) = q$ unde q este debitul la infinit amonte.

c) Secţiunea CC' care delimitează mişcarea în aval este o linie echipotenţială. Pe ea $\varphi\ (x,\ y) = \text{const}$.

d) Suprafeţele libere (L) şi (L_1), necunoscute ale problemei, trebuie determinate astfel încît pe ele să fie satisfăcută relaţia lui Bernoulli

$$V^2 + 2gy = \text{const.} \tag{1}$$

Vom determina potenţialul complex al mişcării prin intermediul unei funcţii olomorfe care să satisfacă într-un domeniu determinat al planului auxiliar $Z=X+iY$ condiţiile la contur pe care le vom stabili în cele ce urmează. Acest procedeu a fost folosit şi în lucrarea [1] cu diferenţa că acum vom înlocui semicercul din planul auxiliar $Z = X + iY$ prin semiplanul superior $Y > 0$, pentru simplificarea formulelor şi calculelor.

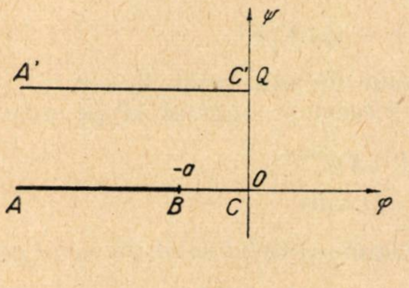


Fig. 2

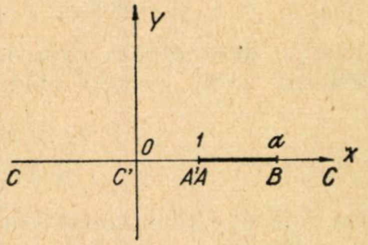


Fig. 3

În planul potenţialului complex $f_1 = \varphi + i\psi$ mişcarea se reprezintă pe semibanda $ABCC'A'$ în care mărimea a este necunoscută. Vom reprezenta semibanda din figura 2 pe semiplanul superior al planului $Z = X + iY$ unde corespondenţa punctelor este reprezentată în figura 3. Funcţia de transformare este

$$Z = \left[\frac{1 + e^{\frac{\pi}{q} f_1}}{1 - e^{\frac{\pi}{q} f_1}}\right]^2, \tag{2}$$

iar transformarea inversă este

$$f_1 = \frac{q}{\pi} \log \frac{\sqrt{Z} - 1}{\sqrt{Z} + 1} \tag{3}$$

unde trebuie aleasă determinaţia pozitivă a radicalului.

Parametrul α este legat de a prin relaţia

$$\alpha = \left[\frac{e^{\frac{\pi}{q} a} + 1}{e^{\frac{\pi}{q} a} - 1}\right]^2. \tag{4}$$

Pe axa reală $(Y = 0)$ partea reală a potenţialului $f_1(z)$ are expresia

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{\pi} \log \left|\dfrac{\sqrt{X} - 1}{\sqrt{X} + 1}\right| & \text{pentru } X > 0 \\ 0 & \text{pentru } X < 0 \end{cases} \tag{5}$$

din care rezultă imediat

$$d\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{X(X-1)}}\,dX & \text{pentru } X > 0 \\ 0 & \text{pentru } X < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Vom căuta cîmpul vitezelor în planul $Z = X + iY$ sub forma

$$w(Z) = V(A)e^{-i\omega(Z)}, \tag{7}$$

unde $w(Z)$ este viteza complexă, $V(A)$ valoarea vitezei la infinit amonte și $\omega(Z)$ o funcție complexă de forma

$$\omega(Z) = f(X,Y) + ig(X,Y), \tag{8}$$

care trebuie determinată prin condițiile de axa reală $Y = 0$.
În acest caz avem pentru modulul vitezei și unghiul ei pe axa reală

$$V(X,0) = V(A)e^{g(X,0)}, \tag{9}$$

$$\theta(X,0) = f(X,0). \tag{10}$$

Funcția $\theta(X,0)$ este cunoscută de-a lungul peretelui solid, în cazul general, numai calitativ.

În cele ce urmează vom stabili forma relației lui Bernoulli (1) pe axa reală a planului complex Z. Pentru aceasta diferențiem relația (1) și obținem

$$VdV + gdy = 0. \tag{11}$$

Diferențiem, de asemenea, relația (9) și obținem

$$dV = V(A)\,g'(X,0)\,e^{g(X,0)}dX. \tag{12}$$

Ținînd seama de relația generală

$$\frac{dz}{df_1} = \frac{1}{V(f_1)}e^{i\theta(f_1)},$$

obținem pe o linie de curent $\psi = \text{const.}$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{e^{i\theta(\varphi)}}{V(\varphi)},$$

sau, separînd partea reală și imaginară

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\sin\theta(\varphi)}{V(\varphi)}.$$

Dacă înlocuim în ultima relație scrisă expresia lui $d\varphi$ din (6) obținem

$$dy = \begin{cases} \dfrac{q}{\pi}\dfrac{\sin\theta(X)}{V(X)}\dfrac{1}{\sqrt{X(X-1)}}\,dX & \text{pentru } X > 0 \\ 0 & \text{pentru } X < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Dacă ţinem seama de relaţiile (12) şi (13) în relaţia (11) obţinem

$$g'(X,0) = \mu \frac{\sin f(X,0)}{\sqrt{X}(1-X)} e^{-3g(X,0)}, \tag{14}$$

unde

$$\mu = \frac{gq}{\pi V^3(A)} = \frac{gH}{\pi V^2(A)}.$$

Aici poate fi pus în evidenţă numărul Froude al mişcării $\mathcal{F}_r = \frac{V^2}{gH}$ cu care μ se scrie

$$\mu = \frac{1}{\pi \mathcal{F}_r}.$$

Aşadar soluţia problemei depinde de valoarea numărului $\mathcal{F}_r$ şi va trebui să se studieze separat cazurile $\mathcal{F}_r \gtreqless 1$. Peste tot în cele ce urmează numărul Froude va apare numai prin acest coeficient μ. Pe linia CC', care corespunde semiaxei reale negative $X < 0$, avem $dV = 0$. Cum modulul vitezei este diferit de zero, din (12) rezultă

$$g'(X,0) = 0 \quad \text{pentru } X < 0. \tag{15}$$

La infinit amonte $V = V(A)$, deci din (7) rezultă $\omega(1) = 0$.

Acestea fiind stabilite putem enunţa problema la limită, în modul următor : să se determine funcţia $\omega(Z)$, olomorfă în semiplanul superior, regulată la infinit, care să satisfacă pe axa reală următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} &a)\ \omega(1) = 0, \\ &b)\ f(X,0) = \theta(X) \qquad \text{în intervalul } [1, \alpha], \\ &c)\ g'(X,0) = \begin{cases} \mu \dfrac{\sin f(X,0)}{\sqrt{X}(1-X)} e^{-3g(X,0)} & \text{pentru } X > 0;\ X \notin [1,\alpha], \\ 0 & \text{pentru } X < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

Condiţia (16 *a*) arată că la infinit amonte viteza este constantă şi egală cu $V(A)$. Condiţia (16 *b*) indică înclinarea vitezei pe suprafaţa de scurgere (S), cunoscută cel puţin calitativ, o dată cu forma suprafeţei (S). În sfîrşit, condiţia (16 *c*) este relaţia lui Bernoulli transcrisă în planul Z.

Cunoscînd funcţia $\omega(Z)$, putem determina repartiţia de viteze cu ajutorul formulei (7). Tot cu ajutorul formulei (7) se pot determina ecuaţiile liniilor libere. Avem în adevăr

$$dz = \frac{1}{V(A)} e^{i\omega(Z)} \frac{df_1}{dZ} dZ.$$

Dacă ţinem seama de expresia derivatei funcţiei de transformare dată de formula (3)

$$\frac{df_1}{dZ} = \frac{q}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}},$$

obţinem

$$dz = \frac{q}{\pi V(A)}\,\frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}}\,e^{i\omega(Z)}\,dZ. \tag{17}$$

Prin integrare avem

$$z = \frac{q}{\pi V(A)}\int_{X_0}^{X}\frac{1}{\sqrt{X(X-1)}}\,e^{i\omega(X)}\,dX, \tag{18}$$

unde X este abscisa unui punct curent pe axa reală a planului Z şi X_0 este punctul care corespunde lui Z_0, originea liniilor libere (în fig. 1 punctul B). Din compararea figurilor 1 şi 3 rezultă că suprafaţa liberă inferioară se obţine pentru X variind în intervalul $[\alpha, +\infty)$, închiderea CC' a lamei pentru $X \in (-\infty, 0]$ suprafaţa superioară pentru $X \in [0,1]$, iar suprafaţa (S) pentru $X \in [1,\alpha]$.

SOLUŢIA PROBLEMEI LA LIMITĂ

Problema la limită cu condiţiile (16) pentru funcţia $\omega(Z)$ este o problemă la limită mixtă, de un tip special : pe o parte a frontierei se dă partea reală a funcţiei, iar în rest derivata sa normală în funcţie de partea reală şi imaginară a lui $\omega(Z)$ însuşi. Într-adevăr, în ultima condiţie (16) $g'(X,0)$ se poate înlocui cu $-\frac{df}{dy} = \frac{df}{dn_e}$ unde n_e este normala exterioară la domeniu. Pentru rezolvarea acestei probleme am aplicat metoda de aproximaţii succesive folosită de H. Poncin în lucrarea [2]. Definim funcţia $\omega(Z)$ ca limita unui şir de funcţii $\omega_n(Z)$

$$\omega(Z) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(Z),$$

unde $\omega_n(Z)$ sînt funcţii olomorfe în semiplan, regulate la infinit, definite prin următoarele condiţii la limită :

$$\left|\begin{array}{lll} \omega_n(1) = 0 & & \\ f_n(X,0) = \theta(X) & & \text{pentru } X \in [1,\alpha], \\ \dfrac{df_n(X,0)}{dn_e} = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\sqrt{X(1-X)}}\sin f_{n-1}(X,0)e^{-3g_{n-1}(X,0)} \\ 0 \end{cases} & & \begin{array}{l} \text{pentru} X > 0\,;\, X \notin [1,\alpha], \\ \text{pentru } X < 0. \end{array} \end{array}\right. \tag{19}$$

Vom studia convergenţa şirului $\{\omega_n(Z)\}$ într-un paragraf ulterior, după ce vom determina expresia generală a funcţiilor $\omega_n(Z)$.

Prima aproximație. Vom alege ca primă aproximație mişcarea fluidului fără greutate. Funcția $\omega_1(Z)$ va fi determinată prin următoarele condiții la limită :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1(1) = 0 & \\ f_1(X,0) = \theta(X) & \text{pentru } X \in [1,\alpha], \\ \dfrac{df_1(X,0)}{dn_e} = 0 & \text{pentru } X \notin [1,\alpha]. \end{array}\right. \tag{20}$$

Avem prin urmare o problemă la limită de tip Volterra pentru funcția $\omega_1(Z)$ care poate fi rezolvată prin metoda Signorini [3]. Fie atunci funcția ajutătoare $-i\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)}$ unde pentru radical am ales determinația pozitivă la dreapta lui α. Pentru funcția $\Omega = \dfrac{\omega_1}{i\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)}}$ cunoaştem partea reală pe toată axa (fig. 4), egală cu $\dfrac{f_1}{\sqrt{|Z-1|\,|Z-\alpha|}}$ în intervalul $[1,\alpha]$ şi nulă în rest. Soluția problemei Dirichelet corespunzătoare pentru semiplan este

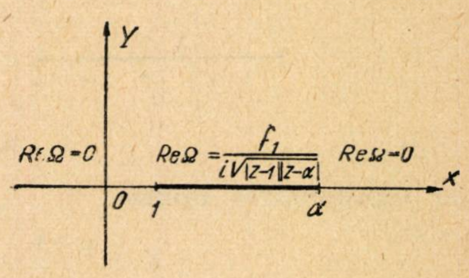


Fig. 4

$$\Omega_1 = \frac{i}{\pi}\int_1^\alpha \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}}\,\frac{d\xi}{Z-\xi},$$

de unde

$$\omega_1(Z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)}\int_1^\alpha \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}}\,\frac{d\xi}{Z-\xi}. \tag{21}$$

Aproximația de ordin n. Determinarea aproximației de un ordin oarecare n prin condițiile (19) se reduce la o problemă mai simplă cu ajutorul funcției $\omega_1(Z)$ determinată în paragraful precedent. Vom nota

$$\Omega_n(Z) = \omega_n(Z) - \omega_1(Z), \tag{22}$$

astfel încît $\omega_n(Z)$ va fi complet determinată o dată cu $\Omega_n(Z)$. Dacă $F_n(X,Y)$ şi $G_n(X,Y)$ sînt părțile reală şi imaginară ale funcției $\Omega_n(Z)$ condițiile la limită ce determină această funcție se vor scrie

$$\left\{\begin{array}{ll} \Omega_n(1) = 0 & \\ F_n(X,0) = 0 & \text{pentru } X \in [1,\alpha], \\ \dfrac{dF_n(X,0)}{dn_e} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mu}{\sqrt{X(1-X)}}\sin f_{n-1}(X,0)\,e^{-3g_{n-1}(X,0)} \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{pentru}\, X>0\,;\, X\notin[1,\alpha], \\ \text{pentru}\, X<0\,. \end{array} \end{array}\right. \tag{23}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme la limită vom reprezenta conform semiplanul superior din planul Z pe semicercul unitate din planul Z', astfel încît segmentul $[1, \alpha]$ să corespundă diametrului $[-1,1]$ ca în figura 5. Formula de transformare este

$$Z' = \frac{\alpha-1-2\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}}{2Z-(\alpha+1)} \tag{24}$$

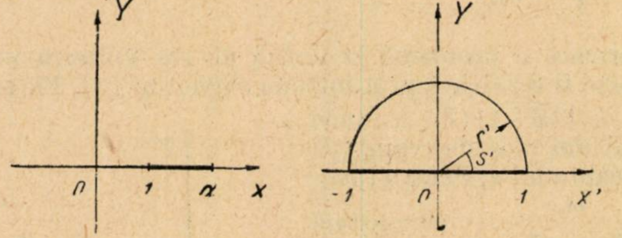


Fig. 5

iar transformarea inversă

$$Z = \frac{\alpha+1}{2} + (\alpha-1)\frac{Z'}{1+Z'^2}. \tag{24'}$$

S-a ales pentru radicalul din formula (24) determinația pozitivă în intervalul $[1, \alpha]$.

Soluția problemei corespunzătoare semicercului, adică determinarea funcției olomorfe, cu partea reală nulă pe diametru și derivata normală exterioară a părții reale pe semicerc $h(s')$ cunoscută, este dată de formula [2]

$$\Omega(Z') = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(s') \log \frac{e^{is'}-Z'}{e^{-is'}-Z'}\, ds' + iC. \tag{25}$$

Dacă se ține seama de transformarea (24') avem pentru $Z' = e^{is'}$

$$X = \frac{\alpha+1}{2} + \frac{\alpha-1}{2}\frac{1}{\cos s'},$$

de unde

$$\cos s' = \frac{\alpha-1}{2X-(\alpha+1)}, \quad \operatorname{tg} s' = \frac{2\sqrt{(X-1)(X-\alpha)}}{\alpha-1},$$

cu care $dX = \dfrac{\alpha-1}{2}\dfrac{\operatorname{tg} s'}{\cos s'}\, ds'$ devine

$$ds' = \frac{\alpha-1}{[2X-(\alpha+1)]\sqrt{(X-1)(X-\alpha)}}\, dX.$$

Factorul logaritmic din formula (25) devine în planul Z

$$\log \frac{e^{is'}-Z'}{e^{-is'}-Z'} = \log \frac{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}+i\,[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1))\alpha-Z)}-i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}.$$

Cu acestea, formula corespunzătoare lui (25) pentru semiplan se scrie

$$\Omega_n(Z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\infty,+\infty)-[1,\alpha]} \frac{dF_n(\eta,0)}{dn} \frac{\alpha-1}{[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}} \times \tag{26}$$

$$\times \log \frac{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}+i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}-i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}\, d\eta + iC.$$

Constanta C se determină cu ajutorul primei condiții (23)

$$iC = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{(-\infty,+\infty)-[1,\alpha]} \frac{dF_n(\eta,0)}{dn} \frac{\alpha-1}{[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}} \log \frac{(\eta-1)+i\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\eta-1)-i\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}\, \mathrm{d}\eta. \tag{27}$$

Integralele din (26) și (27) sînt extinse la toată axa reală din care s-a extras segmentul $[1,\alpha]$. După cum rezultă din (23), $\frac{dF_n}{dn_e}$ fiind nulă pe semiaxa negativă, urmează că integralele sînt extinse pe semiaxa reală pozitivă în afara segmentului $[1,\alpha]$. În sfîrșit, ținînd seama de substituția (22), obținem expresia termenului general $\omega_n(Z)$

$$\omega_n(Z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)} \int_1^\alpha \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\xi-1)(\alpha-\xi)}} \frac{d\xi}{Z-\xi} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\infty)-[1,\alpha]} \frac{dF_n(\eta,0)}{dn} \frac{\alpha-1}{[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}} \times$$

$$\times \log \frac{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}+i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\alpha-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}-i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}\, d\eta - \tag{28}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_{(0,\infty)-[1,\alpha]} \frac{dF_n(\eta,0)}{dn} \frac{\alpha-1}{[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}} \log \frac{(\eta-1)+i\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\eta-1)-i\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}},$$

unde $\frac{dF}{dn}$ are expresia din formula (23). Cunoscînd funcția $\omega_n(Z)$ pentru orice valoare a lui n, se pune problema convenției acestui șir de funcții. Studiul convergenței șirului $\omega_n(Z)$ va face obiectul celei de-a doua părți a lucrării.

STUDIUL CONVERGENŢEI ŞIRULUI DE APROXIMAŢII SUCCESIVE

Ideea conducătoare în studiul convergenței șirului de aproximații ale soluției problemei este să demonstrăm că în orice punct al frontierei domeniului lor de existență funcțiile $\omega_n(Z)$ sînt mărginite. Conform unei teoreme a lui P. Montel [4], dacă avem un şir de funcţii definite într-un domeniu D, mărginite pe frontiera C a domeniului, şirul de funcţii tinde către o limită unică. Dacă vom demonstra, aşadar, că funcţiile $\omega_n(Z)$ sînt mărginite pe axa reală a planului Z, vom demonstra în acelaşi timp atît convergenţa cît şi unicitatea soluţiei problemei. Cum funcţiile $\omega_n(Z)$ sînt funcţii complexe, este suficient să arătăm că şirul părţilor reale şi al părţilor imaginare sînt mărginite.

STUDIUL PRIMEI APROXIMAŢII

Pentru studiul primei aproximaţii vom folosi formula (21)

$$\omega_1(Z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)}\int_1^\alpha \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}}\,\frac{d\xi}{Z-\xi}.$$

Dacă funcţia

$$\sigma(\xi) = \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}},$$

satisface o condiţie Hölder

$$|\sigma(\xi_2)-\sigma(\xi_1)| < K|\xi_2-\xi_1|^\beta, \quad 0<\beta<1,$$

atunci integrala de tip Cauchy

$$I(Z) = \int_1^\alpha \sigma(\xi)\,\frac{d\xi}{Z-\xi}$$

este absolut convergentă [5], [6]. Cu această condiţie, care se răsfrînge asupra funcţiei $\theta(\xi)$, avem

$$|\omega_1(Z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{|Z-1|\,|Z-\alpha|}\,|I(Z)| \leqslant M \qquad \text{pentru } Z \in [1,\alpha].$$

Dacă $Z \notin [1,\alpha]$ integrala nu este de tip Cauchy. Cînd $\theta(\xi)$ este continuă şi mărginită : $|\theta(\xi)| < M_1$, aplicînd teorema a doua a mediei putem scrie

$$|\omega_1(Z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{|Z-1|\,|Z-\alpha|} \times \left|\int_1^\alpha \frac{\theta(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}(Z-\xi)}\right|.$$

Efectuînd integrala din membrul drept al inegalităţii de mai sus, obţinem

$$|\omega_1(Z)| \leqslant M_1$$

ceea ce arată că $\omega_1(Z)$ este mărginită în orice punct al axei reale.

Dacă însă impunem funcţiei $\theta(\xi)$ condiţia ca să fie numai continuă în intervalul $[1,\alpha]$ fără ca să satisfacă o condiţie Hölder, şi în plus dacă presupunem că ea nu-şi schimbă semnul în acest interval, se poate demonstra că şi în aceste ipoteze funcţia $\omega_1(Z)$ rămîne mărginită în orice punct al axei reale. În adevăr, pentru $Z \notin [1,\alpha]$ demonstrația de mai sus, se poate repeta identic. Pentru $Z \in [1,\alpha]$ se vede că funcția $\frac{1}{Z-\xi}$ devine infinită în punctul $Z = \xi$. Această singularitate este însă integrabilă.

Dacă însă funcția $\theta(\xi)$ are un număr finit de discontinuități de prima speță, $\omega_1(Z)$ ia valori infinite în aceste puncte. În cazul că vîrful suprafeței (S), este îndreptat în spre fluidul în mişcare se constată că viteza devine infinită în acest punct, iar dacă este îndreptat spre exterior, viteza este nulă. Cazuri mai complicate de singularități ale funcției $\theta(\xi)$ nu vor fi luate în considerare căci ele nu corespund unor cazuri ce se pot întîlni în practică.

STUDIUL APROXIMAŢIEI DE ORDINUL *n*

În cele ce urmează nu vom studia comportarea funcțiilor $\omega_n(Z)$ ci a funcțiilor $\Omega_n(Z)$. Cunoscînd modul de variație al funcției $\omega_1(Z)$, deducem uşor cu ajutorul relației (22) comportarea funcției $\omega_n(Z)$. Vom separa în expresia (26) partea reală și partea imaginară. Obținem succesiv pentru diferite valori ale lui n:

$$F_2(X,0) = \frac{\mu}{\pi}\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} P(\eta)e^{-3g_1(\eta,0)} \sin f_1(\eta,0) \log |N(\eta,Z)| \, d\eta, \tag{29}$$

$$G_2(X,0) = \frac{\mu}{\pi}\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} P(\eta)e^{-3g_1(\eta,0)} \sin f_1(\eta,0) \arg N(\eta,Z) d\eta + C_2, \tag{29'}$$

. . . .

. . . .

$$F_n(X,0) = \frac{\mu}{\pi}\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} P(\eta)e^{-3g_{n-1}(\eta,0)} \sin f_{n-1}(\eta,0) \log |N(\eta,Z)| \, d\eta \tag{30}$$

$$G_n(X,0) = \frac{\mu}{\pi}\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} P(\eta)e^{-2g_{n-1}(\eta,0)} \sin f_{n-1}(\eta,0) \arg N(\eta,Z) \, d\eta + C_n, \tag{30'}$$

unde am notat pentru simplificarea scrierii

$$P(\eta) = \frac{\alpha-1}{(1-\eta)\,[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-\alpha)}}, \tag{31}$$

$$N(\eta,Z) = \frac{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}+i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}{(\alpha-1)(Z-\eta)+[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{(Z-1)(\alpha-Z)}-i[2Z-(\alpha+1)]\sqrt{(\eta-1)(\eta-\alpha)}}\cdot \tag{31'}$$

Vom demonstra că funcțiile $F_2, G_2, \ldots, F_n, G_n, \ldots$ sînt mărginite în orice punct al axei reale. Conform celor arătate în paragraful anterior, expresia

$$E_1(\eta) = e^{-3g_1(\eta,0)} \sin f_1(\eta,0),$$

care intervine în relațiile (29) și (29′) rămîne mărginită pentru orice valoare reală a lui η. Dacă X este un punct arbitrar ales pe axa reală, diferit de η, se verifică imediat că $F_2(X,0)$ rămîne mărginită. Dacă $X = \eta$, se vede că expresia

$$\log |N(\eta,Z)|,$$

se anulează, deci și în acest caz integrala este convergentă.

Se verifică ușor că și funcția $G_2(X,0)$ este mărginită în orice punct al axei reale, ținînd seama că $\sin f_1(1,0) = 0$. Este necesar ca $f_1(\xi,0)$ să tindă la zero pentru $\xi \to 1$ cel puțin ca $\xi - 1$, ceea ce revine la condiția ca $\theta(\xi)$ să fie de forma

$$\theta(\xi) = (\xi-1)\theta_0(\xi),$$

adică suprafața de fund să tindă spre orizontală la infinit destul de repede.

Dacă ținem seama de expresia

$$\omega_2(Z) = \omega_1(Z) + \Omega_2(Z), \tag{32}$$

rezultă că funcția $\omega_2(Z)$ este mărginită peste tot afară de punctele Z în care $\omega_1(Z)$ devine infinită, deoarece $\Omega_2(Z)$ este peste tot mărginită. În expresia lui $\Omega_3(Z)$ intervine același nucleu $P(\eta)$ ca în $\Omega_2(Z)$ și factorul

$$E_2(\eta) = e^{-3g_2(\eta,0)} \sin f_2(\eta,0). \tag{33}$$

Deoarece $E_2(\eta)$ rămîne mărginit pentru orice η, rezultă că și funcțiile $F_3(X,0)$ și $G_3(X,0)$ vor fi mărginite.

Aceeași discuție va conduce la concluzia că, în general funcțiile $F_n(X,0)$ și $G_n(X,0)$ sînt mărginite în orice punct X al axei reale. Deoarece funcțiile $\Omega_n(Z)$ rămîn mărginite, pe toată frontiera domeniului, rezultă că șirul $\{\Omega_n(Z)\}$ are o limită și ea este unică. Fie $\Omega(Z)$ această limită

$$\Omega(Z) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n(Z). \tag{34}$$

Din relația (22) deducem că soluția problemei la limită (16) va fi

$$\omega(Z) = \omega_1(Z) + \Omega(Z). \tag{35}$$

INTERPRETAREA ȘIRULUI DE APROXIMAȚII SUCCESIVE

Soluția problemei la limită (16) a fost obținută, așa cum ne-am propus în partea întîia a lucrării, ca limită a unui șir de funcții olomorfe, definite prin condițiile la limită (19). Funcțiile $\omega_n(Z)$ pot fi interpretate ca definind un șir de mișcări M_n ce tind către mișcarea limită M definită de funcția $\omega(Z)$.

Funcția $\omega_1(Z)$ definește astfel mișcarea fluidului fără greutate. Ecuația liniilor libere în acest caz este dată de formula

$$z_1 = \frac{q}{\pi V(A)} \int_{X_0}^{X} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}} e^{i\omega_1(X)}\, dX, \tag{36}$$

dedusă ca și în (18).

În mod analog, liniile libere pentru aproximaţia de ordinul n a mişcării vor fi date de relaţia

$$z_n = \frac{q}{\pi V(A)} \int_{X_0}^{X} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}} e^{i\omega_n(X)} dX. \tag{37}$$

În expresia funcţiilor $\omega_n(Z)$ şi deci a suprafeţelor libere intervine funcţia $\theta(X)$ care reprezintă înclinarea vitezei faţă de orizontală pe suprafaţa (S); această funcţie este definită pe intervalul $[1, \alpha]$. Ea nu este cunoscută precis din forma peretelui rigid (S), pentru că pe el nu sînt cunoscute apriori valorile potenţialului φ. Forma suprafeţei (S) indică numai aspectul calitativ al funcţiei $\theta(X)$ în cazul general. În cazuri particulare însă, cum este cel studiat de noi în partea a treia a lucrării, $\theta(X)$ este precis determinată.

Pentru o anumită formă a suprafeţei de mişcare (S) funcţia $\theta(X)$ ar trebui determinată dintr-o relaţie funcţională complicată.

În aplicaţii se procedează ca în teoria siajurilor: se alege o funcţie $\theta(X)$ şi se calculează forma suprafeţei rigide ce-i corespunde; se schimbă funcţia $\theta(X)$ astfel încît suprafaţa rigidă calculată să se suprapună peste cea dată.

APLICAŢIE LA DEVERSORUL CU MUCHIE ASCUŢITĂ PENTRU $\mathcal{F}_r \approx 10$

PARAMETRII MIŞCĂRII

Ca aplicaţie vom considera cazul deversorului vertical cu muchie ascuţită. El este un caz particular al celui înclinat cu un unghiu σ faţă de orizontală schiţat în figura 6. Urmărind teoria generală expusă în primele două părţi ale lucrării, vom pune în corespondenţă planul mişcării z cu planul Z din figura 7 unde punctul α_0 corespunde punctului A_0 din planul mişcării.

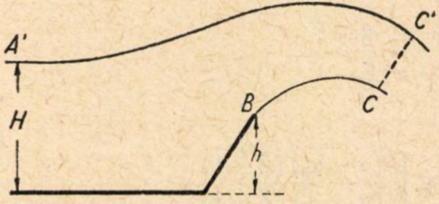


Fig. 6

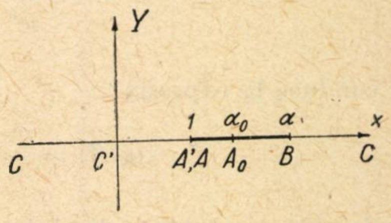


Fig. 7

Unghiul vitezei pe suprafaţa de scurgere coincide cu unghiul peretelui solid cu orizontala şi este definit de funcţia

$$\theta(X) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } X \in [1, \alpha_0], \\ \sigma & \text{pentru } X \in [\alpha_0, \alpha]. \end{cases} \tag{38}$$

Constanta α_0 este o necunoscută a problemei. Ea va fi determinată din expresia care dă înălţimea A_1B a deversorului. Notînd cu h această înălţime, putem scrie

$$h = \Im m \frac{q}{\pi V(A)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}} e^{i\omega(X)}\, dX. \tag{39}$$

Relaţia (39) defineşte constanta α_0 care intervine atît în expresia funcţiei $\omega(X)$ cît şi ca limită a intervalului de integrare. După cum se vede în formula de mai sus, exprimarea lui α_0 în funcţie de h şi de celelalte date ale mişcării (H, q, α) este foarte dificilă. Ea nu poate fi determinată decît prin încercări : alegem diferite valori pentru α_0 şi calculăm în funcţie de ele valoarea lui h. Alegem dintre aceste valori pe aceea care realizează înălţimea h cea mai apropiată de cea dată.

În aplicaţia numerică pe care am făcut-o, noi am ales o valoare arbitrară pentru α_0 şi am calculat h în diferitele aproximaţii ($h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$) fără să modificăm valoarea α_0 aleasă.

Este evident că şirul $\{h_n\}$ va tinde către o limită bine determinată, deoarece tot procesul de aproximaţii este convergent.

Din calculele care vor fi expuse în cele ce urmează va rezulta clar acest lucru.

PRIMA APROXIMAŢIE

Formula (21) în care se introduce valoarea (38) a funcţiei $\theta(\xi)$, devine

$$\omega_1(Z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(Z-1)(Z-\alpha)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{(\xi-1)(\alpha-\xi)}} \frac{d\xi}{Z-\xi}.$$

Integrala se calculează făcînd substituţia

$$u^2 = \frac{Z-1}{Z-\alpha}\,\frac{\alpha-\xi}{\xi-1}$$

şi conduce la expresia

$$\omega_1(Z) = \frac{2\sigma}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\alpha-\alpha_0)(Z-1)}{(\alpha_0-1)(Z-\alpha)}}, \tag{40}$$

unde alegem pentru radical determinaţia pozitivă. Ne vom mărgini după cum am spus mai înainte, la cazul deversorului vertical, cînd $\sigma = \frac{\pi}{2}$. În acest caz avem

$$\omega_1(Z) = \operatorname{arc\,tg} K \sqrt{\frac{Z-1}{Z-\alpha}}, \tag{41}$$

unde am notat cu K valoarea

$$K = \sqrt{\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0 - 1}}. \tag{42}$$

În intervalul $[1, \alpha]$, $\omega_1(Z)$ are expresia

$$\omega_1(X) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log \frac{K\sqrt{X-1} + \sqrt{\alpha - X}}{K\sqrt{X-1} - \sqrt{\alpha - X}}. \tag{43}$$

Se verifică uşor că expresiile (41) şi (43) satisfac condiţiile la contur ale mişcării. În adevăr, unghiul vitezei $\theta = \mathcal{R}e\, \omega_1(Z)$ este nul pentru $X \in [1, \alpha_0]$ şi $\frac{\pi}{2}$ în $[\alpha_0, \alpha]$. De asemenea, viteza este $V(A)$ la infinit amonte, nulă la baza A_0 a deversorului şi egală cu $V(A)$ în vîrful deversorului.

Cu ajutorul formulei (43) putem calcula înălţimea deversorului. Avem, introducînd expresia (43) a funcţiei $\omega_1(X)$ în formula (18)

$$h = \frac{q}{\pi V(A)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}} \sqrt{\frac{K\sqrt{X-1} + \sqrt{\alpha - X}}{K\sqrt{X-1} - \sqrt{\alpha - X}}}\, dX \tag{44}$$

Aici, mai bine ca în (39) se observă dificultatea rezolvării în raport cu α_0 ce intervine atît ca limită a integralei cît şi prin intermediul lui K.

În vederea calculelor numerice am ales limitarea CC' a lamei deversante la distanţa $2\,q$ care asigură suficient de bine condiţia ca viteza să fie constantă în secţiune. Formula (4) dă pentru α valoarea $\alpha = 1{,}0075$. Vom presupune că α_0 are valoarea $\alpha_0 = 1{,}0025$ aşa încît $K = \sqrt{2}$.

Alegem la infinit amonte înălţimea lamei fluide H şi viteza $V(A)$ respectiv egale cu 1 m. şi 10 m/s.

În acest caz numărul Froude al mişcării este

$$\mathcal{F}r \approx 10.$$

Dacă ţinem seama de aceste valori în ecuaţia (44) obţinem înălţimea deversorului $h_1 = 0{,}813$. Calculele numerice au fost făcute folosind metoda tangentelor pentru evaluarea integralei şi sînt arătate în tabela 1.

Tabela 1

Înălţimea deversorului

X	$\frac{1}{\sqrt{X(X-1)}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{X-1} + \sqrt{\alpha - X}}{\sqrt{2}\sqrt{X-1} - \sqrt{\alpha - X}}}$	dX	$dI = 2 \cdot 3 \cdot 4$	$h = \frac{1}{\pi} \Sigma dI$
1	2	3	4	5	
1,003	332,38441	3,73196	0,0001	1,242125	
1,004	249,50149	2,21533	0,0001	0,552728	
1,005	199,50124	1,73201	0,0001	0,345556	
1,006	166,16882	1,44710	0,0001	0,240463	
1,007	142,35973	1,21080	0,0001	0,172369	0,813

Coloana 5 reprezintă produsul valorilor din coloanele 2, 3 şi 4, adică elementele integralei din formula (44).

Liniile libere, se obţin cu ajutorul formulei (18) prin integrare pe intervalele corespunzătoare ale axei $0X$

$$z_1 = \frac{1}{\pi}\int_{X_0}^{X} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}}\, e^{i\,\mathrm{arctg}\sqrt{2\frac{X-1}{X-\alpha}}}\, dX. \tag{45}$$

Suprafaţa liberă inferioară se obţine integrînd între α şi ∞, închiderea lamei CC' între $-\infty$ şi 0, iar suprafaţa superioară între O şi 1. Aici, ca şi în toate calculele care vor urma, folosim pentru evaluarea integralelor metoda tangentelor. În vecinătatea punctelor singulare ale funcţiei de sub integrală am îndesit diviziunea intervalului de integrare pentru a elimina cît mai mult erorile de calcul aproximativ.

Calculele pentru determinarea supraţelei inferioare ($X > \alpha$) sînt arătate în tabela 2. Limita inferioară de integrare X_0 din formula (45) este

Tabela 2

Suprafaţa inferioară

Nr. crt.	X	dX	$\sqrt{2\frac{X-1}{X-\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{X}(X-1)}$	$\frac{dX \cos \mathrm{arctg}\, 4}{\pi\sqrt{X}\,(X-1)}$	$\frac{dX \sin \mathrm{arctg}\, 4}{\pi\sqrt{X}\,(X-1)}$	$z_1 = x_1 + iy_1$	
							x_1	y_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,01	0,005	2,828	99,502	0,0529	0,1493	0,0501	0,9649
2	1,019	0,0125	1,812	52,136	0,09957	0,1819	0,153	1,144
3	1,0375	0,025	1,581	26,1823	0,1165	0,184	0,269	1,328
4	1,0625	0,025	1,503	15,5189	0,0676	0,103	0,337	1,431
5	1,0875	0,025	1,474	10,9574	0,0493	0,072	0,385	1,503
6	1,112	0,025	1,47	8,4671	0,0381	0,0557	0,424	1,559
7	1,2	0,15	1,44	4,566	0,124	0,178	0,548	1,737
8	1,4	0,25	1,43	2,114	0,0965	0,138	0,645	1,875
9	1,76	0,47	1,42	0,992	0,086	0,123	0,731	1,998
10	3	2	1,41	0,289	0,107	0,149	0,838	2,147
11	5	2	1,41	0,112	0,0415	0,058	0,879	2,205
12	8	4	1,41	0,0505	0,0374	0,0523	0,916	2,257
13	15	10	1,41	0,0184	0,0341	0,0476	0,950	2,305
14	40	40	1,41	0,0041	0,03	0,0421	0,980	2,347
15	100	80	1,41	0,00101	0,0148	0,021	0,994	2,368
16	240	200	1,41	0,00027	0,01	0,0123	1,005	2,380

α_0 iar limita superioară X parcurge toate valorile reale superioare lui α arătate în coloana a doua a tabelei *2*. Prima coloană indică numărul de ordine al punctelor calculate. Valoarea funcţiei $\omega_1(X)$ în punctele calculate se obţine ca arc tg din valorile coloanei 4. Expresiile cos arc tg 4 şi sin arc tg 4 care apar în coloanele 6 şi 7 reprezintă partea reală respectiv imaginară a funcţiei $e^{i\omega_1(X)}$. În coloanele 8 şi 9 apar coordonatele punctului curent z_1 de pe suprafaţa liberă inferioară.

Calculul limitării C_1C_1' a lamei deversante se efectuează în mod asemănător cu ajutorul formulei (45) cînd X parcurge axa reală negativă.

Rezultatele sînt arătate în tabela 3. Suprafaţa liberă superioară se calculează în mod analog cînd X parcurge toate valorile cuprinse în intervalul $[0,1]$, după cum se vede în tabela 4. Rezultatele numerice de mai sus au făcut posibilă trasarea conturului $AA_0BC_1C_1'A'$ (fig. 8) care reprezintă domeniul mişcării în prima aproximaţie. Numerele punctelor indicate pe figură corespund numerelor curente din primele coloane ale tabelelor 1—4. În regiunile unde punctele sînt prea apropiate ele nu au fost numerotate.

Tabela 3

Limitarea lamei

Nr. crt.	X	dX	$\sqrt{2\frac{X-1}{X-\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{X}(X-1)}$	$\frac{dX\cos\operatorname{arctg}4}{\pi\sqrt{X}(X-1)}$	$\frac{dX\sin\operatorname{arctg}4}{\pi\sqrt{X}(X-1)}$	$z_1 = x_1 + iy_1$	
							x_1	y_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	– 0,01	0,02	1,3708	9,9	–0,0509	0,0372	0,954	2,417
18	– 0,03	0,02	1,4089	5,6052	–0,0291	0,0208	0,925	2,438
19	– 0,07	0,06	1,41	3,5323	–0,0551	0,0389	0,870	2,477
20	– 0,15	0,1	1,41	2,2452	–0,0583	0,0413	0,812	2,518
21	– 0,3	0,2	1,412	1,4044	–0,0731	0,0516	0,739	2,570
22	– 0,7	0,6	1,413	0,7031	–0,1096	0,0775	0,629	2,647
23	– 2	2	1,414	0,2357	–0,1225	0,0867	0,506	2,734
24	– 4	2	1,4142	0,1	–0,0520	0,0368	0,454	2,771
25	– 6	2	1,4142	0,0583	–0,0303	0,0214	0,424	2,790
26	– 10	6	1,4142	0,02875	–0,0448	0,0317	0,379	2,824
27	– 20	14	1,4142	0,01065	–0,0387	0,0274	0,341	2,851
28	– 40	26	1,4142	0,00386	–0,026	0,0184	0,315	2,870
29	– 80	54	1,4142	0,00138	–0,0194	0,0137	0,295	2,883
30	–200	186	1,4142	0,00035	–0,0170	0,0120	0,278	2,895

Vom arăta acum modul cum a fost trasată secţiunea C_1C_1' a lamei deversante. Coordonatele punctelor secţiunei C_1C_1' se obţin din formula (45) prin integrare de la $-\infty$ la X cînd X parcurge toate valorile negative crescătoare ale axei reale. Pentru a evita calculul aproximativ al unor integrale pe intervale infinite, s-a schimbat sensul de parcurgere al închiderii C_1C_1' şi deci sensul de integrare, intervalele fiind O,X unde X parcurge valori negative crescătoare în modul. Deoarece punctul C_1 era determinat o dată cu suprafaţa inferioară, elementele de arc calculate au fost puse cap la cap începînd de la C_1 spre C_1'.

Punctul C_1 s-ar obţine pentru $X \rightarrow -\infty$. S-a calculat integrala pînă la o valoare suficient de mare X_m. Se ştie că în lama liberă viteza fluidului la mari distanţe este egală cu viteza $V(A)$ la infinit amonte. Conform relaţiei de continuitate, lăţimea lamei libere trebuie să fie egală cu înălţimea fluidului la infinit amonte. Am adăugat la lăţimea lamei libere obţinută prin calculul integralei (45) între limitele O şi X_m diferenţa pînă la H, înălţimea fluidului la infinit amonte.

Tabela 4

Suprafaţa superioară

Nr. crt.	X	dX	$\sqrt{2\frac{X-1}{X-\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{X}(X-1)}$	$\frac{dX \cos \operatorname{arctg} 4}{\pi\sqrt{X}(X-1)}$	$\frac{dX \sin \operatorname{arctg} 4}{\pi\sqrt{X}(X-1)}$	$z_1 = x_1 + iy_1$	
							x_1	y_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	0,05	0,1	1,4	4,708	−0,0873	−0,122	0,1132	2,8524
32	0,15	0,1	1,4	3,038	−0,0563	−0,0786	0,0563	2,7731
33	0,3	0,2	1,4	2,61	−0,0966	−0,135	−0,0402	2,6382
34	0,5	0,2	1,4	2,83	−0,105	−0,146	−0,1455	2,4923
35	0,7	0,2	1,39	3,984	−0,148	−0,206	−0,2929	2,2866
36	0,825	0,05	1,38	6,291	−0,06	−0,08	−0,3537	2,2064
37	0,875	0,05	1,369	8,5525	−0,0803	−0,110	−0,4342	2,0967
38	0,91	0,02	1,3545	11,6468	−0,044	−0,0597	−0,4788	2,0371
39	0,93	0,02	1,34	14,8135	−0,0564	−0,0756	−0,5341	1,9612
40	0,95	0,02	1,3155	20,5195	−0,07903	−0,1041	−0,6132	1,8570
41	0,965	0,01	1,2795	29,0833	−0,05693	−0,0729	−0,6701	1,7846
42	0,975	0,01	1,2365	40,508	−0,0811	−0,1002	−0,7512	1,6848
43	0,985	0,01	1,1513	67,17045	−0,1403	−0,161	−0,9019	1,5292
44	0,9925	0,005	0,997	133,8352	−0,1499	−0,1513	−1,0537	1,3921
45	0,9975	0,005	0,705	400,5	−0,5201	−0,3678	−1,6221	1,1197

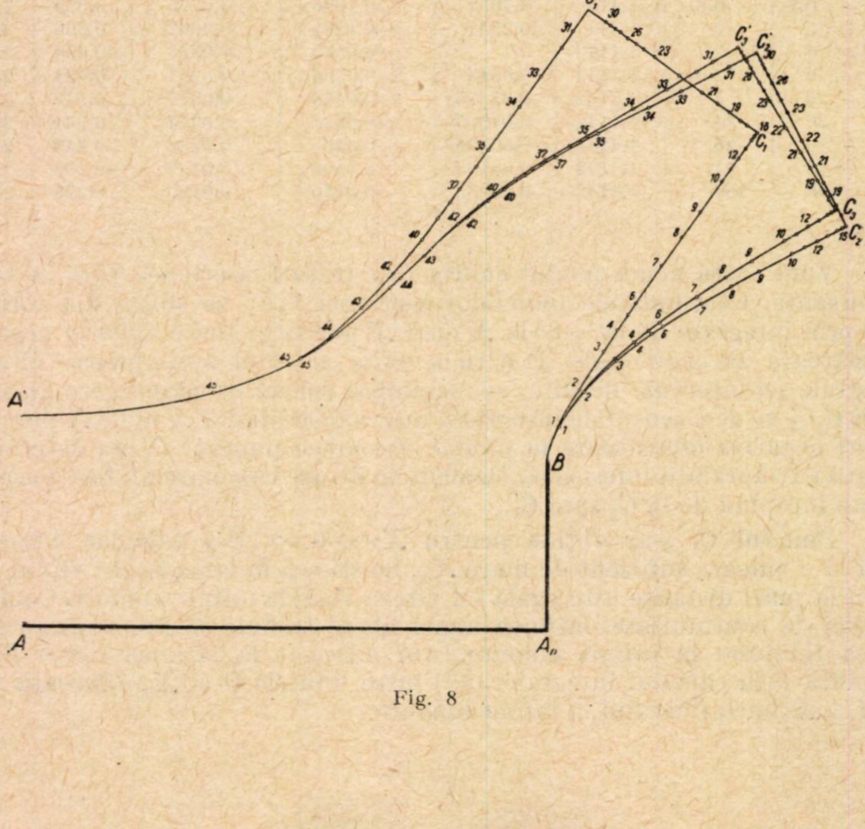


Fig. 8

APROXIMAŢIA DE ORDINUL AL DOILEA

Pentru studiul mişcării în a doua aproximaţie folosim formula generală (28) în care facem $n = 2$. Factorul $\frac{dF_2}{dn_e}$ ce se obţine din ultima condiţie (23) pentru $n = 2$ are expresia

$$\frac{dF_2(X,0)}{dn_e} = \frac{\mu}{\sqrt{X(1-X)}} e^{-2g_1(X,0)} \sin f_1(X,0).$$

Cum integrala se extinde la axa reală pozitivă fără segmentul $[1,\alpha]$ vom căuta forma acestei expresii pe intervalul de integrare. După cum se vede din formula (41), $\omega_1(Z)$ în afara segmentului $[1,\alpha]$ este pur real deci

$$g_1(X,0) = 0 \quad \text{pentru } X \notin [1,\alpha),$$

iar partea sa reală este

$$f_1(X,0) = \text{arc tg } K\sqrt{\frac{X-1}{X-\alpha}}.$$

Avem, aşadar, pentru derivata normală a funcţiei F_2 expresia

$$\frac{dF_2(X,0)}{dn_e} = \frac{\mu}{\sqrt{X(1-X)}} \sin \left[\text{arctg } K\sqrt{\frac{X-1}{X-\alpha}}\right..$$

Cum însă

$$\text{arctg } u = \text{arc sin } \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

rezultă că avem

$$\sin\left[\text{arctg } K\sqrt{\frac{X-1}{X-\alpha}}\right] = \sqrt{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha-1}}\sqrt{\frac{X-1}{X-\alpha_0}}.$$

Notînd

$$K' = \sqrt{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha-1}} \qquad \left(K' = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

vom obţine

$$\frac{dF_2(X,0)}{dn_e} = -\frac{\mu K'}{\sqrt{X(X-1)(X-\alpha_0)}}. \tag{46}$$

Avem deci după formula (28) în care introducem expresia (46)

$$\omega_2(Z) = \omega_1(Z) + K'' \int\limits_{(0,\infty)-[1,\alpha]} A(\eta) \log N(\eta,Z) d\eta - iK'' \int\limits_{[0,\infty)-[1.\alpha]} A(\eta) \log N(\eta,1) d\eta, \tag{47}$$

Unde am notat

$$K'' = \frac{\mu}{\pi}\sqrt{(\alpha-\alpha_0)(\alpha-1)} \qquad (\text{in cazul numeric } K'' = 60\,867.10^{-7})$$

$$\frac{1}{A(\eta)} = (\eta-1)\,[2\eta-(\alpha+1)]\sqrt{\eta(\eta-\alpha_0)(\eta-\alpha)}.$$

Ultimul termen din formula (47) reprezintă o constantă pur imaginară iI_2^1. Liniile libere vor fi date de relaţia

$$z_2 = \frac{1}{\pi}\int_{X_0}^{X} \frac{dx}{\sqrt{X}(X-1)}\, e^{i\omega_1(X)}\, e^{iK''\int A(\eta)\log N(\eta,X)d\eta}\, e^{K''\int A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta}, \tag{48}$$

Se observă imediat că factorul

$$dB = \frac{dX}{\sqrt{X}(X-1)}\, e^{i\omega_1(X)},$$

a fost deja calculat în diferite puncte ale axei reale încă din prima aproximaţie. Rămîn de calculat aproximativ integralele

$$I_2 = K''\int_{[0,\infty)-[1,\alpha]} A(\eta)\log N(\eta,X)d\eta, \tag{49}$$

$$I_2^1 = K''\int_{[0,\infty)-[1,\alpha]} A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta, \tag{50}$$

în aceleaşi puncte X în care a fost calculat şi factorul dB în prima aproximaţie.

Din expresia (48) a liniilor libere se observă că diferenţa între prima şi a doua aproximaţie a mişcării este dată numai de factorii e^{iI_2} şi $e^{I_2^1}$. Datorită acestor factori se realizează coborîrea lamei deversante în a doua aproximaţie, sub influenţa gravitaţiei. Modul de calcul al integralei I_2 este arătat în tabela 5, pentru o valoare particulară a parametrului X ($X = 15$).

Integrala se calculează analog pentru orice altă valoare a lui X. Pentru $X = 1$ obţinem valoarea integralei I_2^1

$$I_2^1 = 1{,}3355.$$

Integrala I_2 calculată în toate punctele X în care a fost calculat şi factorul dB (vezi prima aproximaţie) se introduce în formula (48) împreună cu I_2^1 şi determină punctele liniilor libere în aproximaţia de ordinul al doilea

$$z_2 = \frac{1}{\pi}\int_{X_0}^{X} dB\, e^{iI_2}\, e^{I_2^1}. \tag{48'}$$

În tabela 6 sînt date coordonatele punctelor calculate. Rezultatele numerice de mai sus sînt arătate tot pe figura 8 (conturul $AA_0BC_2C_2'A'$) împreună cu cele din prima aproximaţie pentru a putea fi mai uşor comparate. Pe aceeaşi figură vor fi indicate şi rezultatele celorlalte aproximaţii.

Tabela 5

Calculul integralei I_2 $X = 15$

η	$d\eta$	$A(\eta)$	$\log N(\eta, X)$		$\mathfrak{Re}\, dI_2$	$\mathfrak{Im}\, dI_2$
			$\log \mid N(\eta, X) \mid$	$\arg N(\eta, X)$		
1	2	3	4	5	6	7
0,05	0,1	− 2,58419	6,16591	1,563	1,5933	0,4039
0,2	0,2	− 2,15998	6,00468	1,562	2,5940	0,6748
0,4	0,2	− 3,60728	5,73230	1,561	4,1353	1,1261
0,6	0,2	− 9,86904	5,34369	1,560	10,5474	3,0791
0,8	0,2	−66,92276	4,67370	1,553	62,5556	20,7563
0,95	0,09	− 347,46351	3,35065	1,533	104,7795	47,9391
0,995	0,01	− 1183301,7	1,49031	1,1257	17634,8044	13349,4781
1,01	0,005	1838235,1	−1,09897	0,927	−10100,8256	8520,2192
1,0502	0,0875	322,78889	−3,33370	1,499	−94,1570	42,3378
1,55	0,9	2,45278	−5,71431	1,563	−12,6172	3,4511
3	2	0,03624	−7,12642	1,57	−0,5160	0,1137
6	4	0,001636	−9,48070	1,57	−0,0618	0,0102
11	6	0,0001509	−9,83374	1,57	−0,0089	0,0014

$I_2 = 0{,}4633 + i\,1{,}339.$

Tabela 6

Aproximaţia de ordinul al doilea

Nr. crt.	Suprafaţa inferioară		Nr. crt.	Limitarea lamei		Nr. crt.	Suprafaţa superioară	
	x_2	y_2		x_2	y_2		x_2	y_2
1	0,0566	0,9610	17	1,4037	1,9933	31	0,8667	2,6912
2	0,1756	1,1311	18	1,3873	2,0251	32	0,7807	2,6490
3	0,3295	1,2853	19	1,3560	2,0848	33	0,6328	2,5732
4	0,4260	1,3618	20	1,3229	2,1481	34	0,4721	2,4929
5	0,4975	1,4119	21	1,2811	2,2273	35	0,2391	2,3711
6	0,5536	1,4493	22	1,2183	2,3459	36	0,1534	2,3260
7	0,7394	1,5613	23	1,1479	2,4783	37	0,02998	2,2591
8	0,8858	1,6446	24	1,1179	2,5345	38	−0,0321	2,2204
9	1,0167	1,7179	25	1,1008	2,5673	39	−0,1123	2,1689
10	1,1781	1,8041	26	1,0755	2,6160	40	−0,2181	2,1013
11	1,2410	1,8375	27	1,0536	2,6581	41	−0,2896	2,0431
12	1,2976	1,8673	28	1,0385	2,6861	42	−0,3956	1,9648
13	1,3492	1,8944	29	1,0273	2,7070	43	−0,5616	1,8133
14	1,3948	1,9186	30	1,0175	2,7253	44	−0,7159	1,6707
15	1,4175	1,9307				45	−1,2041	1,2805
16	1,4319	1,9370						

APROXIMAŢIA DE ORDINUL AL TREILEA

Funcţia $\omega_3(Z)$ se obţine din formula (28) făcînd $n = 3$. Pentru $n = 3$ ultima condiţie (23) ne dă expresia

$$\frac{dF_3}{dn_e} = \frac{\mu}{\sqrt{X(X-1)}}\, e^{-3g_2(X,0)} \sin f_2(X,0) \quad \text{pentru } X > 0. \qquad (51)$$

Din formula (47) deducem

$$f_2(X,0) = f_1(X,0) + K''\int A(\eta)\log|N(\eta, X)|\,d\eta,$$

$$g_2(X,0) = g_1(X,0) + K''\int A(\eta)\arg N(\eta,X)d\eta - K''\int A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta.$$

Calculele numerice arată că valoarea funcţiei $g_2(X,0)$ este neglijabilă în toate punctele axei reale. În adevăr, $g_1(X,0) = 0$ iar cele două integrale din expresia lui $g_2(X,0)$ sînt aproximativ egale

$$\mathfrak{Im}\, I_2 \approx I_2^1.$$

Cum $g_2(X,0) \approx 0$ vom lua $e^{-2g_2(X,0)} \approx 1$ în toate punctele axei reale. Funcţia $\omega_3(Z)$ are deci expresia

$$\omega_3(Z) = \omega_1(Z) + K''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_3(\eta)A(\eta)\log N(\eta,Z)d\eta - iK''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_3(\eta)A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta, \tag{52}$$

sau mai scurt

$$\omega_3(Z) = \omega_1(Z) + I_3 - i\, I_3^1$$

unde am notat

$$C_3(\eta) = \frac{1}{K'}\sqrt{\frac{\eta-\alpha_0}{\eta-1}}\,\sin f_2(\eta,0),$$

iar cu I_3 şi I_3^1 termenii intergrali din formula (52). Din această formulă se observă că pentru calculul celor două integrale I_3 şi I_3^1 avem nevoie numai

Tabela 7

Aproximaţia de ordinul al treilea

Nr. crt.	Suprafaţa inferioară		Nr. crt.	Limitarea lamei		Nr. crt.	Suprafaţa superioară	
	x_3	y_3		x_3	y_3		x_3	y_3
1	0,0574	0,9616	17	1,3517	2,0659	31	0,7875	2,7107
2	0,1712	1,1298	18	1,3332	2,0965	32	0,7046	2,6610
3	0,3223	1,2922	19	1,2979	2,1539	33	0,5619	2,5762
4	0,4147	1,3737	20	1,2605	2,2147	34	0,4066	2,4881
5	0,4832	1,4278	21	1,2136	2,2908	35	0,1836	2,3605
6	0,5371	1,4685	22	1.1432	2,4052	36	0,1016	2,3130
7	0,7156	1,5917	23	1,0646	2,5329	37	−0,0195	2,2412
8	0,8564	1,6841	24	1,0312	2,5871	38	−0,0812	2,2014
9	0,9826	1,7653	25	1,0117	2,6186	39	−0,1629	2,1507
10	1,1382	1,8624	26	0,9829	2,6653	40	−0,2626	2,0791
11	1,1990	1,8996	27	0,9580	2,7055	41	−0,3328	2,0199
12	1,2538	1,9332	28	0,9413	2,7325	42	−0,4401	1,9332
13	1,3038	1,9637	29	0,9288	2,7526	43	−0,6021	1,7785
14	1,3478	1,9907	30	0,9178	2,7702	44	−0,7581	1,6347
15	1,3696	2,0042				45	−1,2552	1,2540
16	1,3836	2,0116						

de factorul $C_3(\eta)$ pentru valorile lui η indicate în prima coloană a tabelei 5. Valorile obținute se înmulțesc respectiv cu valorile din coloanele 6 și 7 ale tabelei 5 și apoi se însumează.

Ecuația liniilor libere în a treia aproximație are forma

$$z_3 = \frac{1}{\pi}\int_{X_0}^{X} dBe^{iI_3}\, e^{I_3^1}, \tag{53}$$

Diferitele puncte ale liniilor libere se determină calculînd aproximativ integrala din formula (53) ca și cea din a doua aproximație (48′) Rezultatele acestor calcule sînt arătate în tabela 7. Cu datele obținute a fost trasat pe figura 8 conturul domeniului de mișcare în aproximația de ordinul al treilea $AA_0BC_3C_3^1A'$. Se observă că lama deversantă se ridică față de cea din aproximația de ordinul al doilea.

APROXIMAȚIA DE ORDINUL AL PATRULEA

A patra aproximație a mișcării nu aduce modificări importante. Suprafața liberă coboară în acest caz cu cantități care practic pot fi neglijate. Am făcut totuși acest calcul pentru a arăta rapiditatea convergenței șirului de aproximații.

Dacă facem $n = 4$ în ultima condiție (23) obținem

$$\frac{dF_4(X,0)}{dn_e} = \frac{\mu}{\sqrt{X(1-X)}}\, e^{-3g_3(X,0)} \sin f_3(X,0). \tag{54}$$

Expresiile funcțiilor $f_3(X,0)$ și $g_3(X,0)$ rezultă din formula (52) ca parte reală respectiv imaginară a funcției $\omega_3(X)$ pe axa reală. Și în acest caz factorul $e^{-3g_3(X,0)} \approx 1$ iar funcția $\omega_4(Z)$ are expresia

$$\omega_4(Z) = \omega_1(Z) + K''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_4(\eta)A(\eta)\log N(\eta,X)d\eta - iK''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_4(\eta)A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta. \tag{55}$$

Aici trebuie calculat numai factorul

$$C_4(\eta) = \frac{1}{K'}\sqrt{\frac{\eta-\alpha_0}{\eta-1}}\ \sin f_3(\eta,0),$$

iar integralele I_4 și I_4^1 din formula (55) se calculează ca și I_3 și I_3^1.

În figura 8 nu mai apare conturul domeniului de mișcare din cea de-a patra aproximație, deoarece el diferă de aproximația anterioară cu valori care nu pot fi prinse grafic la scara aleasă.

APROXIMAȚIILE DE ORDINUL n

Aproximația de ordinul n se obține din cea de ordinul $n-1$ după cum rezultă din aproximațiile studiate

$$\omega_n(Z) = \omega_1(Z) + K''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_n(\eta)A(\eta)\log N(\eta,X)d\eta - iK''\int\limits_{[0,\infty)-[1,\alpha]} C_n(\eta)A(\eta)\log N(\eta,1)d\eta, \tag{56}$$

unde

$$C_n(\eta) = \frac{1}{K'}\sqrt{\frac{\eta-\alpha_0}{\eta-1}}\ \sin\ f_{n-1}(\eta,0).$$

Integralele I_n şi I_n^1 ce intervin în formula (56) se calculează pornind de la tabela 6 a integralelor I_2 şi I_2^1. Este necesar deci numai calculul factorului $C_n(\eta)$.

Liniile libere se obţin din formula

$$z_n = \frac{1}{\pi}\int_{X_0}^{X} dB e^{iI_n} e^{I_n^1}\,. \tag{57}$$

Rezultatele numerice care au condus la trasarea suprafeţelor libere, care redau cu bună aproximaţie fenomenul real, confirmă valabilitatea metodei propuse.

Aplicaţiile numerice comportă calcule mai dificile numai în aproximaţia de ordinul al doilea a mişcării; celelalte aproximaţii se deduc uşor din prima şi a doua aproximaţie.

Aplicarea metodei la alte cazuri de mişcări întîlnite în practică (ca de exemplu scurgerea lentă peste un deversor cu muchie ascuţită etc.) va face obiectul unor studii ulterioare.

Primită la redacţie la 12 februarie 1960

ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ ПЕРЕЛИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе продолжается исследование движения переливающихся тяжелых струй жидкости, начатое в ранее опубликованной работе [1]. Исключается точка на бесконечности вниз по течению переливающейся струи.

Задача сводится к определению функции $\omega(Z)$ в верхней полуплоскости вспомогательной плоскости $Z = X + iY$, удовлетворяющей нелинейному условию на действительной оси $Y = 0$. Решение задачи выражается в виде $\omega(Z) = \lim\limits_{n=\infty} \omega_n(Z)$, где $\omega_n(Z)$ являются последовательными приближениями функции $\omega(Z)$.

Далее рассматривается сходимость ряда $\{\omega_n(Z)\}$ к предельному решению. Все функции $\omega_n(Z)$ ограничены на действительной оси плоскости Z, так что решение задачи существует и оно единственное.

В последней части работы теоретические результаты применяются к частному случаю движения через водослив с острой кромкой ($\mathcal{F}r \approx 10$) и устанавливается, что процесс сходимости протекает очень

быстро. Были построены свободные поверхности движения в первых трех приближениях; приближение четвертого порядка отличается от приближения третьего порядка величинами, которыми практически можно пренебречь.

LE MOUVEMENT DES FLUIDES PESANTS DÉVERSANTS, DANS UN PLAN VERTICAL

RÉSUMÉ

Ce travail continue l'étude du mouvement des lames déversantes des fluides pesants, commencée dans un travail publié antérieurement [1]. Le point à l'infini aval de la lame déversante est exclus.

Le problème revient à déterminer la fonction $\omega(Z)$ dans le demi-plan supérieur d'un plan auxiliaire $Z = X + i\,Y$, satisfaisant à une condition non linéaire sur l'axe réel $Y = 0$. La solution du problème s'exprime sous la forme $\omega(Z) = \lim\limits_{n=\infty} \omega_n(Z)$ où $\omega_n(Z)$ représentent les approximations successives de la fonction $\omega(Z)$.

Les auteurs étudient ensuite la convergence de la suite $\{\omega_n(Z)\}$ vers la solution limite. Toutes les fonctions $\omega_n(Z)$ sont limitées sur l'axe réel du plan Z ; il s'ensuit que le problème admet une solution et que celle-ci est unique.

Dans la dernière partie du travail, les résultats théoriques sont appliqués au cas particulier du mouvement par-dessus un déversoir en mince paroi ($\mathcal{F}_r \approx 10$) et l'on constate que le processus de convergence y est très rapide. Les auteurs ont tracé les surfaces libres du mouvement dans les trois premières approximations seulement, vu que l'approximation du quatrième ordre ne diffère de celle du troisième ordre que par des quantités pratiquement négligeables.

BIBLIOGRAFIE

1. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Studiul mişcării lamelor deversante infinite într-un plan vertical.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *2* (1960).
2. H. PONCIN, *Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical.* Paris, 1932.
3. C. IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Bucureşti, 1952.
4. P. MONTEL, *Leçons sur les suites normales des fonctions.*
5. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare.* Bucureşti, 1956.
6. U. I. MUSHELISVILI, *Ecuaţii integrale singulare.* I.S.R.S., 1955 (litografiat).

STUDII

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

LUBRIFICAȚIA TRIDIMENSIONALĂ A SUPRAFEȚELOR DE ALUNGIRE MICĂ, LA VITEZE MARI

DE

N. TIPEI

Dacă $\overline{p}$ este valoarea mediată a presiunii într-un punct oarecare, h grosimea corespunzătoare a peliculei, x_1, x_3 coordonatele punctului față de două axe ortogonale și conținute într-una din suprafețele solide care limitează mișcarea, ρ densitatea, μ viscozitatea dinamică, V_{ij} componentele vitezei suprafeței i $(i = 1.2)$ după axa x_j $(j = 1, 2, 3)$, ecuația presiunilor se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3\rho}{\mu k_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}\right) \pm \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\left(\frac{h^3(V_{11}+V_{21})^{n_3-1}}{\mu k_3}\left|\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_3}\right|\right)^{\frac{1}{n_3}} \rho h\right] = \rho\,(V_{22} - V_{12}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho h\,(V_{11}+V_{21})\right] - \rho\left(V_{21}\frac{\partial h}{\partial x_1} + V_{23}\frac{\partial h}{\partial x_3}\right) + h\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{1}$$

În aceasta, dacă $\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho(V_{11}+V_{21})\,h}{\mu}$ este numărul Reynolds și $\sigma^{\star} = \pm\left(\dfrac{dl^{\star}}{dx_2}\right)_{\substack{x_2=0\\ x_2=h}}$ derivata la pereți a lungimii de amestec, considerată după normala x_2 la una din suprafețe, k_1 și k_3 au valorile

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 12 + 0{,}14\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}725}, \qquad k_3 = 12 + 0{,}103\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}745}, \\ n_3 &= 1 + 0{,}089\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\mathcal{R}_e\right)^{0{,}18}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Semnul + (plus) în formula (1) se ia pentru $\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x_3} > 0$ și invers.

Dacă $\lambda = \dfrac{b}{2r_1}$, adică raportul dintre lărgimea zonei comune a suprafeţelor, măsurată după axa x_3, perpendiculară pe direcţia vitezei relative a suprafeţelor, are valori mici, variaţiile cu x_3 ale presiunilor sînt mult mai mari decît acelea în raport cu x_1. Pentru mişcări permanente ale fluidelor incompresibile se observă că $V_{22} = V_{21}\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$. Punînd $V_{11}+V_{21}=V$ şi considerînd h ca independent de x_3, aşa cum se întîmplă aproape întotdeauna în aplicaţiile practice, rezultă din (1)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = \pm\frac{k_3\,\mu V}{2^{n_3}}\cdot\frac{1}{h^{n_3+2}}\left(\frac{dh}{dx_1}\right)^{n_3} x_3^{n_3} + C_1\,. \tag{3}$$

Dacă se aleg axele de coordonate astfel ca planul Ox_1x_2 să fie planul median al zonei active, paralel cu V, situaţie de asemenea posibilă în cazurile practice, rezultă la cele două capete $x_3 = \pm\dfrac{b}{2}$, $\bar{p} = p_0$, p_0 fiind presiunea ambiantă. Integrînd (3) în aceste condiţii, se obţine ecuaţia presiunilor

$$\bar{p} = p_0 + \operatorname{sign}\left(\frac{dh}{dx_1}\right)\left\{\frac{k_3\,\mu_1 V}{2^{n_3}(n_3+1)\,h_1^q}\cdot\frac{1}{h^{n_3+2-q}}\left|\frac{dh}{dx_1}\right|^{n_3}\left[\,|x_3|^{n_3+1} - \left(\frac{b}{2}\right)^{n_3+1}\right]\right\}. \tag{4}$$

În această ecuaţie s-a presupus viscozitatea variabilă cu punctul după legea [1], [2]

$$\mu = \mu_1\left(\frac{h}{h_1}\right)^q, \tag{5}$$

în care $0 \leqslant q \leqslant 1$, iar h_1 este o valoare particulară a lui h (în general h maximum) şi μ_1 viscozitatea corespunzătoare.

Dacă variaţia presiunilor nu este foarte mare, respectiv $-10 \leqslant \dfrac{h^2}{\mu V}\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial x_3} \leqslant +10$ se poate admite [3]

$$k_3 = 12 + 0{,}0897\left(\frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\,\mathcal{R}_e\right)^{0{,}65},\ n_3 = 1 \tag{6}$$

iar ecuaţia (4) capătă o formă mai simplă. De asemenea, dacă se admite că $\bar{p} \geqslant p_0$ numai pe porţiunea unde $\dfrac{dh}{dx_1} < 0$ se poate înlocui direct factorul $\operatorname{sign}\left(\dfrac{dh}{dx_1}\right)$ prin $-$.

1. *Variaţia liniară a grosimii peliculei.* Fie

$$h = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}\,x_1,\quad X_1 = x_1 - \frac{l h_1}{h_1 - h_2},\quad k = \frac{h_1 - h_2}{l}, \tag{7}$$

unde l este lungimea stratului lubrifiant (după Ox_1), iar h_2 grosimea minimă. Înlocuind aceste valori în (4) se obține pentru $q = 0$

$$\overline{p} = p_0 + \frac{k_3 \mu_1 V}{2^{n_3}(n_3+1)k^2} \cdot \frac{1}{|X_1|^{n_3+2}} \left[\left(\frac{b}{2}\right)^{n_3+1} - |x_3|^{n_3+1}\right]. \tag{8}$$

Se observă însă că în raport cu x_1 (X_1) condițiile la limită sînt impuse de soluția (8) și că ele apar ca funcții de x_3. Pentru secțiunea mediană $x_3 = 0$, rezultă, la începutul și sfîrșitul zonei active

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{k_3 \mu_1 V b^{n_3+1} k^{n_3}}{2^{2n_3+1}(n_3+1) h_1^{n_3+2}}, \qquad x_1 = 0, \\ p_2 &= p_0 + \frac{k_3 \mu_1 V b^{n_3+1} k^{n_3}}{2^{2n_3+1}(n_3+1) h_2^{n_3+2}}, \qquad x_1 = l. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

În consecință, alura presiunilor în planul median este aceea din figura 1, $\overline{p} \neq p_0$ la cele două extremități. Totuși, pentru $x_1 = 0$ valoarea fracției este suficient de mică spre a fi neglijată ; dimpotrivă pentru $x_1 = l$, p are valoarea maximă, dar se poate considera că presiunile au un salt în punctul respectiv, revenind brusc la p_0. Portanța globală este dată de coeficientul adimensional

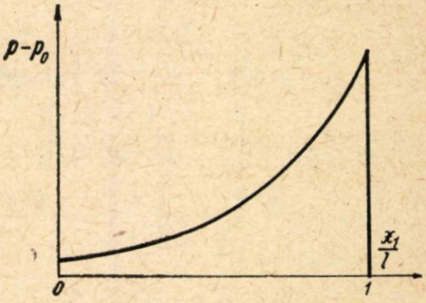


Fig. 1

$$\zeta = \frac{h_2^2 \displaystyle\int_0^l \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\overline{p} - p_0)\, dx_1 dx_3}{\mu_1 V l^2 b}, \tag{10}$$

sau, utilizînd relațiile (6)

$$\zeta = \frac{k_3 h_2^2 \lambda^2}{3 . 2^4 k^2} \left[\left(\frac{k}{h_2}\right)^2 - \frac{1}{X_{11}^2}\right], \quad X_{11} = -\frac{h_1}{k}. \tag{11}$$

Dacă suprafețele sînt foarte lungi iar lățimea b diferită de zero, rezultă pentru $\lambda \to 0$, $x_1 \to \infty$, $h_1 \to \infty$ și deci, la limită

$$\zeta = \frac{k_3 \lambda^2}{48}. \tag{12}$$

Pentru regimul laminar, $k_3 = 12$, se găsește $\zeta = \frac{\lambda^2}{4}$, valoare obținută de Michell pentru acest caz.

2. *Suprafețe cilindrice circulare.* Dacă c este jocul radial, e excentricitatea, r_1 raza fusului, $\epsilon = \frac{e}{r_1}$ excentricitatea relativă, $x_1 = r_1\theta$, $h = c(1 + \epsilon \cos \theta)$, rezultă din (4) și (6) coeficienții corespunzători com-

ponentelor rezultantei presiunilor P_{p0} după linia centrelor, Ct, şi normală la aceasta Cn,

$$\left.\begin{aligned} Ct &= -\frac{\psi^2(1+\epsilon)^q r_1}{6\mu_1 Vb}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\bar{p}-p_0)\cos\theta\, dx_3\, d\theta, \\ Cn &= \frac{\psi^2(1+\epsilon)^q r_1}{6\mu_1 Vb}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\bar{p}-p_0)\sin\theta\, dx_3\, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Unghiurile θ_1 şi θ_2 definesc începutul şi sfîrşitul zonei active. Valorile cele mai apropiate de realitate sînt [2] $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, de data aceasta compatibile cu acelea impuse de (4). Punînd $q_t^{\star} = 0{,}65 + 0{,}35\, q$, $\mathcal{R}_e{}^{\star} = \frac{\sigma^{\star 2}}{0{,}16}\frac{\rho V h_1}{\mu_1}$, se găseşte

$$\left.\begin{aligned} Ct = &-\frac{\lambda^2}{3}\left\{\frac{1}{2-q}\left[\frac{1}{(1-\epsilon)^{2-q}}\left(\frac{1-\epsilon}{(1-q)\epsilon}-1\right)-\frac{1}{(1+\epsilon)^{2-q}}\cdot\right.\right. \\ &\left.\left(1+\frac{1+\epsilon}{(1-q)\epsilon}\right)\right]+\frac{0{,}00747}{2-q_t^{\star}}\left(\frac{\mathcal{R}_e{}^{\star}}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right)^{0{,}65}\left[\frac{1}{(1-\epsilon)^{2-q_t^{\star}}}\left(\frac{1-\epsilon}{(1-q_t^{\star})\epsilon}-1\right)\right. \\ &\left.\left.-\frac{1}{(1+\epsilon)^{2-q_t^{\star}}}\left(1+\frac{1+\epsilon}{(1-q_t^{\star})\epsilon}\right)\right]\right\}, \\ Cn = &\frac{\lambda^2\epsilon}{3(1-\epsilon)^{\frac{3}{2}-q}}\left\{\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{q(q+1)}{2}\epsilon^2+0{,}00747\left(\frac{\mathcal{R}_e{}^{\star}}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right)^{0{,}65}\cdot\right.\right. \\ &\left.\cdot\left(1+\frac{q_t^{\star}(1+q_t^{\star})}{2}\epsilon^2\right)\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\left[q(q+1)\ldots(q+2k-3)\right. . \\ &\left(1-\frac{(q+2k-2)(q+2k-1)}{(2k-1)2k}\epsilon^2\right)+0{,}00747\left(\frac{\mathcal{R}_e{}^{\star}}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right)^{0{,}65}\cdot \\ &\left.\cdot\, q_t^{\star}(q_t^{\star}+1)\ldots(q_t^{\star}+2k-3)\left(1-\frac{(q_t^{\star}+2k-2)(q_t^{\star}+2k-1)}{(2k-1)2k}\epsilon^2\right)\right] \\ &\left.\frac{2^{2k}}{2(k-1)!}\epsilon^{2(k-1)}B\left(k+\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

În expresia lui Cn, $B\left(k+\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2k+1)}$ este integrala euleriană de prima speţă. În general se vede că se poate scrie

$$Cn,\, t = Cn,\, t_l + 0{,}00747\left(\frac{\mathcal{R}_e{}^{\star}}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right)^{0{,}65}(Cn,\, t_l)_{q=q_t^{\star}}, \tag{15}$$

unde Cn, t_l sînt valorile cunoscute pentru mişcarea laminară [2].

Din expresiile vitezelor medii $\bar{v}_j$ se deduc derivatele

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = -\frac{\mathcal{C}_{1j}}{\mu}\,;\quad \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_2}\right)_{x_2=h} = -\frac{1}{\mu}\left(\mathcal{C}_{1j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\, h\right), \tag{16}$$

şi ţinînd seama că pe porţiunea $\theta_2 \div 2\pi + \theta_1$ mişcarea are loc fără gradient de presiune, iar funcţiile $\mathcal{C}_{1j}$ de $x_1\,(\theta)$ au valorile $\mathcal{C}_{1j}^{**}$ corespunzătoare, în timp ce lăţimea efectivă a peliculei este $b_\theta = b$ sau $b_\theta = \frac{h_2}{h}\, b$, după condiţiile de alimentare, se deduc coeficienţii de moment pe fus sau pe cuzinet

$$\left.\begin{aligned}
Cm_1 &= \frac{\psi M_1}{\pi\mu_1 V b} = \frac{\psi r_1}{\pi\mu_1 V b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathcal{C}_{11}\, d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi+\theta_1}\frac{b_\theta}{b}\,\mathcal{C}_{11}^{**}\, d\theta\right] dx_3\\
Cm_2 &= \frac{\psi M_2}{\pi\mu_1 V b} = \frac{\psi r_2}{\pi\mu_1 V b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\mathcal{C}_{11} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\, h\right) d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi+\theta_1}\frac{b_\theta}{b}\,\mathcal{C}_{11}^{**}\, d\theta\right] dx_3.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Debitul de lubrifiant într-o secţiune oarecare, după direcţia x_1 (Q_{x_1}) sau după x_3 (Q_{x_3}) sînt

$$\left.\begin{aligned}
Q_{x_1} &= \frac{1}{2}\, Vhb - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^h \frac{h^2}{\mu k_1}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\, dx_2\, dx_3 =\\
&= \frac{1}{2}\, Vhb\left\{1 + \frac{(n_3+1)\, h^{2-q}\, b^{n_3+1}}{(n_3+2)\, 2^{n_3}\, k_1}\,\mathrm{sign}\left(\frac{dh}{dx_1}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k_3\left|\dfrac{dh}{dx_1}\right|^{n_3}}{2^{n_3}(n_3+1)h^{n_3+2-q}}\right) + \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{k_3\left|\dfrac{dh}{dx_1}\right|^{n_3}\ln\dfrac{b}{2}}{2^{n_3}(n_3+1)\, h^{n_3+2-q}}\cdot\frac{dn_3}{dx_1}\right]\right\},\\
Q_{x_3} &= \mp\int_0^l\int_0^h\left(\frac{h^2 V^{n_3-1}}{\mu k_3}\left|\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}\right|\right)^{\frac{1}{n_3}} dx_1\, dx_3 = -\frac{1}{2}\, V x_3\int_0^l \frac{dh}{dx_1}\, dx_1 =\\
&= \frac{1}{2}\, V\,(h_1^* - h_2^*)\, x_3.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Aceste formule pot fi aplicate oricăror suprafeţe; s-au notat cu h_1^* şi h_2^* grosimile peliculei la începutul şi sfîrşitul zonei de suprapresiuni.

Pentru lagărele cilindrice circulare se pot deduce imediat coeficienţii de debit în secţiunea de intrare $(Q_{x_1})_{\substack{\theta=\theta_1\\ h=h_1}} = Q_i$, în secţiunea de ieşire din zona portantă $(Q_{x_1})_{\substack{\theta=\theta_2\\h=h_2}} = Q_e$, cît şi coeficientul de debit referitor la scăpările laterale $Q_s = 2\,(Q_{x_3})_{x_3=\frac{b}{2}}$. Astfel, dacă se folosesc relaţiile (6) se obţine

$$\left.\begin{aligned}
Cq_i &= \frac{Q_i}{Vcb} = \frac{1}{2}\left[1 + \epsilon\left(1 - \frac{\lambda^2}{3}\cdot\frac{12 + 0{,}0897\,\mathcal{R}_e{}^{\star 0{,}65}}{12 + 0{,}14\,\mathcal{R}_e{}^{\star 0{,}725}}\right)\right],\\
Cq_e &= \frac{Q_e}{Vcb} = \frac{1}{2}\left[1 - \epsilon\left(1 - \frac{\lambda^2}{3}\cdot\frac{12 + 0{,}0897\left[\mathcal{R}_e{}^{\star}\left(\dfrac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^{1-q}\right]^{0{,}65}}{12 + 0{,}14\left[\mathcal{R}_e{}^{\star}\left(\dfrac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^{1-q}\right]^{0{,}725}}\right)\right],\\
Cq_s &= \epsilon.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Totodată, poziţia liniei centrelor faţă de direcţia sarcinei definită prin unghiul $\theta^\star$ se deduce imediat, ca şi coeficientul ζ de portanţă

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{Cn}{Ct}; \quad \zeta = \frac{3\sqrt{Ct^2 + Cn^2}}{(1+\epsilon)^q}. \qquad (20)$$

Relaţiile precedente permit calculul lagărelor lubrificate în regim turbulent după aceleaşi metode ca şi pentru regimul laminar. Capacitatea portantă este mărită sensibil prin apariţia turbulenţei. Se relevă faptul că toate formulele au fost stabilite pentru q oarecare, deci legea de variaţie a viscozităţii, de forma (5), păstrează totuşi o formă generală. Exponentul q apare ca unul dintre parametrii problemei şi el poate fi determinat pe baza unui calcul termic, care completează consideraţiile legate de scurgerea fluidului. În general se poate admite $q \sim 0{,}2-1$.

Primită la redacţie la 10 februarie 1960

ТРЕХМЕРНАЯ СМАЗКА ПОВЕРХНОСТЕЙ МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

РЕЗЮМЕ

Исходя из уравнения Рейнольдса в турбулентном режиме и предполагая, что удлинение невелико, пренебрегаем некоторыми членами, а затем определяем распределение давлений в смазочной пленке.

В частности рассматривается случай линейного изменения толщины и решение для круглых цилиндрических поверхностей в предположении общего закона изменения вязкости. Таким образом выводятся функциональные характеристики подшипников, откуда следует, что несущая способность значительно больше при турбулентном, чем при ламинарном режиме.

LUBRIFICATION TRIDIMENSIONNELLE DES SURFACES À PETIT ALLONGEMENT, AUX GRANDES VITESSES

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ l'équation de Reynolds en régime turbulent et en admettant que l'allongement est petit, on néglige certains termes et on détermine alors la distribution des pressions dans le film lubrifiant.

On étudie tout particulièrement le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur, ainsi que la solution s'appliquant aux surfaces cylindriques circulaires dans l'hypothèse d'une loi générale de variation de la viscosité. On réussit ainsi à déduire les caractéristiques de fonctionnement des paliers, d'où il résulte que la portance est sensiblement plus grande en régime turbulent qu'en régime laminaire.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI şi AL. NICA, *Cercetări asupra regimurilor de funcţionare ale lagărelor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **3**, 737–754 (1959).
2. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Acad. R.P.R., 1957.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Consideraţii asupra lubrificaţiei tridimensionale în regim turbulent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *4* (1959).

CÎTEVA REZULTATE EXPERIMENTALE PRIVIND MIŞCAREA FUSULUI ÎN LAGĂR

DE

ALEŠ TONDL[1])

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] autorul a prezentat rezultatele unor cercetări experimentale efectuate asupra oscilaţiilor auto-excitate ale rotorilor, datorite acţiunii peliculei de lubrifiant a lagărelor cu alunecare. Au fost examinate mai multe tipuri de lagăre, diferite din punct de vedere al rezistenţei lor la formarea oscilaţiilor auto-excitate, precum şi acţiunea cîtorva influenţe asupra formării oscilaţiilor de acest fel.

Pentru construcţia unui lagăr trebuie ales şi proiectat un tip care să satisfacă nu numai prin rezistenţa sa la formarea oscilaţiilor auto-excitate, dar să îndeplinească şi alte condiţii, în primul rînd pe acelea impuse de tehnica securităţii la o încărcare dată etc.

Din această cauză trebuie să se ţină seama înainte de toate de capacitatea portantă a noilor tipuri de lagăre destinate unor maşini care funcţionează la turaţii mari. În această privinţă, lucrarea de faţă completează, într-o oarecare măsură, pe aceea amintită mai sus.

1. DISPOZITIVUL EXPERIMENTAL ŞI MODALITATEA DE MĂSURARE

Dispozitivul experimental era format din următoarele părţi : un cadru, suporţii de lagăr cu lagăre şi rotorul (fig. 1). Lagărele erau fixate în suporţi basculanţi adaptabili la linia elastică a arborelui deformat de greutatea proprie a discului. Lagărele erau fabricate prin inserţia cuzineţilor de bronz în corpul palierului. Uleiul sub presiune era introdus de o pompă cu angrenaje, presiunea maximă a uleiului fiind de 1—1,8 atm.

---

[1]) Vyzkumný Ustav Tepelné, Praga.

după numărul de rotații și jocul lagărului. S-a folosit în special uleiul de turbină.

Pentru acționarea dispozitivului s-a folosit un grup Ward-Leonard. Un motor de antrenare era cuplat cu un rotor printr-un cuplaj de cauciuc.

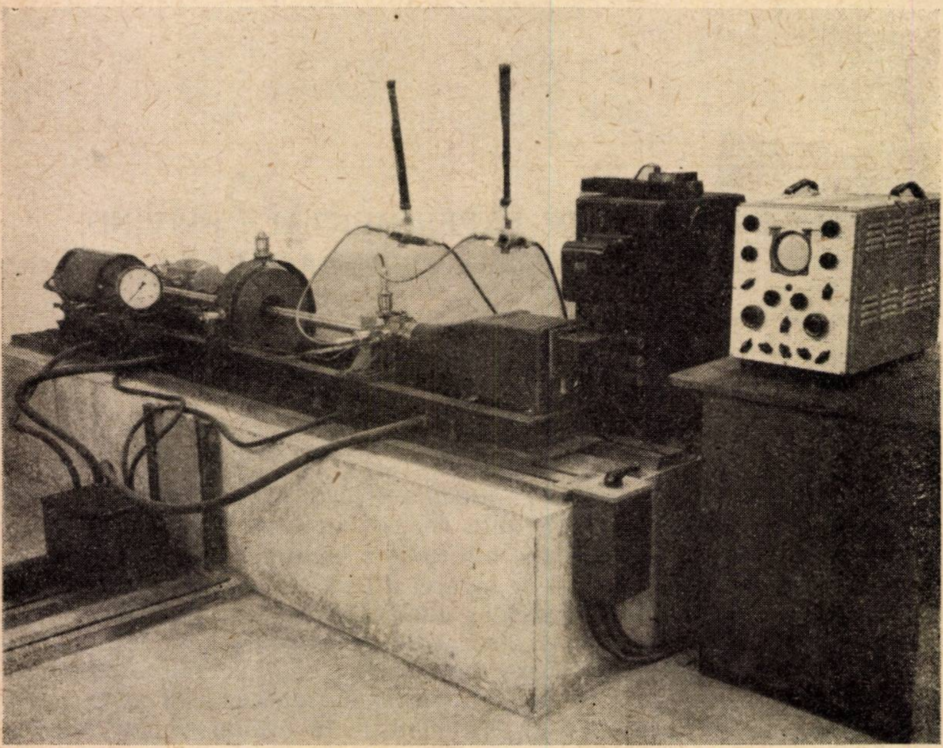


Fig. 1

Turația maximă ce putea fi atinsă, era de 8 000 rot/min. Datele tehnice cele mai importante cu privire la acest dispozitiv de încercare sînt reprezentate în tabela 1 (a se vedea și schema din fig. 2).

Tabela 1

d	diametrul fusului în lagăr	40 mm,
l	lungimea lagărului	40 mm,
D	diametrul lagărului (2δ — jocul diametral al lagărului)	40 + 2 mm,
l_0	lungimea arborelui între cele două centre ale lagărelor	1 420 mm,
g	greutatea rotorului	37,9 kg și 52,8 kg,
d_0	diametrul arborelui între cele două lagăre	36 mm,
p	încărcarea specifică a lagărelor	1,18 kg/cm^2 și 1,65 kg/cm^2,
n_0	numărul critic de rotații	980 rot/min și 1 020 rot/min.

S-au efectuat măsurători pe trei feluri de cuzineţi ai lagărului: cilindrici, eliptici şi cu elemente elastice conform unui brevet al autorului [2], [3]. Cuzineţii cilindrici şi eliptici erau formaţi din două jumătăţi.

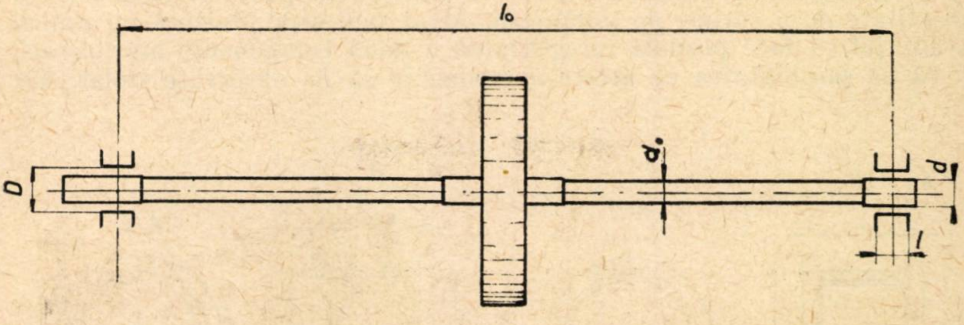


Fig. 2

Alimentarea cu ulei se făcea prin ambele părţi, în planul de separare (v. fig. 3, sus). De o parte şi de alta a orificiilor de intrare s-au frezat şanţuri de intrare în cuzineţi. Cuzineţii cu elemente elastice (v. fig. 3, jos) au fost

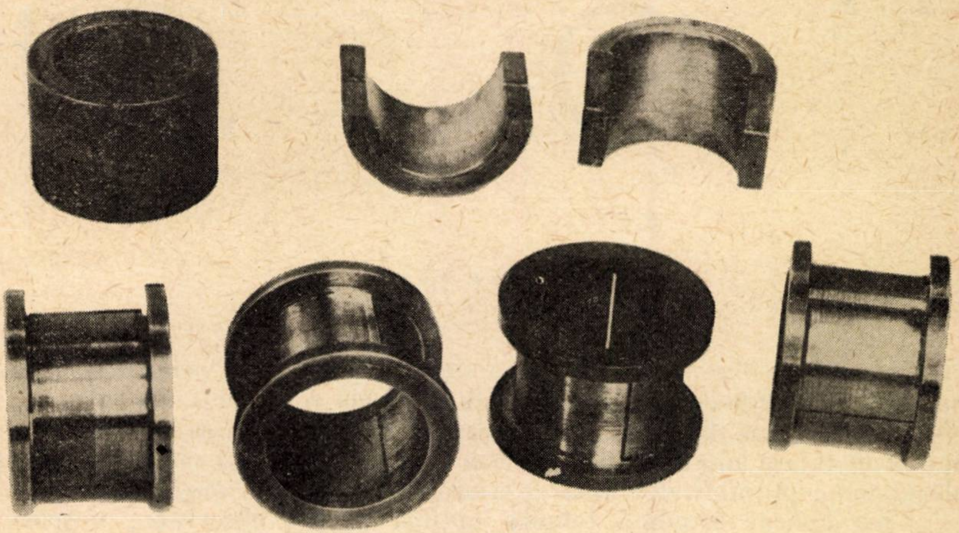


Fig. 3

aplicate în două variante: cu trei elemente (v. fig. 4 *a*) sau cu patru elemente (două mai scurte şi două mai lungi, de fiecare dată, a se vedea fig. 4 *b*).

S-au efectuat măsurători ale mişcării fusului cu ajutorul unui indicator capacitiv TESLA avînd un osciloscop cu două canale instalate în interior (v. fig. 1, dreapta). Întrucît nu se putea înregistra mișcarea fusului direct în lagăr, captorii au fost fixați pe o consolă, foarte aproape de lagăr (v. fig. 5). Captorii au fost înzestrați cu un șurub micrometric astfel încît distanța care separă arborele de plăcuțe, să poată fi reglată cu o exactitate de o sutime de milimetru. Acest indicator prezintă nu numai avantajul că face posibilă înregistrarea a două componente ale mișcării și că dă posibilitatea ca aceste componente să fie observate izolat, dar

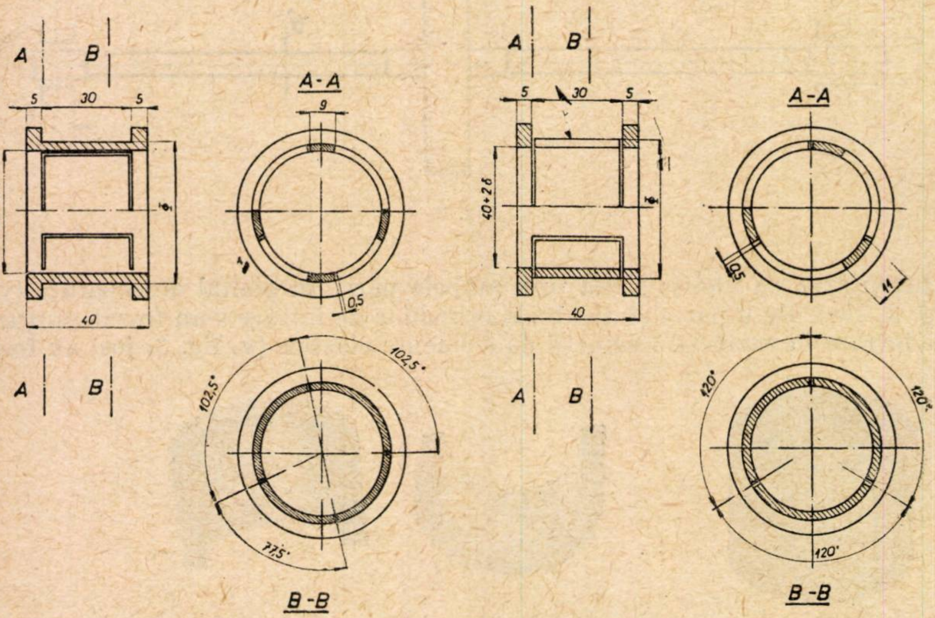


Fig. 4 *a* și *b*

mai și permite observarea directă a mișcării ce rezultă pentru fus prin compunerea componentelor de mișcare verticală și orizontală.

Un oarecare dezavantaj al acestui aparat se datorește nelinearității în domeniul mai larg al deviațiilor. S-a realizat etalonarea prin deplasarea plăcuțelor captorului efectuată cu ajutorul unui șurub micrometric.

S-a aplicat totodată tehnica optimă pentru observarea mișcării fusului (pe fig. 1 în apropierea lagărului din față, în dreapta). Schema acestui aparataj este reprezentată în figura 6. Într-o cavitate conică (*1*) a discului centrat (*2*) așezat în cavitatea fusului era primit capătul elementului (*3*) prevăzut cu o mică sferă, și printr-o suspensiune cardanică (*4*) ce permitea mișcarea de rotație a elementului în toate direcțiile. Contactul elementului cu fusul era asigurat printr-un resort (*5*). La cealaltă extremitate a elementului a fost adaptată o oglindă (*6*), asupra căreia cădea un fascicul luminos provenit dintr-o lamă cu fantă (*7*). Oglinda reflecta fascicolul luminos pe un cadran, eventual pe un clişeu fotografic (*8*) aşezat în corpul tubului (*9*). Coeficientul de mărire era $K = 418$.

Să specificăm şi modul de reprezentare a valorilor caracteristice mai importante. Jocul lagărului este notat după termenul care indică jocul

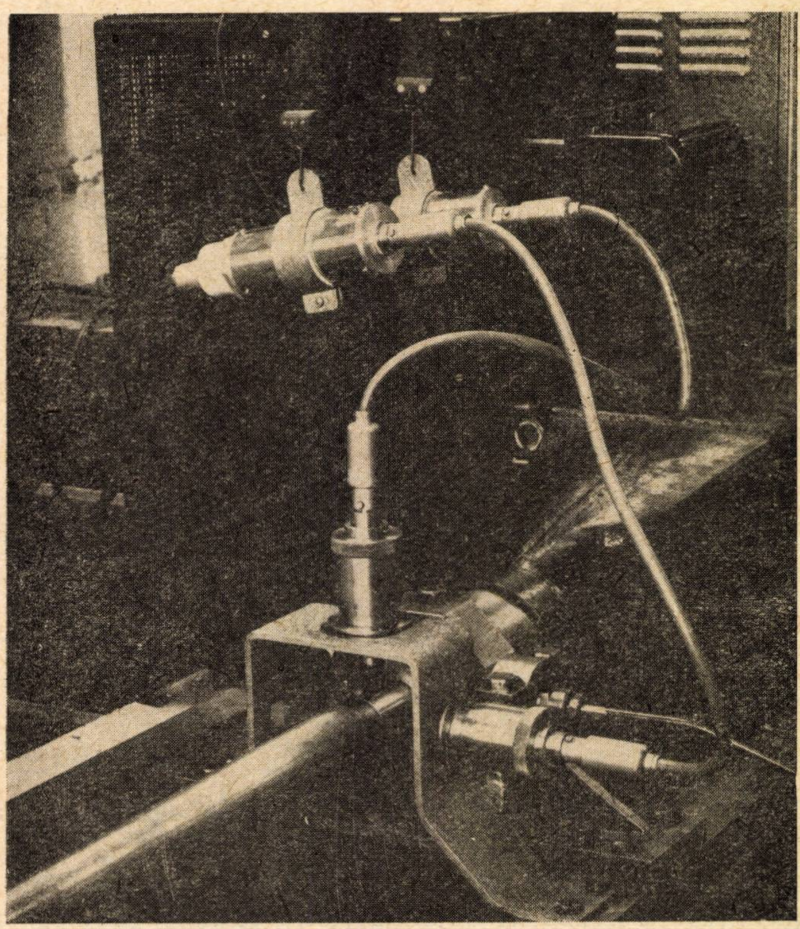


Fig. 5

diametral 2δ, adică cu un număr exprimat în sutimi de milimetru. În cazul cuzineţilor eliptici (compuşi din două arce circulare, v. fig. 7 *a*), prima cifră indică jocul vertical $2\delta_1$ (v. fig. 7 *a*), iar a doua — jocul orizontal ($2\delta_2$), tot în sutimi de milimetru. În lagărele cu elemente elastice, diametrul exterior al unei părţi descărcate a cuzinetului (v. fig. 7 *b*) este notat cu semnul Φ. Încărcarea specifică este exprimată în kg/cm^2 şi notată

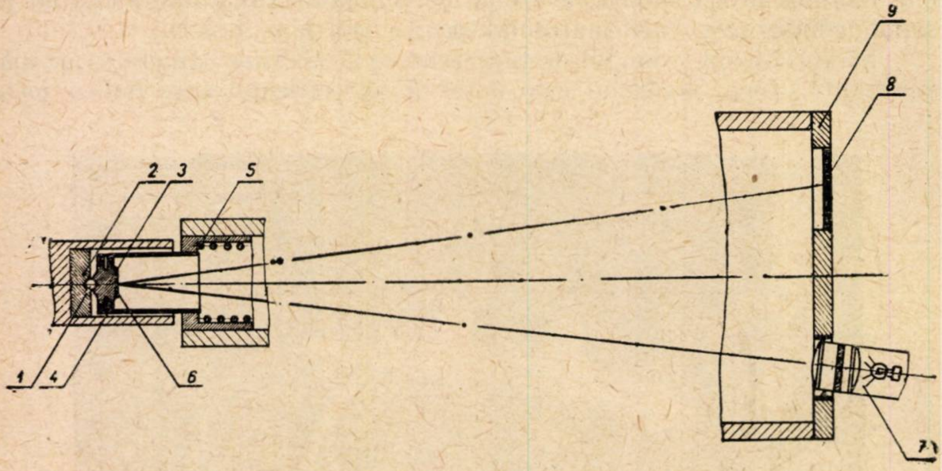
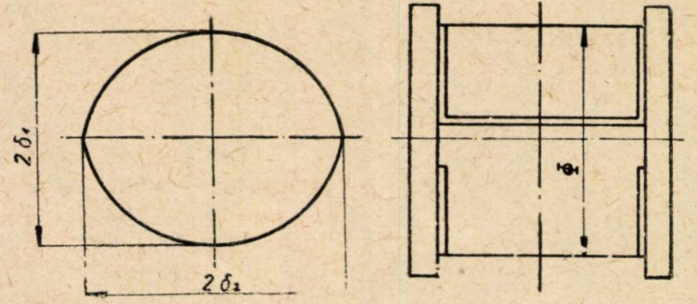


Fig. 6



a) b)

Fig. 7

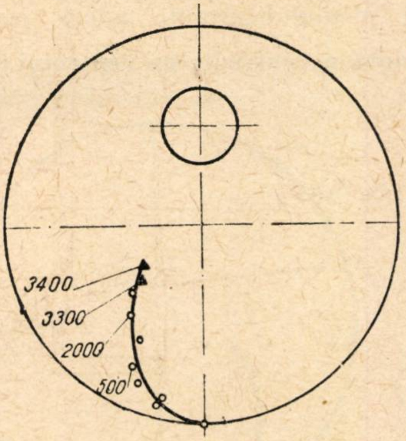
cu *p*, temperatura uleiului la ieşire, în grade centigrade este notată cu *t*, iar numărul de rotaţii pe minut este notat cu litera *n*.

2. REZULTATELE EXPERIMENTALE OBŢINUTE ŞI EVALUAREA SARCINII MAXIME A DIFERITELOR TIPURI DE LAGĂRE

O comparaţie a diferitelor tipuri de lagăre nu se poate face cu exactitate perfectă din cauza imposibilităţii de a se executa o măsurătoare absolută pentru diferitele tipuri şi jocuri în lagăr.

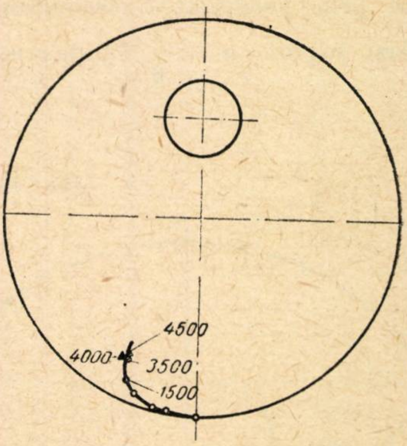
De pildă, în cazul lagărelor cu elemente elastice, dificultăţile se datoresc mai degrabă circumstanţelor decît acţiunii exercitate de presiunea uleiului asupra elementelor. Jocul lagărelor creşte sub influenţa deformaţiei lor şi din această cauză vom lua ca punct de plecare în discuţiile noastre un cuzinet nedeformat, adică un cuzinet de formă cilindrică.

Prima informaţie cu privire la încărcarea maximă a lagărului ne este dată de diagrame, care reprezintă poziţiile fusului în jocul lagărului.



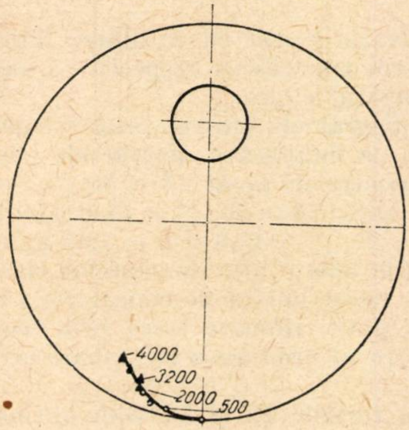
$2\delta-40$, $p-1.65$

Fig. 8



$2\delta-80$. $p-1,18$

Fig. 9



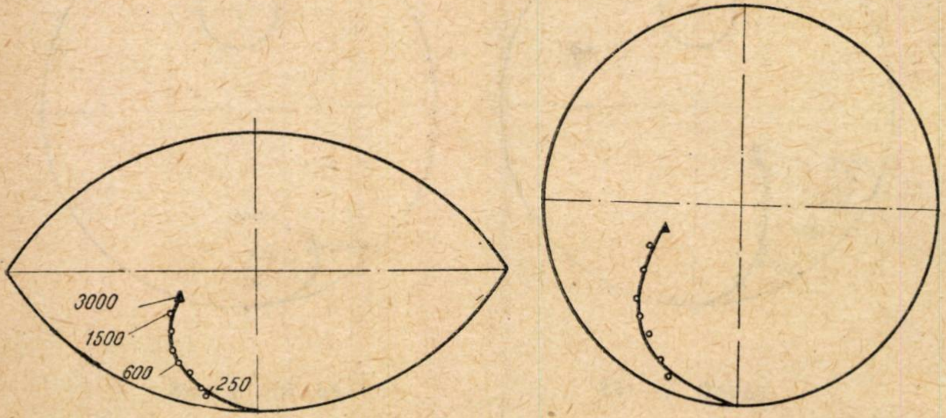
$2\delta-80$. $p-1,65$

Fig. 10

Pe figurile 8—20 au fost trasate diagramele pentru diferitele tipuri de lagăre examinate. Măsurătorile au fost notate, fiecare în parte, prin cîte un cerc mic. Centrele traiectoriilor oscilaţiilor auto-excitate care iau naştere sînt notate cu triunghiuri. Cifrele din dreptul unora dintre rezultate indică numărul de rotaţii pe minut.

Rezultatele măsurătorilor pentru lagărele cilindrice sînt reproduse pe figurile 8, 9, 10 şi aceasta în primul rînd pentru jocul în lagăr $2\delta=0,40$ mm şi o încărcare specifică $p = 1,65$ kg/cm^2, în al doilea rînd pentru un joc al lagărului $2\delta=0,80$mm cu o încărcare specifică $p=1,18$ kg/cm^2 şi, în fine, pentru $2\delta = 0,80$ mm şi $p = 1,65$ kg/cm^2. Caracterul tuturor lagărelor este identic.

Pe figura 11 au fost reproduse rezultatele măsurătorilor în cazul unui lagăr eliptic $2\delta = 28/50$ (jocul vertical fiind de 0,28 mm, iar cel orizontal de 0,50) şi pentru o încărcare specifică $p = 1,18$ kg/cm^2. Pe figura 11 *b* desenul a fost schimbat printr-o adaptare a rezultatelor la o formă cilindrică a lagărului. Această diagramă este analoagă celei trasate pentru lagărele cilindrice, dar linia curbă, care redă mișcarea fusului, trece prin vecinătatea circomferenței jocului lagărului, adică pentru același raport $a = \frac{e}{\delta}$ (unde *e* reprezintă excentricitatea centrului lagărului și δ jocul radial) unghiul de derivație (notat cu φ) dintre linia de conexiune a centrului lagărului cu centrul traiectoriei respective a axului vertical este mai mare decît pentru lagărul eliptic.

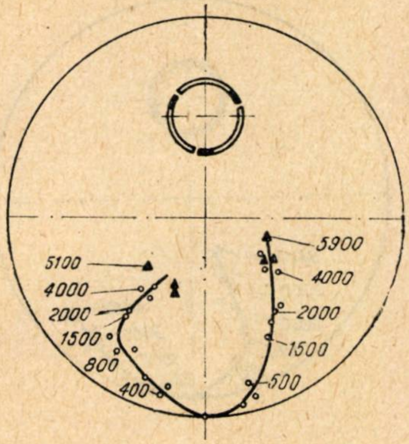


a *b*

Fig. 11

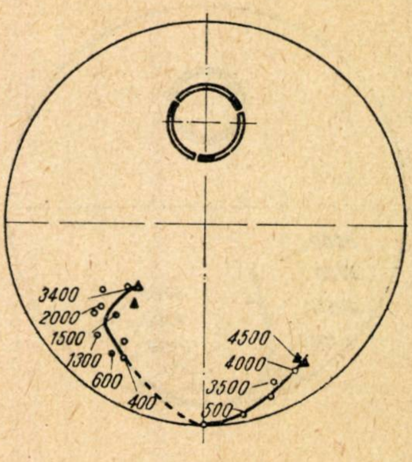
Pe figurile 12—16 se reprezintă diagramele trasate pentru lagărele cu trei elemente. Figurile 12, 13 și 14 ne înfățișează diagramele pentru primul aranjament și anume figura 12 pentru un lagăr $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}7$ și $p = 1{,}18$ kg/cm^2, figura 13 pentru un lagăr $2\delta = 30$, $\varnothing = 45$ și $p = 1{,}65$ kg/cm^2 și figura 14 pentru un lagăr $2\delta = 20$, $\varnothing = 43{,}8$ și $p = 1{,}65$ kg/cm^2. Pentru rotația fusului între extremitățile libere ale elementelor elastice (pe figuri în sensul acelor de ceasornic), curba liniilor de conexiune a centrelor traiectoriilor pentru rotații mai puțin ridicate trece prin vecinătatea cercului jocului de lagăr, după care se produce o schimbare bruscă în direcția centrului lagărului.

Comparînd rezultatele arătate pe figurile 12 și 13 vom obține în aparență un rezultat mai avantajos pentru o încărcare mai mare (fig. 13), adică o valoare mai mică a lui *a*. Bineînțeles că în al doilea caz amortizarea elementelor era mai mică și din această cauză jocul real al lagărului era, la rîndul său, mai mic. Pentru sensul invers al rotației (contrar acelor de ceasornic) condițiile sînt mai apropiate de lagărele cilindrice, înainte de toate din cauza unei încărcări mai reduse și a unui joc mai mare al lagărului (v. fig. 12). La un joc al lagărului mai mare, o încărcare mai mare va influența foarte mult curba descrisă de centrul fusului, care se va apropia considerabil de circomferința jocului în lagăr. La un joc şi la o încărcare mai puţin importante (v. fig. 14), linia curbă este abruptă şi se îndreaptă spre centrul lagărului.



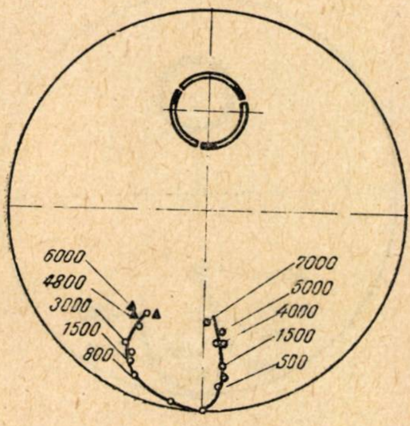
2δ-30, Φ-43,7, p-1,18

Fig. 12



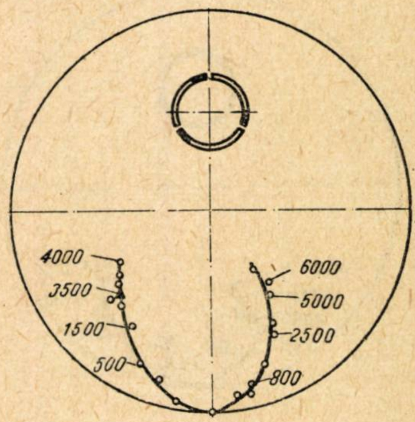
2δ-30, Φ-45, p-1,65

Fig. 13



2δ-20, Φ-43,8, p-1,65

Fig. 14

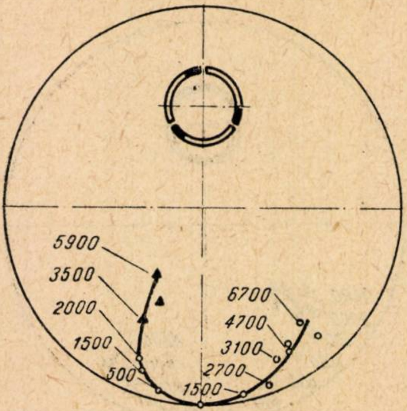


2δ-30, Φ-43,7, p-1,18

Fig. 15

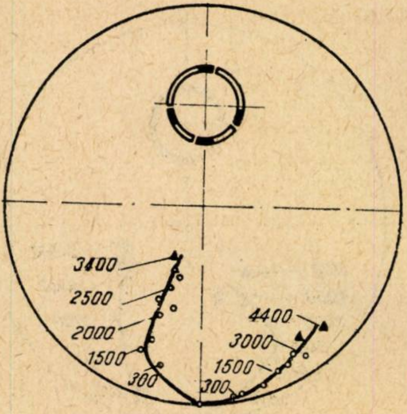
Pe figurile 15 şi 16 au fost reproduse rezultatele măsurătorilor efectuate pe lagăre cu trei elemente avînd un joc $2\delta = 0{,}30$ mm pentru al doilea aranjament al cuzinetului, pe figura 15 pentru un lagăr $2\delta = 30$,

$\varnothing = 43{,}7$ cu o încărcare specifică $p = 1{,}18$ kg/cm², iar pe figura 16 pentru un palier $2\delta = 30$, $\varnothing = 45$ și o încărcare specifică $p = 1{,}65$ kg/cm².


5900
3500
2000
1500
500
6700
4700
3100
2700
1500

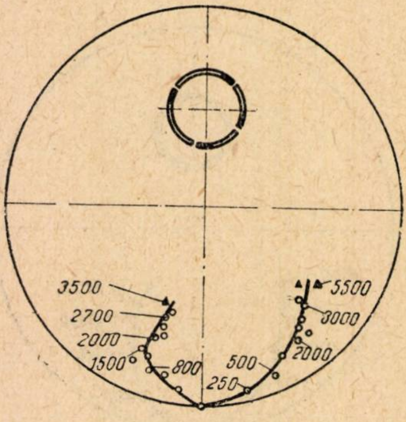
2δ-30, Φ-45, p-1,65

Fig. 16


3400
2500
2000
1500
300
4400
3000
1500
300

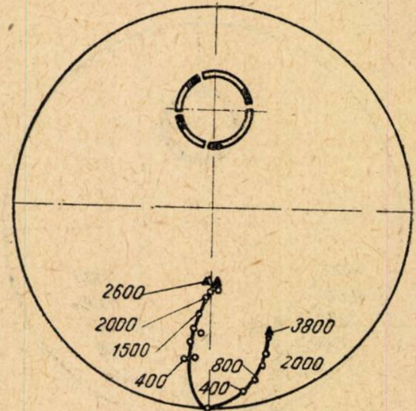
2δ-30, Φ-43,6, p-1,18

Fig. 17


3500
2700
2000
1500
800
5500
3000
2000
500
250

2δ-30, Φ-43,6, p-1,18

Fig. 18


2600
2000
1500
400
3800
2000
800
400

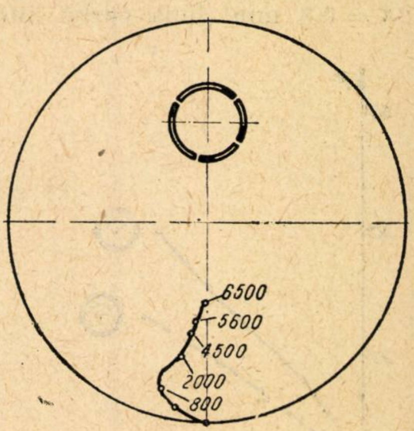
2δ-20, Φ-45, p-1,65

Fig. 19

Al doilea aranjament nu arată pentru primul sens de rotație (adică în sensul acelor de ceasornic) ruptura caracteristică, ca în cazul precedent.

Pe figurile 17–20 au fost reproduse cîteva rezultate ale măsurătorilor efectuate pe cuzineți cu trei elemente. Caracterul liniilor curbe se apropie de rezultatele obținute pentru primul aranjament al unui lagăr cu trei elemente. Se poate vedea sensibilitatea considerabilă la sarcină, grosimea elementelor și aranjamentul pentru a doua direcție a rotației (în cazul nostru în sens contrar acelor de ceasornic).

Pentru a se compara și interpreta datele obținute s-a trasat, pentru cîteva lagăre, pe figurile 21—24 unghiul menționat φ, în raport cu excentricitatea relativă, și anume : pe figura 21 pentru un lagăr cilindric $2\delta = 40$, $p = 1{,}65$ și pentru un lagăr eliptic $2\delta = 28/50$, $p = 1{,}18$, pe figurile 22 și 23 pentru un lagăr cu trei elemente $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}7$, $p = 1{,}18$, iar pe figura 24 pentru un lagăr cu patru elemente $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}6$, $p = 1{,}18$.



2δ-20, ϕ-45, p-1,65

Fig. 20

O informație mai amănunțită asupra încărcării maxime a lagărului este dată de diagramele ce exprimă relația dintre excentricitatea relativă a și numărul de rotații a fusului. Pentru trasarea acestor diagrame ar trebui luate valori de măsurare pentru care temperatura uleiului să fie aceeași. Chiar dacă s-ar utiliza rezultate cu o mică diferență de temperatură a uleiului, împrăștierea valorilor obținute nu ar fi prea importantă și exactitatea diagramelor menționate este suficientă pentru informarea noastră și pentru comparații.

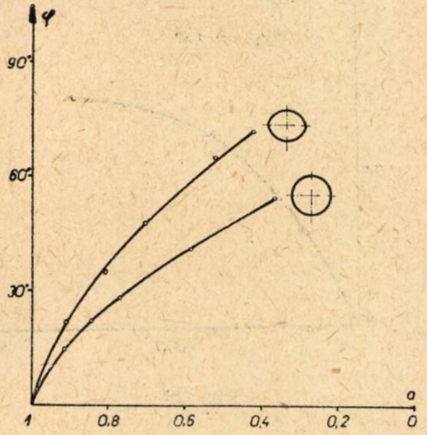


Fig. 21

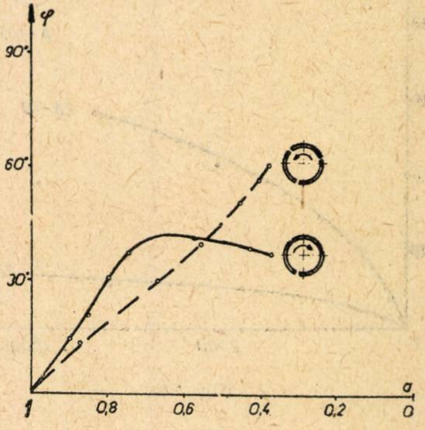


Fig. 22

Pe figura 25 a fost trasată excentricitatea relativă a în raport cu numărul de rotații n pentru lagărele cilindrice supuse unei încărcări specifice $p = 1{,}65$ kg/cm² şi aceasta pe de o parte pentru jocul în lagăr $2\delta = 0{,}40$ mm (linia curbă superioară), pe de alta pentru un joc în lagăr $2\delta = 0{,}8$ mm (linia curbă inferioară). Plecînd de la această diagramă

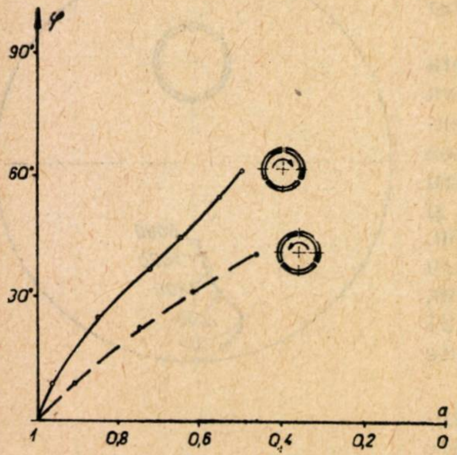


Fig. 23

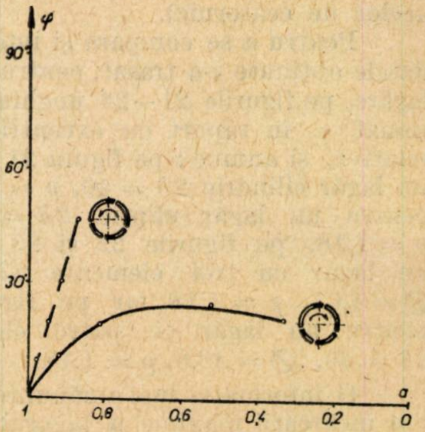


Fig. 24

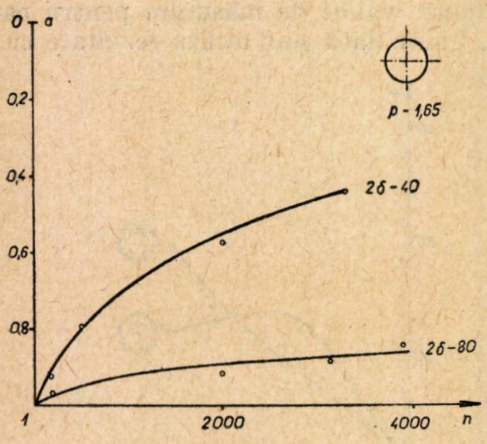


Fig. 25

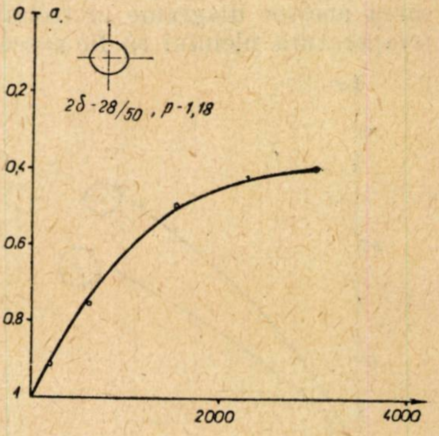


Fig. 26

se poate vedea că pentru orice număr de rotaţii dat, această valoare este cu atît mai mică, cu cît lagărul are un joc mai mare.

Pe figura 26 a fost trasată o diagramă analogă pentru un lagăr eliptic $2\delta = 28/50$ cu o încărcare specifică $p = 1{,}18$ kg/cm². Se obţine aici, mai ales în ce priveşte numărul mediu de rotaţii, un rezultat mai favorabil, ceea ce se datorează, înainte de toate, faptului că jocul lagărului este relativ mai mic şi încărcarea specifică mai puţin ridicată.

Nu se poate stabili aici direct, plecînd de la această diagramă, valoarea grosimii minime a peliculei de lubrifiant pentru un număr de rotaţii oarecare, ci trebuie să utilizăm din nou diagrama ce exprimă unghiul φ în funcţie de a (v. fig. 21).

Pe figura 27 a fost trasată excentricitatea relativă a în raport cu numărul de rotaţii ale fusului şi pentru un lagăr cu trei elemente $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}7$ în cazul primului aranjament şi $p = 1{,}18$ kg/cm³ şi aceasta

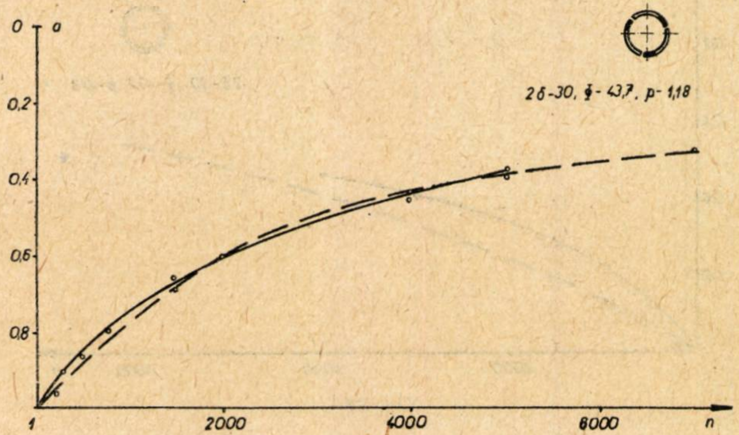


Fig. 27

pentru ambele direcţii de mişcare (linia neîntreruptă pentru rotaţia fusului între extremităţile libere ale elementelor elastice — în cazul nostru în sensul acelor de ceasornic — şi linia haşurată pentru sensul invers al rotaţiei). Diferenţa dintre liniile curbe nu este importantă. Trebuie, însă, ţinut seama că în cazul rotaţiei fusului între extremităţile libere ale elementelor elastice, fusul se mişcă cu un număr redus de rotaţii în vecinătatea extremităţii libere a elementului, adică în dreptul încovoierii sale maxime, în timp ce în sensul invers al rotaţiei, fusul se mişcă în dreptul încovoierii minime a elementului.

Pe figura 28 a fost trasată diagrama aceleiaşi relaţii pentru al doilea aranjament al aceluiaşi cuzinet şi pentru aceeaşi încărcare. În raport cu cazul precedent se obţine aici, pentru un număr de rotaţii oarecare, valorile cele mai mari ale excentricităţii relative a şi o diferenţă mai importantă pentru ambele direcţii de mişcare ale fusului.

Figura 29 ne arată rezultatele obţinute pentru o poziţie identică, dar pentru o încărcare specifică mai mare $p = 1{,}65$ kg/cm² şi aceasta pentru un lagăr $2\delta = 30$, $\varnothing = 45$. S-a ajuns aici la o oarecare micşorare a valorilor, mai ales pentru a doua direcţie de mişcare a fusului şi înainte de toate în domeniul unui număr mic de rotaţii.

Pentru acelaşi lagăr şi pentru aceeaşi încărcare, dar pentru prima poziţie, condiţiile sînt mult mai favorabile (pentru prima direcţie de mişcare a fusului) mai ales cînd este vorba de un număr mic de rotaţii (v. figura 20). În cazul unei încărcări specifice mai puţin însemnate (v.

fig. 27) s-a ajuns la deteriorare pentru a doua direcţie a rotaţiei (în sensul extremităţilor libere ale elementelor). Ca urmare a unei încărcări mai mari, condiţiile sînt, în aparenţă, mai favorabile unui număr redus de rotaţii şi primei direcţii de mişcare a fusului, pentru că amortizarea elementelor era, în acest caz, mai slabă. În consecinţă, se poate spune că pentru prima direcţie de mişcare a fusului, la o dimensiune corespunzătoare a elementelor elastice, prima dispoziţie este mai avantajoasă decît a doua.

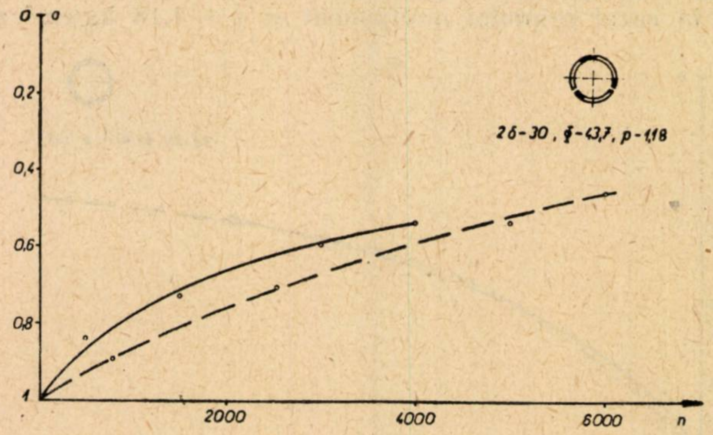


Fig. 28

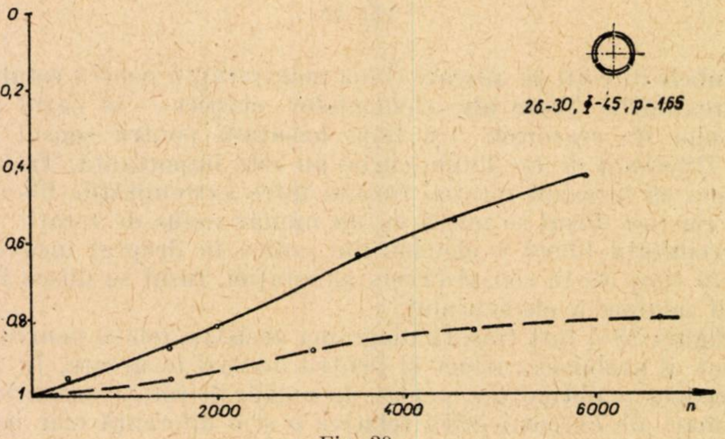


Fig. 29

Pe figurile 31 şi 32 s-au trasat diagramele analoge pentru diferite reglări ale cuzinetului cu patru elemente $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}6$ cu încărcarea specifică $p = 1{,}18$ kg/cm^2 iar pe figurile 33 şi 34 pentru un lagăr $2\delta = 20$, $\varnothing = 45$ cu o încărcare $p = 1{,}65$ kg/cm^2. Se vede că încărcarea maximă este mai redusă în cursul unei rotaţii a fusului între elementele mai lungi, adică pentru un număr oarecare de rotaţii excentricitatea relativă este mai mare. În cursul rotației fusului între extremitățile libere ale elementelor elastice se va obține un rezultat mai avantajos decît în cazul lagărului cilindric sau eliptic.

Pentru a examina funcționarea corectă a lagărului şi pentru a evalua încărcarea sa maximă, trebuie ca pe lîngă poziția centrului fusului în jocul lagărului, să ținem seama şi de traiectoria propriu-zisă, adică trebuie să observăm dacă fusul se roteşte în imediata apropiere a poziției de echilibru sau dacă deviațiile acesteia nu primesc valori prea mari. Se poate spune că în majoritatea cazurilor traiectoria centrului fusului se depărtează de poziția de echilibru cînd excentricitatea relativă descreşte. Acest lucru se poate vedea în mod sugestiv pe cîteva exemple de înregistrări fotografice.

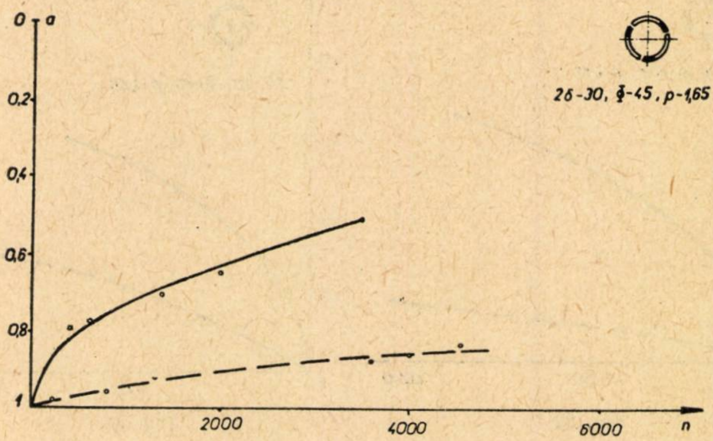


Fig. 30

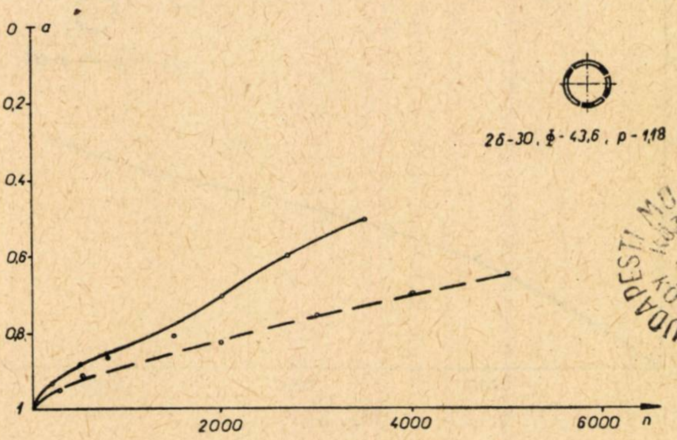


Fig. 31

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Figura 35 reprezintă mai multe înregistrări ale mişcării fusului în lagărele eliptice, efectuate cu ajutorul unui dispozitiv optic. Prima este luată în cursul creşterii continue a numărului de rotaţii, trecînd prin numărul critic de rotaţii pînă la formarea oscilaţiilor auto-excitate ale rotorului ; a doua ne înfăţişează traiectoriile fusului după un număr oarecare de rotaţii (cifra dată între paranteze aparţine înregistrării oscilaţiilor auto-excitate în faza de formare) pentru un lagăr 2 δ = 28/50 la o încărcare $p = 1{,}65$ kg/cm². Celelalte patru figuri ne dau înregistrările mişcării fusului în lagărul 2 δ = 18/44 cu aceeaşi încărcare, figura 35,3 în cursul unei creşteri continue a numărului de rotaţii pînă la formarea oscilaţiilor auto-excitate, figura 35,4 mersul rotorului după oprire formînd de la 5 000 rot/min, iar figurile 35,5 şi 35,6 redau traiectoriile pentru diferite turaţii.

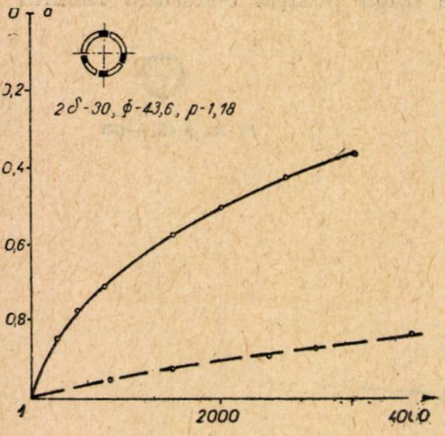


Fig. 32

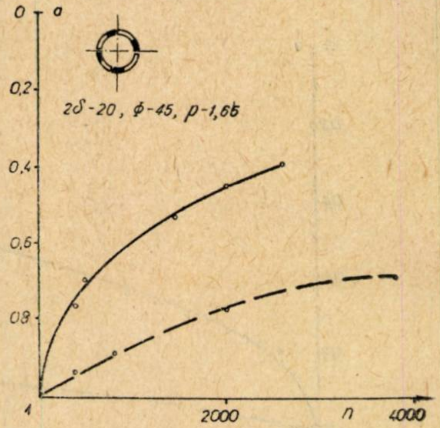


Fig. 33

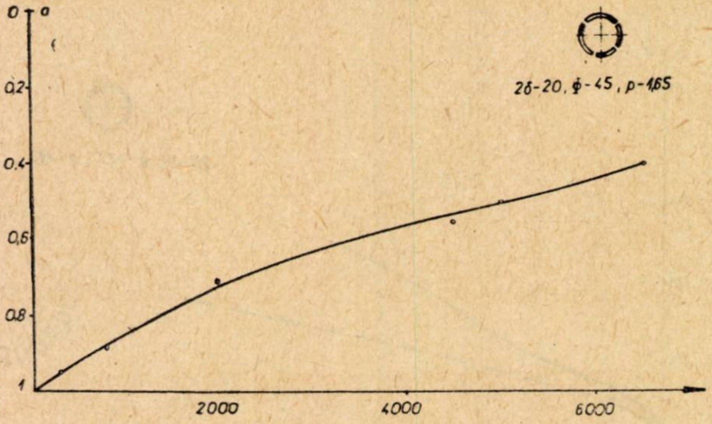
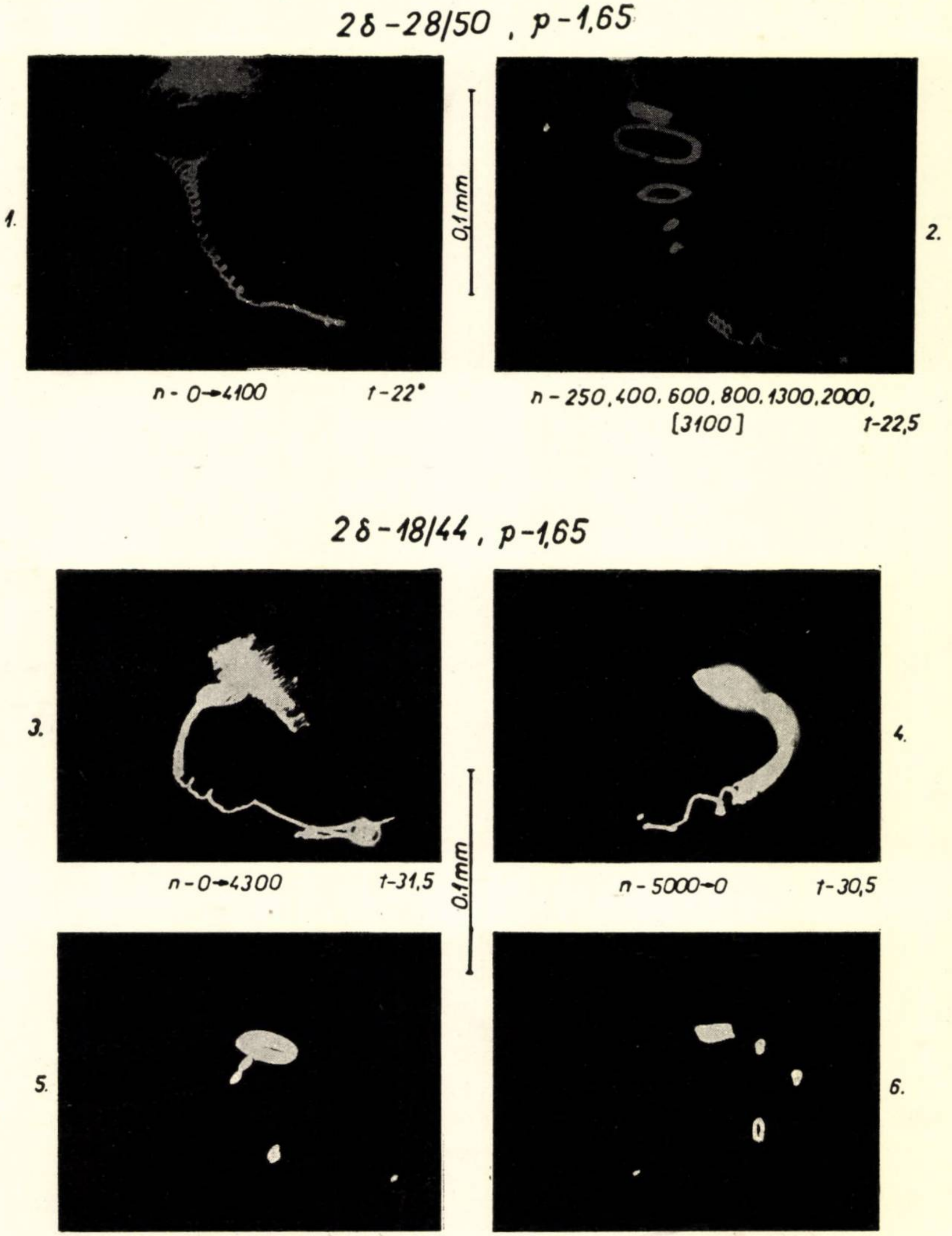


Fig. 34



2δ-28/50 , p-1,65

1. n - 0→4100 t-22°

2. n - 250, 400, 600, 800, 1300, 2000, [3100] t-22,5

2δ-18/44 , p-1,65

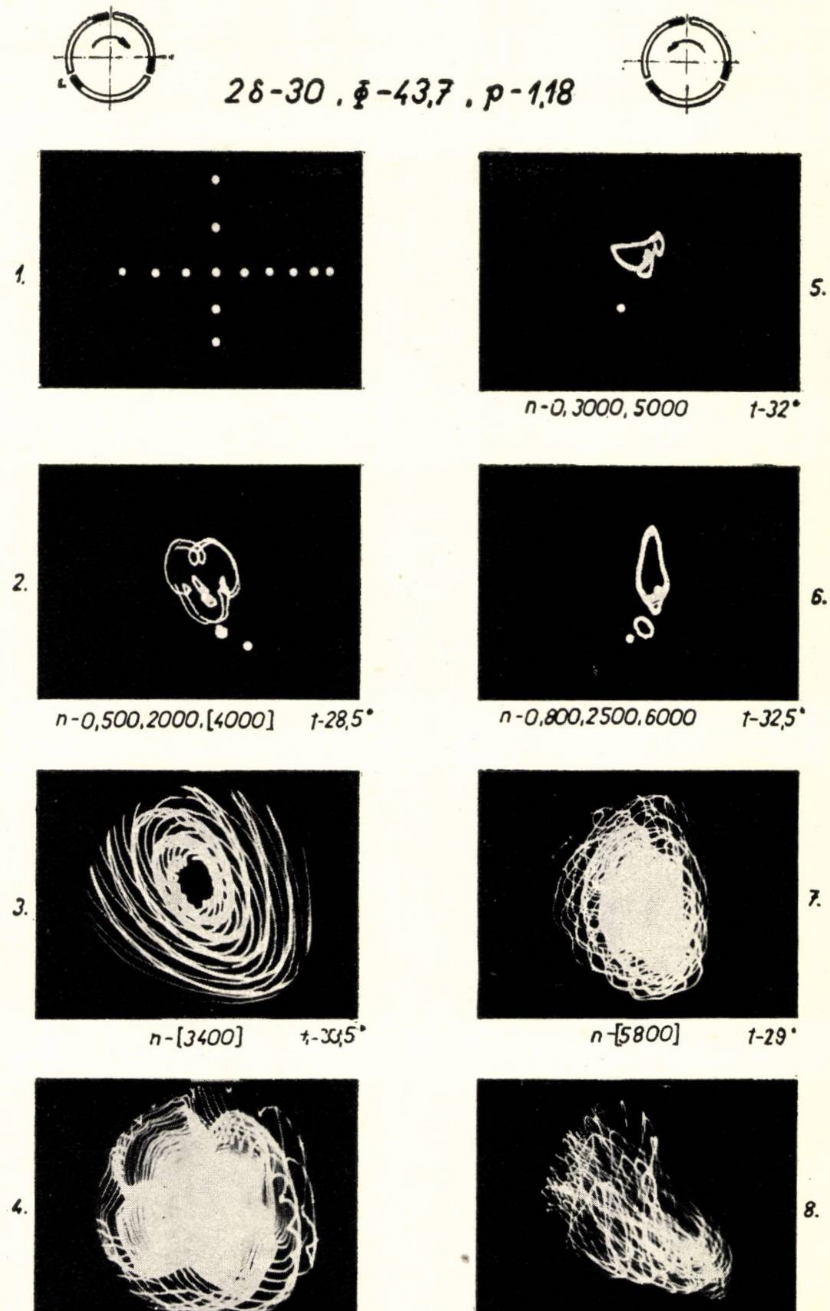
3. n-0→4300 t-31,5

4. n - 5000→0 t-30,5

5. n-0,300,500,800 2900 t-28,5°

6. n-0,300,500,1500,[5100] t-37,7°

Fig. 35



2δ-30 . Φ-43,7 . p-1,18

n-0, 3000, 5000 t-32°

n-0,500,2000,[4000] t-28,5°

n-0,800,2500,6000 t-32,5°

n-[3400] t-30,5°

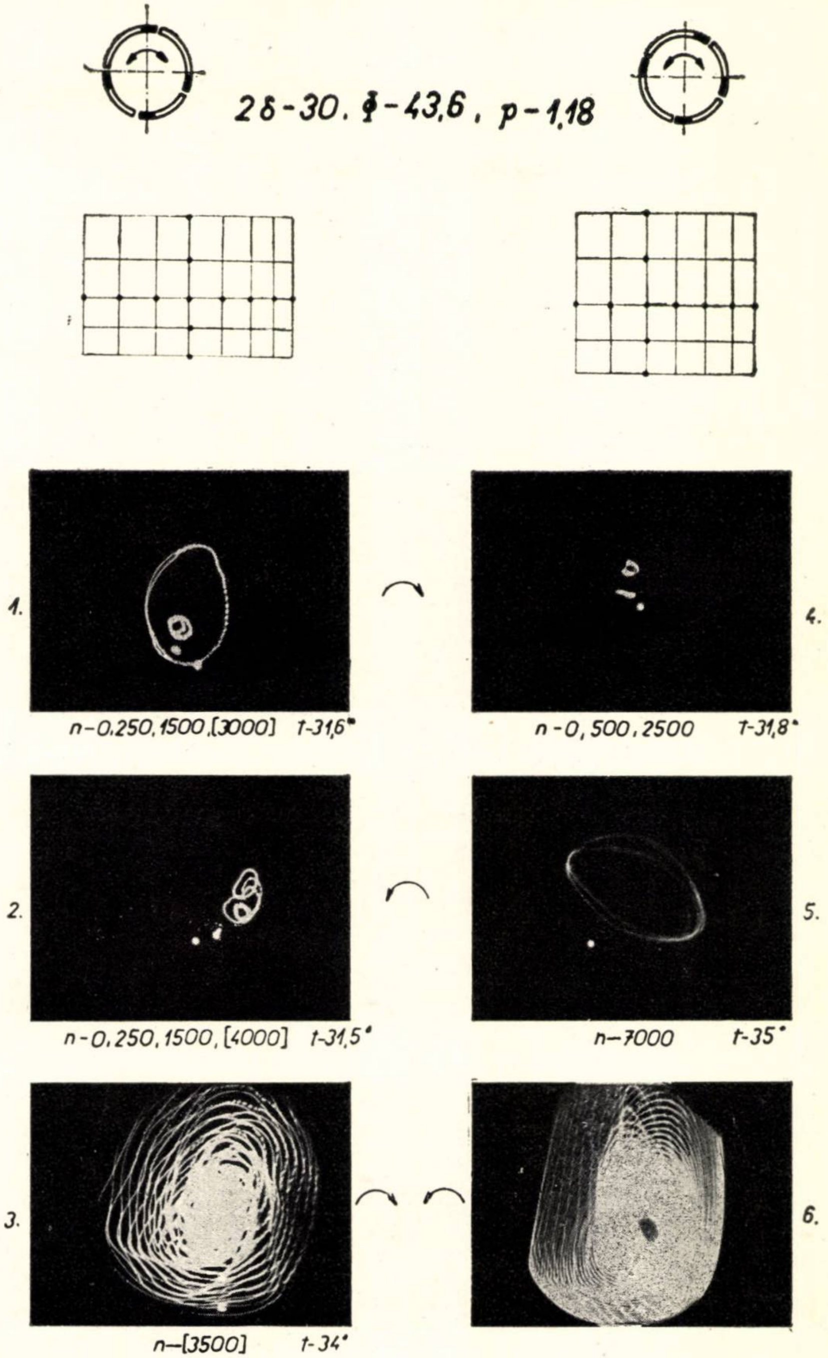
n-[5800] t-29°

n-[5500] t-26°

n-[7000] t-36°

Fig. 36

c. 1872



2δ-30. φ-43,6, p-1,18

n-0,250,1500,[3000] t-31,6°

n-0,500,2500 t-31,8°

n-0,250,1500,[4000] t-31,5°

n-7000 t-35°

n-[3500] t-34°

Fig. 37

Pe figura 36 au fost inregistrate mişcările fusului în lagărul $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}7$ luate la încărcarea $p = 1{,}18$ kg/cm^2. Pe coloana din stînga (fig. 36,2—36,4) se văd înregistrările pentru direcţia de rotaţie a fusului între extremităţile libere ale elementelor, iar pe coloana din dreapta (fig. 35,6—36,8) pentru direcţia inversă a rotaţiei. Figura 36,1 reprezintă o înregistrare de etalonare pe sutimi de mm. Fig. 36,2 reproduce o înregistrare pentru diferite numere de rotaţii, dintre care cel mai ridicat aparţine înregistrării oscilaţiilor auto-excitate în faza incipientă (însemnat printr-o buclă). Imaginile erau luate cu 0,1 sec. Pe figura 36,3 şi 36,4 se vede o înregistrare a unei traiectorii a fusului, luată la formarea oscilaţiilor auto-excitate şi la un timp de expunere mai lung. Ambele înregistrări au fost luate la temperaturi diferite ale uleiului lubrifiant. La lagărele cu elemente elastice, limita formării oscilaţiilor auto-excitate, precum şi intensitatea lor, erau puternic influenţate de temperatura lubrifiantului (vezi o expunere mai amănunţită [1]). Din acest motiv limita formării oscilaţiilor auto-excitate era mai puţin ridicată pentru temperatura uleiului de scurgere $t = 33{,}5°$ C şi creşterea devierilor mişcării fusului era mai rapidă (v. fig. 36,3) decît la temperatura $t = 26°$ C (v. fig. 36,4). Din figuri rezultă, după cum am arătat mai sus, că creşterea numărului ne arată din nou traiectoriile centrului fusului la formarea oscilaţiilor auto-excitate. Se vede aici că creşterea deviaţiilor mişcării fusului era, mai ales în faza iniţială, relativ mică. Figura 36,8 ne înfăţişează o înregistrare a oscilaţiilor auto-excitate ale fusului care nu se formează decît la 7 000 rot/min.

Fotografiile înregistrărilor pentru un lagăr $2\delta = 30$, $\varnothing = 43{,}6$, cu o încărcare specifică $p = 1{,}18$ kg/cm^2 şi pentru două reglări ale cuzinetului sînt reproduse pe figura 37. Deasupra fiecărei coloane a figurilor, care reprezintă ambele aranjamente, s-au trasat înregistrările de etalonare şi s-a desenat o reţea de dreptunghiuri, căreia îi corespunde, în realitate, o reţea patrată cu distanţele de 0,05 mm.

Pornind de la reţeaua întocmită, se observă eroarea desenului, datorită nelinearităţii menţionate, a indicatorului de capacitate. Pe figurile 37,1 şi 37 se văd înregistrările mişcării fusului pentru diferitele rotaţii şi pentru ambele direcţii de rotaţie ale fusului. Înregistrarea oscilaţiilor auto-excitate, reproduse pe figura 37,1 a fost făcută în momentul în care aceste oscilaţii au evoluat îndeajuns şi fusul se mişcă practic în cadrul întregului joc al lagărului. Pe figura 37,3 s-au reprodus din nou traiectoriile mişcării fusului la formarea oscilaţiilor auto-excitate, luate cu o durată de expunere mai îndelungată. Pe următoarele trei figuri sînt reproduse înregistrările pentru aranjamentul al doilea şi anume pe figura 37,5 sînt traiectoriile pentru a doua direcţie de mişcare cu 7 000 rot/min. Frecvenţa mişcării fusului corespunde, în acest caz, numărului de rotaţii ale rotorului, dar traiectoria este mult lărgită, iar ciclurile unei rotaţii nu mai prezintă aceeaşi coincidenţă ca pentru un număr de rotaţii mai puţin ridicate.

Pe ultima figură s-a reprodus traiectoria mişcării fusului în cursul unei treceri prin numărul critic de rotaţii a rotorului. Comparînd această traiectorie cu înregistrările oscilaţiilor auto-excitate în curs de formare, se vede o regularitate izbitoare a traiectoriei în timpul trecerii prin rezonanță, față de traiectoriile de la formarea oscilațiilor auto-excitate.

Pentru o informare mai amănunțită s-au reprodus, pe figurile 38 și 39 înregistrările mișcărilor fusului într-un lagăr cilindric $2\delta = 40$ și

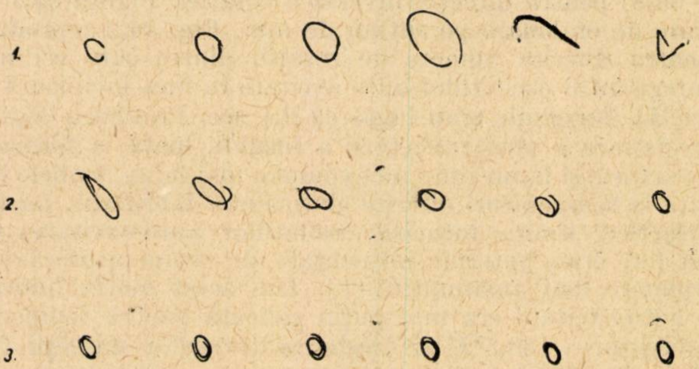


Fig. 38

$p = 1{,}65$ kg/cm^2 luate cu un aparat fotografic de format redus, de 16 mm. Cadența desfășurării filmului era de 8 imagini pe secundă și durata expunerii de 1/18 s pentru o imagine. Pe figura 38 se vede trecerea prin faza de rezonanță a rotorului, iar pe figura 39 înregistrările făcute la formarea oscilațiilor auto-excitate.

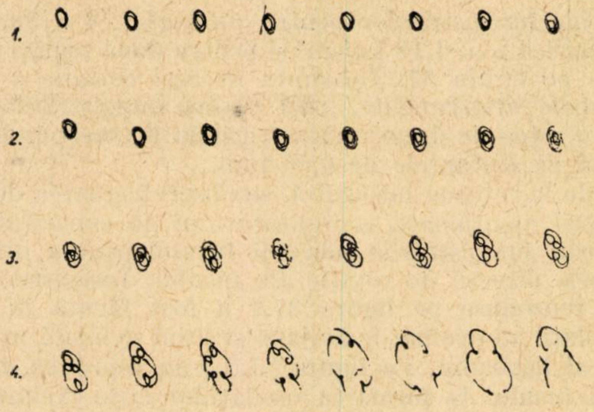


Fig. 39

Se vede aici, succesiv, întreaga evoluție a formării oscilațiilor auto-excitate, care se manifestă în prima fază printr-o neregularitate moderată a traiectoriilor ciclurilor particulare într-o rotație și abia mai tîrziu se manifestă printr-o creștere a componenței oscilațiilor rotitoare a frecvențelor oscilațiilor proprii ale rotorului. Pe figura 40 se vede felul în care se manifestă, la formarea oscilațiilor auto-excitate, o singură componentă axială a mişcării; s-a reprodus aici o înregistrare a componentei verticale a mişcării fusului într-un lagăr $2\delta = 40$, $p = 1{,}65$ kg/cm^2, la o creştere continuă, plecînd de la numărul critic de rotaţii (v. fig. 40,1) pînă la formarea oscilaţiilor auto-excitate. În faţa primei figuri se află o scară, pe care cifrele ne indică distanţele în sutimi de mm de la poziţia de oprire a fusului. Înregistrările ne arată simultan o înregistrare a timpului cu frecvenţa de marcaj de 2 500 p.m.

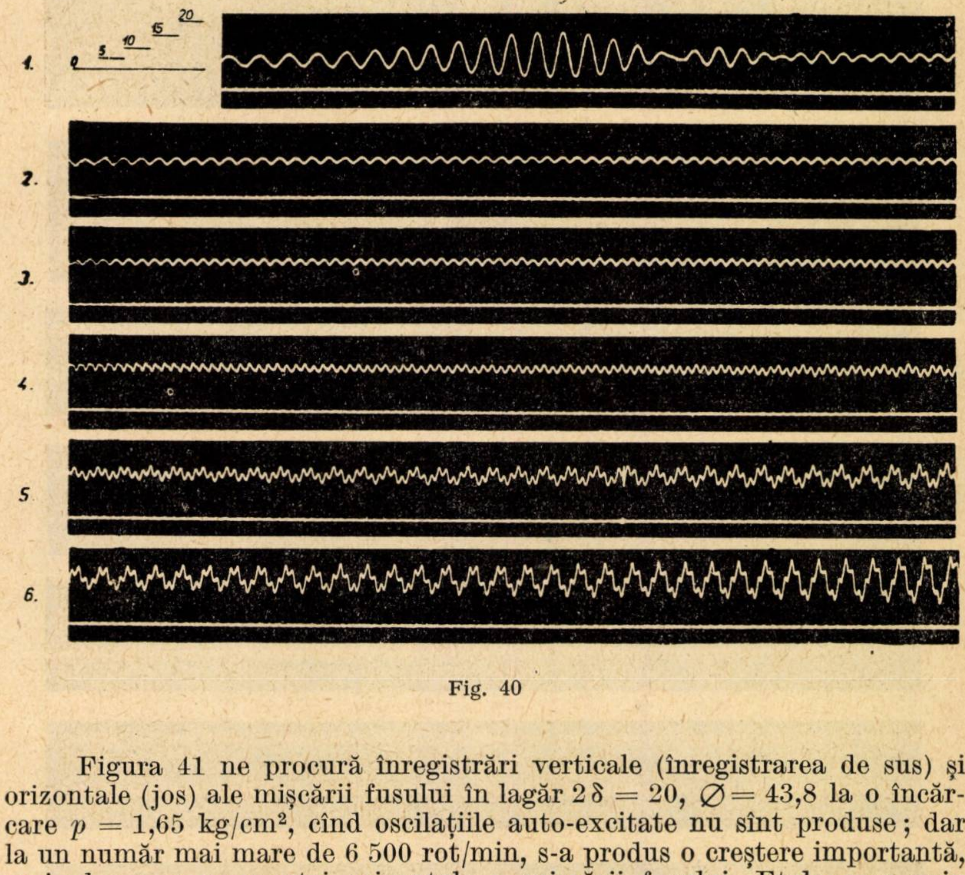


Fig. 40

Figura 41 ne procură înregistrări verticale (înregistrarea de sus) şi orizontale (jos) ale mişcării fusului în lagăr $2\delta = 20$, $\varnothing = 43{,}8$ la o încărcare $p = 1{,}65$ kg/cm^2, cînd oscilaţiile auto-excitate nu sînt produse; dar la un număr mai mare de 6 500 rot/min, s-a produs o creştere importantă, mai ales a componentei orizontale a mişcării fusului. Etalonarea prin 0,05 mm a poziţiei de oprire a fost semnalată mai sus (v — pentru componenta orizontală, h — pentru componenta verticală). În faţa primei figuri s-a mai indicat şi poziţia de oprire a fusului. Pe figura 41,5 se vede eroarea de înregistrare datorită componentelor de ordin superior, înainte de toate a celei de-a doua armonice.

Să rezumăm acum rezultatele cele mai importante şi să comparăm, mai întîi, lagărele cu elemente elastice cu lagărele cilindrice şi eliptice. Se poate spune că în timpul mişcării fusului între extremităţile libere ale elementelor, lagărele cu elemente elastice sînt, în medie, egale, în ce pri-

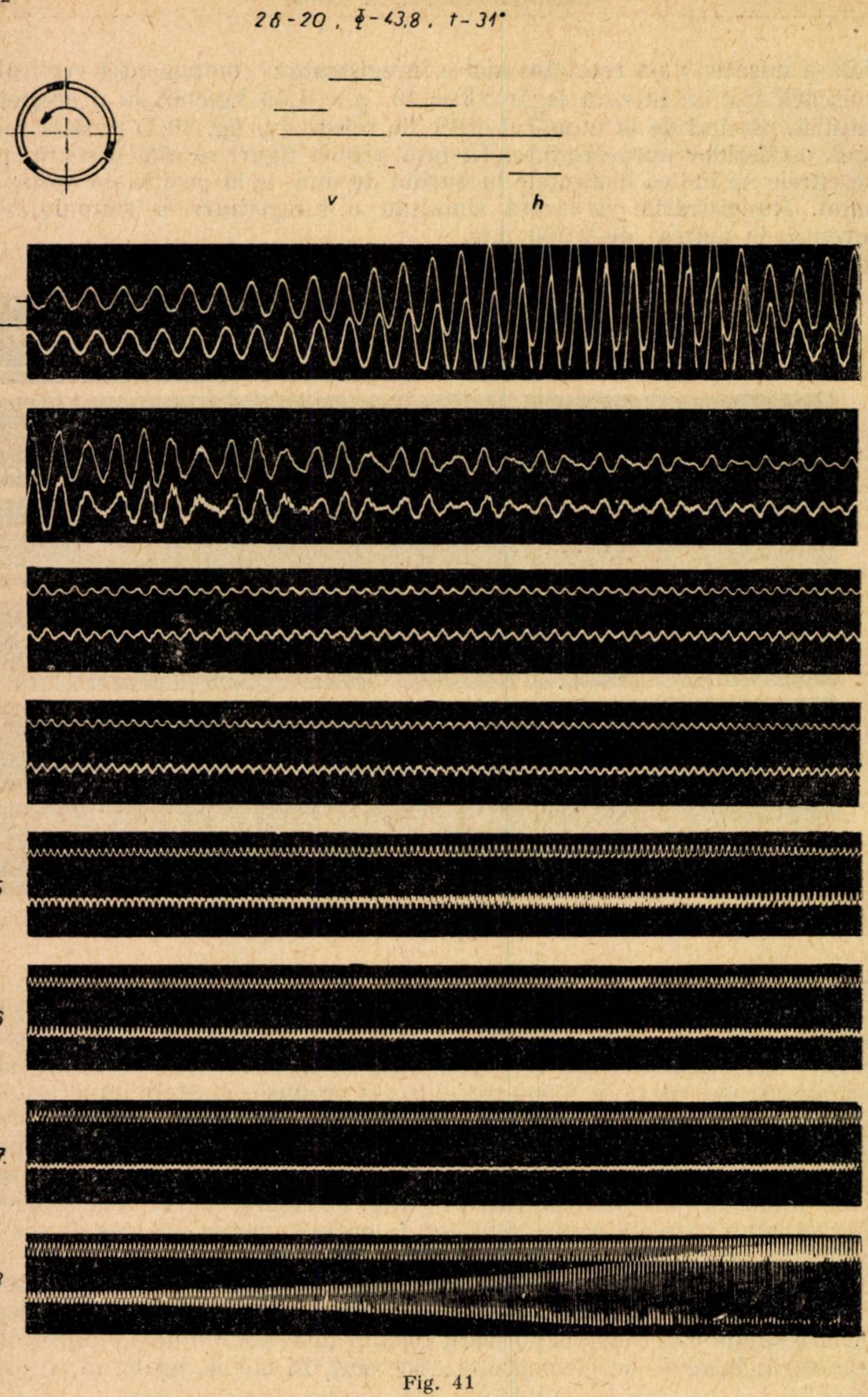


Fig. 41

veşte încărcarea maximă, cu lagărele de tip obişnuit (cilindrice şi eliptice). Pot fi folosite chiar în cazul încărcărilor specifice considerabile, dacă se poate admite în parte şi funcţionarea, la un număr redus de rotaţii ca în cazul turbo-maşinilor (cînd se pune în mişcare rotorul unei turbine). În cazurile cînd nu este nevoie să admitem funcţionarea la un număr redus de rotaţii din cauza unei încărcări specifice puţin însemnate, sau cînd nu se cere o mare rezistenţă la formarea oscilaţiilor auto-excitate, se poate folosi rotaţia inversă a rotorului (adică în direcţia extremităţilor libere a elementelor elastice).

Pot fi proiectate şi lagăre cu elemente elastice pe bază de date, astfel încît să se folosească parţial avantajele unuia sau a celuilalt aranjament. Se poate obţine acest lucru printr-o combinare a ambelor elemente, astfel încît fusul să se rotească nu numai între extremităţile libere ale cîtorva elemente, dar şi în direcţia celorlalte elemente. Trebuie ales acest aranjament în aşa fel încît să satisfacă pe cît posibil condiţiile cerute de lagăre. Un proiect pentru cîteva aranjamente este arătat mai jos.

3. INSTRUCŢIUNI CU PRIVIRE LA CONSTRUCŢIA LAGĂRELOR CU ELEMENTE ELASTICE

În cele mai multe cazuri nu va fi posibilă proiectarea directă a unor lagăre de felul celor utilizate în încercările experimentale de mai sus. De cele mai multe ori se cere ca lagărele să fie realizate din două jumătăţi şi prevăzute cu un strat de metal antifricţiune. Aceste exigenţe nu prezintă dificultăţi speciale.

În ce priveşte amortizarea elementelor, trebuie ca jocul acestor lagăre să fie întrucîtva inferior aceluia de la lagărele cilindrice. Jocul diametral ar trebui limitat între $1{,}0 - 1{,}3^0/_{00}$ din diametrul fusului. Trebuie luată grosimea elementelor astfel încît să se obţină o amortizare suficientă, dar totodată lagărul să nu fie ameninţat de influenţa unei mari încovoieri a elementului, deoarece fusul ar putea fi aşezat pe marginile neelastice ale lagărului. De asemenea, trebuie să se ţină seamă de faptul că, în unele puncte, presiunea lubrifiantului va fi mai mare decît încărcarea specifică. Aceasta în ce priveşte, mai ales, cadranul cuzinetului, în care se află poziţia de echilibru a centrului fusului în timpul rotaţiei acestuia. Pentru lagărele supuse la o încărcare mai mare, încovoierea maximă nu ar trebui să depăşească aici 10% din jocul lagărului. S-ar putea ocoli primejdia de mai sus — ca fusul să se aşeze pe marginile neelastice ale lagărului — printr-o creştere a jocului lagărului pe marginile cuzinetului. Dar în acest caz trebuie să se ţină seama de o încărcare şi de un debit mai mare al uleiului lubrifiant. Lărgimea deschiderilor pe contur (în planul perpendicular al axului lagărului) ar trebui să fie şi ea cît se poate de mică. De asemenea se poate admite şi o amortizare cît mai mare a celorlalte elemente.

După cum s-a amintit, elementele elastice pot fi combinate astfel încît, datorită deformaţiilor, unele din ele să lărgească interstiţiul (vor fi notate ca elemente cu pană pozitivă), iar celelalte (notate ca elemente cu pană negativă) vor restrînge interstiţiul. Pe figurile 42 *a* şi 42 *b* s-au reprodus proiectele schematice a două realizări din aceste elemente combinate. Pe figurile 42 s-a reprodus proiectul unui lagăr cu trei elemente, două cu pană pozitivă şi unul cu pană negativă. Săgeata ne indică direcţia fusului. Figura 42 *b* reproduce proiectul unui cuzinet cu cinci elemente elastice dintre care patru elemente cu pană pozitivă şi unul cu pană negativă. Ambele lagăre sînt construite ca lagăre din două jumătăţi.

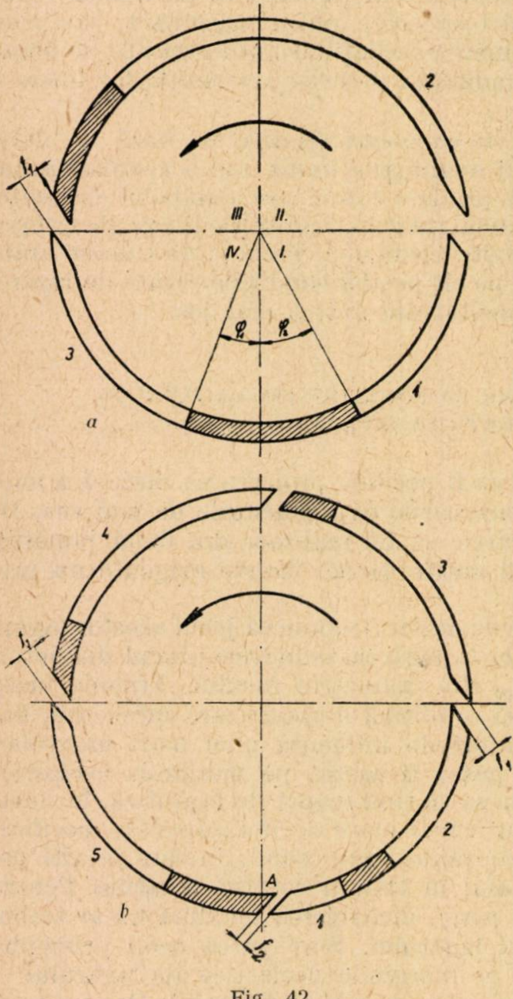


Fig. 42

Pare nimerit a se plasa în aceste combinaţii elementele cu pană pozitivă mai ales acolo unde locul este solicitat pentru încărcarea maximă a lagărului, adică în partea inferioară stîngă a cuzinetului (adică cadranul al patrulea şi partea iniţială a primului cadran, la mişcarea fusului indicată pe figura 42 *a*). Elementele cu pană negativă vor fi plasate în partea dreaptă a cuzinetului inferior, în nici un caz în partea cea mai de jos, adică nu în partea iniţială a primului cadran (la specificarea şi în direcţia mişcării aşa cum s-a arătat pe figura 42 *a*). Încovoierea minimă a elementelor va avea loc, deci, în primul cadran. La grosimea egală a tuturor elementelor, aceasta înseamnă că ele vor fi cele mai scurte. În cazul primei realizări (v. fig. 42 *a*) este elementul 1, care va prezenta $\varphi_1 < \varphi_2$. La elementele 2 şi 3 se poate admite o încovoiere mai mare. În al doilea caz (v. fig. 42 *b*) elementul 1 va avea lungimea minimă şi trebuie să observăm că fusul nu se aşază pe locul notat cu *A*. Comparînd ambele cazuri, se poate admite în primul caz o mai mare încovoiere a elementului 1 decît în cazul al doilea (v. fig. 42 *b*), deoarece extremitatea liberă se află, în primul caz, alături de cuzinet.

Lărgimile deschiderilor longitudinal-axiale (v. fig. 42 *a* şi 42 *b*) trebuie să fie alese mai mari decît ale deschiderilor pe contur. Înainte de toate, în locurile diviziunii cuzinetului unde se află aducţiunea principală a uleiului, trebuie ca deschiderea să fie suficient de largă (v. f_1 pe fig. 42).

Ar fi bine ca deschiderea f_2, la cuzinetul inferior, să fie executată mai îngustă (v. fig. 42 *b*). Deschiderile pot fi aşezate oblic în direcţia mişcării fusului, după cum s-a arătat pe figura 42.

Primul tip de lagăr poate fi utilizat (v. fig. 42 *a*) mai ales la turbocompresoarele care se rotesc cu viteză mare. Al doilea tip (v. fig. 42 *b*) este nimerit pentru turbine, unde încărcarea specifică este mai mare şi unde nu se cere o atît de mare rezistenţă la formarea oscilaţiilor autoexcitate.

Primită la redacţie la 2 octombrie 1959

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В СВЯЗИ С ДВИЖЕНИЕМ ЦАПФЫ В ПОДШИПНИКЕ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается механизм образования колебаний самовозбуждения подшипников скольжения, работающих при больших оборотах. При помощи оптического приспособления получаем изображение перемещения центра цапфы относительно вкладыша при различных нагрузках, скоростях и зазорах подшипников. Таким образом записывается весь ход процесса образования колебаний самовозбуждения как для цилиндрических и эллиптических подшипников, так и для подшипников с упругими элементами. Для последних приводятся и конструктивные решения, в зависимости от условий работы подшипника.

QUELQUES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT LE MOUVEMENT D'UN ARBRE DANS UN PALIER

RÉSUMÉ

L'auteur fait l'étude expérimentale du mécanisme de la formation des oscillations auto-excitées dans les paliers à glissement lors des grandes vitesses de rotation. Un dispositif optique permet d'obtenir l'image du déplacement de l'axe de l'arbre par rapport au coussinet, en variant la charge, la vitesse et le jeu du palier. On enregistre, ainsi, l'évolution complète de la formation des oscillations auto-excitées, aussi bien dans le cas des paliers cylindriques et elliptiques, que des paliers à éléments élastiques. En ce qui concerne ces derniers, l'auteur donne, en outre, des solutions pour la construction, en fonction des conditions de travail du palier.

BIBLIOGRAFIE

1. ALEŠ TONDL, *Étude expérimentale des oscillations auto-excitées des rotors causées par l'influence du film d'huile des paliers lisses.*
2. — *Le coussinet empêchant la naissance des oscillations auto-excitées.* Office des brevets d'invention à Prague, document nr. 87116 din 15 septembrie 1957.
3. — *Verfahren zur Verdinderung der unter dem Einfluss des Ölfilmes bei Lagern entstehenden selbsterregten Schwingungen.* Österr. Patentamt, Patentschrift nr. 196 181 din 25 februarie 1958.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA MECANISMELOR CURBELOR CICLICE

DE

CHR. PELECUDI și V. I. CALCAN

Importanța cicloidei și a curbelor cicloidale este de mult timp recunoscută atît în geometrie cît și în mecanică. Numeroasele lor proprietăți cu aplicativitate practică au făcut să fie larg utilizate în rezolvarea multor probleme cerute de tehnică : construirea profilelor dinților angrenajelor, a contururilor unor tipuri de excentrice, came sau alte organe de mașini etc.

De studiul cicloidei și a curbelor cicloidale sînt legate numele lui Galileu, Viviani, Toricelli. Aria cicloidei și curbele derivate din cicloidă au preocupat pe Gilles Personne (Roberval), iar lungimea unei bucle a cicloidei a fost calculată de savantul englez Wren. Curba tautocronă a lui Huyghens a condus la realizarea pendulului cicloidal, iar problema brahistocronei a fost rezolvată de patru oameni de știință : Leibniz, Newton, l'Hôpital și Iacob Bernoulli.

Așa cum arată G. N. Berman [1] cicloida a fost folosită la elaborarea metodelor de studiu a curbelor, metode care au condus la crearea calculului diferențial și integral, în timp ce rezolvarea problemei brahistocronei a pus bazele calculului variațional, indispensabil fizicienilor de azi.

Asemănător cicloidelor, curbele ciclice sînt obținute drept traiectorii ale punctelor legate de un sistem rigid în mișcare plan paralelă, mișcare realizată prin rostogolirea fără alunecare a curbelor polare, rostogolitoarea și baza, una pe cealaltă. Este vorba de o generalizare a cicloidelor prin multiplicarea condițiilor lor asemănătoare de producere mecanică.

În această lucrare, ne vom ocupa de o familie importantă a ciclicelor, obținute ușor pe cale mecanică și cu proprietăți remarcabile pentru întrebuințarea lor în tehnică. După cîteva considerații teoretice asupra mecanismelor ce pot fi utilizate pentru formarea lor, vor fi abordate unele din aceste proprietăți și se va face o sinteză a mecanismelor pentru ciclicele inferioare (cicloide).

Cicloidele sînt descrise prin rostogolirea fără alunecare a unui cerc la exteriorul sau interiorul altuia. Dacă punctul ce descrie traiectoria se află pe circumferinţa cercului rostogolitor, se obţin epi- sau hipocicloidele, iar dacă punctul reprezentativ este legat de cercul rostogolitor către interior sau exterior rezultă epi-sau hipocicloidele scurtate sau alungite.

Mişcarea plană corespunzătoare se poate realiza prin rotaţia a două bare OO_1 şi O_1O_2, de lungimi R_1 şi R_2, articulate în O la bază şi în O_1 între ele, ambele avînd vitezele unghiulare absolute constante şi diferite (fig. 1).

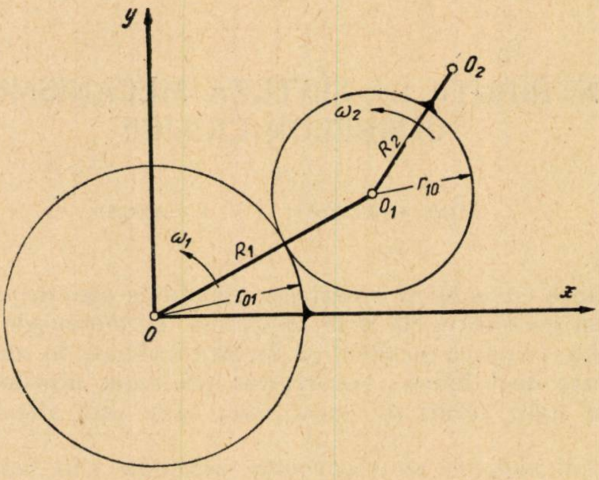


Fig. 1

Dacă în O se montează o roată dinţată fixă faţă de sistemul de axe în repaus xOy cu raza cercului primitiv r_{01}, iar în O_1 o roată dinţată r_{10} solidară cu bara O_1O_2 şi care angrenează cu prima roată dinţată, se obţine un mecanism planetar simplu. Pentru realizarea vitezelor unghiulare cerute, trebuie să se îndeplinească condiţiile

$$r_{01} + r_{10} = R_1, \qquad \frac{r_{01}}{r_{10}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}. \tag{1}$$

Cercurile primitive ale roţilor dinţate sînt de fapt curbele polare ale mişcării plane a barei finale O_1O_2.

Prin legarea în continuare de noi bare articulate între ele $O_{p-1}\,O_p$, $O_p\,O_{p+1}$, ... şi obligate în acelaşi mod la rotaţii instantanee, cu viteze unghiulare absolute diferite ω_p, ω_{p+1}, ... faţă de punctele lor de origine O_{p-1}, O_p ..., ele însele în mişcare, se obţin mişcări planetare superioare. Pentru s bare articulate, traiectoriile punctelor în mişcare plană a ultimei bare pot fi numite ciclice superioare de ordinul s. Asemănător, o roată dințată de rază $r_{p-1,p}$ este legată de elementul $p - 1$, iar cea cu care angrenează, de rază $r_{p,p+1}$ este legată de elementul $p + 1$ (fig. 2).

Relațiile (1) se generalizează astfel

$$r_{p-1,p} + r_{p,p+1} = R_p \qquad \frac{r_{p-1,p}}{r_{p,p+1}} = \frac{\omega_{p+1} - \omega_p}{\omega_p - \omega_{p-1}} . \tag{2}$$

Pentru cazul general trebuie $2(s - 1)$ roți dințate, cîte două pentru fiecare element, afară de primul și ultimul care au cîte o singură roată

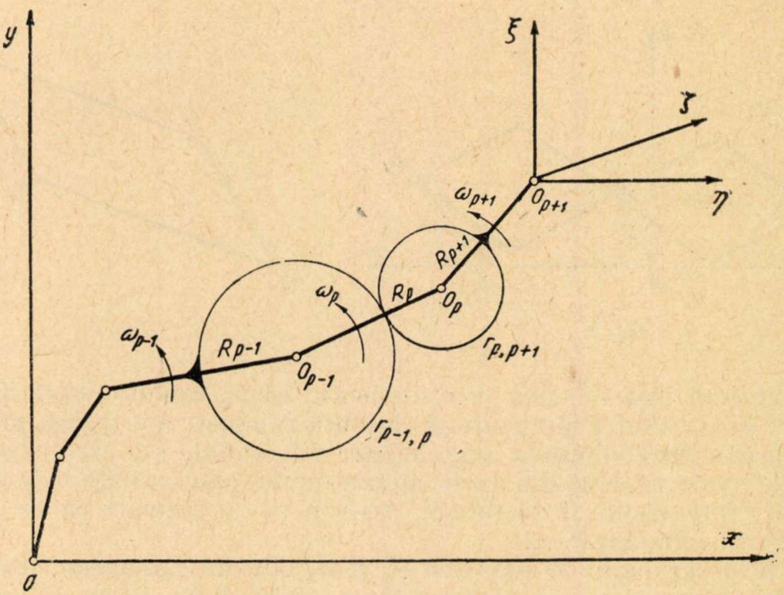


Fig. 2

dințată. Întrebuințarea practică a unui astfel de mecanism cu bare articulate și roți dințate în gen de poligon articulat este însă greoaie, mecanismul fiind ancombrant și nepermițînd întrebuințarea cursei complete a elementelor. Pentru descrierea unei anumite curbe mecanismul este greu de montat. Realizarea variației parametrilor lui — lungimile elementelor și concordanța dintre numărul de dinți al roților dințate și vitezele unghiulare și lungimile elementelor — este de asemenea dificilă. Utilizarea unor mișcări de rotație separate în diferite puncte ale planului și compunerea lor cu ajutorul unor pantografe care permit redarea identică a mișcărilor punctelor extreme ale lor, reduse în rapoarte prestabilite, elimină mare parte din dificultăți și asigură posibilitatea descrierii complete a curbelor ciclice.

Pentru exemplificare, amintim în cazul compunerii a două rotații mecanismul prezentat de D. Maroș și A. Csulak [2] și redat în figura 3.

Barele $O_1 A_1$ și $O_2 A_2$ au posibilitatea să-și varieze atît lungimile cît și vitezele lor unghiulare, iar mecanismul de legătură (pantograf) compune mişcarea lor în punctul P. Faţă de un sistem de axe în repaus xOy, vectorul de poziţie al punctului P este dat de

$$z = \frac{R_1\, e^{i\theta_1} + R_2\, e^{i\theta_2}}{2}. \tag{3}$$

Un mecanism mai simplu care lucrează în acelaşi fel ar putea fi constituit dintr-un paralelogram articulat (fig. 4), la care barele OA_1 şi OA_2 sînt comandate, mişcarea rezultantă înscriindu-se de punctul P.

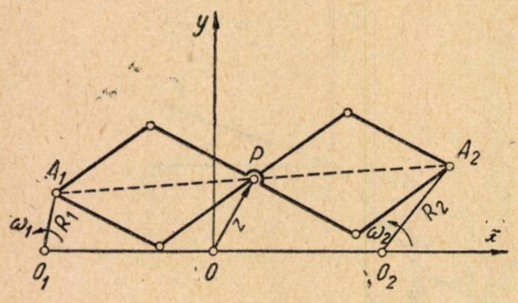


Fig. 3

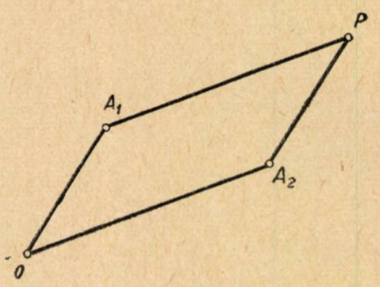


Fig. 4

Prezintă însă din nou inconvenientul că în anumite situaţii, curba descrisă de punctul P nu poate fi obţinută complet. S-ar putea preconiza mai departe întrebuinţarea angrenajelor diferenţiale ale căror excentrice reglabile fixate pe două din axele mecanismului dau posibilitatea obţinerii mişcării compusă din două rotaţii. Acestea pot fi adunate cu alte rotaţii cu ajutorul pantografelor.

Fie de exemplu în punctele O_1 şi O_2 cîte un mecanism diferenţial, avînd fiecare respectiv excentricele $O_1\, A_1$, $O_1\, B_1$ şi $O_2\, A_2$, $O_2\, B_2$, ale căror rezultante sînt $O_1\; C_1$ şi O_2C_2. Aceste duble rotaţii se compun cu ajutorul unui pantograf (cioc de barză) şi dau în punctul C_3 mişcarea rezultantă (fig. 5).

Deoarece punctele $C_1C_2C_3$ ale pantografului sînt coliniare şi ţinînd seama de paralelogramul $D_1D_2D_3C_2$, punctul C_2 împarte întotdeauna într-un raport constant α segmentul C_1C_3

$$\frac{C_1\,C_3}{C_2\,C_3} = \alpha > 1.$$

Faţă de originea O, urmărind contururile poligonale se obţine

$$z_3 = \frac{1}{1-\alpha}\,(z_1 + R_1\, e^{i\theta_1} + R_1'\; e^{i\theta_1'}) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(z_2 + R_2\, e^{i\theta_2} + R_2'\, e^{i\theta_2'}). \tag{4}$$

Desigur că legarea mai departe a unui al doilea pantograf, cu adăugarea a încă două rotaţii, multiplică posibilităţile mecanismului.

Continuînd în felul acesta cu n mecanisme diferențiale şi $n-1$ pantografe, ajungem la compunerea a $2n$ rotații

$$z = \sum_{1}^{2n} R_k e^{i\omega_k t}. \tag{5}$$

Dacă placa pe care înscrie vîrful ultimului pantograf este şi ea în mişcare de rotație cu viteza unghiulară ω_s, se adaugă o nouă componentă, pe lîngă faptul că vitezele unghiulare anterioare se adună cu ω_s devenind $\omega_k' = \omega_k + \omega_s$

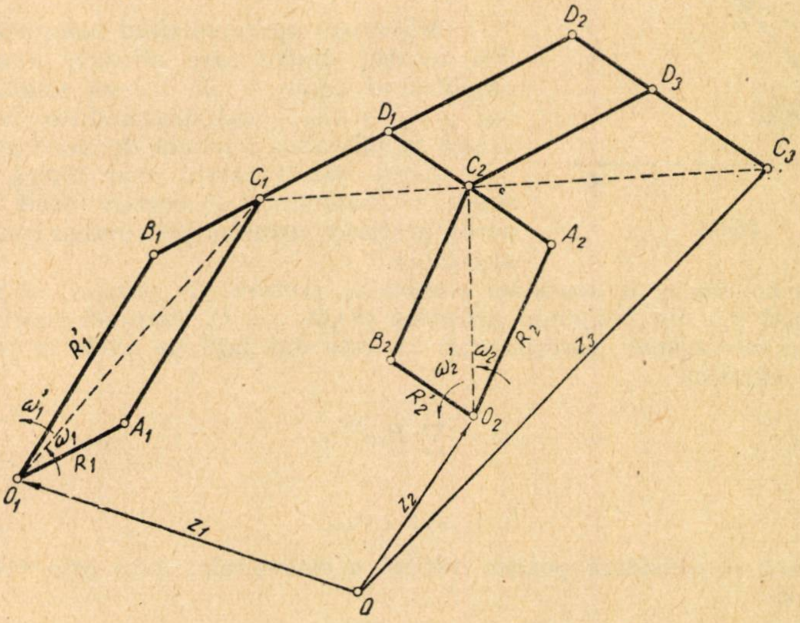


Fig. 5

$$z = \sum_{1}^{2n} R_k e^{i\omega_k' t} + R_s e^{i\omega_s t}, \tag{6}$$

unde R_s este distanța dintre centrul de rotație al plăcii şi vîrful ultimului pantograf, cînd toate excentricele anterioare au fost anulate.

În cazul în care placa are o mişcare de translație cu viteza $v = R_s \omega_s = \text{const.}$, presupunînd la limită că $R_s \to \infty$ şi $\omega_s \to 0$ (după o translație de axe de coordonate cu R_s) rezultă

$$z = \sum_{1}^{2n} R_k e^{i\omega_k t} + ivt, \tag{7}$$

în care desigur $\omega_k' = \omega_k$.

Un caz interesant se prezintă cînd printr-un sistem de pene alunecătoare, se poate proiecta unul din vectorii reprezentativi ai excentricelor pe direcția celuilalt. În mecanismul diferențial apare un singur excentric în rotație, a cărui lungime variază după o lege sinusoidală (fig. 6).

$$z = [R_1 + R_2 \cos\ (\omega_2 t)]\ e^{i\omega_1 t} =$$

$$= R_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{R_2}{2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + \frac{R_2}{2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}. \quad (8)$$

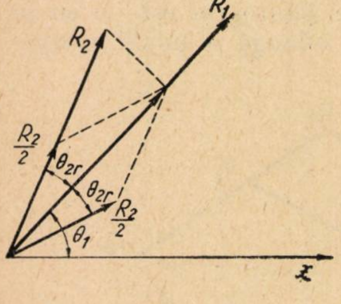


Fig. 6

Mișcarea apare ca fiind compusă din trei rotații, dintre care ultimele două cu amplitudini egale și de viteze unghiulare $(\omega_1 + \omega_2)$ și $(\omega_1 - \omega_2)$, înscriindu-se în felul acesta în mișcarea generală de acest gen.

Acest caz prezintă mai multă ușurință în manevrare și reglare decît obținerea aceluiași rezultat prin mecanismul de ansamblu.

În concluzie, în cantități complexe, vectorul de poziție al punctului final O_s, din poligonul articulat $OO_1O_2 \ldots O_s$ care schematizează diversele mecanisme posibile (fig. 2), este dat față de axele în repaus xOy de expresia

$$z = \sum_{1}^{s} R_p e^{i\theta_p}, \quad (9)$$

cu

$$\theta_p = \omega_p t + \theta_{p0}.$$

Dacă se consideră poziția inițială a elementelor dată prin vectorii complecși

$$a_p = R_p e^{i\theta_{p0}}, \quad (10)$$

vectorul z devine

$$z = \sum_{p=1}^{s} a_p e^{i\omega_p t}. \quad (11)$$

În continuare, dacă se notează $\omega_s t = \varphi$ și $\frac{\omega_p}{\omega_s} = m_p$;

$$z = \sum_{1}^{s-1} a_p e^{im_p\varphi} + a_s e^{i\varphi}, \quad (12)$$

iar dacă $e^{it} = u$,

$$z = \sum_{1}^{s} a_p u^{\omega_p}. \quad (13)$$

Redăm mai jos cîteva proprietăți importante ale curbelor ciclice superioare, care fac deosebit de practică aplicarea lor în tehnică.

1. Fiecare ciclică superioară de ordinul s poate fi produsă în general în $s!$ feluri diferite, prin permutarea între ele a celor s elemente ale poligonului articulat $OO_1O_2 \dots O_s$. Dacă se consideră o variație continuă a parametrilor ω_p și $a_p\,(R_p,\ \theta_{p0})$ mecanismul poate realiza ∞^{3s} ciclice de ordinul s. Practic însă, pentru un mecanism real, ω_p are un număr finit de valori N_{ω_p} corespunzător roților dințate existente, astfel că numărul de curbe ciclice obținute prin variațiile vitezelor unghiulare va fi

$$\Pi N_{\omega_p} = N_{\omega_1} . N_{\omega_2} \dots N_{\omega_s} . \tag{14}$$

În mod analog, valorile lungimilor elementelor R_p și a unghiurilor inițiale θ_{p0} sînt limitate, primele pentru ca mecanismul să nu fie prea ancombrant ($R_p \leqslant R_{p\,\max}$), ultimele corespunzător unghiului total de 360°. De asemenea, pentru a avea deosebiri practic vizibile între curbele trasate, variația lungimilor elementelor și a unghiurilor inițiale trebuie să fie discontinuă. Reprezentînd prin N_{R_p} și N_{θ_p} numărul valorilor posibile ale parametrilor R_p și θ_{p0}, rezultă numărul ciclicelor superioare respective

$$\Pi N_{R_p} = N_{R_1} . N_{R_2} \dots N_{R_s} \tag{15}$$

și

$$\Pi N_{\theta_p} = N_{\theta_1} . N_{\theta_2} \dots N_{\theta_s} . \tag{16}$$

În total, se vor obține

$$N = \Pi N_{\omega_p} . \Pi N_{R_p} . \Pi N_{\theta_p} \tag{17}$$

curbe. Cum nu toate curbele sînt diferite între ele, unele fiind realizate cîteodată, altele de cîte două ori și în general de $s!$ ori, găsim acoperitor

$$n > \frac{N}{s!} . \tag{18}$$

Fie de exemplu un mecanism cu cinci elemente avînd pentru vitezele unghiulare : $N_{\omega_1} = 1$; $N_{\omega_2} = 1\,000$; $N_{\omega_3} = 10$; $N_{\omega_4} = 500$; $N_{\omega_5} = 30$.

Dacă $R_{1\,\max} = 20$ mm, $R_{2\,\max} = 10$ mm, $R_{3\,\max} = 20$ mm, $R_{4\,\max} = 40$ mm și $R_{5\,\max} = 100$ mm și considerînd că se obțin curbe diferite pentru diferențe de 2 mm, rezultă : $N_{R_1} = 11$, $N_{R_2} = 6$, $N_{R_3} = 11$, $N_{R_4} = 21$ și $N_{R_5} = 51$.

Luînd pentru variațiile unghiurilor inițiale treapta de 10°, rezultă

$$N_{\theta_1} = N_{\theta_2} = N_{\theta_3} = N_{\theta_4} = N_{\theta_5} = 36.$$

În condițiile de mai sus :

— Numărul curbelor datorit variațiilor vitezelor unghiulare : $\Pi N_{\omega_p} = 1000 . 10 . 500 . 30 = 150\,000\,000$.

— Numărul curbelor datorit variațiilor lungimilor elementelor mecanismului : $\Pi N_{R_p} = 11 . 6 . 11 . 21 . 51 = 777\,546$.

— Numărul curbelor datorit variațiilor unghiurilor inițiale ale barelor : $\Pi N_{\theta_p} = 36^5 = 60\,466\,176$.

— Numărul total al curbelor diferite ce se pot realiza cu acest mecanism care are numai cinci elemente în rotație, va fi :

$$n > \frac{N}{5!} = \frac{7\,052\,284\,992\,614\,400\,000\,000}{5!} = 58\,769\,041\,605\,120\,000\,000.$$

Cu titlul de informaţie, dacă s-ar descrie o curbă în timpul mediu de 1 minut, timp absolut infim deoarece durata de lucru depăşeşte uneori chiar o oră, ar fi nevoie, fără să ţinem seama de timpul necesar pentru manevrarea şi montarea elementelor, de un număr de 111 784 219 187 823 ani pentru a epuiza toate posibilităţile mecanismului.

Prin adăugarea unor alte dispozitive, ca de exemplu întrebuinţarea în locul plăcii în rotaţie a uneia în translaţie etc., mecanismul are posibilităţi practic nelimitate. Se impune deci de la început pentru sinteza acestor curbe o codificare a lor, o împărţire în sub grupe, după caracteristicile mai importante.

2. Hodograful vitezelor punctului final O_s, este o curbă ciclică superioară de acelaşi ordin, descrisă cu aceleaşi viteze unghiulare, dar cu lungimea elementelor multiplicată respectiv cu ω_p.

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = i \sum_1^s a_p \, \omega_p \, e^{i\omega_p t}, \tag{19}$$

sau

$$-\dot{z} i = \sum_1^s a_p \, \omega_p \, e^{i\omega_p t}.$$

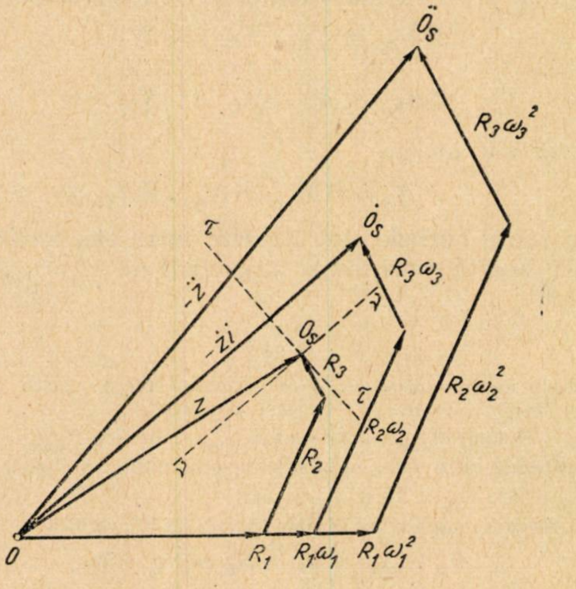


Fig. 7

În acelaşi mod, se obţin acceleraţiile şi de asemenea acceleraţiile de ordin superior

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\sum_1^s a_p \, \omega_p^2 \, e^{i\omega_p t}, \tag{20}$$

sau

$$-\ddot{z} = \sum_1^s a_p \, \omega_p^2 \, e^{i\omega_p t},$$

păstrîndu-se vitezele unghiulare, iar lungimea elementelor multiplicîndu-se cu ω_p^2.

Atît vitezele cît şi acceleraţiile sînt limitate la valorile

$$v \leqslant \sum_1^s | R_p \, \omega_p | ; \qquad a \leqslant \sum_1^s | R_p \, \omega_p^2 | .$$

În conformitate cu formulele (11), (19) şi (20) se obţin şi modurile de construcţie grafică a vectorului de poziţie, vitezei şi acceleraţiei, concretizate în figura 7.

Reiese, de asemenea, direcţia normalei paralelă în O_s cu $O\dot{O}_s$, precum şi tangenta perpendiculară pe normală în O_s.

Făcîndu-se construcţia în sens invers şi alegînd scara ω_s pentru viteze şi ω_c^2 pentru acceleraţii, se determină direct acceleraţiile, vitezele, centrul de curbură şi concavitatea curbei (fig. 8).

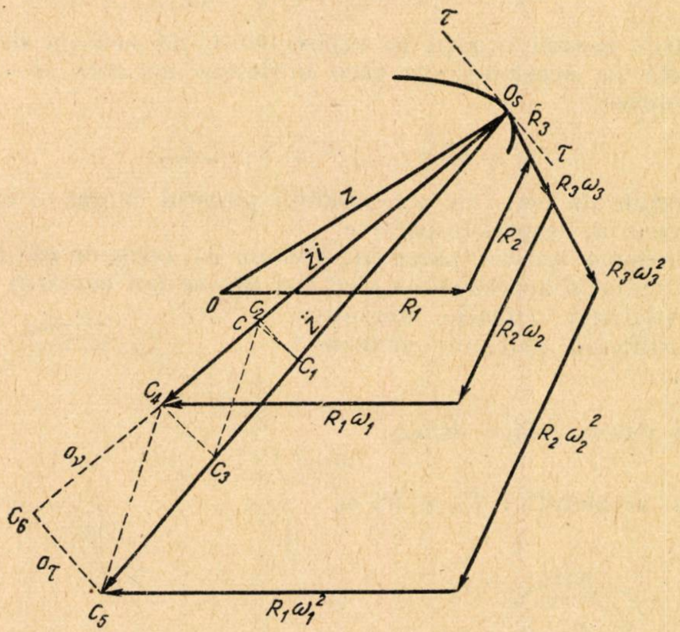


Fig. 8

Din triunghiurile asemenea $O_sC_2C_3$ şi $O_sC_4C_5$, unde $O_sC_4 = O_sC_3$ şi $O_sC_2 = O_sC_1$, precum şi din triunghiurile asemenea O_sC_1C şi $O_sC_5C_6$ rezultă

$$\frac{O_s C_2}{\omega_s v} = \frac{\omega_s v}{\omega_s^2 a} ; \qquad \frac{O_s C}{O_s C_1} = \frac{\omega_s^2 a}{\omega_s^2 a_\nu} .$$

Deci

$$\rho = \frac{v^2}{a_\nu} = O_s\, C. \tag{21}$$

Concavitatea curbei este îndreptată bineînţeles către C, sau mai simplu, este dată de direcţia acceleraţiei $\ddot{z}$.

Suportul vitezei (tangenta la curbă) are direcţia vectorului $\dot{z}$ şi ecuaţia :

$$(\mathfrak{z} - z)\, \dot{\bar{z}} - (\bar{\mathfrak{z}} - \bar{z})\, \dot{z} = 0. \tag{22}$$

Suportul acceleraţiei are direcţia vectorului $\ddot{Z}$ şi ecuaţia

$$(\mathfrak{z} - z)\, \ddot{\bar{z}} - (\bar{\mathfrak{z}} - \bar{z})\, \ddot{z} = 0. \tag{23}$$

Suportul normalei va avea ecuaţia

$$(\mathfrak{z} - z)\, \dot{\bar{z}} + (\bar{\mathfrak{z}} - \bar{z})\, \dot{z} = 0. \tag{24}$$

Derivarea acestei ecuaţii în raport cu t, dă ecuaţia dreptei CC_1 perpendiculară pe acceleraţie şi care întîlneşte normala în centrul de curbură al curbei

$$(\mathfrak{z} - z)\, \ddot{\bar{z}} + (\bar{\mathfrak{z}} - \bar{z})\, \ddot{z} = 2\, \dot{z}\, \dot{\bar{z}}. \tag{25}$$

În ecuaţiile de mai sus, z reprezintă punctul curent al ciclicei, iar $\mathfrak{z}$ punctul curent al dreptei respective.

În încheierea acestui paragraf, trebuie să reţinem că diagramele polare ale vitezelor şi acceleraţiilor (fig. 9 şi 10), se pot construi cu acelaşi mecanism, păstrînd vitezele unghiulare dar modificînd mărimile elementelor astfel :

$$\text{pentru viteze : } R_p' = R_p\, \omega_p. \qquad \text{pentru acceleraţii : } R_p'' = R_p\, \omega_p^2. \tag{26}$$

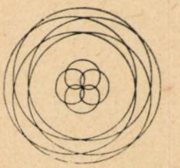


Fig. 9

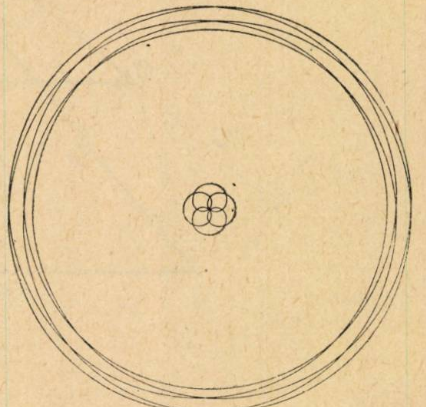


Fig. 10

3. Pentru mărirea curbelor prin asemănare faţă de centrul O_s se vor modifica mărimile vectorilor cu raportul de asemănare, adică $R_p' = k\, R_p$.

4. Curbele polare ale mişcării planetare de ordinul s sînt ciclice superioare de ordinul $(s-1)$. Într-adevăr, considerînd vectorul ζ al unui punct oarecare al planului în mişcarea planetară de ordinul s faţă de axele respective mobile $\xi\eta$ paralele în momentul iniţial cu axele în repaus xOy (fig. 2) din formula (12)

$$z = \zeta e^{i\varphi} + \sum_{1}^{s-1} a_p e^{im_p\varphi}, \tag{27}$$

şi invers

$$\zeta = z e^{-i\varphi} - \sum_{1}^{s-1} a_p e^{im'_p\varphi} \quad \text{cu } m'_p = m_p - 1. \tag{28}$$

Coordonatele centrului instantaneu de rotaţie faţă de axele mobile $\xi\eta$ — deci rostogolitoarea — se determină anulînd viteza

$$\dot{z} = i\omega_s \left(\zeta e^{i\varphi} + \sum_{1}^{s-1} a_p m_p e^{im_p\varphi}\right),$$

deci

$$\widetilde{\zeta} = -\sum_{p=1}^{s-1} a_p m_p e^{im'_p\varphi} = -\sum_{p=1}^{s-1} a_p \frac{\omega_p}{\omega_s} e^{i(\omega_p-\omega_s)t} \tag{29}$$

Asemănător obţinem pentru bază, coordonatele centrului instantaneu de rotaţie faţă de axele fixe

$$\widetilde{z} = -\sum_{p=1}^{s-1} a_p m'_p e^{im_p\varphi} = -\sum_{p=1}^{s-1} a_p \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s} e^{i\omega_p t}. \tag{30}$$

Din formulele (29) şi (30) se observă foarte bine conjugarea acestor două curbe în privinţa inversării factorilor de amplificare între vitezele unghiulare şi lungimile elementelor, unghiurile iniţiale rămînînd aceleaşi.

În construcţia bazei se menţin vitezele unghiulare, dar se modifică lungimile elementelor în raportul $m'_p = \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s}$. La rostogolitoare se modifică vitezele, devenind $\omega_1 - \omega_s, \omega_2 - \omega_s, \ldots, \omega_p - \omega_s$ şi lungimile elementelor în raportul $m_p = \frac{\omega_p}{\omega_s}$.

Pentru realizarea mecanică, se păstrează din mecanism numai primele $(s-1)$ elemente, ultimului anulîndu-i-se lungimea — sau viteza unghiulară. În obţinerea diferenţelor $\omega_p - \omega_s$, ne putem imagina mecanismul cu posibilitatea suprapunerii peste mişcările primelor $s-1$ elemente a unei rotaţii relative ω_s, fie supunînd întreg mecanismul la o rotaţie cu ω_s, fie punînd în mişcare în sens invers placa pe care se înscrie traiectoria. În acest caz, în trecerea de la construcţia curbei la construcţia mecanică a bazei şi a rostogolitoarei, trebuie modificate numai lungimile elementelor în rapoartele stabilite mai sus.

5. Fiecare ciclică de ordinul s poate fi produsă în s moduri diferite, prin rostogolirea a două ciclice de ordinul $s-1$, una pe alta fără alunecare.

Această proprietate rezultă din faptul că drept ultim element poate fi luat oricare din cele s elemente ale poligonului articulat. Se obţin deci s perechi de curbe polare diferite, care generează aceeaşi ciclică superioară de ordinul s.

6. Din cauza roţilor dinţate care au un număr întreg de dinţi, producerea ciclicelor pe cale mecanică atrage după sine întrebuinţarea unor rapoarte de viteze unghiulare raţionale. Dacă luăm D numitorul comun şi Δ factorul comun al vitezelor unghiulare $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ astfel ca

$$\omega_p = \frac{\Delta}{D} N_p \tag{31}$$

obţinem valorile N_p drept numere întregi şi prime între ele. Ecuaţia ciclicei devine după transformarea $\tau = \frac{\Delta}{D} t$:

$$z = \sum_1^s a_p e^{iN_p \tau}, \tag{32}$$

iar dacă $e^{i\tau} = u$, va rezulta ecuaţia algebrică

$$z = \sum_1^s a_p u^{N_p}, \tag{33}$$

al cărui grad va fi dat bineînţeles de $max \mid Np \mid$.

Curbele ciclice vor fi în acest caz algebrice şi închise, u fiind periodic cu $\tau = 2\pi$. De altfel, relaţia (33) va reprezenta transformarea cercului unitate $u\bar{u} = 1$ în ciclica algebrică respectivă.

Ca singularităţi, aceste curbe pot avea numai puncte multiple şi puncte de întoarcere. Punctele singulare se găsesc pe hesiana curbei, care la mişcările simple constînd numai din compunerea a două rotaţii, se descompune în mai multe cercuri interioare.

În cazul în care rapoartele vitezelor unghiulare sînt iraţionale, curbele devin transcendente, cu o infinitate de ramuri, rămînînd neînchise.

7. Perioada ciclicei algebrice corespunzătoare lui $\tau = 2\pi$ este

$$T = 2\pi \frac{D}{\Delta}, \tag{34}$$

astfel că $\omega_p T = 2\pi N_p$, N_p reprezentînd numărul de ture-rotaţii complete — a elementului p din poligonul articulat, pînă la obţinerea ciclicei complete.

În practică, este mai uşor de urmărit rotaţiile N_p decît perioada T şi se poate monta în acest scop un numărător de ture pe axul p.

8. Ordinul de multiplicitate al unui punct al ciclicei algebrice poate fi cel mult $max \mid N_p \mid$ corespunzător rădăcinilor ecuaţiei (33) pentru z dat.

9. Numărul de puncte de intersecţie dintre o ciclică algebrică şi o dreaptă este cel mult $2\ max \mid N_p \mid$.

Dreapta

$$\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \tag{35}$$

se intersectează cu ciclica în punctele date de rădăcinile ecuației

$$\sum_{1}^{s} (\alpha a_p u^{N_p} + \beta \bar{a}_p u^{-N_p}) + \gamma = 0. \tag{36}$$

10. Numărul tangentelor duse dintr-un punct $(\alpha, \bar{\alpha})$ al planului la ciclica algebrică este cel mult *2 max* $\{ |N_p|$ sau $|N_p - N_q| \}$.

Dreapta de ecuație (22) trecînd prin punctul $(\alpha, \bar{\alpha})$ dă relația

$$(\alpha - z)\dot{\bar{z}} - (\bar{\alpha} - \bar{z})\,\dot{z} = 0,$$

care transformată prin introducerea lui z devine

$$\sum_{1}^{s} N_p (\bar{\alpha}\, a_p u^{N_p} + \alpha \bar{a}_p u^{-N_p}) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{p=1}^{s} a_p \bar{a}_q (N_p + N_q)\, u^{N_p - N_q}, \tag{37}$$

rezultînd condiția menționată mai sus referitor la numărul rădăcinilor sale u.

Se observă că dacă $N_p + N_q = 0$ dispare contribuția exponentului $N_p - N_q = 2N_p$. De asemenea, pentru un punct de întoarcere (punct dublu) se reduce ordinul cu o unitate.

11. Simetria ciclicei față de axa reală (sau imaginară) se obține în cazul cînd toate cantitățile a_p sînt reale (sau pur imaginare), respectiv unghiurile inițiale sînt $k\pi\left(\text{sau } \dfrac{3k\pi}{2}\right)$. Astfel

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum R_p\, e^{i(\omega_p t + \theta_{p0})}, \\ z(-t) &= \sum R_p\, e^{i(-\omega_p t + \theta_{p0})}, \\ \bar{z}(t) &= \sum \bar{R}_p\, e^{-i(\omega_p t + \theta_{p0})}. \end{aligned} \tag{38}$$

Din condiția $z(-t) = \bar{z}(t)$ reiese : $\theta_{p0} = k\pi$.

12. Numărul simetriilor de rotații (maxime radiale pentru R_p pozitive) fiind M, acestea se obțin numai în cazul cînd valorile lui N_p aparțin unui șir aritmetic cu rația M, adică

$$N_p = MK_p + N_s, \tag{39}$$

în care K_p sînt întregi și primi între ei.

Într-adevăr, acest lucru este ușor vizibil pentru doi vectori în rotație (cicloide) unde

$$M = N_2 - N_1, \tag{40}$$

deoarece plecînd de la relațiile

$$\theta_2 = \omega_2 t$$

$$\theta_1 = \omega_1 t$$

cu condiția : $\theta_2 - \theta_1 = (\omega_2 - \omega_1)\, t = 2\pi K,$

se obţine

— timpul necesar pentru descrierea curbei între două axe de simetrie — maxime pentru R_1 şi R_2 de acelaşi semn şi minime pentru R_1 şi R_2 de semne contrare

$$T_M = \frac{2\pi K}{\omega_2 - \omega_1}; \tag{41}$$

— unghiurile descrise de vectori în acest timp ($K = 1$) (deci între două axe de simetrie consecutive)

$$\theta_{1M} = \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi N_1}{N_2 - N_1},$$

$$\theta_{2M} = \frac{2\pi\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi N_2}{N_2 - N_1}; \tag{42}$$

— numărul maximelor cuprinse în unghiul total

$$M = \frac{2\pi N_1}{\theta_{1M}} = \frac{2\pi N_2}{\theta_{2M}} = N_2 - N_1. \tag{43}$$

Considerînd s vectori în rotaţie, pentru doi cîte doi vectori, unul fiind de ordinul s, se obţin concordanţele

$$N_1 - N_s,\ N_2 - N_s,\ \ldots,\ N_{s-1} - N_s$$

iar numărul concordanţelor pentru toţi vectorii laolaltă se obţine ca fiind cel mai mare divizor comun al valorilor întregi $N_p - N_s$, cu $p = 1, 2, \ldots, s - 1$, adică

$$N_p - N_s = MK_p. \tag{44}$$

Reiese de aici că numerele $N_1, N_2, \ldots, N_s$ şi M sînt întregi şi prime între ele. De asemenea, familia de numere $K_1, K_2, \ldots, K_{s-1}$ şi în sfîrşit grupurile separate de trei numere N_p, N_s şi K_p pentru $p = 1, 2, \ldots, s - 1$, trebuie să îndeplinească aceleaşi condiţii.

Unghiul dintre două axe de simetrie alăturate este

$$\theta_M = \frac{2\pi}{M}. \tag{45}$$

Timpul parcurs între două axe de simetrie executate consecutiv, desigur acelaşi pentru oricare vector, va fi

$$T_M = \frac{2\pi K_p}{\omega_p - \omega_s} = \frac{2\pi K_q}{\omega_q - \omega_s} = \ldots \tag{46}$$

K_p reprezentînd deci numărul de cercuri complete parcurse în mişcare relativă $(\omega_p - \omega_s)$ de vectorul p, între două axe de simetrie.

Dacă d este numitorul comun iar δ factorul comun al mărimilor $\omega_1 - \omega_s,\ \omega_2 - \omega_s, \ldots, \omega_{s-1} - \omega_s$, adică

$$\omega_v - \omega_s = \frac{\delta}{d} K_p, \tag{47}$$

rezultă

$$T_M = 2\pi \frac{d}{\delta} \tag{48}$$

și

$$M = \frac{T}{T_M} = \frac{D}{\Delta} \frac{\delta}{d}, \tag{49}$$

iar unghiul parcurs de vectorul p în acest timp devine

$$\theta_{pM} = \omega_p T_M = 2\pi \frac{N_p}{M}. \tag{50}$$

13. În privința razei de curbură, ne limităm la curbele cu simetrie de rotație față de axa Ox. Coordonatele carteziene ale unui punct curent vor fi

$$\begin{aligned} x &= \sum R_p \cos \omega_p t, \\ y &= \sum R_p \sin \omega_p t. \end{aligned} \tag{51}$$

Raza de curbură dată de formula

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \tag{52}$$

devine după derivarea coordonatelor (51) și introducerea în (52)

$$\rho = \frac{\left[\left(\sum\limits_p R_p \omega_p \sin \omega_p t\right)^2 + \left(\sum\limits_q R_q \omega_q \cos \omega_q t\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\sum\limits_p R_p \omega_p \sin \omega_p t\right)\left(\sum\limits_q R_q \omega_q^2 \sin \omega_q t\right) + \left(\sum\limits_p R_p \omega_p \cos \omega_p t\right)\left(\sum\limits_q R_q \omega_q^2 \cos \omega_q t\right)}, \tag{53}$$

sau

$$\rho = \frac{\left[\sum\limits_p R_p^2 \omega_p^2 + 2 \sum\limits_p \sum\limits_q R_p R_q \omega_p \omega_q \cos(\omega_p - \omega_q) t\right]^{3/2}}{\sum\limits_p R_p^2 \omega_p^3 + \sum\limits_p \sum\limits_q R_p R_q \omega_p \omega_q (\omega_p + \omega_q) \cos(\omega_p - \omega_q) t}, \tag{54}$$

unde se poate întrebuința în loc de ω_p valoarea proporțională N_p, concomitent cu înlocuirea lui t prin τ.

La momentul $t = 0$ sau $t = T_M = 2\pi \frac{d}{\delta}$ (pentru axele de simetrie)

$$\rho_0 = \frac{(\sum\limits_p R_p N_p)^2}{\sum\limits_p R_p N_p^2}. \tag{55}$$

La momentul $t = \frac{T_M}{2} = \pi \frac{d}{\delta}$ (între axele de simetrie)

$$\rho_1 = \frac{[\sum\limits_p R_p^2 N_p^2 + 2 \sum\limits_p \sum\limits_q R_p R_q N_p N_q (-1)^{K_p - K_q}]^{3/2}}{\sum\limits_p R_p^2 N_p^3 + \sum\limits_p \sum\limits_q R_p R_q N_p N_q (N_p + N_q)(-1)^{K_p - K_q}} \tag{56}$$

Aceste formule pot fi transformate dacă se ține seama de relația (39).

14. Ca o indicație a densității liniilor ar putea fi considerat raportul dintre lungimea ciclicei și aria cercului exînscris.

Pentru ciclice simetrice

$$\dot{z} = i \sum_1^s R_p \, \omega_p \, e^{i \omega_p t},$$

astfel că lungimea ciclicei de ordinul s este

$$L = \int_0^T |\dot{z}| \, dt \leqslant 2\pi \sum_1^s | R_p N_p | \tag{57}$$

iar aria cercului exînscris

$$A = \pi \left\{ \max \left| \sum_1^s R_p \, e^{i \omega_p t} \right| \right\}^2 \leqslant \pi \left\{ \sum_1^s | R_p | \right\}^2, \tag{58}$$

indicele relativ de densitate a liniilor avînd valoarea informativă

$$\eta = \frac{L}{A} \approx \frac{2 \sum\limits_1^s | R_p N_p |}{\left\{ \sum\limits_1^s | R_p | \right\}^2}. \tag{59}$$

Acest indice nu poate fi considerat în mod absolut, atît din cauza aproximării lungimilor (57) și ariilor ciclicelor (58) cu valorile lor superioare, cît și datorită variației densității liniilor pe suprafața cercului exînscris (fig. 11 și 12).

O densitate mare de linii se obține cu viteze unghiulare mari (respectiv valori N_p mari) și lungimi mici de vectori (respectiv valori R_p mici).

Toate aceste proprietăți, precum și altele care vor fi studiate într-o lucrare viitoare, ca de exemplu : anvelopa exterioară și interioară a unei curbe ciclice superioare, densitatea de arce de ciclice pe unitatea de suprafață etc. sînt necesare în tratarea teoretică a problemei și facilitează întrebuințarea curbelor ciclice în tehnică pentru aproximarea diferitelor curbe plane închise, precum și în general pentru obținerea diverselor desene.

O cercetare sumară a curbei date în privința intersecției cu o dreaptă, numărului de maxime radiale — numărul simetriilor de rotație, punctelor

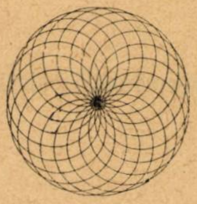


Fig. 11. — $\eta = 1{,}83$

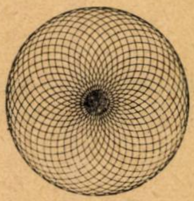


Fig. 12. — $\eta = 3{,}5$

multiple, razelor de curbură etc. va da indicații destul de precise asupra curbelor ciclice ce o pot aproxima suficient de bine.

Aproximații convenabile se pot obține întrebuințînd metodele Fourier, Gaus, Taylor, Cebîșev.

Trebuie remarcat că curbele ciclice superioare au mai multe posibilități pentru realizarea în condiții optime a problemelor arătate decît curbele de bielă, foarte cunoscute și foarte utilizate și ele în teoria și în tehnica mecanismelor.

Curbele ciclice posedă anumite simetrii în proprietăți care ușurează calculul lor, iar numărul mare al parametrilor le face mai cuprinzătoare, realizarea lor mecanică fiind destul de comodă.

Proprietățile considerate pînă acum permit atacarea problemelor de sinteză a mecanismelor pentru curbe ciclice.

Ținînd seama de posibilitățile de sistematizare a calculelor, sinteza va fi împărțită în două părți : sinteza mecanismelor pentru curbele ciclice inferioare și sinteza mecanismelor pentru curbele ciclice superioare.

În această lucrare vom trata prima parte, sinteza mecanismelor pentru curbele ciclice inferioare, obținute prin întrebuințarea unui poligon cu două bare articulate, sinteză care se pretează să fie făcută exact în conformitate cu o codificare a curbelor.

Deși ciclicele inferioare sînt cele mai simple curbe — epi- și hipocicloide, scurtate sau alungite — totuși marea lor varietate, forma lor diferită și aranjarea întrețesută a două sau mai multe din ele, poate conduce la complicarea desenului în funcție de scopul urmărit.

SINTEZA MECANISMELOR PENTRU CICLICELE INFERIOARE

a. *Compunerea a două rotații*

Fie R_1, R_2 (pozitive) lungimile elementelor și ω_1, ω_2 (respectiv N_1, N_2) vitezele lor unghiulare, curba fiind dată sub forma complexă de

$$z = R_1 e^{i\theta_1} + R_2 e^{i\theta_2}, \tag{60}$$

Unghiurile inițiale nu intervin deoarece întotdeauna se va prezenta un suport comun al vectorilor a_1 și a_2 care poate fi ales ca axă de referință și totodată ca axă de simetrie de rotație (maxim sau minim radial).

Maximele se vor înscrie pe un cerc exînscris ciclicei inferioare care va avea raza

$$R_E = R_1 + R_2. \tag{62}$$

Similar, minimele se vor înscrie pe un cerc înscris ciclicei inferioare, a cărei rază va fi dată normal de

$$R_I = R_1 - R_2, \tag{63}$$

considerînd bineînțeles $R_1 > R_2$.

Numărul maximelor (respectiv minimelor) între două maxime existînd un minim și invers, va fi

$$M = | N_2 - N_1 |. \tag{64}$$

Maximele (minimele) sînt descrise în sensul rotației N_1, considerat pozitiv corespunzător lui $R_1 > R_2$.

Numărul cercurilor punctelor duble (hesianele curbei) între cercurile exterior și interior (exînscris și înscris ciclicei inferioare) este dat de

$$C_i = N_1 - 1, \tag{65}$$

deoarece arg. $z = 2\pi\, N_1$, adică numărul de rotații ale vectorului rezultant z în jurul originii, corespunde cu numărul de rotații ale vectorului R_1.

Raza de curbură într-un punct de maxim este determinată de

$$\rho_e = \frac{(R_1 N_1 + R_2 N_2)^2}{R_1 N_1^2 + R_2 N_2^2} \tag{66}$$

și păstrează semnul constant pozitiv, concavitatea fiind îndreptată întotdeauna spre centru.

Raza de curbură într-un punct de minim

$$\rho_i = \frac{(R_1 N_1 - R_2 N_2)^2}{R_1 N_1^2 - R_2 N_2^2}, \tag{67}$$

schimbă de semn pentru valorile : $\frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = k = \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ avînd concavitatea îndreptată spre centru pentru valorile

$$-N_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} < N_2 < N_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Variația razelor de curbură cu separarea zonelor importante este arătată în figura 13.

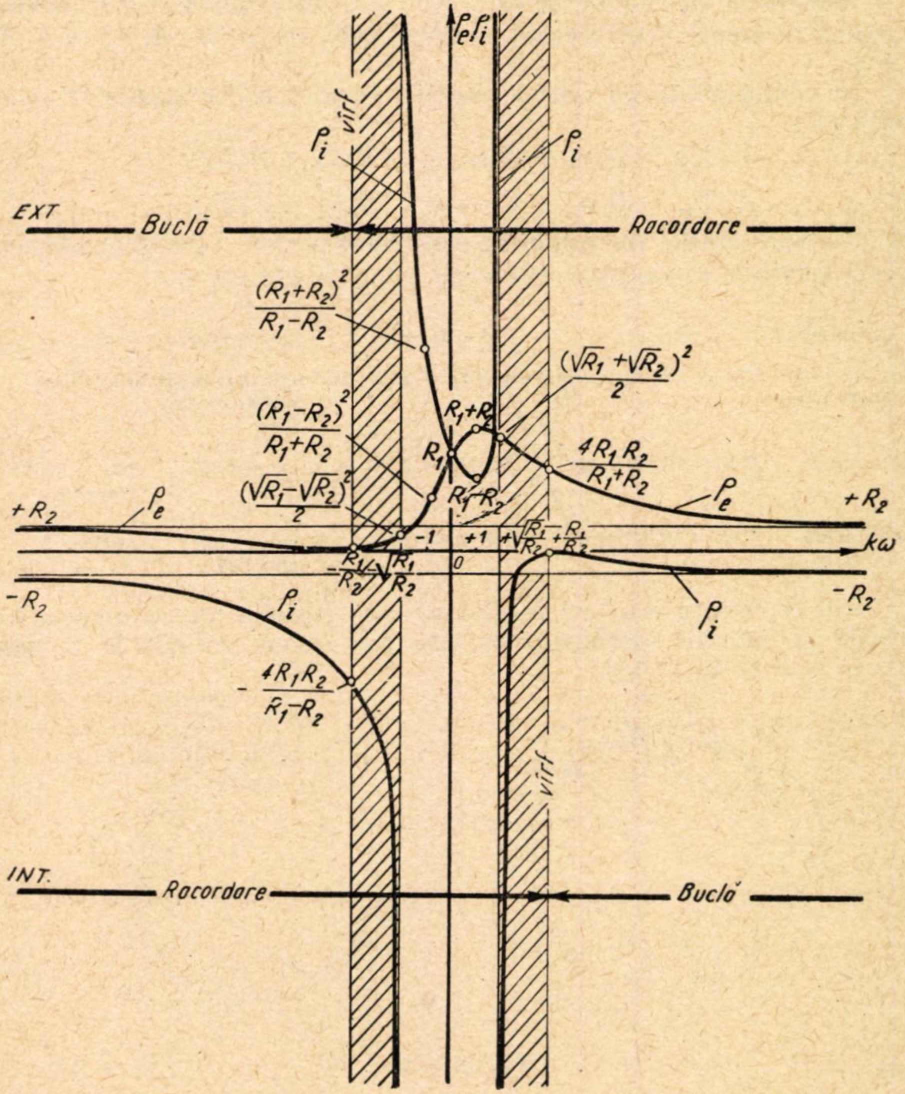

ρe ρi
vîrf
ρi
ρi
EXT
Buclă
Racordare
(R1+R2)²/(R1−R2)
(√R1+√R2)²/2
(R1−R2)²/(R1+R2)
R1+R2
R1
4R1R2/(R1+R2)
ρe
+R2
ρe
+R2
(√R1−√R2)²/2
R1−R2
−1
+1
+√(R1/R2)
+R1/R2
kω
0
−R1/R2
−√(R1/R2)
−R2
ρi
−R2
ρi
−4R1R2/(R1−R2)
vîrf
INT.
Racordare
Buclă

Fig. 13

Sensul concavității în punctele de maxim sau minim radial este deci

la exterior : $R_1 N_1^2 + R_2 N_2^2 > 0$
spre centrul 0,
la interior : $R_1 N_1^2 - R_2 N_2^2 > 0$

$R_1 N_1^2 - R_2 N_2^2 = 0$ curbura este nulă,

$R_1 N_1^2 - R_2 N_2^2 < 0$ contra centrului 0.

Remarcăm că la interior este deci posibilă obținerea unei porțiuni aproximativ drepte pentru cazul curburei nule, respectiv $R_1 N_1^2 = R_2 N_2^2$, $\rho_i = \infty$.

În conformitate cu sensul vitezei în punctele de maxim (V_M) sau minim (V_m)

$$V_M = R_1\omega_1 + R_2\omega_2 = k\,(R_1N_1 + R_2N_2),$$

$$V_m = R_1\omega_1 - R_2\omega_2 = k\,(R_1N_1 - R_2N_2),$$

față de sensul rotației vectorului R_1 considerat pozitiv, rezultă următoarea schemă referitor la variația coardei în punctele extreme:

Ciclica descrisă	Exterior	Interior	Ciclica descrisă	Forma curbei
epi-sau hipocicloidă scurtată	$R_1N_1 + R_2N_2 > 0$	$R_1N_1 - R_2N_2 > 0$	epi-sau hipocicloidă scurtată	racordare
hipocicloidă	$R_1N_1 + R_2N_2 = 0$	$R_1N_1 - R_2N_2 = 0$	epicicloidă	punct de întoarcere
hipocicloidă alungită	$R_1N_1 + R_2N_2 < 0$	$R_1N_1 - R_2N_2 < 0$	epicicloidă alungită	buclare

Din cercetarea schemei rezultă că este posibilă numai o racordare normală la exterior combinată cu cele trei cazuri posibile la interior, sau invers (fig. 14 și 15).

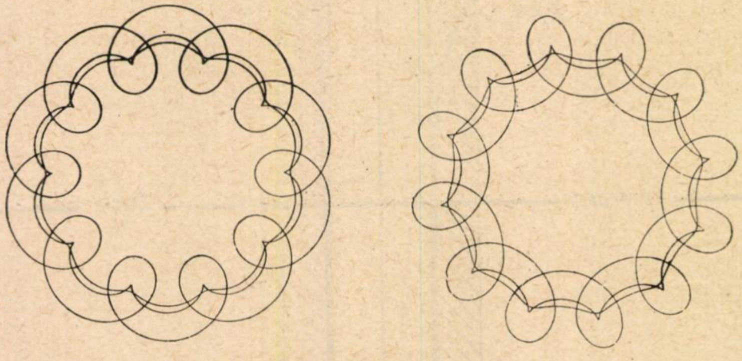


Fig. 14 și 15

Nu este posibil obținerea concomitentă la interior și exterior a punctelor de întoarcere sau combinarea lor cu ramuri buclate.

b. *Compunerea unei rotații cu o translație*

Fie R lungimea elementului în rotație cu viteza unghiulară ω și v viteza elementului în translație.

Ecuația ciclicei inferioare va fi în acest caz

$$z = Re^{i\omega t} + ivt, \tag{68}$$

curba înscriindu-se între două drepte paralele cu direcția de translație și distanțate cu

$$D = 2R. \tag{69}$$

În funcție de valoarea $R\omega \gtrless v$, se obține

— cicloida alungită (buclare), pentru $R\omega > v$

— cicloida normală (punct de întoarcere), pentru $R\omega = v$

— cicloida scurtată (racordare) pentru, $R\omega < v$.

Distanța de repetiție este de asemenea în funcție de valoarea $R\omega \gtrless v$:

$$\delta = \frac{2\pi v}{\omega} = 2\pi r \tag{70}$$

rezultînd :

— pentru cicloida scurtată : $\delta = \dfrac{2\pi v}{\omega} > 2\pi R \qquad (R < r)$

— pentru cicloida normală : $\delta = \dfrac{2\pi v}{\omega} = 2\pi R \qquad (R = r)$

— pentru cicloida alungită : $\delta = \dfrac{2\pi v}{\omega} < 2\pi R \qquad (R > r)$

r fiind raza cercului rostogolitor.

Pentru a obține aceeași distanță de repetiție pentru o cicloidă normală, alungită sau scurtată, se mențin ω și v și se modifică R.

c. *Cazul unui vector în rotație cu amplitudine variabilă armonic*

Fie R_1, R_2 lungimile elementelor în rotație și ω_1, ω_2 (respectiv N_1 N_2) vitezele lor unghiulare. Considerînd proiecția vectorului R_2 pe direcția vectorului R_1, curba este dată sub formă complexă de

$$z = [R_1 + R_2 \cos(\omega_2 t)]\, e^{i\omega_1 t}, \tag{71}$$

sau

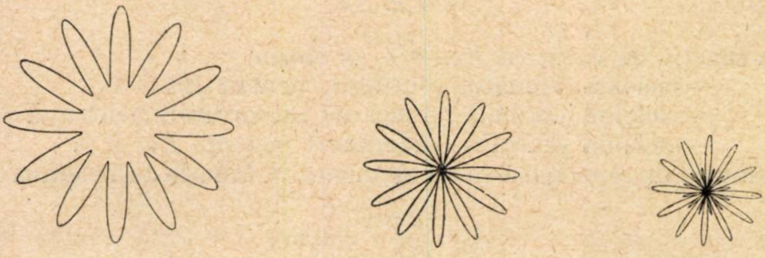
$$z = R_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{R_2}{2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t} + \frac{R_2}{2} e^{i(\omega_1-\omega_2)t}. \tag{72}$$

Curba este limitată exterior și interior de cercurile exînscris și înscris ciclicei inferioare, de raze :

$$R_E = R_1 + R_2,$$

$$R_I = R_1 - R_2,$$

R_I este pozitiv pentru $R_1 > R_2$ şi devine negativ pentru $R_1 < R_2$ (fig. 16 *a*, *b*, *c*).



a) $R_1 > R_2$ *b*) $R_1 = R_2$ *c*) $R_1 < R_2$

Fig. 16

Unghiul la centru între axele a două maxime consecutive şi timpul în care acestea se descriu va fi

$$\theta_{IM} = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2\,\pi \frac{N_1}{N_2} \tag{73}$$

$$T_M = \frac{2\,\pi}{\omega_2} \tag{74}$$

numărul de maxime fiind dat de

$$M = \frac{2\,\pi N_1}{\theta_{1M}} = N_2$$

Unghiul dintre două maxime alăturate devine

$$\theta_M = \frac{2\,\pi}{M} = \frac{2\,\pi}{N_2} \tag{75}$$

şi deci :

$$\theta_{1M} = N_1 . \theta_M$$

⁂

Pe lîngă analiza caracteristicilor ciclicelor inferioare, calculele de mai sus permit sinteza mecanismelor pentru realizarea curbelor, bineînţeles în conformitate cu codificarea rezultată din proprietăţile lor.

Într-o lucrare viitoare vom căuta să cercetăm şi alte proprietăţi ale curbelor ciclice superioare, făcînd şi o sinteză a mecanismelor respective.

Aceste curbe sînt foarte necesare în rezolvarea unor probleme de mare actualitate în tehnica modernă.

Primită la redactie la 13 februarie 1960

К СИНТЕЗУ МЕХАНИЗМОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ КРИВЫХ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается важная группа циклических кривых, легко получающихся механическим путем и обладающих замечательными свойствами при их применении к решению некоторых актуальных задач современной техники.

Речь идет об обобщении циклоид путем повторения их сходных условий механического воспроизведения.

Схематизируя движения в виде векторов постоянных величин, вращающихся с различными постоянными угловыми скоростями, дается краткий обзор некоторых механизмов, которыми можно пользоваться для построения циклических кривых многоугольников из шарнирных стержней или дифференциальных зацеплений с регулируемыми эксцентриками вместе с пантографами, позволяющими произвести сложение движений, причем движение можно усложнить путем проектирования некоторых векторов на направление других, или путем вписания равнодействующей движения на пластинку во вращательном или поступательном движениях, и рассматриваются свойства, облегчающие их применение в технике.

В конце работы приводится синтез механизмов для низших циклических кривых.

CONTRIBUTION À LA SYNTHÈSE DES MÉCANISMES DES COURBES CYCLIQUES

RÉSUMÉ

Le travail comprend l'étude d'une importante famille de courbes cycliques, facilement obtenues par voie mécanique et présentant de remarquables propriétés en ce qui concerne leur utilisation pour résoudre certains problèmes actuels de la technique moderne.

Il s'agit d'une généralisation des cycloïdes par la multiplication des conditions similaires de leur production mécanique.

En schématisant les mouvements sous la forme de vecteurs de longueurs constantes, tournant à des vitesses angulaires diverses, mais constantes, les auteurs passent sommairement en revue quelques mécanismes pouvant être utilisés pour engendrer des courbes cycliques, tels que : des polygones constitués par des barres articulées, ou bien des engrenages différentiels à excentriques réglables, combinés avec des pantographes permettant la sommation des mouvements, le mouvement pouvant être encore compliqué par la projection de certains vecteurs sur la direction d'autres

vecteurs ou par l'enregistrement du mouvement résultant sur une plaque entraînée par un mouvement de rotation ou de translation. Les auteurs s'occupent ensuite des propriétés facilitant l'application de ces mécanismes dans la technique.

Pour conclure, ils font une synthèse des mécanismes conçus pour les courbes cycliques inférieures.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. Н. Берман, *Тиклоида*, ЖИТТЛ, Москва, 1954.
2. D. Maros, A. Csulak, *Sinteza curbelor plane prin compunerea a două rotații*. Gazeta matematică și fizică, *10* (1959).
3. В. В. Добровольский, *Теория механизмов для образованйя плоских кривых*. Издат. Академии Наук СССР, Москва, 1953.
4. И. И. Артоболевский, Н И. Левицкий и С. А. Черкудинов, *Синтез плоских механизмов*, Изд-во Физ-Мат. Литературы. Москва, 1959.
5. С. А. Черкудинов, *Синтез плоских шарнирорычажных маханизмов*, Издат. Акад. Наук СССР, 1959.
6. S. Bloch, *Angenäherte synthese von Mechanismen*. Verlag Technikh, Berlin, 1951.
7. R. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, *1* (1959).
8. Meyer zur Capellen, *Die zwei dimensionale Fourier—analyse spezieller Koppelkurven*. Z.A.M.M. *1*, *2*, (1929).
9. W. Wunderlich *Höhere Radlinien*. Österreichiches Ingenieure-Archiv I, 1947.
10. — *Höhere Radlinien als Näherungskurven*. Österreichiches Ingenieure-Archiv IV, 1950.

STUDII

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

ASUPRA PROPAGĂRII PERTURBAŢIILOR SECUNDARE ŞI PRIMARE ALE CÎMPULUI TOTAL

DE

M. MIŞICU

Recenta dezvoltare a teoriilor diferitelor cîmpuri şi creşterea rapidă a diferitelor domenii ale tehnicii şi ştiinţei a impus necesitatea elaborării unor teorii a cîmpurilor mixte astfel ca reologia, pe linia mecanicii mediilor deformabile şi în mod distinct a cîmpului hidromagnetic.

O încercare sistematică de a unifica cele două teorii menţionate după ştiinţa autorului, nu a fost făcută, în sensul efectuării corelaţiei între o mişcare cu caracter reologic a unui mediu cu conductivitate electrică şi a influenţei unui cîmp magnetic asociat aceluiaşi mediu.

Justificarea lipsei acestei sinteze rezidă probabil în absenţa unui model reomagnetic în intuiţia directă. Un asemenea model nu este uzual în actuala dezvoltare a tehnicii şi cunoaşterii.

După cum s-a şi presupus, legile care guvernează mişcarea materiei stelare la temperaturi şi presiuni mari sub influenţa unui cîmp electromagnetic şi, în o mult mai redusă măsură a gazului cosmic, ale căror particule se află într-o distribuţie densă şi sub acţiunea unui cîmp electromagnetic sînt din punct de vedere cinetic (cu referire la colective de particule materiale) sau al teoriei continuului, mai complexe decît cele considerate în actualele studii cantitative.

De asemenea aplicaţiile cu caracter practic ale fizicii plasmei, fie în vederea eliberării de energie nucleară fie, utilizînd gaze intens ionizate şi încălzite în vederea obţinerii vitezelor cît mai mari de propulsie tind de a impune anumite condiţii speciale de mişcare, compatibile cu o schemă fenomenologică lărgită.

Independent de o fundamentare strict fenomenologică a teoriei reomagnetice a cîmpului, o sinteză în acest sens ar crea posibilitatea dezvoltării unor studii fizico-matematice de perspectivă, conducînd la eliminarea unor paradoxe aparente ce ar apare în analiza fenomenelor pe baza unei scheme pur hidromagnetice. Sugerăm în acest sens, cu titlu de exemplu, eventualitatea corectării rezultatelor privind comportarea unei particule în rotaţie atrăgînd o creştere indefinită a cîmpului magnetic, creştere care nu ar putea fi explicată complet de recentele determinări ale curenţilor electrici (compensînd parţial efectul magnetic) ce înconjoară pămîntul. Termeni potenţiali sau disipativi suplimentari permit o ameliorare a consecinţelor cu caracter teoretic.

Considerarea efectelor reomagnetice constituie o extindere naturală, în teoria modelelor stelelor variabile, în special pentru domeniul oscilaţiilor neradiale, completînd schemele considerate la modelele lui Eddington [15] şi a rezultatelor iniţial stabilite de J. Woltjer [16], L. A. Thomas [17], S. Rosseland [18], M. Schwarzschild [19] şi alţii.

În cele ce urmează, vom formula ecuaţiile cîmpului gravific reomagnetic nerelativist sau, după cum îl vom mai denumi ale *cîmpului total*. Sub o formă duală şi ternară generalizînd aceea datorită lui W. M. Elsasser [10] şi S. Lundquist [11], ecuaţiile cîmpului total, pun în evidenţă interacţiunea cîmpului reologic şi magnetic precum şi existenţa unor unde reomagnetice de propagare a perturbaţiilor secundare care, în cazul unui fluid ideal incompresibil se suprapun cu cele găsite de H. Alfvén şi C. Walén [9] iar în cazul undelor compresibile, de N. Herlöfson [12] şi H. C. Van-de-Hulst [13]. Pentru cazul particular al unui fluid ideal în cîmp gravific, conul caracteristic al propagărilor perturbaţiilor reomagnetice secundare coincide cu cel corespunzător undelor lui S. Chandrasekar şi E. Fermi [14].

§. 1. ECUAŢIILE CÎMPULUI TOTAL

1. Vom considera cîmpul electric E, cîmpul magnetic H, inducţia electrică D, inducţia magnetică B, ρ densitatea de sarcină şi j densitatea de curent, c viteza de propagare a luminii în vid legate prin ecuaţiile cîmpului electromagnetic maxwellian

$$\begin{aligned} \nabla \times E\,(\equiv \operatorname{rot} E) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \times H\,(\equiv \mathit{rot}\, H) &= \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

unde

$$\begin{aligned} \nabla D\,(\equiv \operatorname{div} D) &= 4\pi\rho, \\ \nabla B\,(\equiv \operatorname{div} B) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

iar

$$D = \varepsilon E\ ;\ B = \mu H, \tag{1.3}$$

ε fiind constanta dielectrică iar μ permeabilitatea magnetică. Vom considera $\varepsilon = 1$, $\rho = 0$.

În cazul unei conductivități electrice σ, pentru o viteză V a particulelor și o densitate electrică η vom avea

$$j = \sigma (E + \frac{\mu}{c} V \times H) + \eta V. \tag{1.4}$$

De asemenea vom considera ecuațiile cîmpului reologic

$$\rho \frac{DV}{Dt} = - \nabla p + \mu_1' [\nabla^2 V + \frac{1}{3} \nabla \cdot (\nabla \cdot V)] + \mathcal{T} + \frac{j \times B}{c} + G, \tag{1.5}$$

unde ρ este densitatea mediului, p presiunea de natura unei forțe neelectromagnetice aplicate unității de masă, μ_1' un coeficient de viscozitate, G componentele cîmpului gravific iar $\mathcal{T}'$ ($\mathcal{T} = \nabla \mathcal{T}'$) diada tensorului tensiunilor reologice astfel că

$$\mathcal{T} = \bar{i} \, (\nabla \cdot \mathcal{T}_1) + \bar{j} \, (\nabla \cdot \mathcal{T}_2) + \bar{k} \, (\nabla \cdot \mathcal{T}_3) , \tag{1.6}$$

unde

$$T_l = \bar{i} \, T_{l_1} + \bar{j} \, T_{l_2} + \bar{k} \, T_{l_3} \cdot \tag{1.7}$$

În cazul marilor deformări, se vor considera operatorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ în spațiul euclidian deformat, conform teoriei neliniare.

2. În privința relațiilor între tensiuni și deformații (admițînd neimportante efectele piezoelectrice și dependența reciprocă doar a doi tensori și anume ai tensiunii și deformațiilor) se pot considera legi reologice de diferite grade de generalitate ca acelea ale lui M. Reiner [1], sau cele extinse ale lui R. S. Rivlin [2], J. L. Ericksen [3], B. D. Cotter [4], J. G. Oldroyd [5] în sensul inițial conceput de S. Zaremba (rate of change of stress tensor [6]).

Aceste relații se pot considera în o ipoteză extensivă, permițînd includerea fenomenelor plastice și anume, presupunînd funcții de viteze de diferite ordine generale avînd variații mărginite cu distribuții pe spațiul funcțional al acestora. În cazul unui mediu inițial izotrop aceste relații vor fi de exemplu dezvoltabile în serii de operatori, avînd coeficienți distribuiți pe invarianții tensorului tensiunilor și deformațiilor (inclusiv ale derivatelor în timp ai acestor invarianți). Această exprimare permite considerarea simultană a relațiilor valabile în diferite domenii reologice : elastic, plastic, vîscos.

În cele ce urmează ne vom ocupa de fenomene reomagnetice cu liniaritate reologică și deci fără coeficienți de tip distribuție. Aceste fenomene vor fi ori pur viscoelastice ori pur plastovîscoase.

O extindere a acestor relații în cadrul unui cîmp total se poate face și în sensul unor studii ale lui W. Noll [7] și R. S. Rivlin [2], [4], de a considera în afara tensiunilor și deformațiilor tensori, caracterizînd influența cîmpului electromagnetic asupra perturbațiilor reologice ale materiei, aceste lucrări căpătînd un suport concret.

3. Pentru claritate vom reaminti exprimările reologice generale. Fie $\bar{r} = \bar{r} \, (R, t)$, vectorul de poziție în spațiu-timp (x, y, z, t) funcție de

vectorul de poziție în spațiul (X, Y, Z, T). Relațiile între tensiuni şi deformații sînt

$$F_{ij}\left(C_{pq}, A^{(1)}_{pq}, A^{(2)}_{pq}, A^{(3)}_{pq}, \ldots, A^{(n)}_{pq}, T_{pq}, B^{(1)}_{pq}, \ldots, B^{(n)}_{pq}\right) = 0, \tag{1.8}$$

unde

$$\begin{gathered}
C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \nabla x_i \cdot \nabla x_k, \\
A^{(1)}_{ij} = \frac{\partial V^{(1)}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V^{(1)}_j}{\partial x_i}, \\
x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \quad V = \bar{i}\, V_1 + \bar{j}\, V_2 + \bar{k}\, V_3, \qquad (1.9) \\
A^{(r+1)}_{ij} = \frac{DA^{(r)}_{ij}}{Dt} + A^{(r)}_{mj} \frac{\partial V^{(1)}_m}{\partial x_i} + A^{(r)}_{im} \frac{\partial V^{(1)}_m}{\partial x_j}, \\
B^{(0)}_{ij} = T_{ij}, \\
B^{(r)}_{ij} = \frac{DB^{(r-1)}_{ij}}{Dt} + B^{(r-1)}_{mj} \cdot \frac{\partial V^{(1)}_m}{\partial x_i} + B^{(r-1)}_{im} \frac{\partial V^{(1)}_m}{\partial x_j}, \\
F_{ij} = F_{ji}, \; i, j = 1, 2, 3.
\end{gathered}$$

În cazul unui cîmp liniar izotrop reologic vom avea relațiile

$$\begin{gathered}
Ps_{ij} = 2\mu_0\, Qe_{ij}, \; i \neq j, \qquad (1.10) \\
R\left(\sum \sigma_{ii} - 3\alpha\, T\right) = (3\lambda_0 + 2\mu_0) \sum \varepsilon_{ii},
\end{gathered}$$

unde

$$s_{ij} = T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum T_{ii}, \; e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum \varepsilon_{ii}, \tag{1.11}$$

sînt respectiv deviatorii tensorului tensiunii şi deformaţii iar $P, Q, R, S =$

$$\begin{gathered}
= \sum a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t), \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \\
\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Ecuația de convecție corespunzătoare cîmpului termic T este

$$\chi \nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial t} O T \tag{1.13}$$

O fiind operator integrodiferențial liniar.

Într-un mod echivalent se pot considera relațiile

$$\sigma_{ij} = L\Theta\delta_{ij} + 2\,M\,(\varepsilon_{ij} - \alpha T\cdot\delta_{ij})\,, \tag{1.14}$$

unde

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^t L(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau + \sum_0^n L_n(t)\,\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\,, \\ M(f) &= \int_0^t M(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau + \sum_0^n M_n(t)\,\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Utilizînd transformata Laplace, în cazul unor condiții inițiale nule în tensiuni și deformații, relațiile reologice se mai scriu

$$\overset{\star}{s}_{ij} = 2\,M^{\star}\,\overset{\star}{l}_{ij}\,;\ \sum \overset{\star}{\sigma}_{ii} - 3\,\alpha\,M^{\star}\,T^{\star} = \left(3\,L^{\star} + 2\,M^{\star}\right)\sum \overset{\star}{\varepsilon}_{ii} \tag{1.16}$$

unde

$$\overset{\star}{s}_{ij}(p) = \int_0^{\infty} \bar{e}^{pt}\,dt\,s_{ij}\,;\ e_{ij}\,(p) = \int_0^{\infty} \bar{e}^{pt}\,dt\,e_{ii}\ \text{ etc.,} \tag{1.17}$$

iar

$$2\,M^{\star}(p) = 2\mu_0\,\frac{Q^{\star}(p)}{P^{\star}(p)}\,;\ 3L^{\star} + 2M^{\star} = (3\lambda_0 + 2\mu_0)\,S^{\star}(p)\,R^{\star}(p)\,. \tag{1.18}$$

Cu acestea, ecuațiile cîmpului total sînt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)\,V + \frac{\mu}{4\pi\rho}(H\times(\nabla\times H)) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\Big[G + \mu_1'\Big(\nabla^2 V + \\ + \frac{1}{3}\nabla(\nabla V)\Big) + \mathcal{T}\Big]\,, \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \left(\nabla\times\left((V\times H) + \frac{c\eta}{\sigma\mu}V\right)\right) = \chi\,(\nabla^2 H - \nabla(\nabla H)),$$

$$\chi = c^2/4\pi\sigma\mu\,,$$

$$(\nabla\,.\,H) = 0\ ,\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\,(\rho V) = 0,\ \varkappa\nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial t}O\,T\,,$$

unde

$$-(\nabla\times(\nabla\times H)) = \nabla^2 H - \nabla\,(\nabla H)\,.$$

Se deduce imediat teorema de impuls

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) = -\frac{\partial\pi_{ik}}{\partial x_k} + G\,, \tag{1.20}$$

cu

$$\pi_{ik} = p\,\delta_{ik} + \rho V_i\, V_k + \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{H^2}{2}\,\delta_{ik} - H_i\,H_k\right) - T_{ik}\,, \tag{1.21}$$
$$- \mu_1'\left(\frac{\sigma V_i}{\partial x_k} + \frac{\delta_{ik}}{3}\,(\nabla \,.\, V)\right), H^2 = H.H.$$

§. 2. ECUAŢIILE TERNARE DE INTERACŢIUNE

Pentru punerea în evidenţă a interacţiunii undelor termice reologice şi magnetice, vom căuta de a stabili în locul ecuaţiilor cîmpului total, relaţii simetrice. Pentru aceasta le vom transcrie în primul rînd sub forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V.\nabla)\,V = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p - \frac{\mu}{4\pi\rho}\left(\frac{1}{2}\nabla H^2 - (H\cdot\nabla)\,H\right) +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left[G + \mu_1'\,(\nabla^2 V + \nabla\left(\frac{\nabla V}{3}\right) + \mathcal{T})\right], \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = (H\cdot\nabla)\,V - (V\cdot\nabla)\,H + V\,(\nabla H) - H\,(\nabla V) + \frac{c\eta}{\sigma\mu}(\nabla\times V) +$$
$$+ \chi\,(\nabla^2 H - \nabla\,(\nabla H))\,,$$
$$\varkappa\,\nabla^2\,T = \frac{\partial}{\partial t}\;OT,$$

cu

$$(\nabla\cdot H) = 0\;\;,\;\; \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\,(\rho V) = 0\;\;, \tag{2.2}$$

unde s-a ţinut seama ca

$$H\times(\nabla\times H) = \nabla\,\frac{H^2}{2} - (H\nabla)\,H$$
$$\nabla\times(V\times H) = (H\cdot\nabla)\,V - (V\nabla)\,H + V\,(\nabla H) - H\,(\nabla V). \tag{2.3}$$

Pentru $\rho = \text{const.}$, vom avea $(\nabla V) = 0$.

Pentru a deduce într-o primă etapă ecuaţiile duale ale cîmpului reomagnetic, în lipsa unui cîmp termic, vom amplifica a doua ecuaţie din (4.1) cu o constantă k şi o vom aduna şi scădea la prima

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(V \pm kH) + (V\nabla)\,V + \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{4\pi\rho}\left(\frac{1}{2}\,\nabla H^2 - (H\nabla)\,H\right) -$$
$$-\frac{1}{\rho}\,(G + \mu_1'\,(\nabla^2 V + \frac{\nabla}{3}\,(\nabla V)) + \mathcal{T}) \pm k\,[(H\nabla)\,V - (V\nabla)\,H + \tag{2.4}$$
$$+ V(\nabla H) - H\,(\nabla V) + \frac{c\eta}{\sigma}\,(\nabla\times V) + \chi\,((\nabla^2 H) - \nabla\,(\nabla H)) = 0\,.$$

Această relație se poate transcrie astfel

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(V + kH) + A\,((V + q\,H)\nabla)\,(V + q'\,H) + kH\,(\nabla V) + \\ + \frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{\mu}{8\pi}H^2 - \frac{\mu_1'}{3}\nabla V - \mathcal{T}'\right) - \frac{G}{\rho} - \frac{\mu_1'}{\rho}\nabla'^2\left(V + \frac{k\,\chi\rho}{\mu_1'}H\right) - \\ - \frac{kc\eta}{\sigma}(\nabla \times V) = 0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(V - kH) + A\,((V + rH)\nabla)\,(V + r'H) + B\,(V + qH)\,(\nabla\,(V + q'H)) - \\ - kH\,(\nabla V) + \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mu}{8\pi\rho}H^2 - \frac{\mu_1'}{3\rho}\nabla V - \frac{\mathcal{T}'}{\rho}\right) - \frac{G}{\rho} - \\ - \frac{\mu_1'}{\rho}\nabla'^2\left(V - \frac{k\chi\rho}{\mu_i'}\,H\right) + \frac{kc\eta}{\sigma}(\nabla \times V) = 0,\end{gathered}$$

unde

$$A = 1\,; \quad Aqq' = -\frac{\mu}{4\pi\rho}\,; \quad Aq = -k\,; \quad Aq' = k \tag{2.6}$$

iar ∇'^2 nu este considerat ca derivînd pe ρ.

Se deduce $q = -k$, $q' = k$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{4\rho}}$, şi întrucît

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)(V - kH) + \left(1 + \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)(V + kH)\right\} = V + \rho\,\frac{\chi}{\mu_1'}\,kH, \\ \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)(V + kH) + \left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)(V - kH)\right\} = V - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}kH,\end{gathered} \tag{2.7}$$

relațiile cîmpului reomagnetic se transcriu în forma simetrică

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + (v\nabla)\,u + \frac{1}{\rho}\,(\nabla\varphi - G) - \frac{\mu_1'}{2\rho}\nabla'^2\left[\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)v + \left(1 + \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)u\right] + \\ + \frac{1}{4}\,(u - v)\,(\nabla\,(u + v)) - \frac{c\eta}{4\sigma}\,\frac{u - v}{H}\,(\nabla \times (u + v)) = 0,\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + (u\nabla)\,v + \frac{1}{\rho}\,(\nabla\varphi - G) - \frac{\mu_1'}{4}\nabla'^2\left[\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)u + \left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)v\right] + \\ + \frac{1}{4}\,(v - u)\,(\nabla\,(u + v)) + \frac{c\eta}{4\sigma}\nabla \times (v + u) - \frac{c\eta}{4\sigma}\,\frac{v - u}{H}\,(\nabla \times (v + u)) = 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

unde

$$u = V + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\pi\rho}}\,H, \quad v = V - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\pi\rho}}\,H$$

$$\varphi = p + \frac{\mu}{8\pi}H^2 - \frac{\mu_1'}{3}(\nabla V) - \mathcal{T}'.$$

Dacă Q derivă dintr-un potențial, de pildă dintr-un potențial gravific g astfel ca $G = \nabla g$, vom înlocui în cele de mai sus $\nabla\varphi - G$ cu $\nabla\Phi$, $\Phi = \varphi - g$.

Vom introduce acum și efectul termic dat de cea de-a treia ecuație (1.10). Luînd funcțiile cu componente vectoriale și scalare pentru $0 = 1$

$$\bar{u} = T + u, \qquad \bar{v} = T + v, \tag{2.10}$$

obținîndu-se ecuațiile simetrice de interacțiune ternară

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + (\mathrm{vect}\,\bar{v}\,\nabla)\,\mathrm{vect}\,\bar{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\Phi - \frac{\mu_1'}{2\rho}\nabla'^2\left[\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)\bar{v} + \left(1 + \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)\bar{u} - \right.\\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right) S\,\mathrm{cal}\,(\bar{u} + \bar{v})\right] + \frac{1}{4}(\bar{u} - \bar{v})\,(\nabla\,\mathrm{vect}\,(\bar{u} + \bar{v})) - \\
&\quad - \frac{c\eta}{4\sigma}\frac{\bar{u} - \bar{v}}{H}(\nabla \times \mathrm{vect}\,(\bar{u} + \bar{v})) = 0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathrm{vect}\,\bar{u}\nabla)\,\mathrm{vect}\,\bar{v} + \frac{1}{\rho}\nabla\Phi - \frac{\mu_1'}{2\rho}\nabla'^2\left[\left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)\bar{u} + \left(1 + \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right)\bar{v} - \right.\\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{\rho\chi}{\mu_1'}\right) S\,\mathrm{cal}\,(\bar{u} + \bar{v})\right] + \frac{1}{4}(\bar{v} - \bar{u})\,(\nabla\,\mathrm{vect}\,(\bar{v} + \bar{u})) - \\
&\quad - \frac{c\eta}{4\sigma}\frac{\bar{v} - \bar{u}}{H}(\nabla \times \mathrm{vect}\,(\bar{v} + \bar{u})) = 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

unde s-a considerat

$$\nabla \times T = 0. \tag{2.12}$$

Aceste relații pun în evidență, sub formă simetrică interacțiunea celor 3 forme de manifestare ale cîmpului total, unic din punct de vedere material, dual ca exprimare formală și ternar din punctul de vedere al fenomenologiei macroscopice.

§ 3. CONUL CARACTERISTIC AL PROPAGĂRII PERTURBAȚIILOR SECUNDARE ALE CÎMPULUI TOTAL

Vom considera o deviație a mărimilor cîmpului $H_0 + h'$ $\rho_0 + \rho'$, $p_0 + p'$, secundară în raport cu mărimile unui cîmp staționar H_0, ρ_0, p_0, anume h', ρ', p'. Mărimile h, p, ρ, $V = \frac{Du}{Dt}$, u le vom considera secundare astfel că se va putea neglija produsele acestora, două cîte două. Fie apoi o componentă a descompunerii spectrale ale mărimii cîmpului primar și secundar.

$$H,\ h,\ \ldots = H^{\star} e^{i\,((\mathcal{C}.r)-\omega t)}\ ;\ h^{\star} e^{i\,((\mathcal{C}.r)-\omega t)}, \tag{3.1}$$

unde

$$\mathcal{C} = \vec{i}\,\mathcal{C}_1 + \vec{j}\,\mathcal{C}_2 + \vec{k}\,\mathcal{C}_3\ \ ;\ \ r = \vec{i}\,r_1 + \vec{j}r_2 + \vec{k}r_3. \tag{3.2}$$

Ecuațiile (1.19) devin

$$(\mathcal{C}.H^{\star}) = 0, \tag{3.3}$$

$$-\ \omega\rho + \rho_0\,(\mathcal{C}.V^{\star}) = 0, \tag{3.4}$$

$$-i\omega\,V^{\star} + i\,(V^{\star}\mathcal{C})\,V^{\star} + \frac{\mu i}{4\pi\rho}\,(H^{\star}\times(\mathcal{C}\times H^{\star})) + \frac{i}{\rho}(\mathcal{C}.p^{\star}) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\Big[G^{\star} + \mu_1'(-/\mathcal{C}/^2\,V^{\star} - \frac{\mathcal{C}}{3}(\mathcal{C}V^{\star}) - (L^{\star}(i\omega) + M^{\star}(i\omega))\mathcal{C}(\mathcal{C}U^{\star}) - \tag{3.5}$$

$$-\ M^{\star}(i\omega)\,/\mathcal{C}/^2\,U^{\star} - i\,2M^{\star}(i\omega)\,\mathcal{C}\alpha\,T^{\star}\Big]$$

$$-\ i\omega\,H^{\star} - i\,\mathcal{C}\times\left((V^{\star}+H^{\star}) + \frac{c\eta}{\sigma\mu}\,V^{\star}\right) =$$

$$= \varkappa\,(-/\mathcal{C}/^2 H^{\star} + \mathcal{C}(\mathcal{C}H^{\star})) \tag{3.6}$$

$$-\chi\,/\mathcal{C}/^2 = -\,i\omega\,O\,(-\,i\omega)\,. \tag{3.7}$$

Vom alege axa x_1 orientată în sensul vectorului $\mathcal{C}$ iar x_2 în planul format de vectorii (ortogonali) $\mathcal{C}$ și $H^{\star}_0$. În acest caz

$$\mathcal{C} = \vec{i}\,\mathcal{C}_1 \tag{3.8}$$

$$H^{\star}_0 = \vec{i}\,H^{\star}_{0.1} + \vec{j}\,H^{\star}_{0.2}\ ;\ H^{\star}_{0.3} = 0\,, \tag{3.9}$$

$$H^{\star}\times(\mathcal{C}\times H^{\star}) \cong H^{\star}_0\times(\mathcal{C}\times H^{\star}) = /\mathcal{C}/\,(H^{\star}_{0.2}H^{\star}_2 - H^{\star}_{0.1}H^{\star}_2 - H^{\star}_{0.1}H^{\star}_3)\,, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{C}\times(V^{\star}\times H^{\star}) \cong /\mathcal{C}/\,(\,0, V^{\star}_2H^{\star}_1 - V^{\star}_1H^{\star}_2\,,\ V^{\star}_3H^{\star}_1 - V^{\star}_1H^{\star}_3)\ ;$$

$$v^{\star}_1\,H^{\star}_3 = V^{\star}_1\,h_3 \approx 0\,. \tag{3.11}$$

Se deduc succesiv următoarele ecuaţii

$$\overset{\star}{H}_1 = 0\,, \tag{3.12}$$

$$-\frac{\omega\rho}{\rho_0} + /\mathcal{C}/\overset{\star}{V}_1 = 0 \tag{3.13}$$

$$-\omega \overset{\star}{V}_1 + \frac{\mu}{4\pi\rho_0}/\mathcal{C}/\overset{\star}{H}_{0,2}\, H_2 + \frac{/\mathcal{C}/}{\rho_0}\overset{\star}{p}_1 = \frac{1}{i\rho_0}\Bigg[\overset{\star}{G}_1 + \mu_1'/\mathcal{C}/^2\Big(-\overset{\star}{V}_1 - \frac{\overset{\star}{V}_1}{3}\Big) - \tag{3.14}$$

$$-\big(L^\star(i\omega)+M^\star(i\omega)\big)/\mathcal{C}/^2\, \overset{\star}{U}_1 - M^\star(i\omega)/\mathcal{C}/^2\, \overset{\star}{U}_1 - i2M^\star(i\omega)/\mathcal{C}/\alpha T^\star\Bigg],$$

$$\omega \overset{\star}{V}_2 - \frac{\mu}{4\pi\rho_0}/\mathcal{C}/\overset{\star}{H}_{0,1}\,.\,H_2 = \frac{1}{i\rho_0}\Big[\overset{\star}{G}_2 + \mu_1'/\mathcal{C}/^2\,(-\overset{\star}{V}_2) - M^\star(i\omega)/\mathcal{C}/^2\overset{\star}{U}_2\Big], \tag{3.15}$$

$$-\omega \overset{\star}{V}_3 - \frac{\mu}{4\pi\,\rho_0}|\mathcal{C}|\,\overset{\star}{H}_{0,1}\,\overset{\star}{H}_3 = \frac{1}{i\rho_0}\,[\overset{\star}{G}_3 + \mu_1'\,|\mathcal{C}|^2\,(-\overset{\star}{V}_3) -$$

$$- M^\star\,(i\omega\ |\mathcal{C}|^2\ \overset{\star}{U}_3)], \tag{3.16}$$

$$-(\omega + i\chi\,|\mathcal{C}|^2)\,\overset{\star}{H}_2 = |\mathcal{C}|\left\{(\overset{\star}{V}_2\,\overset{\star}{H}_1 - \overset{\star}{V}_1\,\overset{\star}{H}_2) - \frac{c\eta}{\sigma\mu}\,\overset{\star}{V}_3\right\}, \tag{3.17}$$

$$-(\omega + i\chi\,|\mathcal{C}|^2)\,\overset{\star}{H}_3 = |\mathcal{C}|\left\{\overset{\star}{V}_3\,\overset{\star}{H}_1 + \frac{c\eta}{\sigma\mu}\,\overset{\star}{V}_2\right\}, \tag{3.18}$$

$$-\chi\,|\mathcal{C}|^2 = i\omega\,0\,(-i\omega). \tag{3.19}$$

Deoarece

$$\overset{\star}{V}_i = -i\omega \overset{\star}{V}_i,\ i = 1, 2, 3 \quad \text{sau} \quad \overset{\star}{V}_i = \frac{iV^\star}{\omega}\,, \tag{3.20}$$

se obţine un sistem în $\overset{\star}{H}_i$, $\overset{\star}{U}_i$, ρ, $T^\star$, $i = 1, 2, 3$
cu $p = a^2\ \rho$.

Vom avea atunci din (3.12) şi (3.13) că

$$\overset{\star}{V}_1 = \frac{\omega\rho}{\rho_0|\mathcal{C}|} = -\frac{1}{\Omega_1}\Bigg[-\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\ \overset{\star}{H}_{0,2}\,H_2 + \frac{\overset{\star}{G}_1}{i\rho_0} -$$

$$-|\mathcal{C}|\frac{a^2\rho}{\rho_0} - 2M^\star\,|\mathcal{C}|\ \frac{\alpha T^\star}{\rho_0}\Bigg], \tag{3.21}$$

$$\overset{\star}{V}_2 = -\frac{1}{\Omega_2}\left[\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\,|\mathcal{C}\,|\ \overset{\star}{H}_{0,1}\,\overset{\star}{H}_2 + \frac{\overset{\star}{G}_2}{i\rho_0}\right], \tag{3.22}$$

$$\overset{\star}{V}_3 = -\frac{1}{\Omega_3}\left[\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\,|\mathcal{C}|\ \overset{\star}{H}_{0,1}\,\overset{\star}{H}_3 + \frac{\overset{\star}{G}_3}{i\rho_0}\right], \tag{3.23}$$

unde

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \omega - \frac{|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0}\left(\frac{4}{3}\mu_1' + \frac{i}{\omega}(L^\star + 2M^\star)\right), \\
\Omega_2 &= \omega - \frac{|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0}\left(\mu_1' + \frac{i}{\omega}M^\star\right), \\
\Omega_3 &= \omega - \frac{|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0}\left(\mu_1' + \frac{i}{\omega}M^\star\right) = \Omega_2 .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Din (3.21) mai rezultă că

$$\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{1}{\Omega_1}\left(-\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,2}^\star\cdot H_2^\star + \frac{G_1^\star}{i\rho_0} - \frac{2M^\star|\mathcal{C}|\,\alpha T^\star}{\rho_0}\right)\frac{1}{\dfrac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \dfrac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}} \tag{3.25}$$

şi deci

$$V_1^\star = -\frac{1}{\Omega_1}\left[\frac{-\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,2}^\star H_2 + \frac{G_1}{i\rho_0} - \frac{2M^\star|\mathcal{C}|\,\alpha T^\star}{\rho_0}\right]\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\dfrac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \dfrac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right). \tag{3.26}$$

Substituind (3.21), (3.22) şi (3.23) în (3.14), (3.15) şi (3.16) rezultă că

$$\begin{aligned}
-(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2)H_2^\star = -|\mathcal{C}|\Bigg\{ & H_1^\star\frac{G_2^\star}{i\rho_0\Omega_2} + \frac{H_1}{\Omega_2}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,1}^\star H_2 - \\
& - \frac{H_2^\star G_1^\star}{i\rho_0\Omega_1}\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\dfrac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \dfrac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right) - \frac{H_2}{\Omega_1}\left(-\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,2}^\star H_2 - 2M^\star\frac{|\mathcal{C}|\,\alpha T^\star}{\rho_0}\right)\times \\
& \times\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\dfrac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \dfrac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right) - \frac{c\eta}{\sigma\mu\Omega_3}\left(\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,1}^\star H_3^\star + \frac{G_3^\star}{i\rho_0}\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
-(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2)H_3^\star = -|\mathcal{C}|\Bigg\{ & \frac{H_1^{*}}{\Omega_3}\frac{G_3^\star}{i\rho_0} + \frac{H_1^\star}{\Omega_3}\left(\frac{\mu|\mathcal{C}|}{4\pi\rho_0}H_{0,1}^\star H_3^\star\right) + \\
& + \frac{c\eta}{\sigma\mu}\frac{1}{\Omega_2}\left(\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|\, H_{0,1}^\star H_2^\star + \frac{G_2^\star}{i\rho_0}\right)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

care se mai scrie

$$\begin{aligned}
&-\left[\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2 + \frac{|\mathcal{C}|G_1^{\star}}{i\rho_0\Omega_1}\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right) - \frac{H_{0,1}^{\star}H_{0,1}}{\Omega_2}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|^2 - \right.\\
&\left. -\left(\frac{|\mathcal{C}|}{\Omega_1}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}H_{0,2}^{\star 2} + \frac{|\mathcal{C}|^2}{\Omega_1}\frac{2M^{\star}T^{\star}}{\rho_0}\right)\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right)\right]H_2^{\star} - \\
&-|\mathcal{C}|^2\frac{c\eta}{\sigma\mu\Omega_3}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}H_{0,1}^{\star}H_3^{\star} = \frac{|\mathcal{C}|c\eta}{\sigma\mu\,\Omega_3}\frac{G_3^{\star}}{i\rho_0} - \\
&-\left(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2 - \frac{\mu|\mathcal{C}|^2}{\Omega_3 4\pi\rho_0}H_{0,1}^{\star}H_{0,1}^{\star}\right)H_3^{\star} + \\
&+\frac{c\eta}{\sigma\mu}\frac{1}{\Omega_2}\frac{\mu|\mathcal{C}|^2}{4\pi\rho_0}H_{0,1}^{\star}H_2^{\star} = -\frac{|\mathcal{C}|c\eta}{\sigma\mu\,\Omega_2}\frac{G_2^{\star}}{i\rho_0}\,.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Determinantul acestui sistem este

$$\begin{aligned}
-\Delta = &\left(\frac{c\eta}{\sigma\mu\,\Omega_2}\cdot\frac{\mu|\mathcal{C}|^2}{4\pi\rho_0}\cdot H_{0,1}^{\star}\right)^2 + \left(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2 - \frac{\mu|\mathcal{C}|^2H_{0,1}^{\star 2}}{\Omega_3 4\pi\rho_0}\right)\times \\
\times&\left[\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2 + \frac{|\mathcal{C}|G_1^{\star}}{i\rho_0\Omega}\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right) - \frac{H_{0,1}^{\star 2}}{\Omega_2}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|^2 + \right.\\
&\left.+\left(-\frac{|\mathcal{C}|^2}{\Omega_1}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}H_{0,2}^{\star 2} - \frac{|\mathcal{C}|^2}{\Omega_1}\frac{2M^{\star}\alpha T^{\star}}{\rho_0}\right)\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\Omega_1}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\Omega_1}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Pentru $\eta = \chi = 0$, $L^{\star} = M^{\star} = \alpha\, T^{\star} = \mu_1' = 0$ avem

$$\begin{aligned}
-\Delta = &\frac{1}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|^2H_{0,1}^{\star 2}\right)\left(\omega^2 + \frac{|\mathcal{C}|G_1^{\star}}{i\rho_0}\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\omega}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\omega}}\right) - \right.\\
&\left. - \frac{\mu}{4\pi\rho_0}|\mathcal{C}|^2H_{0,1}^{\star 2} - \frac{|\mathcal{C}|^2\mu}{4\pi\rho_0}H_{0,2}^{\star 2}\left(1 + \frac{a^2|\mathcal{C}|/\omega}{\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} - \frac{|\mathcal{C}|a^2}{\omega}}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

sau

$$\begin{aligned}
\Delta = &\frac{|\mathcal{C}|^2}{\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - a^2\right)}\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{\mu H_{0,1}^{\star 2}}{4\pi\rho_0}\right)\left[\left(a^2 - \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - \mu\frac{H_{0,1}^{\star 2}}{4\pi\rho_0}\right) + \right.\\
&\left. + \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\left(\frac{\mu H_{0,2}^{\star 2}}{4\pi\rho_0} - \frac{G_1^{\star}}{i\rho_0|\mathcal{C}|}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Avem însă

$$|\mathcal{C}|^2 H_{0,2}^{\star 2} = |\mathcal{C}|^2 [H_{0,1}^{\star 2} + H_{0,2}^{\star 2} - H_{0,1}^{\star 2}] =$$
$$|\mathcal{C}|^2 |H_0|^2 - (CH_0^\star)^2 = [(C \cdot H_0^\star)]^2 ; \; H_{0,1}^{\star 2} = (CH_0^\star)^2$$

şi deci

$$\Delta = \frac{|\mathcal{C}|^2}{\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - a^2\right)} \left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{\mu H_{0,1}^{\star 2}}{4\pi\rho_0}\right)\left[\left(a^2 - \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{\mu}{4\pi\rho_0}\frac{(\mathcal{C}H_0^\star)^2}{|\mathcal{C}|^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\left(\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\frac{[(\mathcal{C}H_0^\star)]}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{(G^\star \mathcal{C})}{i\rho_0 |\mathcal{C}|^2}\right)\right]. \tag{3.33}$$

În general, din (3.30) avem

$$\Delta = -\left(\frac{c\eta}{\sigma\mu}\frac{\mu|\mathcal{C}|^2}{4\pi\rho_0}\right)^2 \frac{(\mathcal{C}H_0^\star)^2}{\Omega_2^2} + \frac{|\mathcal{C}|^4}{\Omega_1\Omega_3\left(\frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{\omega}{\Omega_1}a^2\right)} \times$$
$$\times \left(\frac{(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2)\Omega_3}{|\mathcal{C}|^2} - \frac{\mu H_{0,1}^{\star 2}}{4\pi\rho_0}\right)\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_1}a^2 - \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\right)\left(\frac{(\omega + i\chi|\mathcal{C}|^2)\Omega_1}{|\mathcal{C}|^2} - \right.\right. \tag{3.34}$$
$$\left.\left. - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\frac{(\mathcal{C}.H_0^\star)^2}{|\mathcal{C}|^2}\right) + \frac{\omega^2}{|\mathcal{C}|^2}\left(\frac{\mu(\mathcal{C}.H_0^\star)^2}{4\pi\rho_0|\mathcal{C}|^2} - \frac{(\mathcal{C}.G^\star)}{i\rho_0|\mathcal{C}|^2} + \frac{2M^\star\alpha T^\star}{\rho_0}\right)\right].$$

Vom nota prin

$$\frac{\mu H_{0,1}^{\star 2}}{4\pi\rho_0} = V_A^2 \text{ (viteza undelor lui Alfvén)},$$

$$\frac{\omega}{|\mathcal{C}|} = V_M \text{ (viteza cîmpului total)}.$$

Vom avea următoarea ecuaţie care va da viteza undelor lui Alfvén generalizată pentru $\eta = 0$

$$\frac{V_M|\mathcal{C}| + i\chi|\mathcal{C}|^2}{|\mathcal{C}|^2}\left[V_M|\mathcal{C}| - \frac{|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0}\mu_1' - \frac{|\mathcal{C}|^2 M^\star\left(-\frac{iV_M}{|\mathcal{C}|}\right)}{i\rho_0 V_M|\mathcal{C}|}\right] = V_A^2, \tag{3.35}$$

sau

$$V_M^2 + \left(i\chi|\mathcal{C}| + \frac{i|\mathcal{C}|\mu_1'}{\rho_0}\right)V_M - \frac{\chi|\mathcal{C}|^2}{\rho_0}\mu_1' -$$
$$- \frac{V_M|\mathcal{C}| + i\chi|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0 V_M|\mathcal{C}|}M^\star\left(-\frac{iV_M}{|\mathcal{C}|}\right) - V_A^2 = 0 \tag{3.36}$$

Să luăm cazul unui model maxwellian acelaşi în raport atît cu deviatorul cît şi cu urma matricii tensiunilor

$$P = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t} + 1, \qquad Q = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$R = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t} + 1, \qquad S = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.37}$$

În acest caz

$$P^\star(p) = \frac{p}{\tau} + 1 = R^\star, \qquad Q^\star = S^\star = p, \tag{3.38}$$

iar

$$M^\star(p) = \mu_0\frac{Q^\star}{p^\star} = \mu_0\frac{p}{\dfrac{p}{\tau}+1} = \mu_0\frac{\tau p}{1+\tau p}$$
$$M^\star\left(-\frac{iV_M}{|\mathcal{C}|}\right) = \frac{\mu_0\,\tau\left(-\dfrac{iV_M}{|\mathcal{C}|}\right)}{-\dfrac{iV_M}{|\mathcal{C}|}\tau + 1} = -\frac{i\mu_0\,\tau V_M}{|\mathcal{C}| - i\tau V_M}. \tag{3.39}$$

Se obţine ecuaţia

$$V_M^2 + iV_M(\chi|\mathcal{C}| + |\mathcal{C}|\mu_1'/\rho_0) - \chi|\mathcal{C}|^2\mu_1'/\rho_0 -$$
$$- \frac{V_M|\mathcal{C}| + i\chi_0|\mathcal{C}|^2}{i\rho_0 V_M|\mathcal{C}|}\left(-\frac{i\mu_0\,\tau V_M}{|\mathcal{C}| - i\tau V_M}\right) - V_A^2 = 0. \tag{3.40}$$

Pentru a obţine generalizarea strict corespunzătoare în cadrul reomagneticii undelor lui Alfvén vom lua $\mu' = \chi = 0$ astfel că

$$V_M^2 + \frac{\mu_0\tau V_M}{\rho_0\{|\mathcal{C}| - i\tau V_M\}} - V_A^2 = 0, \tag{3.41}$$

sau

$$-i\tau\rho_0 V_M^3 + \rho_0|\mathcal{C}|V_M^2 + \mu_0\tau V_M - V_A^2\rho_0(|\mathcal{C}| - i\tau V_M) = 0.$$

Să presupunem $V_M = V_A(1+\xi)$; $\xi \ll 1$. În acest caz

$$-i\tau\rho_0 V_A^3(1+3\xi) + \rho_0|\mathcal{C}|V_A^2(1+2\xi) + \mu_0\tau V_A(1+\xi) -$$
$$- \rho_0 V_A^2(|\mathcal{C}| - i\tau V_A(1+\xi)) = 0. \tag{3.42}$$

Ecuaţia liniarizată are soluţia

$$\xi = -\frac{\mu_0\tau V_A}{2\rho_0 V_A^2|\mathcal{C}|\left(1 - \dfrac{i\tau V_A}{|\mathcal{C}|}\right) + \mu_0\,\tau V_A}. \tag{3.43}$$

Vom pune

$$c_0^2 = \mu_0/\rho_0, \tag{3.44}$$

(**3.43**) devenind

$$\xi = -\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 \frac{\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 + \frac{|\mathcal{C}|}{\tau V_A} + i}{\left(\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 + \frac{|\mathcal{C}|}{\tau V_A}\right)^2 + 1}. \tag{3.45}$$

Pentru frecvenţe se obţine relaţia

$$\omega = \omega_A\left[1 - \left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 \frac{\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 + \frac{|\mathcal{C}|}{\tau V_A} + i}{\left(\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}V_A}\right)^2 + \frac{|\mathcal{C}|}{\tau V_A}\right)^2 + 1}\right], \quad \omega_A = |\mathcal{C}|V_A. \tag{3.46}$$

Se pun deci în evidenţă defazări şi amortizări care depind de viteza lui Alfvén şi de numerele

$$\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}V_A}\right)^2, \qquad \frac{|\mathcal{C}|}{\tau V_A}. \tag{3.47}$$

§ 4. UNDE PLANE ÎN CÎMP ELECTROMAGNETIC OMOGEN

(pentru $\rho = \text{const.}$, $\eta = 0$, $G^* = 0$)

Vom considera un cîmp magnetic omogen H paralel cu axa z staţionar şi fie h cîmpul dat de curentul j astfel că $H = H_0 = h$. Vom studia cazul undelor plane orientate în direcţia cîmpului H_0 depinzînd deci doar de variabilele z, t.

Vom avea din (1.1) $j_3 = 0$, $H_3 = H$ iar din (1.2) $(\nabla V) = 0$, $V_3 = 0$. Alegînd un sistem de coordonate astfel că $j_2 = 0$ vom avea din (1.1) pentru $\varepsilon = 0$

$$j_1 = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial h_2}{\partial z}; \; j_2 = j_3 = 0; \; h_1 = 0; \; H_3 = H_0. \tag{4.1}$$

În cazul undelor plane vom lua $\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0$ şi în absenţa unui cîmp termic vom avea condiţiile de echilibru

$$\begin{gathered}
\rho\frac{DV_1}{Dt} = \mu_1' \nabla^2 V_1 + \mathcal{T}_1, \\
\rho\frac{DV_2}{Dt} = \mu_1' \nabla^2 V_2 + \mathcal{T}_2 + \frac{\mu}{4\pi} H_0 \frac{\partial h_2}{\partial z}, \\
\rho\frac{DV_3}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial h_2}{\partial z} h_2 + \mathcal{T}_3^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \\
\overline{\mathcal{T}} = \bar{i}\,\overline{\mathcal{T}}_1 + \bar{j}\,\overline{\mathcal{T}}_2 + \bar{k}\,\overline{\mathcal{T}}_3.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Deoarece în (1.4) avem

$$E_1 = \frac{j_1}{\sigma} - \frac{\mu}{c} V_2 H_0 \; ; \quad E_2 = E_3 = 0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial t} &= -\frac{\mu H_0}{c}\frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial j_1}{\partial z} = \\ &= -\frac{\mu H_0}{c}\frac{\partial V_2}{\partial z} + \frac{1}{\sigma}\left(-\frac{c}{4\pi}\right)\frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

rezultă că

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{H_0}\left(\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\chi'}{\mu}\frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2}\right) ; \; \chi' = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \, . \tag{4.5}$$

Vom presupune că, pentru $t = 0$, $V_2 = 0$, astfel că, în baza transformării Laplace

$$V_2^\star = \int_0^\infty \bar{e}^{\zeta z} V_2 \, dz, \tag{4.6}$$

să avem

$$V_2^\star = \frac{1}{\xi H_0}\left(\frac{\partial h_2^\star}{\partial t} - \frac{\chi'}{\mu}\zeta^2 h_2^\star\right). \tag{4.7}$$

Deoarece

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_3 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.8}$$

se obţin ecuaţiile de echilibru liniarizate

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial V_1^\star}{\partial t} = \mu_1' \zeta^2 V_1^\star + \mathcal{T}_1^\star , \\ \rho\frac{\partial V_2^\star}{\partial t} = \mu_1' \zeta^2 V_2^\star + \mathcal{T}_2^\star + \frac{\mu}{4\pi} H_0 \zeta h_2^\star + \mu_1' \nabla^2 V_2^\star , \\ \nabla^{\star 2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} , \\ \zeta p^\star = \mathcal{T}_3^\star - \frac{\mu}{8\pi}\zeta (h_2^2)^\star . \end{gathered} \tag{4.9}$$

A doua relaţie se mai scrie

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial t} - \mu_1' \nabla^{\star 2}\right)\frac{1}{\zeta H_0}\left(\frac{\partial H_2^\star}{\partial t} - \frac{\chi}{\mu}\zeta^2 h_2^\star\right) = \mathcal{T}_2^\star + \frac{\mu H_0}{4\pi}\zeta h_2^\star . \tag{4.10}$$

Vom mai efectua transformata Laplace

$$(\quad)_x = \int_0^\infty e^{-\zeta t}\, dt\, (\quad), \tag{4.11}$$

astfel că

$$(\mathcal{T})_x^\star = \delta_{ij}\, \lambda_x(\tau)\, (\theta)_x^\star + 2\mu_x(\tau)\, (\varepsilon_{ij})_x^\star \tag{4.12}$$

unde

$$\theta = (\nabla . U) = \frac{\partial w}{\partial z}\,; \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = V_3\,; \qquad U = \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w. \tag{4.13}$$

Cu acestea ecuaţiile de echilibru devin

$$\rho\tau^2 (u)_x^\star = \mu_1'\, \zeta^2 \tau\, (u)_x^\star + (\lambda_x + \mu_x)\, \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial\, x}\right)_x^\star + \mu_x\, \xi^2\, (u)_x^\star\,; \ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\rho\tau^2 (v)_x^\star = \mu_1'\, \xi^2\, \tau\, (v)_x^\star + (\lambda_x + \mu_x)\, \xi \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x^\star + \mu_x\, \xi^2\, (v)_x^\star + $$
$$+ \frac{\mu}{4\pi} H_0\, \zeta (h_0)_x^\star\,, \tag{4.14}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \qquad \zeta\, (p)_x^\star = -\frac{\mu}{8\pi}\, \zeta\, (h_2^2)_x^\star .$$

În definitiv din primele două ecuaţii rezultă

$$(\rho\tau^2 - \bar{\mu}_x . \zeta^2)\, (u)_x^\star = 0\,; \ (\rho\tau^2 - \bar{\mu}_x \zeta^2)\, (v)_x^\star = \frac{\mu}{4\pi} H_0\, \zeta\, (h_2)_x^\star\,, \tag{4.15}$$
$$\bar{\mu} = \mu^\star(\tau) + \mu(\tau).$$

Din (4.7) şi (4.15) se deduce că

$$(\tau^2 - c_0^2\, \zeta^2) \left(1 - \frac{\chi}{\mu\tau}\, \zeta^2\right) = \frac{\mu}{4\pi\rho} (H_0\, \zeta)^2 = \zeta^2\, C_A^2\,, \tag{4.16}$$

unde

$$c_0^2 = \frac{\bar{\mu}}{\rho}\,; \qquad C_A^2 = \frac{\mu}{4\pi\rho} H_0^2\,. \tag{4.17}$$

Ecuaţia caracteristică echivalentă cu (4.16) este:

$$\frac{\chi C_0^2}{\tau\mu}\, \zeta^4 - \left(c_0^2 + \frac{\chi'\tau}{\mu} + C_A^2\right) \zeta^2 + \tau^2 = 0, \tag{4.18}$$

avînd soluţiile

$$\zeta^2 = \frac{c_0^2 + \dfrac{\tau\chi'}{\mu} + C_A^2 \pm \sqrt{\left(C_0^2 + \dfrac{\tau\chi'}{\mu} + C_A^2\right)^2 - 4\tau^2 \dfrac{\chi'\, c_0^2}{\tau\mu}}}{\dfrac{2\chi}{\mu\tau}\, c_0^2}\,. \tag{4.19}$$

Viteza undelor (fictivă în cazul nestaționar) în spațiul transformat are expresia

$$C_M^{*2} = \frac{C^2}{\zeta^2}\,. \qquad (4.20)$$

Cazul conductivității infinite ($\chi = 0$)

Din (4.18) rezultă

$$C_M = C_A \cdot \nu^\star\,; \quad \nu^\star = \sqrt{1 + \frac{C_0^2}{C_A^2}}\,. \qquad (4.21)$$

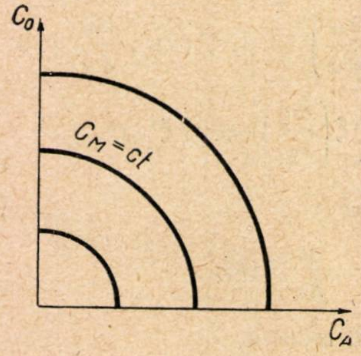


Fig. 1

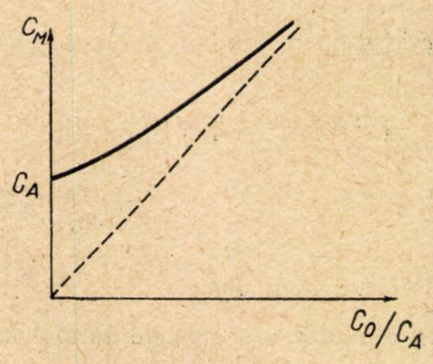


Fig. 2

Așadar, viteza undelor de tip Alfvén variază de la viteza lui Alfvén la viteza C_0 pentru $C_0/C_A \gg 1$ și poate fi constantă dacă suma pătratelor vitezelor C_A și c_0 este constantă. În cazul c_0 complex se obțin amortizări.

În cazul unei perturbări

$$h_2 = A\, e^{i\omega\,(t - z/\mathcal{C}_M)} - B e^{-i\omega\,(t - z/\mathcal{C}_M)}\,, \qquad (4.22)$$

vom deduce toate mărimile studiate anterior punînd $\tau = i\omega$, $\zeta = -i\omega/\mathcal{C}_M$ și deci

$$C_M = C_A\,\nu\,; \quad \nu = \sqrt{1 + \frac{C_0^2\,(i\omega)}{C_A^2}}\,, \qquad (4.23)$$

$$v_2 = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\mathcal{C}_M}{H_0}\,[A\,e^{i\omega\,(t - z/\mathcal{C}_M)} + B\,e^{-i\omega\,(t - z/\mathcal{C}_M)}]\,,$$

$$v = -\frac{\mathcal{C}_M}{H_0\,i\omega}\left[A e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)} - B\,e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)}\right]; \quad u = w = 0,$$

$$p = p_0 - \frac{\mu}{8\pi}\left[A e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)} - B e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)}\right],$$

$$j_1 = \frac{c i \omega}{4\pi \mathcal{C}_M}\left[A e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)} + B e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)}\right],$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{13} = T_{12} = 0,$$

$$T_{23} = \frac{\mu}{H_0}\left[A e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)} + B e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{\mathcal{C}_M}\right)}\right],$$

μ fiind originalul lui μ^* iar A, B constante ce se pot determina din condițiile inițiale.

Cazul conductivității electrice finite și a efectului reologic nul

Pentru $c_0 = 0$ se deduce din (4.18)

$$\mathcal{C}_M = C_A \sqrt{1 + \frac{c^2 \tau}{4\pi\sigma\mu}}\,. \tag{4.24}$$

Pentru cazul dat de (4.22), avem

$$\mathcal{C}_M = C_A \sqrt{1 + \frac{c^2 i \omega}{4\pi\sigma\mu\, C_A}}\,, \tag{4.24'}$$

obținîndu-se amortizări datorită conductivității electrice finite.

Cazul conductivității electrice mari

Mărginindu-ne la termeni liniari în $1/\sigma$ avem din (4.18) și (4.19)

$$\mathcal{C}_M = \sqrt{C_A^2 + \mathcal{R}e\, c_0^2}\sqrt{1 + i\frac{\dfrac{C^2\omega}{4\pi\sigma\mu} + \mathcal{J}m\, c_0^2}{C_A^2 + \mathcal{R}e\, c_0^2}}\,. \tag{4.25}$$

Pentru

$$\frac{c^2\omega}{4\pi\sigma\mu\, C_A^2\sqrt{1 + \mathcal{R}e\dfrac{c_0^2}{C_H^2}}} + \frac{\mathcal{J}m c_0^2}{C_A^2\left(1 + \mathcal{R}e\dfrac{c_0^2}{C_A^2}\right)} \ll \frac{1}{\pi} < 1, \tag{4.26}$$

(4.25) se mai scrie :

$$\mathcal{C}_M = \mathcal{R}e\, \mathcal{C}_M + i\mathcal{J}\, \mathcal{C}_M = |\mathcal{C}_M|\, e^{i\vartheta_M}, \tag{4.27}$$

unde

$$\mathcal{R}e\, \mathcal{C}_M = \sqrt{C_A^2 + \mathcal{R}e\, c_0^2}\,; \quad \mathcal{J}_m \mathcal{C}_M = \mathcal{R}e\, \mathcal{C}_M \frac{\dfrac{c^2\omega}{8\pi\sigma\mu} + \dfrac{1}{2}\mathcal{J}_m c_0^2}{\sqrt{C_A^2 + c_0^2}}\,. \tag{4.28}$$

Condiţia (4.26) este îndeplinită pentru

$$z_0=\frac{8\pi\sigma\mu\, C_A^3}{\omega^2 c^2}=\frac{\mu^{5/2}\sigma H_0^3}{\sqrt{\pi}\, c^2\rho^{3/2}\omega^2}\geqslant\frac{2\pi C_A'/\omega}{\sqrt{1+\mathcal{R}e\left(\frac{c_0}{C_A}\right)-\pi J_m\left(\frac{c_0}{C_A}\right)^2}}. \qquad (4.29)$$

Este clar că

$$h,\, v=h_0,\, v_0\cdot e^{i\omega\left(t-\frac{z}{|\mathcal{C}_M|}\cos\vartheta_M\right)}\cdot e^{-\frac{\omega z}{|\mathcal{C}_M|}\sin\vartheta_M},$$

unde v_0 se deduce din ecuaţia (4.5)

$$v_0\left(-\frac{i\omega}{\mathcal{C}_M}\right)=\frac{h_0}{H_0}\left(i\omega-\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\frac{\omega^2}{\mathcal{C}_M^2}\right), \qquad (4.30)$$

sau

$$v_0=-\mathcal{C}_M\frac{h_0}{H_0}\left(1+\frac{ic^2}{4\pi\sigma\mu\omega}\cdot\frac{\omega^2}{\mathcal{C}_M^2}\right). \qquad (4.31)$$

Cazul general

Din (4.19) se deduce că

$$\frac{1}{\mathcal{C}_M}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_0^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{\tau c^2}\left(1+\frac{C_A^2}{c_0^2}\right)\right)$$
$$\left(\sqrt{1-\frac{16\pi\sigma\mu}{c^2\tau c_0^2}\left(\frac{1}{c_0^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{\tau c^2}\left(1+\frac{c_A^2}{c_0^2}\right)\right)}\right)^{-2}, \qquad (4.32)$$

unde pentru (4.22) se va lua $\tau=i\omega$.

Amortizările care se produc, se datoresc atît conductivităţii electrice finite cît şi termenilor disipativi de natură viscoelastică.

§ 5. UNDA DE O FORMĂ OARECARE PENTRU DENSITATE CONSTANTĂ

Vom considera cîmpul magnetic $H=H_0+h$ unde h este indus iar H_0 este cîmpul primar. Vom presupune $H_0>|h|$ şi vom neglija derivatele în timp ale lui H_0 şi produsele lui h şi V.

Ecuaţiile (2.1) pentru $\eta=0$, $G/p=-\nabla P$

$$(V\nabla)V=\nabla\frac{V^2}{2}-V\times(\nabla\times V);\; h\times(\nabla\times h)=\nabla\frac{h^2}{2}-(h\nabla)h, \qquad (5.1)$$

$$\nabla H_0^2=0,$$

devin, respectiv

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0\nabla)h-\frac{\partial V}{\partial t}&=\frac{\mu}{4\pi\rho}h\times(\nabla\times h)-V\times(\nabla\times V)+\\&+\nabla\left(P+\frac{1}{\rho}\left(p+\frac{\rho V^2}{2}\right)+\frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0 h)-\frac{\mu_1'}{3\rho}(\nabla V)-\frac{1}{\rho}(\mathcal{T}+\mu_1'\nabla^2V)\right.\end{aligned}\tag{5.2}$$

şi

$$(H_0\nabla)V-\frac{\partial h}{\partial t}=-\chi\nabla^2h+(V\nabla)h-(h\nabla)V.\tag{5.3}$$

Pentru a elimina neliniarităţile, menţinîndu-ne în condiţii suficient de generale şi pentru a obţine extinderea undelor Alfvén vom pune

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}\,h\tag{5.4}$$

şi deci

$$\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}(H_0\cdot\nabla)h-\frac{\partial h}{\partial t}=-\chi\nabla^2h,\tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}\left[-\chi\nabla^2h\right]=\nabla\Bigg[P+\frac{1}{\rho}\left(p+\rho\frac{V}{2}\right)^2+\frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0h)-\\-\frac{\mu_1'}{3\rho}(\nabla V)\Bigg]-\frac{1}{\rho}(\mathcal{T}+\mu_1'\nabla^2V).\end{aligned}$$

Utilizînd transformata Laplace în raport cu timpul, ultima ecuaţie se mai scrie

$$\begin{aligned}-\chi\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}\nabla^2h_X=\nabla\left[P+\frac{1}{\rho}\left(p+\rho\frac{V^2}{2}\right)+\frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0h)-\frac{\mu_1'}{3\rho}\nabla V\right]_X\\-\frac{1}{\rho}\left[(L_X+M_X)\nabla(\nabla U)_X+M_X\nabla^2U_X-2(M_X\alpha\nabla T^\star)_X+\mu_1'\nabla^2V_X\right],\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$V_X=\tau U_X,$$

sau

$$\begin{aligned}\nabla\left\{\left[P+\frac{1}{\rho}\left(p+\rho\frac{V^2}{2}\right)+\frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0h)-\frac{\mu_1'}{3\rho}\nabla V\right]_X-\frac{1}{\rho}\Bigg[(L_X+M_X)(\nabla U)_X-\right.\\\left.-2M^\star\alpha T_X\Bigg]\right\}=\nabla^2\frac{1}{\rho}\left[M_XU_X+\mu_1'V_X-\chi\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}h_X\right]=\\=\nabla^2\frac{1}{\rho}(M_X+(\mu_1'-\chi)\tau)U_X.\end{aligned}\tag{5.7}$$

În definitiv se obține soluțiile

$$U_X = (U_1)_X + (U_2)_X \; ; \; \nabla^2 U_1 = 0 \; ; \; \nabla^2 (U_2) = \nabla P_X \tag{5.8}$$

astfel că

$$\left(P + \frac{1}{\rho}\left(p + \rho \frac{V^2}{2}\right) + \frac{\mu}{4\pi\rho}(H_0 h) - \frac{\mu_1'}{3\rho}\nabla V\right)_X \tag{5.9}$$

$$- \frac{1}{\rho}\left[(L_X + M_X)\nabla U_X - 2M_{X\alpha}\, T_X + (M_X + (\mu_1' - \chi)\,\alpha)\,P_X\right] = \text{const.}$$

în care apar presiunile cîmpului gravific, hidrostatic, magnetostatic, termic și viscoelastic. Prima relație din (5.5) caracterizează fenomenul de propagare al perturbațiilor care pentru $\chi = 0$ sînt cele obținute de Alfvén.

Este de remarcat că perturbațiile au un caracter *primar* în sensul că sînt respectate neliniaritățile în h care poate fi considerat de ordinul de mărime al lui H.

Primită la redacție la 18 ianuarie 1960

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВТОРИЧНЫХ И ПЕРВИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОБЩЕГО РЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье автор исследует в единой форме распространение вторичных возмущений в среде, обладающей реологическими и гидродинамическими свойствами.

Рассматриваются уравнения реомагнитного, температурного и гравитационного поля, называемого и общим полем, в линейном случае реологических законов Рейнера-Ривлина.

Выводится уравнение характеристического конуса вторичных возмущений.

Исследуются также плоские возмущения в случае однородного электромагнитного поля с учетом нелинейности уравнений.

ON THE PROPAGATION OF SECONDARY AND PRIMARY PERTURBATIONS OF THE TOTAL RHEOMAGNETIC FIELD

ABSTRACT

This paper deals with the propagation of the secondary and primary perturbations in a medium enjoying rheologic and hydromagnetic properties.

The equations of the thermic, rheomagnetic and gravitational field, also called total field, are discussed for the case of the Reiner-Rivlin rheologic laws.

The equation of the characteristic cone of the secondary perturbations is deduced.

The primary perturbations are also discussed for an electromagnetic homogeneous field, by taking into consideration the non-linearity of equations.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Reiner, *Twelve Lectures on .Theoretical Rhelogy.* North Holland Publ. Amsterdam (1949) şi Amer. J. Math. *67*, 350 (1945).
2. R. S. Rivlin, *Large elastic deformations of isotropic materials.* Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, *193*, 260 (1948) şi Quart. Appl. Math. *13*, 177 (1955).
3. R. S. Rivlin, J. L. Ericksen, *Stress-deformations relations for isotropic materials.* J. Rat. Mech. Analysis, *4*, 323–425 (1955).
4. B. A. Cotter, R.S. Rivlin, *Tensors associated with time-dependent stress.* Rept. A. 11–13. Brown University Providence R. *1* (1954) şi Quart. Appl. Math. *13*, 177–195.
5. J. G. Oldroyd, *On the formulation of rheological equations of state.* Proc. Roy. Soc., A *200* 523–541 (1950).
6. S. Zaremba, *Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement* Mem. Sci. Math. N. 82. Gauthier-Villars Paris, 1937, şi Bull. intern. ac. sci. Cracovie, 594–614 (1903).
7. W. Noll, *On the continuity of the solid and fluid state.* J. Rat. Mech. Analysis, **4**, *3* (1955).
8. H. Alfvén, *On the existence of Electromagnetic-hydrodynamic Waves.* Ark. f. mat. o. fysik 29 B. N. 2. Nature, **150**, 405 (1942) Cosmical Electrodynamics 1950. Inostr. Lit. Moscova 1952.
9. C. Walén, *On the theory of Sunspots.* Ark. f. mat, astr. o fysik, 30 A, *15*, **31**, *3* (1944).
10. W. M. Elsasser, Phys. Rev., *72*, 183 (1950).
11. S. Lundquist, Arkiv., Fysik, *2*, 361 (1950).
12. N. Herlofson, Nature *165*, 1020 (1950).
13. H. C. Van de Hulst, *Problems of cosmical aerodynamics.* 1951. Inostr. Lit. 1953. şi BAN *10* 405 (1948).
14. S. Chandrasekar, E. Fermi, *Problemi sovremennoi fiziki.* **2** (1954) şi Astro phs. J. *118*, 116 (1953).
15. Eddington, Mo. Nat. Roy. Astr. Soc., **79**, *2*, 177 (1918)
16. J. Woltjer, Bull. Astr. Inst. Netherlds, *7*, 127 (1933) *8* (1937). Proc. Nat. Ac. Sci. Wash., *44*, 833 (1958).
17. L. H. Thomas, Quart. Journ, Math, *1* (1930) ; Mon. Nat. Astr. Soc. *91*, 122, (1933).
18. Svein Rosseland, *The pulsation theory of variable stars.* Oxford, 1949 ; Publ. Oslo Univ. Obs. *N 2* (1932).
19. M. Schwarzschild, Astr. J., *94*, 245 (1941).
20. Ф. А. Баум, С. А. Каплан, К. П. Станюкович, *Введение в космическую газодинамику.* Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва, 1958, 424.
21. С. А. Каплан, *Межзвездная газодинамика.* Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва, 1958.

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

DESPRE POSIBILITATEA APLICĂRII FUNCȚIILOR PROPRII PENTRU CALCULUL PLĂCILOR ÎN FORMĂ DE PATRULATER OARECARE

DE

ALEXANDER HANUŠKA [1]

La proiectarea construcțiilor inginerești se întîlnesc foarte frecvent plăci în formă de triunghi sau patrulater oarecare. Ca exemple menționăm plăcile de acoperiș la construcțiile de formă oarecare, plăcile oblice în construcția de poduri, unele piese pentru construcția navelor și a avioanelor etc.

În practică, construcțiile se calculează în general cu ajutorul metodei diferențelor finite (prelucrată în prezent, destul de satisfăcător, pentru structuri de formă oarecare). În afară de aceasta au mai fost folosite, în special pentru plăci oblice, încastrate pe toate laturile sau simplu rezemate, metodele variaționale [1], [3], [5] și [7].

În ultimii 20 de ani au fost rezolvate numeroase probleme ale teoriei elasticității, prin aplicarea funcțiilor proprii [10], [9], [2] și [4]. În aceste cazuri au fost tratate probleme ale teoriei elasticității plane și ale încovoierii plăcilor subțiri pentru un contur dreptunghiular și pentru segmente de cerc.

În lucrarea de față se indică una din metodele posibile pentru calculul plăcilor neregulate cu condiții la limită arbitrare. Pentru calcul se folosesc funcțiile proprii.

Să considerăm o placă în formă de patrulater oarecare, cu condiții la limită arbitrare. Este avantajos să alegem coordonatele polare (fig. 1).

În cazul acesta obținem următoarele expresii :

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \qquad (1)$$

$$(i = 1,\ 2)$$

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{y_i}{x_i}, \qquad (2)$$

---

[1] Slovenská Akademiá Vied – Bratislava.

unde între coordonatele carteziene sînt valabile următoarele relații :

$$x_1 = x_2 + s, \quad y_1 = y_2 + t. \tag{3}$$

Considerăm, mai departe, funcția

$$w_i(r_i, \varphi_i) = w_{i,0}(r_i, \varphi_i) + \mathcal{R}e \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n} w_{i,n}(r_i, \varphi_i) + \mathcal{I}m \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{i,n} \bar{w}_{i,n}(r_i, \varphi_i) \qquad (i = 1,2) \tag{4}$$

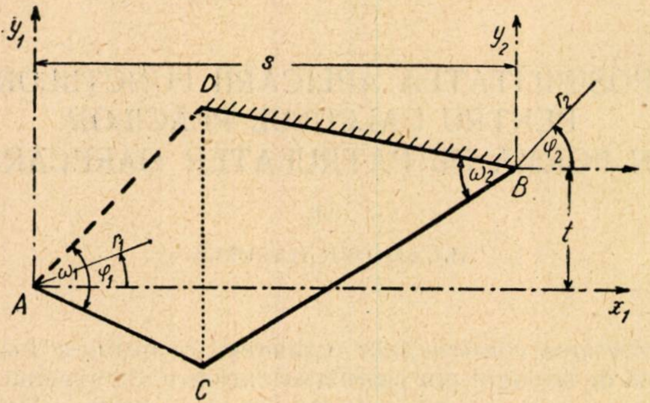


Fig. 1

unde $w_{i,0}$ este o funcție care satisface ecuația

$$\Delta \Delta w_{i,0}(r_i, \varphi_i) = \frac{1}{D} \cdot p_i(r_i, \varphi_i) \qquad (i = 1,2), \tag{5}$$

precum și condițiile la limită de-a lungul laturilor AC și AD pentru $i = 1$ și de-a lungul laturilor BC și BD pentru $i = 2$. Funcțiile $w_{i,n}$ reprezintă funcțiile biarmonice, ordonate după valoarea absolută a rădăcinii λ_n a ecuației transcendente. Această ecuație corespunde condițiilor pe contur omogene pentru rezemarea dată și anume pentru cele două pene cu vîrfurile în punctele A și B. Coeficienții $a_{i,n}$ rămîn deocamdată niște constante nedeterminate.

Prin alegerea funcției (4) este satisfăcută ecuația diferențială a încovoierii plăcilor împreună cu cele patru condiții pe contur. Ea nu satisface însă condiția de compatibilitate a funcțiilor w_1 și w_2 în secțiunea CD. În această secțiune trebuie să fie îndeplinite, în general, următoarele condiții :

$$w_1\ (x_1,\ y_1) = w_2\,(x_1,\ y_1), \tag{6}$$

$$\frac{\partial w_1\ (x_1,\ y_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2\ (x_1,\ y_1)}{\partial x_1} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 w_1(x_1, y_1)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w_2(x_1, y_1)}{\partial x_1^2}, \tag{8}$$

$$D \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta w_1 - \Delta w_2) = f(y_1), \tag{9}$$

unde $f(y_1)$ reprezintă o sarcină distribuită, aplicată de-a lungul liniei *CD*.

Pentru rezolvarea celor patru ecuații (6)—(9) avem la dispoziție 4 șiruri de constante $a_{1,n}$ $\bar{a}_{1,n}$ $a_{2,n}$ și $\bar{a}_{2,n}$ încă nedeterminate. Acestea

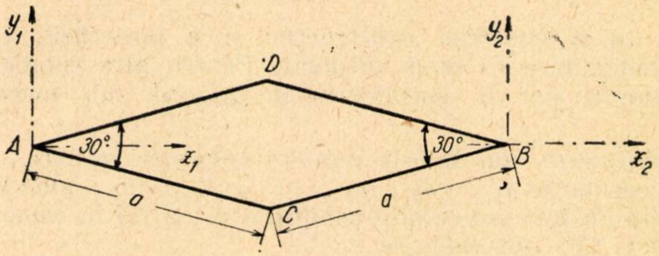


Fig. 2

pot fi determinate, după substituirea expresiei (4) în ecuațiile (6), (7), (8) și (9), cu ajutorul unor metode de aproximație, ca de exemplu cu ajutorul metodei celor mai mici patrate, metodei ortogonalizării sau metodei colocației.

Ca exemplu de aplicare a metodei se calculează o placă uniform încărcată, simplu rezemată pe toate laturile, avînd forma și dimensiunile din figura 2.

De-a lungul laturilor punem cele patru condiții ale lui Navier, adică

$$[w]_C = 0, \quad [\Delta w]_C = 0. \tag{10}$$

Soluția particulară pentru cazul unei sarcini distribuite uniform se găsește ușor. Funcția

$$w_{i,0}(r_i, \varphi_i) = \frac{p \cdot a^4}{64\, D} \left(1 - \frac{8\sqrt{3}}{9} \cos 2\varphi_i + \frac{2}{3} \cos 4\varphi_i\right) \quad (i = 1,2) \tag{11}$$

satisface ecuația (5) și condițiile pe contur (10). În cazul unei sarcini oarecare ar fi necesar să pornim de la o funcție de tip Green, cunoscută explicit [8] pentru conturul dat. Pentru alte condiții pe contur, soluția particulară $w_{i,0}$ poate fi determinată cu ajutorul transformării Mellin sau al integralei Fourier.

Determinarea funcțiilor $w_{1,n}$ se ușurează prin faptul că funcțiile reale $r_1^{6n} \sin 6n\,(\varphi + \pi/12)$ și $r_1^{6n+2} \sin 6n\,(\varphi + \pi/12)$, valabile pentru condițiile pe contur de tip Navier, reprezintă funcții proprii, astfel încît soluția poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} w_1(r_1, \varphi_1) = \frac{pa^4}{64\,D} \cdot \Bigg[r_1^4 \cdot \left(1 - \frac{8\sqrt{3}}{9} \cos 2\,\varphi_1 + \frac{2}{3} \cos 4\,\varphi_1\right) + \\ + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} (a_{1,n} + r^2 b_{1,n})\, r_1^{6n} \cdot \sin 6n\,(\varphi_1 + \pi/12) \Bigg], \end{aligned} \tag{12}$$

unde, din cauza simetriei construcției și a încărcării, condițiile (6) și (8) sînt îndeplinite în mod automat. Pentru alte condiții pe contur, funcțiile proprii pot fi considerate în general sub formă complexă [6], [11].

În continuare, am folosit metoda colocației pentru determinarea celor patru constante $a_{1,1} = a_{2,1}$, $a_{1,3} = b_{2,3}$, $b_{1,1} = b_{2,1}$ pînă la $b_{1,3} = b_{2,3}$. În acest scop au fost îndeplinite condițiile (7) și (9) în punctele $y = 0$ și $y = 2/3$ a.cos 15°, obținîndu-se

$$a_{1,1} = -0{,}13353 \qquad b_{1,1} = 0{,}03607 \qquad a_{1,3} = -0{,}00379 \qquad b_{1,3} = 0{,}00243.$$

Figura 3 arată liniile cu aceeași deplasare a suprafeței mediane, unde săgeata maximă, în centru, este $w_{\max} = 0{,}000473\ pa^4/D$ ceea ce reprezintă o valoare puțin mai mică decît aceea indicată de Jensen [5]: $w_{\max} = 0{,}000498\ pa^4/D$, determinată cu ajutorul metodei diferențelor finite, tot din patru ecuații.

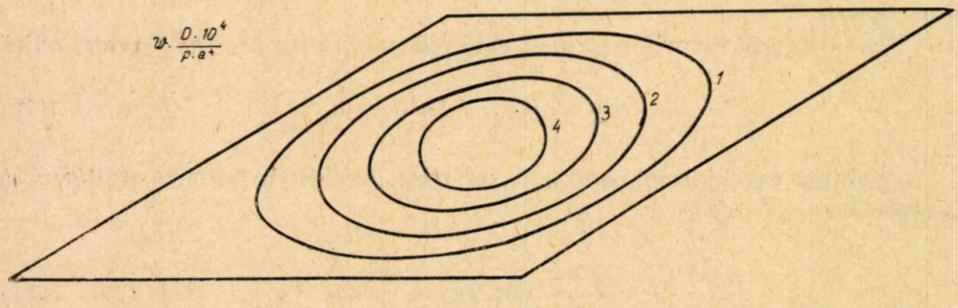


Fig. 3

Mai indicăm și valorile momentelor de încovoiere la centru, luînd constanta lui Poisson $\nu = 0{,}2$: $M_x = 0{,}0129\ pa^2$, $M_y = 0{,}0226\ pa^2$ (după Jensen : $M_x = 0{,}0102\ pa^2$ și $M_y = 0{,}0193\ pa^2$).

Figura 4 arată diagrama momentelor M_x și M_y de-a lungul diagonalei AB.

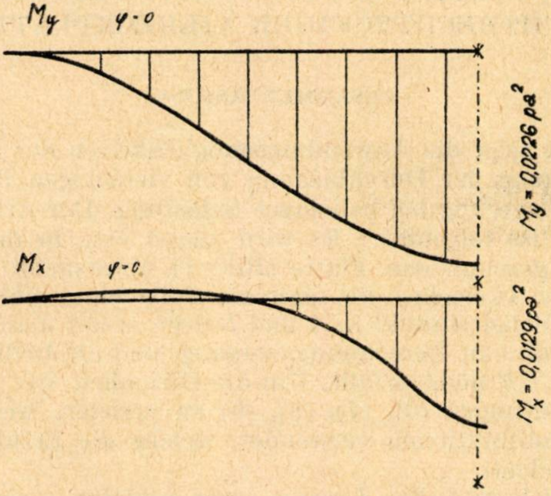


Fig. 4

În încheiere menționăm că metoda expusă mai sus poate fi aplicată, în domenii analoage și pentru rezolvarea problemelor plane ale teoriei elasticității.

Primită la redacție la 18 noiembrie 1959

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗГИБА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ПЛИТ

РЕЗЮМЕ

В статье показана возможность использования собственных функций для расчета изгиба четырехугольных плит произвольного очертания и закрепления под действием любой нагрузки. Метод состоит в следующем: рассмотрим сначала плиту (рис. 1), разрезанную вдоль диагонали $\overline{CD}$. Решение обоих треугольников, полученных как части бесконечных клиньев с вершинами в точках A и B, можно получить известными методами. При таком расчете остаются неудовлетворенными условия на линии соединения $\overline{CD}$. Чтобы получить выполнение условий равности прогибов и их производных вдоль диагонали $\overline{CD}$, надо применить систему собственных функций, которые позволяют выполнить эти условия.

В качестве примера показано решение косой плиты и результаты сравнены с результатами, полученными методом сеток.

ÜBER DIE ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT DER EIGENFUNKTIONEN ZUR BERECHNUNG NICHTRECHTECKIGER VIERECKPLATTEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit zeigt die Anwendungsmöglichkeiten der Eigenfunktionen bei der Berechnung der Durchbiegung von viereckigen Platten allgemeiner Form und Lagerung bei beliebiger Belastung. Der Arbeitsvorgang bei dieser Methode ist folgender: Es wird zuerst eine in der Richtung der Diagonale CD geschnittene Platte (Bild 1) untersucht. Die Lösung der so entstandenen Dreiecke, die man als Teile eines unendlichen Keiles auffaßt, dessen Scheitelpunkt in A und B liegt, erhält man nach bekannten Methoden. Bei diesem Berechnungsvorgang sind die Bedingungen in dem Diagonalschnitt CD nicht erfüllt. Um die Gleichheit der Durchbiegungen und deren Ableitungen (6), (7), (8), (9) zu erzielen, werden unendliche Reihen der Eigenfunktionen verwendet, welche die Erfüllung der Bedingungen ermöglichen.

Als Beispiel wird die Lösung einer schiefen, gelenkig gelagerten Platte angeführt und mit der Lösung nach der Netzmethode verglichen.

BIBLIOGRAFIE

1. S. CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI, *Plăci oblice, O metodă de calcul numeric.* Comunicările Acad. R. P.R., **V**, *6*, 913–923 (1955).
2. J. FADLE, *Die Selbstspannungs-Eigenfunktionen der quadratischen Scheibe.* Ingenieur-Archiv, **XI**, 125–149 (1941).
3. H. FAVRE, *Le calcul des plaques obliques par la méthode des equations aux différences.* Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, **7**, der „Abhandlungen”.
4. Г. А. ГРИНБЕРГ, *О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теориц упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и некоторых его обобщениях.* Прикладная математика и механика, **XVII**, 210—228 (1953).
5. V. P. JENSEN, *Analysis of Skew Slabs.* University of Illinois, Engeneering Experiment Station, Bulletin Series, *332* (1941).
6. К. А. КИТОВЕР, *Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости.* Прикладная математика и механика, **XVI**, 739—748 (1952).
7. Р. Р. МАТЕВОСЬЯН, *К расчету трапециевидных тонких плит.* Исследования по теории сооружения, Госстройиздат, 323—336 (1957).
8. W. NOWACKI, J. MOSSAKOVSKI, *Powierzchnie vpywowe pyt o konturze w postaci wycinka pierscienia koewego*, Archiwum mechaniki stosowanej, **V**, 237–272 (1953).
9. П. Ф. Папкович, *Строительная механика корабля.* **II**, 1941.
10. F. TÖLKE, *Talsperren.* III/9 der Handbibliothek für Bauingenieure, 388 – 408 (1938).
11. M. L. VILLIAMS, *Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates Under Bending.* Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Publ. Am. Soc. Mech. Engrs., 325–329 (1952).
12. S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Über die Anwendung der Mellin-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung.* Ingenieur-Archiv, **XX**, 391–397 (1952).

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

ASUPRA PROBLEMEI SPAȚIALE A ELASTODINAMICII

DE

P. P. TEODORESCU[1]

1. Problemele spațiale ale elastostaticii au fost atacate cu succes cu ajutorul funcțiilor potențiale. În ceea ce privește cazul dinamic, s-a plecat, în mod obișnuit, de la ecuațiile lui G. Lamé [13], care conduc la o soluție în deplasări.

Primul care a dat o reprezentare a componentelor vectorului deplasare, cu ajutorul unor funcții de deplasare care verifică ecuația undelor, a fost G. Stokes [21]; problema a fost reluată de A. Clebsch [3], cu ajutorul a patru funcții de deplasare care verifică ecuații de tip hiperbolic. M. Iacovache [10] a plecat tot de la ecuațiile lui Lamé, dînd o reprezentare cu ajutorul unui vector analog vectorului lui Galerkin [4], [5], [6], [7], [8], din cazul static; această reprezentare a fost reluată de E. Sternberg și R. A. Eubanks [20], găsind formule de tip Papkowitch [17]. Pentru cazul axial simetric, citām lucrările lui W. Noll [16] și M. Predeleanu [18].

Gr. C. Moisil [15] și D. Gh. Ionescu [12] s-au ocupat de problema descompunerii undelor elastice în unde longitudinale și unde transversale.

Unele considerații în legătură cu rezolvarea problemei în deplasări au fost făcute de L. Solomon [19]. M. Iacovache [11] a dat de asemenea o bază a relațiilor între tensiuni pentru această problemă. Noi am dat recent unele rezultate pentru rezolvarea problemei în tensiuni [28].

2. Astfel, ecuațiile lui Lamé[2]).

$$\square_2 u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

unde u, v, w sînt componentele deplasării iar

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2}$$

---

[1]) Universitatea „C. I. Parhon” – Facultatea de fizico-matematici.

[2]) Celelalte relații se obțin prin permutări circulare.

este deformația specifică volumică, au condus pe M. Iacovache la reprezentarea

$$u = \Box_1 \mathcal{F}_x - \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \tag{3}$$

unde

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_z}{\partial z}. \tag{4}$$

Funcțiile de deplasare $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x(x, y, z; t)$, $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}_y(x, y, z; t)$, $\mathcal{F}_z = \mathcal{F}_z(x, y, z; t)$ trebuie să verifice ecuația

$$\Box_1 \Box_2 \Omega(x, y, z; t) = 0. \tag{5}$$

Am introdus operatorii lui d'Alembert

$$\Box_i = \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad (i = 1,2), \tag{6}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace relativ la variabilele spațiale x, y, z iar c_i sînt viteze de propagare a undelor date de

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E}, \qquad \frac{1}{c_2^2} = 2(1+\mu)\frac{\rho}{E}, \tag{7}$$

ρ fiind masa specifică, E modulul de elasticitate longitudinală iar μ coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

Folosind relațiile între deplasări și deformații specifice liniare (ε_x, ε_y, ε_z) și unghiulare (γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy})

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{8'}$$

precum și legea lui Hooke

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), \tag{9}$$

$$E\gamma_{yz} = 2(1+\mu)\tau_{yz}, \tag{9'}$$

unde σ_x, σ_y, σ_z sînt tensiunile normale iar τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} sînt tensiunile tangențiale, putem calcula cu ușurință starea de tensiune.

Derivînd ecuațiile sistemului (1) în raport cu x, y, z, adunînd și ținînd seama de (6), putem scrie că deformația specifică volumică verifică ecuația

$$\Box_1 \chi(x, y, z; t) = 0. \tag{10}$$

În acest caz, aplicînd ecuațiilor (1) operatorul $\Box_1$, găsim că toate componentele vectorului deplasare sînt integrale ale ecuației (5).

Trebuie să menționăm că mulțimea integralelor ecuațiilor (5) include mulțimea integralelor ecuațiilor (1), ecuațiile (5) nefiind suficiente pentru rezolvarea problemei.

3. Vom da acum o soluție în tensiuni, care generalizează rezultatele obținute de noi pentru problema statică similară [25], [26], [27], precum și pe cele obținute în problema plană a elastodinamicii [22], [24].

Pentru aceasta folosim ecuațiile de echilibru dinamic

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (11)$$

scrise în lipsa forțelor masice, și ecuațiile de continuitate pe care trebuie să le verifice deformațiile specifice

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(- \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \cdot \qquad (12')$$

Derivînd ecuațiile (11) în raport cu x, y, z, ținînd seama de (8) și eliminînd deformațiile specifice cu ajutorul relațiilor (9), obținem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma_x + \mu \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} = 0. \qquad (13)$$

Eliminînd deformațiile specifice între ecuațiile (12) și (9), (9′), găsim

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) = 2 (1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \cdot \qquad (14)$$

Adunînd aceste trei ecuații și ținînd seama de suma relațiilor (13), observăm că suma tensiunilor normale $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ verifică tot ecuația (10).

Adunînd ecuațiile (13) cîte două și scăzînd pe a treia găsim relații care ne permit să înlocuim tensiunea tangențială din ecuațiile (14); dacă ținem seama și de condiția pe care trebuie să o îndeplinească suma tensiunilor normale, găsim — în definitiv — că tensiunile normale trebuie să verifice sistemul de ecuații

$$\square_2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu (1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0. \qquad (15)$$

Derivînd a doua ecuație (11) în raport cu z și pe a treia în raport cu y și ținînd seama de (8′) și (9′) putem scrie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (16)$$

Eliminînd deformațiile specifice între (12′), (9) și (9′) găsim de asemenea

$$(1+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y\partial z}-\mu\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_y+\sigma_z). \qquad (17)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (16) și (17) obținem

$$\Box_2\,\tau_{yz}+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0. \qquad (15')$$

Ecuațiile (15) și (15′) generalizează pe cele date de E. Beltrami [1] pentru cazul static.

Rezolvarea problemei se reduce deci la integrarea unuia din sistemele (15) sau (15′) și a ecuațiilor de echilibru dinamic (11), la care adăugăm legea lui Hooke (9), (9′), ținînd seama de (8), (8′).

Aplicînd operatorul $\Box_1$ ecuațiilor (15), (15′) și ținînd seama de condiția pe care o verifică suma tensiunilor normale, constatăm că și componentele tensorului tensiune verifică ecuația (5).

Menționăm, de asemenea, că mulțimea integralelor ecuațiilor (5) include mulțimea integralelor ecuațiilor (15), (15′), aceste ecuații nefiind însă suficiente pentru rezolvarea problemei.

4. În cazul micilor mișcări amortizate se pot folosi ecuațiile de echilibru dinamic introduse de B. Galitzin [9]

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nu\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (18)$$

unde ν este un coeficient de amortizare. Rezultatele obținute mai sus rămîn valabile dacă se înlocuiește peste tot operatorul $\rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ cu operatorul $\left(\rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$. În felul acesta se pot obține rezultate care generalizează pe cele date de noi [23] pentru cazul plan.

5. Pentru a reprezenta tensiunile normale cu ajutorul a trei funcții de tensiune, plecînd de la ecuațiile (15), vom folosi metoda de calcul cu ajutorul matricilor asociate ecuațiilor cu derivate parțiale, dată de Gr. C. Moisil [14].

Vom nota cu D_x, D_y, D_z operatorii de tip eliptic

$$D_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\,\frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (19)$$

Sistemul de ecuaţii (15) ne permite să introducem matricea

$$\mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \begin{Vmatrix} \Box_2 + \frac{1}{1+\mu} D_x & \frac{1}{1+\mu} D_x & \frac{1}{1+\mu} D_x \\ \frac{1}{1+\mu} D_y & \Box_2 + \frac{1}{1+\mu} D_y & \frac{1}{1+\mu} D_y \\ \frac{1}{1+\mu} D_z & \frac{1}{1+\mu} D_z & \Box_2 + \frac{1}{1+\mu} D_z \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Matricea inversă va fi proporţională cu

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \begin{Vmatrix} \Box_1 - \frac{1}{2+\mu} D_x & -\frac{1}{2+\mu} D_x & -\frac{1}{2+\mu} D_x \\ -\frac{1}{2+\mu} D_y & \Box_1 - \frac{1}{2+\mu} D_y & -\frac{1}{2+\mu} D_y \\ -\frac{1}{2+\mu} D_z & -\frac{1}{2+\mu} D_z & \Box_1 - \frac{1}{2+\mu} D_z \end{Vmatrix} \tag{20'}$$

şi vom avea

$$\mathcal{N}\cdot\mathcal{M} = \mathcal{M}\cdot\mathcal{N} = \begin{Vmatrix} \Box_1 \Box_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Box_1 \Box_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Box_1 \Box_2 \end{Vmatrix} = \Box_1 \Box_2 \mathcal{E}, \tag{21}$$

unde $\mathcal{E}$ este matricea unitate.

Prima relaţie (21) ne arată că tensiunile normale verifică ecuaţia (5) iar a doua relaţie (21) ne arată că putem reprezenta aceste tensiuni, în general, sub forma

$$\sigma_x = \Box_1 F_x - \frac{3}{2+\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] F, \tag{22}$$

unde funcţiile $F_x = F_x(x, y, z; t)$, $F_y = F_y(x, y, z; t)$, $F_z = F_z(x, y, z; t)$ verifică tot ecuaţia (5) şi am introdus notaţia

$$F = \frac{1}{3}(F_x + F_y + F_z). \tag{23}$$

Suma tensiunilor normale va fi dată de

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{3(1+\mu)}{2+\mu}\Box_2 F. \tag{24}$$

6. Pentru a găsi modul de reprezentare a tensiunilor tangențiale, vom pleca de la ecuațiile (15'). Ținînd seama de (23), putem scrie

$$\Box_2 \tau_{yz} + \frac{3}{2+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Box_2 F = 0. \tag{25}$$

De aici rezultă

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \psi_x, \tag{26}$$

funcțiile $\psi_x = \psi_x(x, y, z; t)$, $\psi_y = \psi_y(x, y, z; t)$, $\psi_z = \psi_z(x, y, z; t)$ trebuind să verifice ecuația

$$\Box_2 \varkappa\, (x, y, z; t) = 0. \tag{27}$$

Pentru a determina aceste funcții va trebui să folosim ecuațiile de echilibru (11). Este necesar însă să calculăm componentele deplasării. Relațiile (9) ne vor da, după calcule simple,

$$\frac{E}{1+\mu} \varepsilon_x = \Box_1 \left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu} F \right) - \frac{3}{2+\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{28}$$

Ținînd seama de (8) și integrînd în raport cu fiecare variabilă, obținem

$$\frac{E}{1+\mu} u = \Box_1 \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu} F \right) dx - \frac{3}{2+\mu} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial z}, \tag{29}$$

unde am introdus funcțiile încă arbitrare $f_{yz} = f_{yz}(y, z; t)$, $f_{zx} = f_{zx}(z, x; t)$, $f_{xy} = f_{xy}(x, y; t)$.

Punînd condiția ca ecuațiile (11) să fie satisfăcute, găsim sistemul de ecuații

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \Box_1 \left(F_x - \frac{3}{2+\mu} F \right) + \\ + (1+\mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Box_1 \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu} F \right) dx + (1+\mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_{iz}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial_z} \right). \end{gathered} \tag{30}$$

Aceste ecuații dau (privite ca ecuații omogene)

$$\begin{gathered} \psi_z = \frac{\partial f_x}{\partial z}, \quad \psi_y = -\frac{\partial f_x}{\partial y}, \\ \psi_x = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \psi_z = -\frac{\partial f_y}{\partial z}, \\ \psi_y = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad \psi_x = -\frac{\partial f_z}{\partial x}. \end{gathered} \tag{31}$$

De aici

$$f_y + f_z = 2\varphi_{yz}(y,\ z\ ;\ t). \tag{32}$$

Ţinînd seama de (32), rezultă că

$$f_x(x,\ y,\ z\ ;\ t) = \varphi_{xy}(x,\ y\ ;\ t) - \varphi_{yz}(y,\ z\ ;\ t) + \varphi_{zx}(z,\ x\ ;\ t). \tag{33}$$

Relaţiile (31) ne vor da

$$\psi_x = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{xy} - \varphi_{zx}) \tag{34}$$

iar ecuaţia pe care trebuie să o verifice funcţiile ψ_x, ψ_y, ψ_z ne conduce la

$$\Box_2(\varphi_{xy} - \varphi_{zx}) = f(y,\ z\ ;\ t). \tag{35}$$

Aceste relaţii nu sînt indepedente ; ele trebuie să satisfacă condiţia

$$f(y,\ z\ ;\ t) + g(z,\ x\ ;\ t) + h(x,\ y\ ;\ t) = 0. \tag{36}$$

Derivînd în raport cu x găsim

$$\frac{\partial g(z,\ x\ ;\ t)}{\partial x} + \frac{\partial h(x,\ y\ ;\ t)}{\partial x} = 0, \tag{37}$$

astfel încît

$$\frac{\partial g(z,\ x\ ;\ t)}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi(x\ ;\ t)}{\partial x},\quad \frac{\partial h(x,y\ ;t)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x\ ;t)}{\partial x} \tag{38}$$

şi

$$\begin{aligned} g(z,\ x\ ;\ t) &= -\varphi(x\ ;\ t) + \varkappa(z\ ;t),\\ h(x,\ y\ ;\ t) &= \varphi(x\ ;\ t) - \psi(y\ ;\ t). \end{aligned} \tag{38'}$$

Din (36) obţinem

$$f(y,\ z\ ;\ t) = \psi(y\ ;\ t) - \varkappa(z\ ;\ t). \tag{39}$$

Relaţiile (35) se vor scrie

$$\Box_2(\varphi_{xy} - \varphi_{zx}) = \psi(y\ ;\ t) - \varkappa(z\ ;\ t), \tag{40}$$

astfel încît căpătăm

$$\begin{aligned} \Box_2\ \varphi_{xy}(x,\ y\ ;\ t) - \psi(y\ ;\ t) &= f(x\ ;\ t),\\ \Box_2\ \varphi_{zx}(z,\ x\ ;\ t) - \varkappa(z\ ;\ t) &= f(x\ ;\ t) \end{aligned} \tag{40'}$$

şi alte două grupe de relaţii analoge. Identificînd putem scrie

$$f(x\ ;\ t) + \psi(y\ ;\ t) = \varphi(x\ ;\ t) + g(y\ ;\ t)\ ; \tag{41}$$

de unde

$$f(x\ ;\ t) = \varphi(x\ ;\ t) - 2\ (1 + \mu)\frac{\rho}{E}\frac{d^2}{dt^2}\theta_x(t). \tag{42}$$

Astfel că

$$\square_2\, \varphi_{yz}(y, z\,;\, t) = \psi(y\,;\, t) + \varkappa(z\,;\, t) - 2\,(1+\mu)\,\frac{\rho}{E}\,\frac{d^2\,\theta_x(t)}{dt^2}, \tag{43}$$

unde θ_x, θ_y, θ_z sînt funcții arbitrare.

Funcțiile $\varphi_{yz}(y, z\,;\, t)$, $\varphi_{zx}(z, x\,;\, t)$, $\varphi_{xy}(x, y\,;\, t)$ vor putea fi obținute, în general, sub forma

$$\varphi_{yz}(y, z\,;\, t) = F_{yz}(y, z\,;\, t) + \bar{\psi}(y\,;\, t) + \bar{\varkappa}(z\,;\, t) + \theta_x(t), \tag{44}$$

unde $F_{yz}(y, z\,;\, t)$, $F_{zx}(z, x\,;\, t)$, $F_{xy}(x, y\,;\, t)$ sînt integrale generale ale ecuației (27), scrisă pentru două variabile spațiale, iar $\bar{\varphi}(x\,;\, t)$, $\bar{\psi}(y\,;\, t)$ și $\bar{\varkappa}(z\,;\, t)$ sînt integrale particulare ale ecuației (27), avînd funcțiile $\varphi(x, t)$, respectiv $\psi\,(y\,;\, t)$, $\varkappa\,(z\,;t)$ în membrul al doilea.

Relațiile (34) ne dau astfel

$$\psi_x(x, y, z\,;\, t) = \frac{\partial}{\partial x}\,[F_{xy}(x, y\,;t) - F_{zx}(z, x\,;\, t)]. \tag{45}$$

Se observă ușor că pentru funcțiile f_{yz}, f_{zx}, f_{xy} putem lua un sistem de integrale particulare ale ecuațiilor (30) de forma

$$\psi_x = (1+\mu)\,\frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(f_{xy} + f_{zx}). \tag{46}$$

În definitiv tensiunea tangențială va fi dată de

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x}\,(F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2\,c_2^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(f_{xy} + f_{zx}), \tag{47}$$

unde funcțiile $\varphi_x = \varphi_x\,(x, y, z\,;\, t)$, $\varphi_y = \varphi_y\,(x, y, z\,;\, t)$, $\varphi_z = \varphi_z(x, y, z\,;\, t)$ verifică ecuația (27) și sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\,\square_1\left(F_x - \frac{3}{2+\mu}\,F\right) + \frac{1}{2\,c_2^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\square_1 \int\left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu}\,F\right) dx. \tag{48}$$

Pentru a găsi un sistem de integrale particulare ale ecuațiilor (48), vom deriva prima ecuație în raport cu x, pe a doua în raport cu y și pe a treia în raport cu z; adunînd ecuațiile două cîte două și scăzînd pe a treia, găsim

$$2\,\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial z} = \frac{3\mu}{2+\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\square_1 F + \square_1\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}\right). \tag{49}$$

Putem deci alege ca integrale particulare funcțiile

$$\varphi_x = \frac{3\mu}{2\,(2+\mu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\iint \square_1\, F\, dy\, dz + \frac{1}{2}\,\square_1\left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z}\,dy + \int \frac{\partial F_y}{\partial y}\,dz\right), \tag{50}$$

care verifică ecuaţia (27); trebuie să avem grijă să determinăm funcţiile arbitrare, care intervin prin operaţiile de integrare, astfel ca sistemul (48) să fie verificat. Aceste funcţii se anulează pentru funcţii de tensiune F_x, F_y, F_z construite cu ajutorul unor integrale ale ecuaţiei undelor de forma

$$e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t}, \tag{51}$$

unde

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{c_i^2}\delta^2=0 \qquad (i=1,2). \tag{51'}$$

Punînd condiţia ca relaţiile (29), (47) să verifice sistemul (8′), putem determina funcţiile f_{vz}, f_{zx} şi f_{xy}. Găsim astfel că aceste funcţii trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f_{xy}+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f_{zx}=$$
$$=2\frac{\partial}{\partial x}(F_{xv}-F_{zx})+\frac{3\mu}{2+\mu}\Box_1\left[\int\frac{\partial F}{\partial z}dy+\int\frac{\partial F}{\partial y}dz+\right. \tag{52}$$
$$\left.+\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F\,dy\,dz\right].$$

Se observă că dacă introducem peste tot în membrul al doilea al ecuaţiei (52) integrale duble găsim ecuaţia (5), deci sistemul (52) este cu variabile separate.

În definitiv, starea de tensiune va fi dată de relaţiile (22) şi (47) funcţiile care intervin trebuind să satisfacă anumite condiţii; sistemul (52), privit ca un sistem de ecuaţii omogene, ne permite să afirmăm că starea de deformaţie este dată de

$$\frac{E}{1+\mu}[u-(-y\omega_{xy}^0+z\omega_{zx}^0+u_0)]=$$
$$=\Box_1\int\left(F_x-\frac{3\mu}{2+\mu}F\right)dx-\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)f_{vz}, \tag{53}$$

unde u_0, v_0, w_0, ω_{yz}^0, ω_{zx}^0, ω_{xy}^0 sînt deplasările, respectiv rotirile corpului considerat ca un rigid.

7. În baza unei teoreme datorită lui T. Boggio [2] putem scrie integrala generală a ecuaţiei (5) sub forma

$$\Omega(x,y,z;t)=\chi(x,y,z;t)+\varkappa(x,y,z;t), \tag{54}$$

unde funcţiile χ şi $\varkappa$ verifică ecuaţiile (10) şi (27).

Această reducere a problemei la două ecuaţii simple ale undelor dă posibilitatea descompunerii unei unde elastice în unde longitudinale şi unde transversale; se obțin de asemenea simplificări importante pentru reprezentările date.

8. În cazul soluției în deplasări a problemei, putem scrie

$$\mathcal{F}_x(x, y, z; t) = \mathcal{F}_{1x}(x, y, z; t) + \mathcal{F}_{2x}(x, y, z; t), \tag{55}$$

cu

$$\square_i \mathcal{F}_{ix} = 0 \qquad (i = 1,2). \tag{55'}$$

Notînd

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\partial \mathcal{F}_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_{1z}}{\partial z} \tag{56}$$

și

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_{2z}}{\partial z} + \mathcal{F}_0, \tag{56'}$$

obținem din (3) reprezentarea

$$u = \square_1 \mathcal{F}_{2x} - \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \tag{57}$$

cu ajutorul a patru funcții care verifică cîte una din cele două ecuații ale undelor.

Putem scrie componentele vectorului deplasare sub forma

$$u = u_1 + u_2, \tag{58}$$

unde u_i verifică ecuația (55'). În acest caz putem scrie

$$\begin{gathered} u_1 = -\frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial x}, \\ u_2 = \square_1 \mathcal{F}_{2x} - \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_{2z}}{\partial z} \right). \end{gathered} \tag{59}$$

9. În cazul soluției în tensiuni a problemei, putem scrie

$$\boldsymbol{F}_x(x, y, z; t) = \boldsymbol{F}_{1x}(x, y, z; t) + \boldsymbol{F}_{2x}(x, y, z; t), \tag{60}$$

cu

$$\square_i \boldsymbol{F}_{ix} = 0 \qquad (i = 1,2). \tag{61}$$

Notînd analog

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{1}{3}(\boldsymbol{F}_{ix} + \boldsymbol{F}_{iy} + \boldsymbol{F}_{iz}) \qquad (i = 1,2) \tag{62}$$

și

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, \tag{62'}$$

putem scrie

$$\sigma_x = \square_1 F_{2x} - \frac{3}{2+\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F, \tag{63}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f_{xy} + f_{zx}), \tag{63'}$$

$$\begin{gathered}\frac{E}{1+\mu}\left[u - \left(-y\omega^0_{xy} + z\omega^0_{zx} + u_0\right)\right] = \\ = \square_1 \int\left(\left(F_{2x} - \frac{3\mu}{2+\mu}F_2\right)dx - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)f_{yz}.\end{gathered} \tag{63''}$$

Putem lua pentru φ_x, φ_y, φ_z integralele particulare

$$\begin{gathered}\varphi_x = \frac{3\mu}{2(2+\mu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\iint \square_1 F_2\, dy dz + \\ + \frac{1}{2}\square_1\left(\int \frac{\partial F_{2y}}{\partial z}dy + \int\frac{\partial F_{2z}}{\partial y}dz\right),\end{gathered} \tag{64}$$

funcțiile f_{yz}, f_{zx}, f_{xy} fiind determinate tot de ecuațiile (52), în care înlocuim funcția F prin funcția F_2.

Dacă notăm tensiunile în mod consecvent

$$\sigma_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^2, \tag{65}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^1 + \tau_{yz}^2, \tag{65'}$$

vom putea scrie

$$\begin{gathered}\sigma_x^1 = -\frac{3}{2+\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_1, \\ \sigma_x^2 = \square_1 F_{2x} - \frac{3}{2+\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_2,\end{gathered} \tag{66}$$

$$\begin{gathered}\tau_{yz}^1 = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}, \\ \tau_{yz}^2 = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f_{xy} + f_{zx}).\end{gathered} \tag{67}$$

10. Fie că folosim modul de rezolvare în deplasări al problemei, fie că folosim soluția în tensiuni, observăm că putem scrie

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0. \tag{68}$$

Deci undele elastice date de ecuația (10), la care corespunde indicele 1, sînt unde irotaționale; aceste unde longitudinale sînt de natura unor unde de dilatare-condensare.

Mai observăm că suma tensiunilor normale $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$ este nulă; deci și deformația specifică ε_v corespunzătoare este nulă. Prin urmare undele elastice date de ecuația (27), la care corespunde indicele 2, sînt unde de forfecare (distorsiune); aceste unde transversale corespund la o deformare sub volum constant.

11. Anulînd derivatele în raport cu timpul, găsim cu ușurință rezultatele corespunzînd problemei statice.

12. La reprezentările date mai sus, care ne permit să determinăm starea de tensiune și starea de deformație în interiorul unui corp elastic oarecare, va trebui să adăugăm condițiile pe contur, de forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z), \tag{69}$$

unde $p_{nx}(t)$, $p_{ny}(t)$, $p_{nz}(t)$ sînt componentele sarcinii exterioare pe elementul de suprafață de normală exterioară $\overline{n}$.

Aceste condiții capătă o formă simplă pentru corpurile mărginite de plane paralele cu axele de coordonate. Folosind integrale ale ecuației undelor de forma (51), (51′) putem rezolva probleme interesante în cazul semispațiului elastic, stratului elastic, paralelipipedului elastic etc.

La condițiile pe contur trebuie să adăugăm condițiile inițiale, de forma

$$t = t_0 : u = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y, z), \tag{70}$$

care pot fi îndeplinite ținînd seama de valorile proprii obținute în problema vibrațiilor proprii ale corpului respectiv.

Primită la redacție la 12 decembrie 1959

К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛАСТОДИНАМИКИ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится формулировка для напряжений пространственной задачи эластодинамики, причем находятся две группы уравнений непрерывности, аналогичные уравнениям Бельтрами в статическом случае. Исходя из этих уравнений и учитывая уравнения динамического равновесия и закон Гука, дается представление напряженного состояния и состояния деформации при помощи трех функций, удовлетворяющих уравнению (5); это представление является общим. Рассматриваются также другие функции, входящие в данную задачу.

Применяя теорему Т. Боджио, уравнение (5) разлагается на два простых уравнения волн, причем получаются значительные упрощения как для представлений в напряжениях, так и для представлений в перемещениях, а также частных представлений для продольных и поперечных волн.

ON THE SPATIAL PROBLEM OF ELASTODYNAMICS

ABSTRACT

A formulation in stresses is given for the spatial problem of elastodynamics leading to two groups of continuity equations, similar to Beltrami's equations for the static case. Proceeding from these equations and taking into account the equations of dynamic equilibrium as well as Hooke's law, the stress and strain states are represented with the aid of three functions which verify an equation of the form (5) ; this representation has a general character. Other functions intervening in the problem are also discussed.

Further, with the aid of a theorem given by T. Boggio, equation (5) is separated into two simple wave equations. Thus important simplifications are obtained both for the representations in stresses and in displacements ; particular representations for longitudinal and transverse waves are also presented.

BIBLIOGRAFIE

1. E. BELTRAMI, *Opere matematiche*, **IV**, 1920.
2. T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivati parziali*, Ann. di matem. p. ed. appl., s. III, **VIII**, 181 (1903).
3. A. CLEBACH, *Über die Reflekion an einer Kugelfläche*, J. für die r. u. ang. Mathem., **61**, 195 (1863).
4. B. G. GALERKINE, *Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions*. C. Rend. des séances de l'Acad. des Sc. de Paris, **190**, *18*, 1047 (1930).
5. Б. Г. Галеркин, *К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле*, Докл. Акад. Наук СССР, сер. *A*, *14*, 353 (1930).
6. — *Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций*. Изд. научно-иссл. инст. гидротехники, **I**, 49 (1931).
7. — *К общему решению задачи теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжений и перемещений*. Докл. Акад. Наук СССР, сер. А, *10*, 281 (1931).
8. — *Общее решение уравнений теории упругости для изотропного тела и некоторые приложения этого решения к частным случаям*. Вест. мех. и прикл. мат., *2*, 3 (1931).
9. B. GALITZIN, *Über die Dispersion und Dämpfung der seismischen Oberflächwellen*, Bull. Acad. Sc. St. Pétersbourg, *6*, 219 (1912).

10. M. Iacovache, *O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuaţiilor elasticităţii*, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., s. A., **I**, *6*, 593 (1949).

11. — *Asupra relaţiilor dintre tensiuni într-un corp elastic în mişcare*, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., s. Mat. — fiz. — chim., **II**, *9*, 699 (1950).

12. D. Ionescu, *Asupra vectorului lui Galerkin în teoria elasticităţii şi în hidrodinamica fluidelor vîscoase*, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. şt. mat. - fiz., **VI**, 3, 555 (1954).

13. G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1852.

14. Gr. C. Moisil, *Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale*, 1950.

15. — *Asupra descompunerii undelor seismice în unde de condensare şi unde de forfecare*, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., s. mat. - fiz. - chim., **II**, *3*, 235 (1950).

16. W. Noll, *Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme*. Z.A.M.M., **37**, *3/4*, 81 (1957).

17. P. F. Papkovitch, *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*, C. Rend. des séances de l'Acad. des Sc. de Paris, **195**, 754 (1932).

18. M. Predeleanu, *Über die Verschiebungsfunktionen für das achsensymmetrische Problem der Elastodynamik*, Z.A.M.M., **38**, *9/10*, 402 (1958).

19. L. Solomon, *Funcţii-potenţial de deplasare pentru ecuaţiile dinamice ale lui Lamé*, Com. Acad. R.P.R., **VIII**, *7*, 647 (1958).

20. E. Sternberg, R. A. Eubanks, *On Stress Functions for Elastokinetics and the Integration of the Repeated Wave Equation*, Q.A.M., **15**, *2* (1957).

21. G. Stokes, *Dynamical Theory of Diffraction*, Trans. of the Phil. Soc., Cambridge, **IX**, 12 (1849).

22. P. P. Teodorescu, *Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii*, Com. Acad. R.P.R., **VI**, *6*, 795 (1956).

23. — *O metodă de rezolvare în eforturi a problemei plane a micilor mişcări amortizate*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia şt. mat. — fiz., **VIII**, *4*, 723 (1956).

24. — *Asupra unor probleme ale elastodinamicii plane*, Bul. Inst. Polit. Bucureşti, **XIX**, fasc. *1—2*, 195 (1957).

25. — *Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité*, IXe Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, 1956, Actes, **V**, 155 (1957).

26. — *Asupra unor probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii*, St. şi cerc. de mec. apl., **VIII**, *4*, 1101 (1957).

27. — *Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*, Aplikace matematiky, **IV**, *5*, 225 (1959).

28. — *Sur une représentation par potentiels dans le problème tridimensionnel de l'élastodynamique*, C. rend. des séances de l'Acad. des Sc. de Paris, **250**, *10*, 1792 (1960).

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

DESPRE MODULUL DE SUPERELASTICITATE[1]

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU

A. GENERALITĂŢI

S-a arătat [1] că legea de deformaţie în funcţie de solicitare, care este în general dată de curba caracteristică a materialului, joacă rolul cel mai important în studiul rezistenţei materialului dincolo de limita elastică şi mai ales în studiul flambajului supraelastic. Mai departe, se spune că forma curbei caracteristice nu poate fi cuprinsă într-o formulă matematică, că pînă la limita de proporţionalitate alura curbei se asimilează cu o dreaptă (legea lui Hooke) şi că pentru domeniul dincolo de această limită s-au făcut numeroase încercări de simplificare, dintre care se expun cele mai interesante.

Dacă şi dincolo de limita de proporţionalitate, vom putea asimila curba caracteristică cu o curbă exprimată printr-o formulă matematică simplă, se vor putea studia analitic problemele de stabilitate şi de rezistenţa materialelor în acest domeniu, după cum au fost studiate în domeniul elastic.

A accepta legea lui Hooke înseamnă a admite un modul de elasticitate E constant, definit de expresia

$$E = \sigma/\varepsilon, \tag{1}$$

în care : σ — efortul unitar,
ε — alungirea specifică,

ceea ce constituie cea mai mare simplificare şi s-a aplicat în domeniul elastic cu fructuoasele rezultate bine cunoscute.

Simplificarea următoare, în ordinea complexităţii crescînde, este aceea de a admite un modul de lineară variaţie cu intensitatea solicitării.

---

[1] Lucrare prezentată la colocviul de Mecanică al Fac. de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R., 26 oct. 1959.

Ne-am referit mai întîi la modulul obișnuit E_σ definit de expresia

$$E_\sigma = d\sigma / d\varepsilon, \tag{2}$$

ceea ce constituie o primă ipoteză. Spre deosebire de E, constant în domeniul elastic, E_σ poate fi numit modul de superelasticitate, deoarece se referă la domeniul de dincolo de limita elastică.

Întrucît importanța problemelor de instabilitate, ilustrată cu prisosință de imensa literatură tehnică scrisă în această direcție, este unanim recunoscută [1], în a doua ipoteză ne referim la modulul redus, conceput de Engesser pentru a reduce problema de flambaj superelastic la formula Euler. Pentru secțiuni dreptunghiulare modulul redus E_r este definit prin expresia

$$\frac{E_r}{E} = E_\sigma \Big/ \left[\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E_\sigma}}{2}\right]^2, \tag{3}$$

verificată experimental de Karman, valabilă și pentru alte forme de secțiuni ale oțelului, întrucît influența formei nu este mare și poate fi neglijată [2].

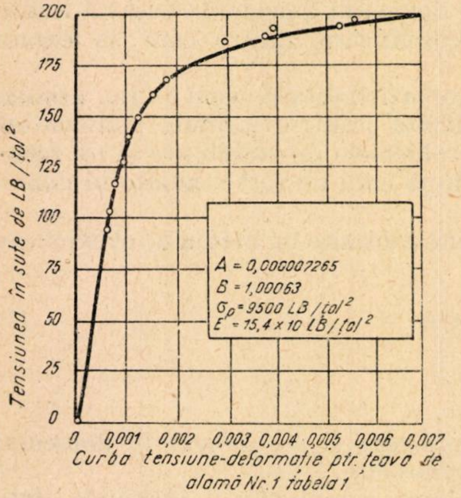
Aplicații

Am aplicat ambele ipoteze la două exemple :

a) eprubetă din *țeavă de cupru*, folosind curba caracteristică din [4], reprodusă în figura 1,

b) eprubetă din *oțel moale*, folosind curba caracteristică din [3], ale căror date sînt reproduse în tabela 1 numerotate nebisat. Tabela a fost completată cu punctele bisate, obținute prin intercalarea lor pe curba caracteristică trasată prin punctele inițiale.

La primul exemplu (cupru) s-a obținut pentru o serie de puncte, pentru diferite valori E, valorile E_σ din expresia (2) prin derivarea grafică asupra curbei trasate de autori (fig. 1). Pentru aceleași puncte s-au calculat valorile E_r cu ajutorul formulei (3), admițînd $E = 1\ 083\ 000$ kg/cm², medie stabilită din relația (1) asupra datelor obținute din diagramă (fig. 1).



Curba tensiune-deformație ptr. țeava de alamă Nr. 1 tabela 1

Fig. 1

Rezultatele au fost trecute în col. 3 tabela 2 și în diagrama *a*) din figura 2 în funcție de σ; valorile E_σ însemnate cu cruci aliniindu-se pe curba trasată prin linii întrerupte și valorile E_r însemnate cu cercuri aliniindu-se pe dreapta trasată prin linie plină.

Tabela 1

Nr.	σ kg/cm²	ε %	Nr.	σ kg/cm²	ε %
1	200	0,0091	7′	2 360	0,116
2	500	0,0250	8	2 500	0,131
3	800	0,0385	8′	2 700	0,160
4	1 100	0,053	9	2 800	0,186
5	1 500	0,075	9′	2 860	0,214
6	1 800	0,085	9″	2 935	0,34
7	2 200	0,106	10	3 000	0,67

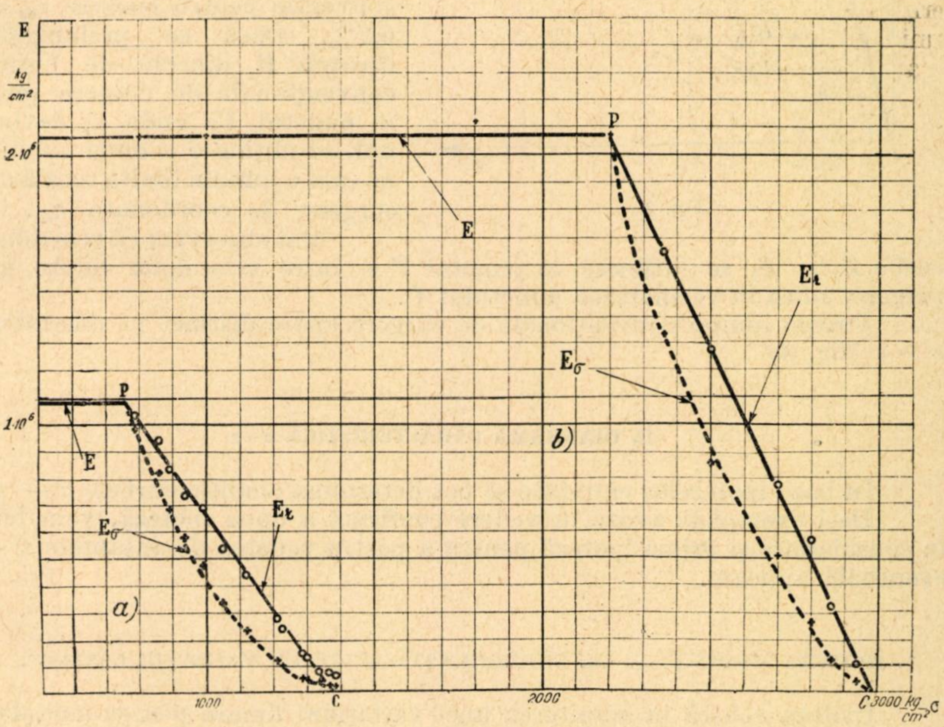


Fig. 2

În mod analog s-a procedat și pentru cel de-al doilea exemplu (oțel moale), admițînd $E = 2\,075\,000$ kg/cm² și trecînd rezultatele în col. 3 tabela 4 și pe diagrama *b*) (fig. 2).

Observații

Din diagramele celor două exemple considerate, observăm că deși E_σ este continuu descrescător, variația sa descrie o curbă sensibil diferită de linia dreaptă, ceea ce infirmă prima ipoteză; spre deosebire de E_r a cărui variație urmărește vecinătatea unei drepte și confirmă astfel a doua ipoteză. Liniaritatea variației E_r este delimitată de punctul P limita de proporționalitate de coordonate σ_p, E și limita convențională de curgere σ_c E_{rc}, corespunzătoare unei anumite alungiri remanente ε_0, luîndu-se prin convenție pentru curgere $\varepsilon_{0c} =$ 0,2%. Dacă se prelungește dreapta E_r dincolo de limita convențională de curgere pînă în punctul C, unde E_r devine nul, se obține o a doua limită, pe care o numim limita totală de curgere, de coordonate σ_{ct} . 0.

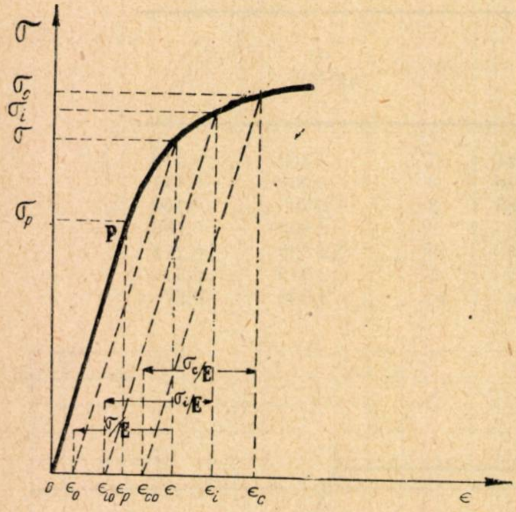


Fig. 3

Mai observăm că cele două curbe E_σ și E_r se întîlnesc în punctul P și între cele două limite de curgere, adică în vecinătatea punctului C.

Poziția limitei convenționale de curgere apare distinct pe diagrama $\sigma - \varepsilon$ (fig. 4).

B. DIAGRAMA CARACTERISTICĂ $\sigma - \varepsilon$

În baza ipotezelor enunțate se pot determina analitic curbele $\sigma - \varepsilon$.

Deși exemplele avute în vedere confirmă a doua ipoteză, vom lua în considerație și prima ipoteză pentru a păstra vederea de ansamblu și o eventuală aplicare.

1. IPOTEZA MODULULUI DE SUPERELASTICITATE CU VARIAȚIE LINIARĂ

Ipoteza constă în admiterea unei variațiuni liniare pentru modulul de superelasticitate în raport cu efortul unitar și prin urmare E_σ poate fi reprezentat printr-o dreaptă definită de două puncte cu coordonatele σ_1, $E_{\sigma 1}$ și σ_2, $E_{\sigma 2}$ sau de coeficienții din expresia dreptei

$$E_\sigma = b_1 - a_1 \sigma, \tag{4}$$

indicii coeficienților referindu-se la ipoteza admisă.

Coeficientul unghiular $-a_1$ este dat de expresia

$$a_1 = \frac{E_{\sigma 1} - E_{\sigma 2}}{\sigma_2 - \sigma_1}. \tag{5}$$

Expresia (4) este determinată dacă se cunoaşte valoarea a_1 şi un punct oarecare de pe dreaptă de coordonate σ_i, $E_{\sigma i}$, care poate fi considerată ca punct de referinţă al expresiei. În acest caz din expresia (4) rezultă

$$b_1 = E_{\sigma i} + a_1 \sigma_i. \tag{6}$$

Pentru

$$\sigma_i = \sigma_p, \; E_{\sigma i} = E \text{ şi } b_1 = E + a_1 \sigma_p. \tag{7}$$

Ţinînd seama de (4) expresia (2) devine

$$d\,\varepsilon = d\sigma / b_1 - a_1 \sigma. \tag{8}$$

Integrînd se obţine

$$\varepsilon = \int \frac{d\sigma}{b_1 - a_1 \sigma} = \frac{-1}{a_1} \ln (b_1 - a_1 \sigma) + C_1. \tag{9}$$

Constanta C_1 de integrare se determină punînd condiţia la limita de proporţionalitate. Pentru $\sigma = \sigma_p$ avem $\varepsilon = \varepsilon_p$ şi ţinînd seama de (7) se obţine

$$C_1 = \varepsilon_p + \frac{1}{a_1} \ln E, \tag{10}$$

iar relaţia (9) devine

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \frac{1}{a_1} \ln \frac{E}{b_1 - a_1 \sigma}. \tag{11}$$

Se observă pe figura 3 că deformaţia permanentă este dată de relaţia

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \sigma / E \tag{12}$$

şi relaţia (11) devine

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_p + \frac{1}{a_1} \ln \frac{E}{b_1 - a_1 \sigma} - \frac{\sigma}{E}. \tag{13}$$

2. IPOTEZA MODULULUI REDUS CU VARIAŢIE LINIARĂ

a. Formularea ipotezei

Admiţînd generalizarea expresiei (3) pentru orice formă a secţiunii, să explicităm pe E_σ astfel

$$\frac{E}{E_\sigma} = \left[2 \sqrt{\frac{E}{E_r}} - 1 \right]^2. \tag{14}$$

Procedăm în mod analog ipotezei precedente.

În această ipoteză variația liniară se referă la E_r, care poate fi reprezentată prin dreapta definită de două puncte cu coordonatele σ_1, E_{r1} și σ_2, E_{r2} sau de coeficienții din expresia dreptei

$$E_r = b_2 - a_2\sigma, \tag{15}$$

unde

$$a_2 = \frac{E_{r1} - E_{r2}}{\sigma_2 - \sigma_1}. \tag{16}$$

În raport cu un punct oarecare de referință de coordonate σ_i, E_{ri} din (15), b_2 se poate exprima astfel

$$b_2 = E_{ri} + a_2\sigma_i. \tag{17}$$

Pentru $\sigma_i = \sigma_p$,

$$E_{ri} = E \text{ și } b_2 = E + a_2\sigma_p. \tag{18}$$

b. Expresia alungirii

Înlocuind pe E_r din (15) relația (14), devine

$$\frac{E}{E_\sigma} = \left[2\sqrt{\frac{E}{b_2 - a_2\sigma}} - 1 \right]^2, \tag{19}$$

și ținînd seama de (2) se obține

$$d\varepsilon = \left[2\sqrt{\frac{E}{b_2 - a_2\sigma}} - 1 \right]^2 \frac{d\sigma}{E}. \tag{20}$$

Integrînd se obține succesiv

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\int\left[1 - \frac{4}{\sqrt{\frac{b_2}{E} - \frac{a_2}{E}\sigma}} + \frac{4}{\frac{b_2}{E} - \frac{a_2}{E}\sigma} \right] d\sigma, \tag{21}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{8}{a_2}\left[\sqrt{\frac{b_2 - a_2\sigma}{E}} - \frac{1}{2}\ln\frac{b_2 - a_2\sigma}{E} + C_2 \right]. \tag{22}$$

Constanta C_2 de integrare se determină punînd condiția la limită $\sigma = \sigma_p$, $\varepsilon = \varepsilon_p$ și ținînd seama de (18) se obține $C_2 = -1$ și relația (22) devine

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{8}{a_2}\left[X - \ln X - 1 \right], \tag{23}$$

unde

$$X = \sqrt{\frac{b_2 - a_2\sigma}{E}} = \sqrt{\frac{E_r}{E}}, \tag{24}$$

care, ținînd seama de (17), se poate pune sub forma

$$X = q_i \sqrt{1 + x_i} \tag{25}$$

unde

$$q_i = \sqrt{E_{ri}/E} \quad , \quad x_i = a_2 \frac{\sigma_i - \sigma}{E_{ri}} , \tag{26}$$

apărînd astfel punctul de referință.

Valoarea X este invariantă față de punctul i de referință, ceea ce poate fi folosit pentru verificare, luînd diferite puncte de referință.

Pentru $\sigma_i = \sigma_p$ avem $E_{r_i} = E$ și deci $q_p = 1$.

Ținînd seama de (12) relația (23) devine

$$\varepsilon_0 = \frac{8}{a_2} [X - \ln X - 1] , \tag{27}$$

și făcînd înlocuirea dată de (25) se obține

$$\varepsilon_0 = \frac{8}{a_2} \left[q_i \sqrt{1 + x_i} - 1 + \ln \frac{1}{q_i \sqrt{1 + x_i}} \right], \tag{28}$$

care se mai poate pune sub forma

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{a_2} [2 (q_i \sqrt{1 + x_i} - 1) - \ln q_i^2 - \ln (1 + x_i)]. \tag{29}$$

Dezvoltînd în serii expresia radicalului și aceea a logaritmului

$$\sqrt{1 + x_i} = 1 + \frac{1}{2} x_i - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x_i^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x_i^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x_i^4 + \ldots \tag{30}$$

$$\ln (1 + x_i) = x_i - \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{3} - \frac{x_i^4}{4} + \ldots \tag{31}$$

convergente pentru $| x_i | < 1$, relația (29) devine succesiv

$$\frac{a}{4} \varepsilon_0 = - \ln q_i^2 - 2 (1 - q_i) - x_i (1 - q_i) + x_i^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{q_i}{4} \right) - \\ - x_i^3 \left(\frac{1}{3} - q_i \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \right) + x_i^4 \left(\frac{1}{4} - q_i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \right) \ldots \tag{32}$$

$$\frac{a}{4} \varepsilon_0 = \sum_{n=2}^{\infty} (- x_i)^n \left[\frac{1}{n} - q_i \frac{(2n - 3)!}{2^{2n-3} (n - 2)! n!} \right] - \ln q_i^2 - (1 - q_i)(2 + x). \tag{33}$$

Observăm că seria este cu atît mai convergentă cu cît x_i este mai mic și prin urmare punctul considerat este mai aproape de punctul de referință.

Aceste relații (32), (33) pot fi folosite pentru verificări.
Pentru $\sigma_i = \sigma_p$ relația (32) devine

$$\varepsilon_0 = \frac{x_p^2}{a_2}[1 - 0{,}8333\, x_p + 0{,}6875\, x_p^2 - 0{,}5813\, x_p^3 + 0{,}5026\, x_p^4 - \\ - 0{,}4425\, x_p^5 + \ldots] \tag{34}$$

iar expresia (33)

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{a_2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3}\,(n-2)!\,n!}\right](-x_p)^n . \tag{35}$$

c. Limita de curgere

Referindu-ne la punctul de referință, expresia (12) devine

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + \sigma_i/E. \tag{36}$$

Ultima din relațiile (26) se poate pune sub forma

$$\frac{x_i}{a_2} = \frac{\sigma_i - \sigma}{q_i^2 E}. \tag{37}$$

Ținînd seama de (36) și (37) relația (12) devine

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} - q_i^2\, x_i/a_2. \tag{38}$$

Referindu-ne la limita convențională de curgere, relația (38) devine

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c - \varepsilon_{c0} - q_c^2\, x_c/a_2, \tag{39}$$

care poate fi folosită pe lîngă (15) pentru verificare.

Pentru $\sigma = \sigma_i$, din ultima relație (26), $x_i = 0$ și expresiile (28) și (32) devin

$$\varepsilon_{i0} = \frac{4}{a_2}\left[\ln\frac{1}{q_i^2} - 2\,(1 - q_i)\right]. \tag{40}$$

Dacă punctul de referință este chiar limita convențională de curgere, relația (40) devine

$$a_2 = \frac{8}{\varepsilon_{c0}}\left(\ln\frac{1}{q_c} + q_c - 1\right). \tag{41}$$

Se obține astfel o altă expresie pentru a_2 în afară de (16) și se poate determina q_c, cu ajutorul căruia din prima relație (26) se determină E_{rc} și în consecință σ_c din (15).
Înlocuind pe a_2 din (41) în (28) se obține

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{c0}\frac{q_i\sqrt{1 + x_i} - 1 - \ln q_i\sqrt{1 + x_i}}{q_c - 1 - \ln q_c}. \tag{42}$$

Dacă punctul de referință este chiar limita de curgere, relația precedentă devine

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c0}} = \frac{q_c\sqrt{1 + x_c} - 1 - \ln q_c\sqrt{1 + x_c}}{q_c - 1 - \ln q_c}. \tag{43}$$

S-a arătat că pentru $\sigma = \sigma_i$ se obține $x_i = 0$, pentru care expresia (42) devine

$$\frac{\varepsilon_{i0}}{\varepsilon_{c0}} = \frac{q_i - 1 - \ln q_i}{q_c - 1 - \ln q_c}, \tag{44}$$

o altă relație, în afară de (41) cu care se poate calcula pentru verificare.

3. APLICAȚII

Ne referim la aceleași două exemple menționate: *a*) cupru și *b*) oțel moale.

Ne vom mărgini la ipoteza a doua, întrucît, după cum s-a arătat, numai aceasta se verifică de exemplele considerate.

a) *Epruveta de cupru.* Pentru determinarea dreptei E_r (fig. 2 *a*), am ales două puncte aparținînd dreptei : un punct (nr. 2, tabela 2) în vecinătatea limitei de proporționalitate de coordonate $\sigma_1 = 787$ kg/cm², $E_{r1} = 1\,036\,000$ kg/cm² și celălalt punct (nr. 12, tabela 2) în vecinătatea limitei convenționale de curgere de coordonate $\sigma_r = 1\,303$ kg/cm², $E_{r2} = 130\,000$ kg/cm².

Tabela 2

Nr.	σ kg/cm²	E_σ kg/cm²	$\sigma_{12} - \sigma$ kg/cm²	x_{12}	X	ε_0 %	ε %	λ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	759		544	7,33	1,000	0,0000	0,070	
2	787	984000	516	6,96	0,979	−0,0005	0,073	116,1
3	857	820000	446	6,01	0,953	0,0005	0,080	104,0
4	890	685000	413	5,57	0,888	0,0032	0,086	97,0
5	932	576000	371	4,87	0,840	0,0065	0,093	90,7
6	990	472000	313	4,22	0,792	0,0114	0,103	83,2
7	1050	337000	253	3,42	0,724	0,025	0,122	72,4
8	1120	236000	183	2,47	0,646	0,038	0,142	62,3
9	1210	123600	93	1,255	0,521	0,080	0,191	47,6
10	1225	103000	78	1,051	0,497	0,090	0,203	44,2
11	1285	54250	18	0,243	0,387	0,155	0,274	33,4
12	1303	47900	0	0,000	0,346	0,185	0,305	31,4
13	1310	—	− 7	−0,100	0,329	0,200	0,321	—
14	1335	38190	−32	−0,431	0,262	0,275	0,398	24,3
15	1365	24500	−62	−0,836	0,141	0,503	0,629	22,9
16	1377	—	−74	−1,000	0,000	∞	∞	—
17	1385	20500	—	—	—	—	—	18,0

Valorile E_{r1} și E_{r2} au fost determinate cu formula (3), unde $E_{\sigma 1} = 984\,000$ kg/cm² și $E_{\sigma 2} = 47\,900$ kg/cm² și au fost determinate grafic după diagrama din figura 1.

Folosind formula (16), s-a determinat $a_2 = 1\,755$. Aplicînd formula (17) la primul punct sau la cel de-al doilea, se obține $b_2 = 2\,416\,000$ kg/cm² și prin expresia (15) corespondența dintre E_r și σ.

Folosind ultima dintre relațiile (18) se obține limita de proporționalitate $\sigma_p = 759$ kg/cm² (nr. 1 tabela 2). Anulînd pe E_r din (15) se obține limita totală de curgere $\sigma_{ct} = 1\,377$ kg/cm² (nr. 16 tabela 2).

Pentru trasarea diagramei $\sigma - \varepsilon$ am determinat în prealabil valorile x_i, trecute în col. 5 tabela 2, cu ajutorul ultimei relații din (26), alegînd ca punct de referință punctul nr. 12 (tabela 2) pentru care $x_i = 0$. Cu prima relație din (26) și formulele (25), (27) s-au determinat valorile ε_0 trecute în col. 7, tabela 2. În sfîrșit cu formula (12) s-au determinat valorile trecute în col. 8 tabela 2 și figurate prin cruci pe diagrama *a*) din figura 4. Pentru verificare s-a folosit formula (34) valabilă în apropierea limitei de proporționalitate.

Pentru determinarea limitei convenționale de curgere s-a făcut înlocuirea $\varepsilon_{c0} = 0{,}2\%$ în (41), obținînd $q_c = 0{,}329$, iar din prima relație (26) și din (25) rezultă $E_{rc} = 117\,000$ kg/cm² și $\sigma_c = 1\,310$ kg/cm² (nr. 13, tabela 2) cu verificarea din col. 7 tabela 2 însemnată pe diagrama *a*) figura 4 prin linia întreruptă pentru σ_c și liniuță-punct pentru ε_{c0}.

Punctele reprezentînd încercările experimentale din figura 1 au fost transformate grafic din unități americane în unități europene, cu ajutorul tabelei 3 și figurate cu cercuri pe diagrama *a*) figura 4.

Tabela 3

Nr.	Hundr. LB per SQ. IN.	ε %	σ kg/cm²	Nr.	Hundr. LB. per SQ. IN.	ε %	σ kg/cm²
1	95	0,060	668	8	168	0,180	1180
2	103	0,065	720	9	188	0,300	1317
3	117	0,075	823	10	191	0,375	1343
4	127	0,088	893	11	194	0,396	1363
5	140	0,101	984	12	196	0,531	1377
6	149	0,121	1043	13	198	0,560	1392
7	161	0,150	1130				

Din examinarea diagramei *a*) figura 4, observăm că încercările experimentale se aliniază strîns în vecinătatea curbei teoretice calculată, mai ales pînă la limita convențională de curgere, ceea ce constituie verificarea.

b) *Epruveta de oțel moale.* S-a procedat în mod analog exemplului precedent.

Cele două puncte alese pentru determinarea dreptei E_r sînt : nr. 7′ de coordonate $\sigma_1 = 2\,360$ kg/cm², $E_{r1} = 1\,646\,000$ kg/cm² și nr. 9′ de coordonate $\sigma_2 = 2\,860$ kg/cm², $E_{r2} = 325\,300$ kg/cm², corespunzătoare la $E_{\sigma 1} = 1\,333\,000$ kg/cm², $E_{\sigma 2} = 126\,000$ kg/cm².

S-a obținut: $a_2 = 2\,640$, $b_2 = 7\,886\,000$ kg/cm², $\sigma_p = 2\,195$ kg/cm², $\sigma_{0t} = 2\,983$ kg/cm².

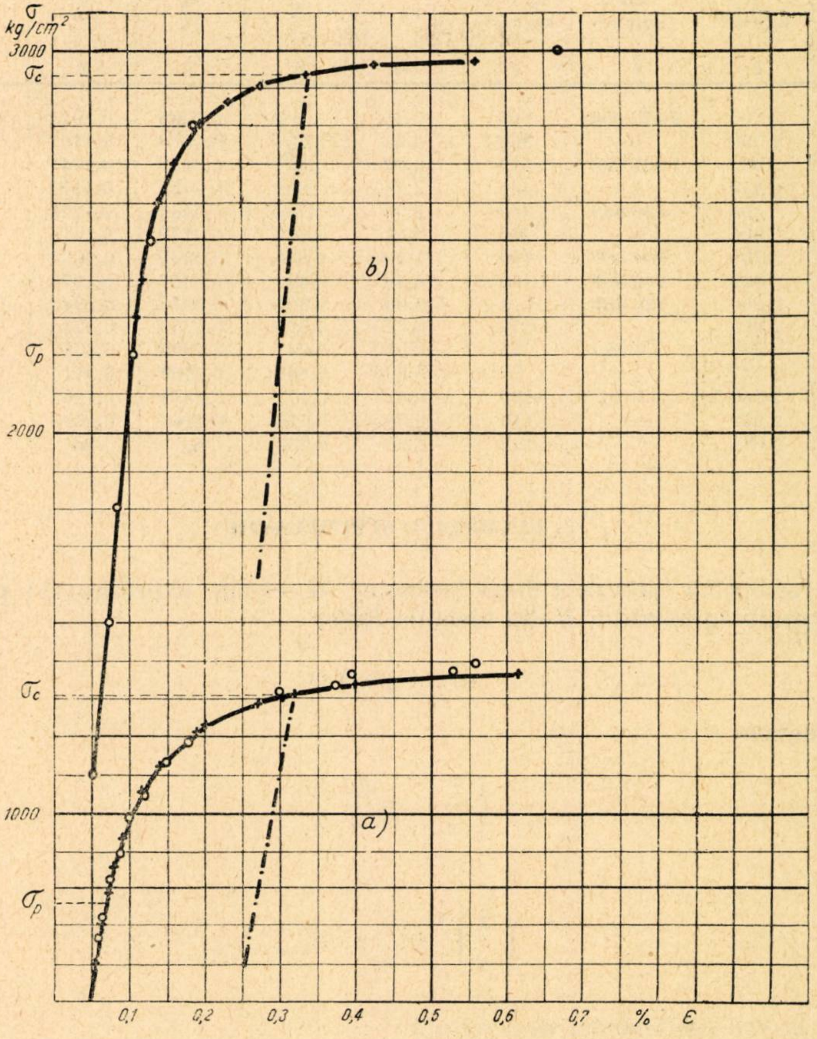


Fig. 4

Trasarea diagramei s-a făcut cu datele trecute în tabela 4. Valorile X din coloana 6 s-a determinat cu formula (25) pentru $i = 9$, adică $\sigma_9 = 2\,860$ kg/cm². Verificarea s-a făcut pentru $i = 3$, adică $\sigma_3 = 2\,360$ kg/cm².

Pentru determinarea limitei convenționale de curgere s-a calculat succesiv $q_c = 0{,}252$, $E_{rc} = 132\,000$ kg/cm², $\sigma_c = 2\,937$ kg/cm².

Tabela 4

Nr.	σ kg/cm^2	$E\sigma$ kg/cm^2	$\sigma_9 - \sigma$ kg/cm^2	x_9	X	ε_0 %	ε %	λ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 195	2 070 000	665	5,40	1,000	0,0000	0,1048	976
2	2 300	—	560	4,55	0,931	0,0008	0,1107	—
3	2 360	1 333 000	500	4,07	0,891	0,0019	0,1147	842
4	2 400	—	460	3,74	0,862	0,0032	0,1179	—
5	*2 500*	860 000	360	2,93	0,784	0,0083	0,1276	718
6	2 600	—	260	2,11	0,698	0,0175	0,1416	—
7	2 700	504 000	160	1,300	0,600	0,0342	0,1632	539
8	*2 800*	262 500	60	0,49	0,483	0,0637	0,1974	455
9	2 860	126 000	0	0,00	0,396	0,0976	0,2343	35,4
10	2 900	—	− 40	−0,325	0,326	0,1355	0,2740	—
11	2 935	33 800	− 75	−0,610	0,247	0,1955	0,3357	19,2
12	2 937	—	− 77	−0,626	0,242	0,2000	0,3413	—
13	2 960	—	−100	−0,813	0,171	0,2835	0,4262	—
14	2 970	—	−110	−0,895	0,128	0,4165	0,5595	—
15	2 983	—	−123	−1,00	0,000	∞	∞	—

C. FLAMBAJUL SUPERELASTIC

Acceptînd ipoteza a doua înseamnă să folosim expresia (15) pentru E_r introdus în locul lui E din formula Euler

$$\sigma = (\pi/\lambda)^2 E \tag{45}$$

care devine

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = \frac{E_r}{\sigma}, \tag{46}$$

adică

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = \frac{b_2}{\sigma} - a_2 \tag{47}$$

unde λ este coeficientul de sveltețã.

a) Referindu-ne la primul exemplu cu epruveta de *cupru* rezultatele au fost trecute pe diagrama *a*) din figura 5.

Variația rezistenței critice în funcție de λ calculată cu formula (47) s-a trasat cu linie plină. Punctele încercuite reprezintă valorile λ din col. 9 tabela 2 calculate cu formulele (3), (46) unde E_σ din col. 3 a fost determinat prin derivare grafică. Formula Euler (45) este trasată prin liniuță-punct.

b) Rezultatele în exemplul 2 cu epruveta de *oțel*, obținute în mod analog, sînt trecute în col. 9 tabela 4 și sînt trasate pe diagrama *b*) figura 5.

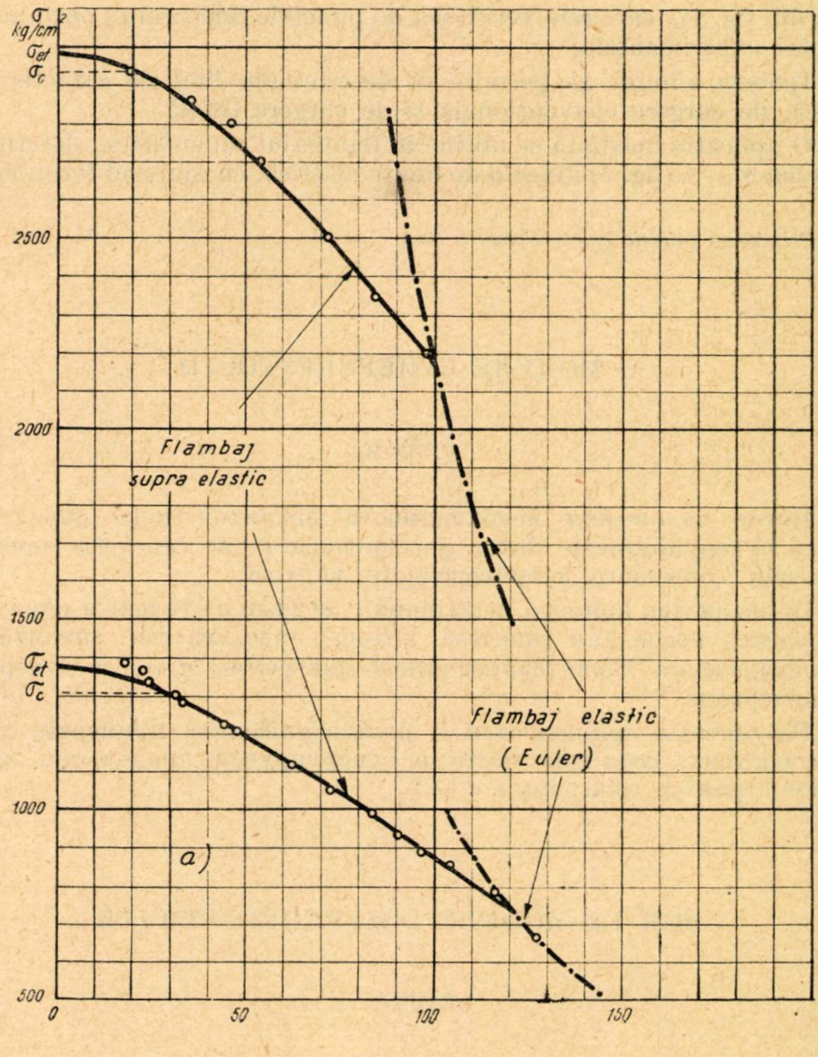


Fig. 5

CONCLUZII

Admițînd ipoteza a doua, a modulului redus de variație liniară, care se verifică de cele două exemple, cupru și oțel, luate în considerare, se determină expresia (15) $E_r = f(\sigma)$ reprezentată în diagrama $E_r - \sigma$ (fig. 2).

În consecință prin expresiile (12) ale alungirii și (27) ale alungirii permanente, se determină curba caracteristică a metalului (diagrama

$\sigma - \varepsilon$ din fig. 4), care este verificată de punctele (încercuite) obținute prin încercări experimentale.

Ipoteza admisă ne permite să determinăm limitele caracteristice : elastică, de curgere convențională și de curgere totală.

O aplicație imediată se obține în flambajul superelastic, determinînd diagrama $\sigma - \lambda$ (fig. 5) dincolo de limita elastică, cu ajutorul formulei (47).

Primită la redacție la 28 octombrie 1959

О МОДУЛЕ СУПЕРУПРУГОСТИ

РЕЗЮМЕ

После изложения необходимости аналитического определения модуля суперупругости автор рассматривает две гипотезы линейного изменения : обычного и приведенного модулей.

Приводя два примера испытаний с медным и стальным образцами, проверяется последняя гипотеза, которая развивается аналитически для определения характеристической диаграммы $\sigma - \varepsilon$ в суперупругом интервале.

Результаты применяются к рассматриваемым примерам, указывая следствия, имеющие место в суперупругом продольном изгибе, причем строятся диаграммы $\sigma - \lambda$.

SUR LE MODULE D'HYPERÉLASTICITÉ

RÉSUMÉ

Après avoir montré la nécessité de déterminer analytiquement le module d'hyperélasticité, l'auteur prend en considération deux hypothèses de la variation linéaire des modules. Il s'agit du module d'hyperélasticité et du module réduit.

Ayant en vue deux exemples d'essais : cuivre et acier, on fait la vérification de la deuxième hypothèse, qu'on développe analytiquement dans le but de construire le diagramme caractéristique $\sigma - \varepsilon$ dans l'intervalle hyperélastique.

On fait des applications sur les exemples mentionnés et on expose leurs conséquences dans le flambage hyperélastique, en traçant les diagrammes $\sigma - \lambda$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. BELEȘ, M. SOARE, *Probleme de instabilitate elastică în construcțiile metalice.* Standardizarea *1* și *2* (1958).
2. M. M. FILONENCO-BORODICI, S. M. IZIUMOV, B. A. OLISOV, I. N. CUDRIAVTE V., L. T. MALGHINOV, *Curs de rezistența materialelor.* Partea a II-a, Ed. tehnică, București 1952, 44.
3. — *Curs de rezistența materialelor.* Partea I. Ed. tehnică, București, 1952. 37.
4. J. L. HOLMQUIST, A. NADAI, *Atheoretical and experimental Approach to the Problem of Collapse of Depp-Well Casing.* Driling and Production Practice, 1939, Apt. New York, 1940, 392.

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

CALCULUL DINAMIC AL UNOR PĂRȚI COMPONENTE ALE CARCASELOR AUTOBUZELOR PRIN UTILIZAREA TEORIEI PLĂCILOR ORTOTROPE CURBE

DE

V. VISARION

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Ca structură spațială elastică, carcasa unui autobuz datorită complexității sale constructive, nu poate fi calculată printr-o metodă exactă care să respecte distribuția exactă a materialului ; de asemenea nu se poate apela nici la metodele simplificate care constau în calculul diverselor cadre plane transversale care apar în structură căci legăturile transversale dintre ele nu pot fi introduse în calcul în mod corect. În adevăr, modul în care sînt realizate carcasele de automobil sugerează că legăturile transversale aduc un aport comparabil cu acela al cadrelor transversale în procesul deformării elastice.

Cu alte cuvinte, rezultă că este mai indicată utilizarea unui calcul spațial care să înglobeze toate elementele transversale și longitudinale prin utilizarea unor aproximații judicioase, însă cu caracter spațial.

În această lucrare, vom aproxima partea din carcasa autobuzului alcătuită din pereții laterali și acoperiș, considerînd-o ca fiind compusă prin asamblarea unor plăci curbe subțiri elastice cu structură ortotropă.

Calculul plăcilor curbe sau sistemelor de plăci curbe cu structură ortotropă, este în general foarte greu de abordat. În tehnică însă, de cele mai multe ori, se substituie caracterului structural al ortotropiei, o ortotropie de material *echivalentă*. Dacă ochiurile structurii ortotrope sînt din ce în ce mai mici, din pricina unor considerente statistice putem presupune că cele două calcule vor da rezultate din ce în ce mai apropiate.

În cazul considerat, aproximarea pereților laterali și ai acoperișului prin sisteme de plăci curbe subțiri cu ortotropie de material, va fi modul în care introducem în calcul caracteristicele geometrice și elastice ale structurii considerate.

De multe ori, modul de realizare al pereților laterali și al acoperișului, ne arată că pot fi aproximativ descompuși în mai multe plăci cilindrice circulare, fiecare cu caracteristici speciale de ortotropie, racordate între ele.

2. ECUAȚIILE ELASTICITĂȚII PENTRU CAZUL DINAMIC ÎN CAZUL PLĂCII CILINDRICE CIRCULARE, CU ORTOTROPIE DE MATERIAL

Întrucît scopul acestei lucrări este de a obține o serie de rezultate efective practice, prezentăm foarte pe scurt calculul teoretic, fără a insista prea mult.

Acest calcul este în întregime bazat pe teoria semiinvarianților analogiei statico-geometrice expusă într-o lucrare anterioară [1].

În această lucrare se demonstrează că în cazul ortotropiei de material, sistemul general de ecuații al teoriei plăcilor curbe subțiri, poate fi redus la un sistem de ecuații de *echilibru* aplicat unor eforturi și momente semiinvariante.

În cazul de față — plăci curbe elastice cilindrice circulare ortotrope de material — acest sistem are în cazul micii curburi, următoarea formă :

$$\frac{\partial \widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + X = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{N}}_\beta}{\partial \beta} + Y = 0,$$

$$\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{R} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Q}_\beta = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \widetilde{Q}_\alpha = 0\,;$$

Eforturile și momentele complexe $\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha$, $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta$, $\widetilde{Q}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\beta$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}$, sînt semiinvarianți în analogia statico-geometrică pentru învelitori cu ortotropie de material stabilită în lucrarea [2], cu alte cuvinte aceste eforturi și momente sînt propriile lor analoage, abstracție făcînd de un coeficient constant.

Ele au forma

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha = \mathfrak{N}_\alpha + i\zeta\chi_2, \quad \widetilde{\mathfrak{N}}_\beta = \mathfrak{N}_\beta + i\zeta\chi_1$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha + i\zeta\varepsilon_2, \quad \widetilde{\mathfrak{M}}_\beta = \mathfrak{M}_\beta + i\zeta\varepsilon_1$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta} = \mathfrak{N}_{\alpha\beta} + i\zeta\tau, \tag{2.2}$$

$$\widetilde{Q}_\alpha = Q_\alpha - i\zeta\zeta_2, \quad \widetilde{Q}_\beta = Q_\beta + i\zeta\zeta_1,$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta} = \mathfrak{M}_{\alpha\beta} + i\zeta\frac{\omega}{2},$$

în care

$\mathfrak{N}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\beta$ — eforturile de lunecare și axiale cu sensurile din figura 1,
Q_α, Q_β — eforturile tăietoare cu sensurile din figura 1,

$\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ — momente încovoietoare şi de torsiune, cu sensurile date în figura 2,
ε_1, ε_2, ω — deformaţiile specifice de alungire, respectiv deformaţia de lunecare,
χ_1, χ_2, τ — deformaţiile încovoietoare respectiv de torsiune,
ζ_1, ζ_2 — deformaţii *de tăiere*,
iar

$$\zeta = \frac{2h^2\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\sqrt{3\,(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}} \quad \text{cu}$$

E_α, E_β — modulii de elasticitate ai materialului, în lungul direcţiilor principale de ortotropie,
μ_α, μ_β — coeficienţii lui Poisson în lungul direcţiilor principale de ortotropie,
$2h$ — grosimea plăcii,
α, β — linii coordonate pe suprafaţă, corespunzînd secţiunilor principale de ortotropie, care se presupun că coincid cu secţiunile circulare respectiv cu generatoarele cilindrului median. Sensul lor este dat în figura 3.

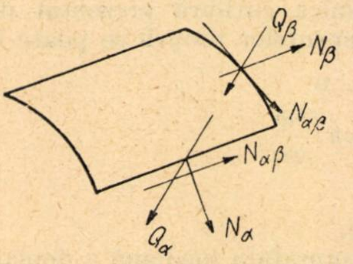


Fig. 1

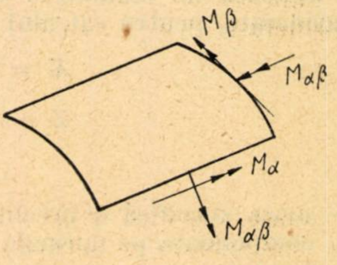


Fig. 2

Sistemului de ecuaţii diferenţiale (2.1) i se asociază sistemul ecuaţiilor de *elasticitate* nediferenţiate, dintre momentele şi eforturile complexe,

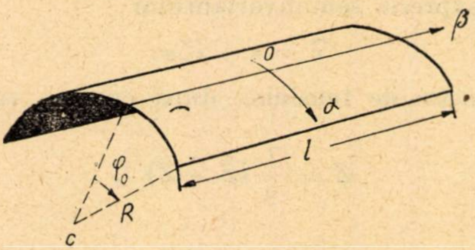


Fig. 3

sistem care condensează obişnuitele relaţii ale elasticităţii dintre eforturi şi deformaţii momente şi deformaţii tot aşa cum sistemul (2.1) condensează sistemul ecuațiilor de echilibru cu ecuațiile de continuitatea deformației. Acesta are forma

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha &= -\, i c_2 \left(\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta - \mu_\beta \overline{\widetilde{\mathfrak{N}}}_\alpha\right), \\
\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta &= -\, i c_1 \left(\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha - \mu_\alpha \overline{\widetilde{\mathfrak{N}}}_\beta\right), \qquad (2.3) \\
\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta} &= -\, i \frac{c_3}{2} \left(\rho_1 \widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta} + \rho_2 \overline{\widetilde{\mathfrak{N}}}_{\alpha\beta}\right),
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{h.}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}} \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}, \quad \rho_1 = \frac{1}{k}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right) + k\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right), \\
c_2 &= \frac{h}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}} \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{k}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right) - k\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right), \\
c_3 &= \frac{h}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}, \quad G = k \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{2\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right)}.
\end{aligned}$$

Neglijînd forțele de inerție din planul de tangent la suprafața mediană, neglijare indicată de caracterul de mică curbură prezentat de plăcile curbe considerate, pentru calculul frecvențelor proprii se poate lua

$$\begin{aligned}
X &= Y = 0 \\
Z &= -\,2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

unde

ρ — masa specifică a învelitorii,
w — componenta pe normala la suprafața mediană a deplasării,
t — timpul.

Cu alte cuvinte au fost neglijate vibrațiile cuprinse în planul tangent, considerîndu-se doar cele ce se efectuează pe direcția normalei la suprafața mediană.

Este mai comod ca lui Z să-i dăm o altă formă echivalentă; observînd că din expresia semiinvariantului

$$\widetilde{c} = c + i\zeta w, \qquad (2.5)$$

unde $\widetilde{c}$ este o funcție de tensiune, după cum se va arăta în cele ce urmează, rezultă

$$Z = \frac{1}{2}\left(\widetilde{Z} + \overline{\widetilde{Z}}\right)^{1)},$$

cu

$$\widetilde{Z} = \frac{2\rho h}{\zeta}\, i\, \frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial t^2}.$$

---

1) Bara dreaptă înseamnă conjugare.

Cu alte cuvinte

$$Z = i\frac{\rho}{2h}\,\frac{\sqrt{3\,(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\left(\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\overline{\widetilde{c}}}{\partial t^2}\right). \tag{2.6}$$

Se observă că primele două ecuații (2.1) cu observația (2.4) sînt identic satisfăcute, dacă se consideră

$$\widetilde{N}_\alpha = \frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\beta^2},\quad \widetilde{N}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\alpha\,\partial\beta},\quad \widetilde{N}_\beta = \frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\alpha^2}. \tag{2.7}$$

Prin introducerea acestor relații în (2.3), în ipotezele de mică curbură și compararea cu relațiile dintre momente și deplasarea *w*, precum și cu relațiile dintre eforturi și funcția de tensiune a lui Airy (cea de-a treia funcție de tensiune) din teoria plăcilor curbe subțiri elastice, analoagă a deplasării *w* în analogia statico-geometrică, rezultă coincidența dintre funcția $\widetilde{c}$ introdusă în (2.7) și cea indicată prin formula (2.5).

Relațiile *elasticității* în complex, în baza relațiilor (2.7) dau expresiile *momentelor* încovoietoare și de torsiune complexe în funcție de $\widetilde{c}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha &= -\,i\,c_2\left(\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\alpha^2}-\mu\beta\,\frac{\partial^2\overline{\widetilde{c}}}{\partial\beta^2}\right),\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta &= -\,i\,c_1\left(\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\beta^2}-\mu\alpha\,\frac{\partial^2\overline{\widetilde{c}}}{\partial\alpha^2}\right),\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta} &= -\,i\,\frac{c_3}{2}\left(\rho_1\,\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\alpha\partial\beta}+\rho_2\,\frac{\partial^2\overline{\widetilde{c}}}{\partial\alpha\partial\beta}\right),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

forțele tăietoare se pot deduce în baza relațiilor anterioare, din ultimele două ecuații (2.1). Rezultă astfel

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}_\alpha &= -\,i\,c_3\left(\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\frac{\partial^3 c}{\partial\alpha^3}-\frac{\rho_1}{2}\,\frac{\partial^3\widetilde{c}}{\partial\alpha\partial\beta^2}-\eta\,\frac{\partial^3\overline{\widetilde{c}}}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right),\\
\widetilde{Q}_\beta &= -\,i\,c_3\left(\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\frac{\partial^3\widetilde{c}}{\partial\beta^3}-\frac{\rho_1}{2}\,\frac{\partial^3\widetilde{c}}{\partial\alpha^2\partial\beta}-\eta\,\frac{\partial^3\overline{\widetilde{c}}}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

unde s-a notat

$$\eta = \sqrt{\mu_\alpha\,\mu_\beta}-\frac{\rho_2}{2}.$$

Exprimînd eforturile și momentele prin relațiile (2.7), (2.8), (2.9) toate ecuațiile sistemelor (2.1), (2.3) sînt identic satisfăcute, în afară doar de cea de-a treia ecuație (2.1)

$$\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{R}+\frac{\partial\widetilde{Q}_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{Q}_\beta}{\partial\beta}+Z=0$$

care va genera ecuația de condiție pentru necunoscuta adoptată $\tilde{c}$. În adevăr, înlocuind în această ecuație pe $\widetilde{N}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\beta$ și Z dați de (2.7), (2.9) și respectiv (2.6) rezultă ecuația fenomenului cercetat

$$\begin{gathered}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial\beta^2} - i c_3\left[\left(\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{\partial^4\tilde{c}}{\partial\alpha^4} + \rho_1\frac{\partial^4\tilde{c}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\partial^4\tilde{c}}{\partial\beta^4}\right) - \right. \\ \left. - 2\eta\,\frac{\partial^4\overline{\tilde{c}}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right] + i\,\frac{\rho}{2h}\,\frac{\sqrt{3\,(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\left(\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\overline{\tilde{c}}}{\partial t^2}\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Evident caracterul frecvențelor proprii ce se deduc din această ecuație va depinde de modul de rezemare pe contur. Dintre modurile de rezemare, unul prezintă caracteristici de o simplitate remarcabilă, și anume rezemarea pe patru timpane în lungul a două cercuri și două generatoare. Acest caz de rezemare se apropie foarte mult de cazul practic studiat în această lucrare.

3. CAZUL PLĂCII CURBE CILINDRICE CIRCULARE REZEMATĂ PE PATRU TIMPANE ÎN LUNGUL A DOUĂ CERCURI β = CONST. ȘI DOUĂ GENERATOARE α = CONST.

Rezemarea pe timpan (element care are o rigiditate foarte mare în planul lui și foarte mică transversal) este caracterizată prin faptul că forța axială și momentul lucrînd într-un plan perpendicular pe timpan și în același timp și deplasarea învelitorii în planul timpanului este nulă. Cu alte cuvinte, în cazul rezemării în lungul unui cerc β = const. pe un timpan, condițiile de margine sînt

$$N_\beta = 0 \quad \mathfrak{M}_\beta = 0, \quad u = w = 0 \ \text{pentru}\ \beta = \beta_0.$$

De asemenea, în cazul rezemării pe un timpan în lungul unei generatoare $\alpha = \alpha_0$, timpanul fiind orientat normal la placă, trebuie satisfăcute următoarele condiții de margine :

$$\mathfrak{N}_\alpha = 0, \quad \mathfrak{M}_\alpha = 0, \quad v = w = 0 \ \text{pentru}\ \alpha = \alpha_0.$$

Presupunem învelitoarea rezemată pe două timpane în lungul cercurilor $\beta = \pm\frac{l_1}{2}$ și a generatoarelor $\alpha = \pm\frac{l_2}{2}$.

Considerînd o stare inițială de totală relaxare, putem lua

$$\tilde{c} = \widetilde{C}\,(\alpha, \beta)\sin wt.$$

Condițiile de rezemare pe cele patru timpane se verifică ușor că sînt satisfăcute, dacă se ia

$$\widetilde{C}\,(\alpha, \beta) = C_0\cos\lambda_n\beta\,\cos\nu_m\alpha,$$

cu C_0 constantă a cărei mărime nu interesează ; ea depinde doar de amplitudinile impulsului inițial.

În această formulă

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \nu_m = \frac{m\pi}{l} \quad \text{cu } n,\ m \text{ impare.}$$

Cu aceasta

$$\tilde{c} = C_0 \cos \lambda_n \beta \cos \nu_m \alpha \sin \omega t. \tag{3.1}$$

Introducînd această expresie în ecuația (2.10) rezultă următoarea expresie a frecvențelor circulare ω:

$$\omega^2_{mn} = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho}\left[\frac{\lambda_n^4}{R^2}\frac{1}{a_{nm} - b_{nm}} + c_3^2\,(a_{nm} + b_{nm})\right], \tag{3.2}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\nu_m^4 + \rho_1 \lambda_n^2 \nu_m^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\lambda_n^4 \\ b_{nm} &= 2\eta\,\lambda_n^2 \nu_m^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(egalitatea (3.2) se obține considerîndu-se $C_0 = \varphi + i\,\psi$); apoi din ecuația (2.10) rezultă

$$-\frac{1}{R}(\varphi + i\,\psi)\,\lambda_n^2 - i\,c_3\,\{a_{nm}(\varphi + i\psi) - b_{nm}(\varphi - i\psi)\} -$$

$$-\frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\frac{1}{c_3}\,\psi\,\omega^2_{nm} = 0.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Prin eliminarea raportului $\dfrac{\varphi}{\psi}$ între partea reală și cea imaginară a ecuației anterioare, rezultă (3.2).

4. TRANSFORMAREA ORTOTROPIEI DE STRUCTURĂ ÎN ORTOTROPIE DE MATERIAL

Ortotropia de structură se caracterizează prin faptul că momentele de inerție ale secțiunilor în cele două direcții și suprafețele respective (înțelegînd prin momente de inerție și suprafețe în lungul unei secțiuni, mediile pe unitate de lungime de secțiune) sînt constante diferite.

Fie în secțiunile $\alpha = \alpha_0$, I_α și A_α momentul de inerție și suprafața, medii pe unitate de lungime și analog I_β și A_β pentru secțiuni $\beta = \beta_0$. Fie E modul de elasticitate al materialului respectiv.

Considerăm ca echivalente două plăci curbe subțiri ortotrope de material respectiv de structură, dacă au aceleași rigidități la încovoiere și la efort axial. Cu alte cuvinte dacă

$$\left.\begin{aligned} E\,I_\alpha &= E_\alpha\, I \\ E\,I_\beta &= E_\beta\, I \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

$$\left.\begin{aligned} E\,A_\alpha &= E_\alpha\, A^{1)} \\ E\,A_\beta &= E_\beta\, A \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

unde I și A sînt momentul de inerție și suprafața secțiunii ale plăcii ortotrope de material echivalente. E_α și E_β reprezintă momentele modulului de elasticitate în lungul liniilor α și β care devin astfel linii principale de ortotropie. Între I și A există încă o relație suplimentară ce rezultă din expresiile lor în funcțiune de h semigrosimea plăcii curbe echivalente, ortotrope de material

$$A = 2h \qquad (4.3)$$

$$I = \frac{2h^3}{3} \qquad (4.4)$$

relație care are forma

$$A^3 = 12\,I. \qquad (4.5)$$

Nu trebuie uitat că A și I sînt raportate la unitatea de lungime, fapt ce justifică dimensional această egalitate.

Grosimea h rezultă din relația

$$h = \sqrt{3\,\frac{I}{A}}, \qquad (4.6)$$

din care rezultă

$$h = \sqrt{\frac{3I_\beta}{A_\beta}}, \qquad (4.7)$$

$$\left.\begin{aligned} E_\beta &= \frac{3}{2h^3}\, I_\beta E, \\ E_\alpha &= \frac{3}{2h^3}\, I_\alpha E. \end{aligned}\right| \qquad (4.8)$$

Pentru determinarea lui μ_α, μ_β plecînd de la grupul de relații

$$\mu_\alpha \mu_\beta = \mu^2,$$

$$\mu_\alpha E_\beta = \mu_\beta E_\alpha,$$

---

1) Sistemul (4.1), (4.2) este contradictoriu; de aceea se renunță la $EA_\alpha = E_\alpha A$, efortul $n\,\alpha$ avînd o mică importanță.

rezultă

$$\mu_\alpha = \mu \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}, \qquad \mu_\beta = \mu \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}. \tag{4.9}$$

Modul de torsiune care este dat de formula

$$G = k\,\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{2\,(1+\sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta})}, \tag{4.10}$$

trebuie determinat experimental, conducînd la determinarea constantei dimensionale k. În modul acesta prin intermediul formulelor (4.7), (4.8), (4.9) şi (4.10) pot fi calculate toate constantele geometrice şi elastice ale plăcii echivalente.

În ceea ce priveşte masa specifică ρ, vom observa că greutatea pe unitate de suprafaţă a plăcii este dată de

$$2\,\rho h g = G_p,$$

astfel că

$$\rho = \frac{G_p}{2\,hg}, \tag{4.11}$$

formulă după care ea poate fi calculată. Cu aceste date se poate trece la calculul respectiv practic.

5. APLICAŢIE. FRECVENŢE PROPRII. ACOPERIŞUL AUTOBUZULUI T.V.2

Într-o primă etapă vom aproxima că acoperişul are forma unui cilindru circular cu dimensiunile ce rezultă din figurile 4 şi 5.

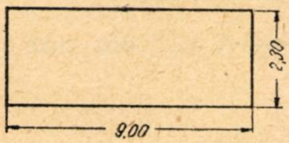


Fig. 4

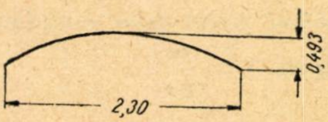


Fig. 5

Rezultă că

$$R = 2{,}2 \text{ m}.$$

Acest acoperiş are următoarele caracteristici

$$I_\alpha = 2{,}5 \text{ cm}^3, \qquad A_\alpha = 0{,}47 \text{ cm},$$

$$I_\beta = 2{,}75 \text{ cm}^3, \qquad A_\beta = 0{,}60 \text{ cm};$$

$$E = 2{,}1 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2,$$

$$\mu = 0{,}33, \qquad G = 60 \text{ kg/m}^2.$$

Utilizînd formulele de echivalență (4.7), (4.8) rezultă

$$h = 3{,}71 \text{ cm}$$

$$E_\beta = 1{,}71 \times 10^9 \text{ kg/m}^2, \qquad E_\alpha = 1{,}55 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$$

$$\mu_\alpha = 0{,}31, \qquad \mu_\beta = 0{,}35.$$

Pentru k considerăm valoarea

$$k = 0{,}9.$$

Rezultă mai departe în baza formulelor anterioare

$$c_3 = 0{,}023 \text{ m},$$

$$\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = 0{,}936, \qquad \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = 1{,}065,$$

$$\rho_1 = 2{,}09, \quad \rho_2 = 0{,}88, \quad \eta = -0{,}11.$$

Valoarea masei specifice echivalente se obține din valoarea lui G și din relația (4.11)

$$\rho = 81 \text{ kg s}^2/\text{m}^4.$$

În baza acestor date, din relațiile (3.2), (3.3) rezultă frecvențele circulare considerate. Pentru $n = 1, 2, 3$ și $m = 1, 2, 3$ ele sînt date în tabela de mai jos

m n	1	2	3
	230	632	1 510
2	460	732	1 517
3	837	850	1 683

1. *Tabloul frecvențelor circulare proprii* ω_{nm} din care rezultă frecvențele proprii $N = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

m n	1	2	3
1	37	101	241
2	73	117	250
3	133	135	268

2. *Tabloul frecvențelor proprii N în Hz* este foarte util pentru evitarea fenomenului de rezonanță, care conduce la o obosire rapidă a materialului și la scoaterea lui din uz.

6. CALCULUL PLĂCII CURBE SUBŢIRI CILINDRICE CIRCULARE REZEMATE PE TIMPANE, LA SARCINI DINAMICE ŞI STATICE

Acest calcul poate fi făcut în baza formulelor stabilite anterior în paragrafele 2, 3, 4 cu unele completări şi precizări suplimentare.

În adevăr, în sistemele de ecuaţii (2.1), (2.3) nu intervine nici o modificare formală, astfel că ele pot fi reluate sub aceeaşi formă. Modificarea intervine în expresia componentei Z a sarcinii exterioare (presupunînd că avem doar solicitări normale). În locul formulei (2.4) trebuie apelat la

$$Z = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z_d \tag{6.1}$$

Z_d fiind sarcina dinamică ce acţionează asupra plăcii curbe. Această sarcină în general variabilă în timp, o putem presupune descompusă în serie dublă Fourier după t într-un anumit interval. Ea are deci forma

$$Z_d = \sum_n Z_{dn}(\alpha, \beta) \sin \Omega_n t. \tag{6.1$_1$}$$

Întrucît calculul poate fi făcut pentru fiecare armonică în parte, în acelaşi mod, apoi rezultatul obţinut prin însumare vom deduce formulele doar pentru un singur termen de forma

$$Z_d = Z_{dn}(\alpha, \beta) \sin \Omega_n t.$$

Presupunînd că funcţia Z_{dn} poate fi descompusă în serie dublă Fourier în α şi β

$$Z_{dn} = \sum_{mp} Z_{mpn} \cos \lambda_p \beta \cos \nu_m \alpha,$$

cu

$$\lambda_p = \frac{p\pi}{l_1}, \qquad \nu_m = \frac{m\pi}{l_2} \tag{6.2}$$

Z_{mpn} — constante cunoscute, m şi p luînd valori impare, pentru partea simetrică din solicitare.

Celelalte cazuri sînt formal identice cu acestea. De asemenea, se remarcă cu uşurinţă, că fiecare armonică se calculează la fel, rezultatul obţinîndu-se prin sumare; aceasta ne conduce să considerăm pentru formulare doar un singur termen. Deci în cele din urmă, pentru Z_d vom considera următoarea formă, în calculul ce va fi dezvoltat:

$$Z_d = Z_{mpn} \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t. \tag{6.3}$$

Cu aceste notații, prin aceeași metodă ca și în paragraful 2 se obține ecuația finală a problemei

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\beta^2} - i\,c_3\left(\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\alpha^4} + \rho_1\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\beta^4} - 2\eta\frac{\partial^4\overline{\widetilde{c}}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right) +$$

$$+ i\frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\frac{1}{2c_3}\left(\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\overline{\widetilde{c}}}{\partial t^2}\right) + Z_{mpn}\cos\nu_m\,\alpha\cos\lambda_p\,\beta\sin\Omega_n\,t = 0. \qquad (6.4)$$

Considerînd pe $\widetilde{c}$ de forma

$$\widetilde{c} = (\varphi_{mpn} + i\,\psi_{mpn})\cos\nu_m\,\alpha\cos\lambda_p\,\beta\sin\Omega_n\,t, \qquad (6.5)$$

cu φ_{mpn} și ψ_{mpn} constante reale se obține o soluție care satisface și condițiile de rezemare pe timpane. Ca atare ea este soluția căutată. Introducînd-o în (6.4), rezultă

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{R}\lambda_p^2(\varphi_{mpn} + i\,\psi_{mpn}) - i\,c_3\,[a_{pm}(\varphi_{mpn} + i\,\psi_{mpn}) - \\ &- b_{mp}(\varphi_{mpn} - i\,\psi_{mpn})] - \frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\frac{1}{c_3}\Omega_n^2\psi_{mpn} + Z_{mpn} = 0, \end{aligned} \qquad (6.6)$$

din care separînd partea reală de cea imaginară și rezolvînd apoi sistemul în φ, ψ obținut se deduce

$$\psi_{mpn} = Z_{mpn}\frac{c_3}{\left[\frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\Omega_n^2 - \left(\frac{\lambda_p^4}{R^2(a_{mp} - b_{mp})} + c_3^2(a_{mp} + b_{mp})\right)\right]}, \qquad (6.7)$$

$$\varphi_{mpn} = -Z_{mpn}\frac{\lambda_p^2}{R(a_{mp} - b_{mp})\left[\frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\Omega_n^2 - \left(\frac{\lambda_p^4}{R^2(a_{mp} - b_{mp})} + c_3^2(a_{mp} + b_{mp})\right)\right]}, \qquad (6.8)$$

unde s-a păstrat notația

$$a_{mp} = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\nu_m^4 + \rho_1\lambda_p^2\nu_m^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\lambda_p^4, \qquad (6.9)$$

$$b_{mp} = 2\eta\,\nu_m^2\lambda_p^2. \qquad (6.10)$$

Cunoașterea expresiilor (6.7) și (6.8) rezolvă problema pusă întrucît funcțiunea de tensiune $\widetilde{c}$ cunoscută în funcție de φ_{mpn} și ψ_{mpn} rezultă toate eforturile și deformațiile prin utilizarea egalităților (2.7), (2.8), (2.9) și (2.2).

O metodă aproximativă în calculul practic, este aceea de a înlocui calculul la solicitări dinamice cu calculul unor solicitări statice ținînd seama de un coeficient multiplicator de impact care reprezintă raportul dintre efectul forței dinamice și efectul aceleiași forțe lucrînd static. Formulele

(6.7) și (6.8) permit obținerea în baza unui calcul exact al coeficientului de impact; mai mult, în condițiile presupuse pentru solicitarea exterioară Z, rezultă că un asemenea coeficient de impact nu există decît pentru o forță care nu admite decît un singur termen în dezvoltarea sa în serie Fourier. El poate fi determinat din

$$c_{mpn} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} \cdot \frac{\Omega_n^2}{\left[\frac{\lambda_p^4}{R^2(a-b)} + c_3^2(a+b)\right]}}. \tag{6.11}$$

Se observă, conform cu relația (3.2) că

$$c_{mpn} = \frac{1}{1 - \Omega_n^2/\omega_{pm}^2} \tag{6.12}$$

care de altfel pune în evidență fenomenul de rezonanță. În adevăr, dacă ω_{pm} se apropie din ce în ce mai mult de Ω_n solicitările cresc oricît de mult.

În virtutea relației (6.11) și a relației (6.2) deducem cu ajutorul lui (6.12) următoarea formă pentru φ_{mpn} și ψ_{mpn}:

$$\psi_{mpn} = -\frac{c_3}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} Z_{mpn} \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho}, \tag{6.13}$$

$$\varphi_{mpn} = \frac{\lambda_p^2}{R(a_{mp} - b_{mp})} \frac{1}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} Z_{mpn} \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \tag{6.14}$$

și deci

$$\widetilde{c} = -\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left(\frac{\lambda_p^2}{R(a_{pm} - b_{pm})} - i c_3\right) \times$$
$$\times \cos \nu_m \alpha \cdot \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t. \tag{6.15}$$

Această soluție poate fi utilizată în ipoteza că este cunoscută dezvoltarea în serie a încărcării Z și că a fost calculat spectrul frecvențelor circulare proprii ale plăcii curbe cilindrice circulare subțiri considerate. Cu ajutorul formulei (6.15) pot fi calculate toate eforturile complexe, în baza relațiilor (2.7), (2.8), (2.9)

$$\widetilde{N}_\alpha = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \lambda_p^2 \left(\frac{\lambda_p^2}{R(a_{pm} - b_{pm})} - i c_3\right) \times$$
$$\times \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.16}$$

$$\widetilde{N}_\beta = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \nu_m^2 \left(\frac{\lambda_p^2}{R(a_{pm} - b_{pm})} - i c_3\right) \times$$
$$\times \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.17}$$

$$\widetilde{N}_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \nu_m \lambda_p \left(\frac{\lambda_p^2}{R\,(a_{pm} - b_{pm})} - i\,c_3 \right) \times \\ \times \sin \nu_m \alpha \cdot \sin \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.18}$$

$$\widetilde{M}_\alpha = -\frac{E_\alpha}{\rho} c_3 \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left[\left(\nu_m^2 - \mu_\beta \lambda_p^2\right) \frac{\lambda_p^2}{R\,(a_{pm} - b_{pm})} - \right. \\ \left. - i\left(\nu_m^2 + \mu_\beta \lambda_p^2\right) c_3 \right] \cos \nu_m \alpha \cdot \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.19}$$

$$\widetilde{M}_\beta = -\frac{E_\beta}{\rho} c_3 \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left[\left(\lambda_p^2 - \mu_\alpha \nu_m^2\right) \frac{\lambda_p^2}{R\,(a_{pm} - b_{pm})} - \right. \\ \left. - i\left(\lambda_p^2 + \mu_\alpha \nu_m^2\right) c_3 \right] \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.20}$$

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \frac{c_3}{2} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left[(\rho_1 + \rho_2) \frac{\lambda_p^2}{R\,(a_{mp} - b_{mp})} - \right. \\ \left. - i\,(\rho_1 - \rho_2)\,c_3 \right] \sin \nu_m \alpha \sin \lambda_p \beta \sin \Omega_n t. \tag{6.21}$$

Din aceste expresii, rezultă în baza formulelor (2.2) expresiile eforturilor și momentelor de calcul

$$N_\alpha = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \frac{\lambda_p^4}{R\,(a_{mp} - b_{mp})} \cos \nu_m \alpha \times \\ \times \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.22}$$

$$N_\beta = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \frac{\nu_m^2 \lambda_p^2}{R\,(a_{mp} - b_{mp})} \cdot \cos \nu_m \alpha \times \\ \times \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.23}$$

$$N_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \frac{\nu_m \lambda_p^3}{R\,(a_{mp} - b_{mp})} \sin \nu_m \alpha \times \\ \times \sin \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.24}$$

$$M_\beta = -\frac{E_\beta}{\rho} c_3^2 \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left(\lambda_p^2 + \mu_\alpha \nu_m^2\right) \cos \nu_m \alpha \times \\ \times \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.25}$$

$$M_\alpha = -\frac{E_\alpha}{\rho} c_3^2 \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \left(\nu_m^2 + \mu_\beta \lambda_p^2\right) \cos \nu_m \alpha \times \\ \times \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t, \tag{6.26}$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\rho} \frac{c_3}{2} (\rho_1 - \rho_2) \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \nu_m \lambda_p \times \\ \times \sin \nu_m \alpha \sin \lambda_p \beta \sin \Omega_n t. \tag{6.27}$$

De asemenea, din formula (2.5)

$$\widetilde{c} = c + i\zeta w$$

rezultă că

$$w = \frac{1}{\zeta} I_m \widetilde{c} = \frac{\sqrt{3(1 - \mu_\alpha \mu_\beta)}}{2h^2 \sqrt{E_\alpha E_\beta}} I_m \widetilde{c} . \tag{6.28}$$

Cu alte cuvinte, folosind expresia (6.15) dedusă pentru $\widetilde{c}$ putem obține componenta normală a deplasării

$$w = \frac{1}{2\rho h} \sum_{mpn} \frac{Z_{mpn}}{\Omega_n^2 - \omega_{pm}^2} \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_p \beta \sin \Omega_n t. \tag{6.29}$$

Formulele (6.22) ... (6.27) și (6.29) conțin toate elementele necesare pentru calculul de verificare al plăcii considerate.

7. APLICAȚIE. CALCUL LA SARCINI DINAMICE. ACOPERIȘUL AUTOBUZULUI T.V. 2

Fie o sarcină dinamică periodică de forma

$$Z = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 60 \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t, \tag{7.1}$$

reprezentînd sarcina dată de greutatea proprie a acoperișului antrenată într-o vibrație de frecvență circulară Ω. A fost considerat doar primul termen din dezvoltarea în serie dublă Fourier în α și β. Rezultă următoarele expresii pentru eforturi momente și deplasări :

— Eforturi

$$N_\alpha = \frac{4{,}1 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t,$$

$$N_\beta = \frac{58{,}0 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t,$$

$$N_{\alpha\beta} = - \frac{15{,}5 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \sin \nu_1 \alpha \sin \lambda_1 \beta \sin \Omega t.$$

— Momente

$$M_\alpha = - \frac{1{,}66 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t,$$

$$M_\beta = - \frac{0{,}571 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t,$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{0{,}62 \times 10^6}{\Omega^2 - 230^2} \sin \nu_1 \alpha \sin \lambda_1 \beta \sin \Omega t.$$

— Deplasări

$$w = \frac{1{,}62 \times 10^4}{\Omega_n^2 - 230^2} \cos \nu_1 \alpha \cos \lambda_1 \beta \sin \Omega t,$$

întrucît ω_{11} determinat în paragraful 5 are valoarea 230. Se remarcă că într-adevăr, aşa cum am presupus în paragraful 4, efortul N_α este mult mai mic decît N_β.

Să presupunem că frecvenţa circulară Ω corespunde unei excitaţii de $N = 33\ H_3$. Atunci

$$\Omega = 2\pi N = 207.$$

şi deci

$$\Omega^2 - 230^2 = -10\,000,$$

astfel că eforturile maxime au în acest caz valoarea

$$N_\alpha = -410 \text{ kg/ml},$$

$$N_\beta = -5\,800 \text{ kg/ml},$$

$$N_{\alpha\beta} = 1\,550 \text{ kg/ml},$$

şi analog, momentele maxime şi deplasarea

$$M_\alpha = 1\,660 \text{ kgm/ml}$$

$$M_\beta = 571 \text{ kgm/ml}$$

$$M_{\alpha\beta} = -620 \text{ kgm/ml}$$

$$w = 1{,}62 \text{ mm}.$$

8. CALCULUL FRECVENŢELOR PLĂCILOR CILINDRICE CIRCULARE ORTOTROPE REZEMATE ARBITRAR ÎN LUNGUL GENERATOARELOR EXTREME

În toate calculele anterioare am presupus că în lungul generatoarelor de margine, placa curbă subţire este rezemată pe timpane. Într-o primă aproximare, această schemă de calcul reprezintă modul în care este alcătuit acoperişul autobuzelor. Este însă remarcat că pentru o nouă etapă de calcul, mai exactă, acoperişul are în secţiune o curbă medie de formă aproape eliptică, aşa cum apare în figura 6. Întrucît un calcul de placă cilindrică pe secţiune eliptică, rezemată arbitrar pe cele două generatoare extreme, dinamic, este greu de abordat şi nicidecum practic pentru proiectare, vom apela la o altă schemă care sintetizează aproximativ, dar cu o aproximaţie evident mai bună decît cea dată de primul calcul o astfel de placă. Anume, considerăm că placa respectivă este alcătuită din trei sau mai multe plăci cilindrice circulare ortotrope (eventual cu diverse ortotropii) racordate între ele.

Fig. 6

Evident pentru a putea conduce un asemenea calcul, este necesară și suficientă rezolvarea unei plăci cilindrice circulare ortotrope la sarcini dinamice, cu o rezemare arbitrară în lungul generatoarelor extreme.

Pe cele două curbe de capăt, placa va fi considerată mai departe rezemată pe timpane, rezemare care pare a fi cea mai indicată în cazul considerat; de altfel eventualele nepotriviri, conform principiului lui Saint-Vainant (cilindrul fiind lung) nu vor modifica esențial rezultatele.

Pe aceeași cale, de altfel vom putea introduce în calcul și efectul pereților laterali puțin curbați.

În ipoteza rezemării în secțiunile extreme pe timpane va fi posibilă utilizarea seriilor Fourier în variabila α, ceea ce simplifică esențial calculul respectiv, făcîndu-l utilizabil în proiectarea carcaselor de automobile și evident și în alte domenii unde asemenea plăci intervin.

Într-o primă etapă, examinăm problema frecvențelor proprii ale unei plăci cilindrice circulare, rezemată în lungul secțiunilor circulare extreme pe timpane și cu rezemare arbitrară în lungul generatoarelor de margine.

Ecuația care guvernează acest fenomen este evident tot ecuația (2.10)

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial\beta^2}-ic_3\left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\alpha^4}+\rho_1\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}-2\eta\frac{\partial^4\widetilde{c}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right]+$$

$$+i\frac{\rho}{2\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\frac{\lambda}{c_3}\left(\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial t^2}\right)=0.$$

Sîntem conduși a presupune pentru necunoscuta $\widetilde{c}$ o succesiune de forme, toate satisfăcînd condițiilor de rezemare pe timpane pentru $\beta=\pm\frac{l}{2}$

$$\widetilde{c}_n=c_n(\lambda_n\alpha)\cos\lambda_n\beta\sin\omega_n t; \tag{8.1}$$

cu

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{R},$$

funcția complexă de α avînd dezvoltat forma

$$c_n(\lambda_n\alpha)=\varphi_n(\lambda_n\alpha)+i\psi_n(\lambda_n\alpha). \tag{8.2}$$

Introducînd (8.1) în (2.10) rezultă șirul de ecuații diferențiale ordinare

$$-\frac{1}{R}\lambda_n^2\varphi_n+c_3\lambda_n^4\left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\psi_n^{IV}-(2\eta+\rho_1)\psi_n^{II}+\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\psi_n\right]+$$

$$+\omega_n^2\frac{1}{c_3}\frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\psi_n=0, \tag{8.3}$$

$$\psi_n+Rc_3\lambda_n^2\left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\varphi_n^{IV}+(2\eta-\rho_1)\varphi_n^{II}+\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\varphi_n\right]=0,\quad n=1,2,\ldots \qquad (8.4)^{1)}$$

---

1) Derivatele sînt făcute în raport cu $\lambda_n\alpha$.

Pentru simplitatea expunerii ulterioare este util a se nota

$$L_1(\quad) = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{d^4}{d(\lambda_n\alpha)^4} - (2\eta + \rho_1)\frac{d^2}{d(\lambda_n\alpha)^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}, \tag{8.5}$$

$$L_2(\quad) = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{d^4}{d(\lambda_n\alpha)^4} + (2\eta - \rho_1)\frac{d^2}{d(\lambda_n\alpha)^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}.$$

Prin această notație (8.3) și (8.4) devin

$$-\frac{1}{R}\lambda_n^2\varphi_n + c_3\lambda_n^4 L_1(\psi_n) + \omega_n^2\frac{\rho}{c_3\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\psi_n, = 0 \tag{8.3'}$$

$$\psi_n + R\,c_3\lambda_n^2 L_2(\varphi_n) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8.4'}$$

În aceste două ecuații, pentru fiecare n, poate fi eliminată una dintre funcțiunile necunoscute; fie aceasta funcția ψ_n. Rezultă

$$\varphi_n + \lambda_n^4 c_3^2 R^2 L_1 L_2(\varphi_n) + \omega_n^2\frac{\rho R^2}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} L_2(\varphi_n) = 0, \tag{8.5'}$$

unde ω_n nu este încă cunoscută.

Această ecuație, conține trei termeni a cător pondere este încă necunoscută. Pentru a tatona ordinul lor relativ de mărime, introducem soluția deja obținută pentru rezemare pe patru timpane care presupune

$$\varphi_n = \varphi_n^0\cos\nu_m\alpha = \varphi_n^0\cos\lambda_n\frac{\nu_m}{\lambda_n}\alpha,\ \omega_n = \omega_{nm}$$

și după simplificarea cu $\varphi_n^0\cos\nu_m\alpha$, obținem termenii cei mai mari din fiecare expresie

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_n & \longrightarrow & 1\\
R^2\lambda_n^4 c_3^2 L_1 L_2(\varphi_n) & \longrightarrow & \lambda_n^4 c_3^2\dfrac{E_\alpha}{E_\beta}\left(\dfrac{\nu_m}{\lambda_n}\right)^8 R^2,\\
R^2\omega_n^2\dfrac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}L_2(\varphi_n) & \longrightarrow & \omega_{nm}^2\dfrac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\sqrt{\dfrac{E_\alpha}{E_\beta}}\left(\dfrac{\nu_m}{\lambda_n}\right)^4 R^2.
\end{array}$$

Introducînd valorile numerice ale aplicației paragrafului 5 rezultă pentru diverși n și m

$$\begin{array}{rclccc}
\varphi_n & \longrightarrow & 1 & 1 & 1 & 1\\
R^2 c_3^2\dfrac{E_\alpha}{E_\beta}\left(\dfrac{\nu_m}{\lambda_n}\right)^8 & \longrightarrow & 1{,}25\dfrac{m^8}{n^4} & 1{,}25 & 0{,}08 & 20\\
R^2\omega_{nm}^2\dfrac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\sqrt{\dfrac{E_\alpha}{E_\beta}}\left(\dfrac{\nu_m}{\lambda_n}\right)^4 & \longrightarrow & 3{,}3\,\alpha\,10^{-5}\dfrac{m^4}{n^4}\,\omega_{nm}^2 & 1{,}75 & 1{,}75 & 7\\
 & & n & n = 1 & n = 2 & n = 2\\
 & & m & m = 1 & m = 1 & m = 2
\end{array}$$

tablou care arată că nu poate fi neglijat nici unul din cei trei termeni ai expresiei (8.5) în comparaţie cu ceilalţi doi, întrucît toţi au acelaşi ordin de mărime.

Pe cale directă, fără nici o aproximaţie, ecuaţia (8.5) este foarte greu de utilizat. În adevăr, ecuaţia caracteristică asociată ei este

$$l_1(r)\, l_2(r) + \omega_n^2 \frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\, l_2(r) \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2} + \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2} R^2 = 0, \tag{8.6}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} l_1(r) &= \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, r^4 - (2\,\eta + \rho_1)\, r^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}, \\ l_2(r) &= \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, r^4 + (2\,\eta - \rho_1)\, r^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Prima notaţie $r^2 = t$, ecuaţia (8.6) se transformă într-o ecuaţie de ordinul patru în raport cu t, depinzînd de parametrul încă nedeterminat ω_n^2. Rezolvarea acestei ecuaţii ca atare, poate fi făcută, însă utilizarea ulterioară a soluţiei construită în baza rădăcinilor ei practic prohibitivă. De aceea, nu aceasta este calea pe care vom putea merge într-un calcul cu caracter aplicativ, practic.

Recurgem la o metodă de recurenţă, în modul următor :

Presupunem că ω_n este una din frecvenţele proprii ale aceleiaşi plăci curbe însă într-o rezemare pe patru timpane, cu acelaşi termen Fourier în β.

Cu ajutorul soluţiilor ecuaţiei caracteristice (8.6) în care s-a luat acea valoare pentru ω_n, se vor determina soluţiile generale ale ecuaţiei (2.10) depinzînd de 8 constante arbitrare, cu ajutorul cărora se vor putea satisface condiţiile de margine.

Rezultă un sistem de opt ecuaţii cu opt necunoscute, omogen, al cărui determinant, în cazul că ω_n ales este tocmai frecvenţa proprie, este nul.

Cum însă ω_n nu este în general frecvenţa proprie căutată determinantul Δ va avea diverse valori pentru valori ale lui ω_n.

Trasînd curba ω_n, λ determinată de un număr suficient de puncte, grafic vom putea găsi şi punctele în care se anulează Δ, utilizînd valori ω_n ce încadrează frecvenţe de placă pe patru timpane.

Valorile ω_n corespunzătoare sînt evident frecvenţele proprii ale cilindrului. În viitor, ne propunem să dezvoltăm acest calcul.

Evident necesitatea de a reface tot calculul pentru diverse valori ale lui ω_n, duce la o metodă destul de greoaie dar totuşi singura utilizabilă.

9. CALCULUL DINAMIC AL PLĂCILOR CILINDRICE CIRCULARE ORTOTROPE REZEMATE ARBITRAR ÎN LUNGUL GENERATOARELOR ŞI AL SISTEMELOR DE PLĂCI CILINDRICE CIRCULARE RACORDATE ÎN PREZENŢA SARCINILOR EXCITATOARE

Acest caz relativ mai simplu decît acela al frecvenţelor proprii. Apelăm la ecuaţia (2.10) în care mai introducem încă un termen caracterizînd încărcarea, pe care o presupunem că poate fi descompusă în serie Fourier în β şi t

$$Z = \sum_{n,m} Z_{mn}(\alpha) \cos \lambda_n \beta \cos \Omega_m t. \tag{9.1}$$

Pentru simplitatea scrierii vom considera doar unul din termenii ce intervin, rezultatul obţinîndu-se prin sumare. Ecuaţia (2.10) capătă deci forma

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial \beta^2} - ic_3\left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{\partial^4 \widetilde{c}}{\partial \alpha^4} + \rho_1 \frac{\partial^4 \widetilde{c}}{\partial \alpha^2 \beta^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\partial^4 \widetilde{c}}{\partial \beta^4} - \right.$$
$$\left. - 2\eta \frac{\partial^4 \overline{\widetilde{c}}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}\right] + i\frac{\rho}{2c_3}\frac{1}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overline{\widetilde{c}}}{\partial t^2}\right) + \tag{9.2}$$
$$+ Z_{nm}(\alpha) \cos \lambda_n \beta \cos \Omega_m t.$$

Căutăm soluţia $\widetilde{c}$ de forma

$$\widetilde{c} = [\varphi_n(\lambda_n \alpha) + i\, \psi_n(\lambda_n \alpha) \cos \lambda_n \beta \cos \Omega_m t, \tag{9.3}$$

cu care se obţine următorul sistem de ecuaţie diferenţială ordinară (cu notaţiile paragrafului anterior)

$$-\frac{1}{R}\lambda_n^2 \varphi_n + c_3 \lambda_n^4 L_1(\psi_n) + \Omega_n^2 \frac{\rho}{c_3 \sqrt{E_\alpha E_\beta}} \psi + Z_{nm}(\alpha) = 0, \tag{9.4}$$

$$\psi_n + Rc_3 \lambda_n^2 L_2(\varphi_n) = 0. \tag{9.5}$$

Prin eliminarea funcţiei ψ_n, rezultă ca şi în paragraful anterior, ecuaţia diferenţială ordinară

$$\varphi_n + \lambda_n^4 c_3^2 R^2 L_1 L_2(\varphi_n) + \Omega_m^2 \frac{\rho R^2}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} L_2(\varphi) = \frac{R}{\lambda_n^2} Z_{nm}(\alpha). \tag{9.6}$$

Pentru obţinerea soluţiei particulare vom folosi această ecuaţie, iar pentru obţinerea soluţiei omogene, ecuaţia omogenă

$$\varphi_n + \lambda_n^4 c_3^2 R^2 L_1 L_2(\varphi_n) + \Omega_m^2 \frac{\rho R^2}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} L_2(\varphi) = 0. \tag{9.7}$$

Ecuaţia caracteristică asociată acestei ecuaţii, este

$$l_1(r)\, l_2(r) + \Omega_m^2 \frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2} l_2(r) + \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2 R^2} = 0, \tag{9.8}$$

în care spre deosebire de cazul ecuaţiei (8.6) Ω_m^2 este o valoare cunoscută, bine determinată.

Se poate arăta că cu suficientă aproximaţie putem considera

$$l_1(r) \cong l_2(r) \cong l(r)$$

unde

$$l(r) = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, r^4 - \rho_1 r^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,. \tag{9.9}$$

De aceea, pentru calcule expeditive se va apela la ecuația

$$l^2(r) + \Omega_m^2 \frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2}\, l(r) + \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2 R^2} = 0. \tag{9.10}$$

Prin notația

$$l(r) = \xi$$

rezultă ecuația

$$\xi^2 + \Omega_m^2 \frac{\rho}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}} \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2}\, \xi + \frac{1}{\lambda_n^4 c_3^2 R^2} = 0. \tag{9.11}$$

Fie

$$\xi_{1,2} = \mu \pm i\,\nu$$

rădăcinile ei. Rămîn de rezolvat ecuațiile

$$\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, r^4 - \rho_1 r^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = \mu \pm i\nu \tag{9.12}$$

care în orice caz, datorită formei lor speciale, vor admite rădăcini de forma

$$r_{1,2,3,4} = \pm (a_1 \pm i b_1),$$

$$r_{5,6,7,8} = \pm (a_2 \pm i b_2).$$

Rezultă pentru φ_n soluția omogenă de forma

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda_n \alpha) = \sum_{1}^{2}{}_j\, (A_1^j \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha\, + \\ + B_1^j \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha + A_2^j \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha\, + \\ + B_2^j \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Pentru ψ_n, în cadrul ipotezei simplificatoare (I), rezultă

$$\begin{aligned} \psi_n(X_n \alpha) = -\frac{1}{\xi} \sum_{1}^{2}{}_j\, (B_1^j \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha\, + \\ - A_1^j \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha + B_2^j \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha \\ - A_2^j \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Avînd cunoscută soluția generală a ecuației omogene și presupunînd determinată o soluție particulară a ecuației neomogene (9.6), utilizînd relațiile dintre eforturi, momente, deplasări și funcția necunoscută $\widetilde{c}$ (dată în primele două paragrafe) se pot scrie condițiile de margine cele mai generale, care vor depinde de cele opt constante arbitrare ale soluției omogene.

Fiind opt condiții de margine, rezultă în cele din urmă un sistem de opt ecuații cu opt necunoscute, care determină soluția problemei abordate[1]).

Primită la redacție la 21 ianuarie 1960

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЧАСТЕЙ АВТОБУСНЫХ КАРКАСОВ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ КРИВЫХ АВТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе выводятся собственные частоты и динамические нагрузки для тонких кривых пластинок из ортотропного материала, опирающихся на барабанные перепонки или с произвольной опорой вдоль краевой образующей. Путем отождествления с кривой пластинкой из ортотропного материала приводится расчет круглой цилиндрической кривой пластинки с ортотропной структурой, входящей в состав автобусных каркасов. Этим путем, сравнивая собственные частоты, вызываемые двигателем и динамическим поведением автобуса на ходу с собственными частотами, соответствующими различным пластинкам, входящим в состав каркаса, получаем данные о нагрузке каркаса и, в особенности, для покрытия и для боковых стенок.

Таким путем можно устранить опасность резонанса элементов каркаса, что способствует увеличению долговечности автобусов.

CALCUL DYNAMIQUE DE CERTAINES PARTIES COMPOSANTES DES CAISSONS D'AUTOBUS AU MOYEN DE LA THÉORIE DES PLAQUES ORTHOTROPES COURBES

RÉSUMÉ

L'auteur indique la manière de déduire les fréquences propres et les sollicitations dynamiques des plaques courbes minces en matériel orthotrope, appuyées sur des tympans, ou à appui arbitraire le long des génératrices marginales.

L'équivalence à une plaque courbe quelconque en matériel orthotrope permet de calculer les plaques cylindriques circulaires à structure

---

[1]) În cazul unei solicitări simetrice, A_2^j și B_2^j rezultă evident nuli și nu mai rămîn decît patru necunoscute.

orthotrope, qui entrent dans la formation des caissons d'autobus. De cette manière, en comparant les fréquences propres dues au moteur, ainsi qu'au comportement dynamique du véhicule en marche, avec les fréquences correspondant aux diverses plaques formant le caisson, on obtient des données concernant la sollicitation du caisson, et surtout du toit et des parois latérales.

Cette procédure permet d'éliminer la résonance des éléments du caisson, et contribue ainsi à augmenter la durée de service des autobus.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Visarion, C. Stănescu, *Etude des semi-invariantes de l'analogie statico-géométrique pour les enveloppes élastiques minces en matériaux isotropes et ortotropes.* Acta tehnica, **XXVIII**, *1—2* (1960).
2. C. Stănescu, V. Visarion, *O metodă pentru calculul învelitorilor cilindrice de secțiune circulară cu ortotropie de material.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
3. V. Manea, *Considerații asupra comportării dinamice a carcasei autobuzelor.* Metalurgia și construcția de mașini, **XI**, *10* (1959).
4. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек.* Москва, Гостехиздат, 1953.
5. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек.* Москва-Ленинград, Судпромгиз, 1951.

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE – REOLOGIE

CONSIDERAȚII ASUPRA DIMENSIONĂRII BARAJELOR DE GREUTATE CU PROFILUL TRAPEZOIDAL

DE

RADU PRIȘCU și CONST. IAMANDI

În lucrarea de față se examinează unele probleme referitoare la barajele de greutate cu profilul trapezoidal, fundate pe terenuri stîncoase. Se stabilesc relațiile care conduc la profilul optim din punct de vedere static și economic și se compară rezultatele cu cele obținute pentru barajele cu profilul triunghiular. Deoarece profilul trapezoidal este mai indicat ca formă de calcul pentru barajele deversante, asigurînd grosimea necesară la creastă, se studiază în continuare efectul pe care îl exercită asupra lui doi parametri noi : supraînălțarea nivelului apei din amonte peste coronament și înecarea din aval. Relațiile obținute se aplică la studiul unui baraj fluvial.

NOTAȚII

H – înălțimea barajului (m),
λ – panta paramentului aval față de verticală,
λ_1 – panta paramentului amonte față de verticală,
γ – greutatea specifică a apei (1 t/m^3),
γ_b – greutatea specifică a betonului (2,3 t/m^3),
m – coeficientul de reducere al subpresiunilor (0,50),
k – raportul $(\gamma_b - m\gamma)/\gamma$,
σ – efort normal vertical (t/m^2),
f – coeficient de frecare statică între beton și rocă,
α – grosimea relativă la creastă (raportul între grosimea la coronament și înălțimea barajului),
β – înecarea relativă (raportul între înălțimea apei în aval și înălțimea barajului),
δ – supraînălțarea relativă (raportul între înălțimea apei peste creastă și înălțimea barajului).

A. CONDIŢII DE BAZĂ

Într-o lucrare privind profilul optim al barajelor de greutate [1] s-a arătat că pentru dimensionarea acestora se folosesc în mod curent două criterii.

Primul criteriu constă în condiţia ce se pune ca, ţinînd seama de acţiunea subpresiunilor, efortul normal vertical de la piciorul amonte al barajului să fie mai mare sau la limită egal cu zero. În ipoteza repartiţiei liniare a eforturilor, acest lucru se scrie sub forma

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma V}{\Omega} + \frac{\Sigma M}{W} \geqslant 0. \tag{1}$$

Al doilea criteriu constă în condiţia de stabilitate la alunecare a barajului în secţiunea de fundaţie. Acest lucru se poate exprima punînd condiţia ca coeficientul de alunecare (raportul între suma forţelor orizontale ΣH şi suma forţelor verticale ΣV) să fie mai mic sau la limită egal cu coeficientul de frecare statică f al betonului cu roca de fundaţie

$$\Sigma H / \Sigma V \leqslant f. \tag{2}$$

Aportul eventual al coeziunii dintre beton şi rocă poate fi luat în considerare mărind cifra f în mod corespunzător.

B. PROFIL TRAPEZOIDAL NEDEVERSANT

1. Luînd în considerare un profil trapezoidal încărcat cu solicitările obişnuite (fig. 1*a*), adică greutatea proprie, presiunea orizontală şi verticală a apei şi subpresiunea (cu o variaţie liniară de-a lungul fundaţiei), constatăm că, admiţînd un α oarecare, cele două condiţii (1) şi (2) sînt suficiente pentru determinarea necunoscutelor λ şi λ_1. Pentru a cunoaşte

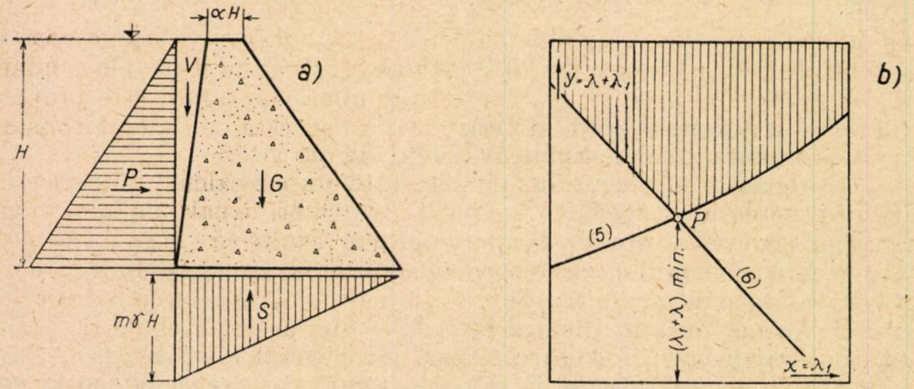


Fig. 1. — Baraj de greutate trapezoidal : *a*) forţele care acţionează asupra profilului ; *b*) soluţiile comune pentru inegalităţile (5) şi (6).

care din numeroasele soluții care satisfac cele două inegalități este cea mai indicată [2], le explicităm

$$\lambda^2 k + \lambda_1^2 (1 - m) + \lambda\lambda_1 (k - m + 2) + \lambda\alpha (m + 3k) + 2\lambda_1 \alpha (1 - m) + \\ + \alpha^2 k - 1 \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$\lambda k + \lambda_1 (1 + k) + \alpha(m + 2k) \geqslant \frac{1}{f}. \qquad (4)$$

Notînd $\lambda_1 = x$ și $\lambda_1 + \lambda = y$, relațiile de mai sus se pot scrie sub forma

$$y^2 k - x^2 + xy (2 - m - k) + x\alpha (2 - 3m - 3k) + y\alpha (m + 3k) + \\ + \alpha^2 k - 1 \geqslant 0, \qquad (5)$$

$$x + yk + \alpha (m + 2k) - \frac{1}{f} \geqslant 0. \qquad (6)$$

Inegalitatea (5), provenită din condiția de efort nul, este satisfăcută de valorile situate deasupra unei hiperbole, iar inegalitatea (6), provenită din condiția de stabilitate la alunecare, este satisfăcută de valorile situate deasupra unei drepte (fig. 1*b*). Deci, valorile din domeniul hașurat sînt cele care corespund deopotrivă inegalităților (5) și (6). Abscisa punctului de intersecție P, rezultă din ecuația

$$x^2(m - 1) + x (k + m) \left[\alpha (m - k - 1) - \frac{1}{f} \right] + \frac{1}{f^2} - \\ - k - \alpha k (k + m) \left(\alpha + \frac{1}{f} \right) = 0, \qquad (7)$$

iar ordonata lui P corespunde sumei $\lambda_1 + \lambda$ minime. Se trage concluzia că soluțiile comune ecuațiilor (5) și (6) sînt cele mai indicate, ele conducînd în același timp la profilul de suprafață minimă (suprafața este proporțională cu suma $\lambda_1 + \lambda + 2\alpha$, iar ultimul termen este considerat constant). Acest profil poartă denumirea de profil optim.

În figura 2 sînt reprezentate rezultatele unor calcule numerice efectuate tot pe baza ecuațiilor (5) și (6), pentru valori uzuale ale lui α în cazul barajelor nedeversante. Din aceste diagrame rezultă că din gama de profile optime care corespund la diverși coeficienți de frecare f, profilul care necesită suprafața și deci volumul pe metru liniar de baraj cel mai redus este cel care are paramentul amonte vertical ($\lambda_1 = 0$); acesta trebuie să realizeze însă un anumit coeficient de alunecare. În general, coeficienții de frecare f sînt diferiți de această valoare și în consecință paramentul amonte rezultă înclinat.

2. Pentru diverse valori ale coeficientului de frecare f și ale grosimii relative α s-au calculat înclinările paramentelor care corespund profilelor optime. Rezultatele acestor calcule, reprezentate în figura 3, arată că pentru o valoare dată a grosimii relative α, cu cît coeficientul de frecare f este mai

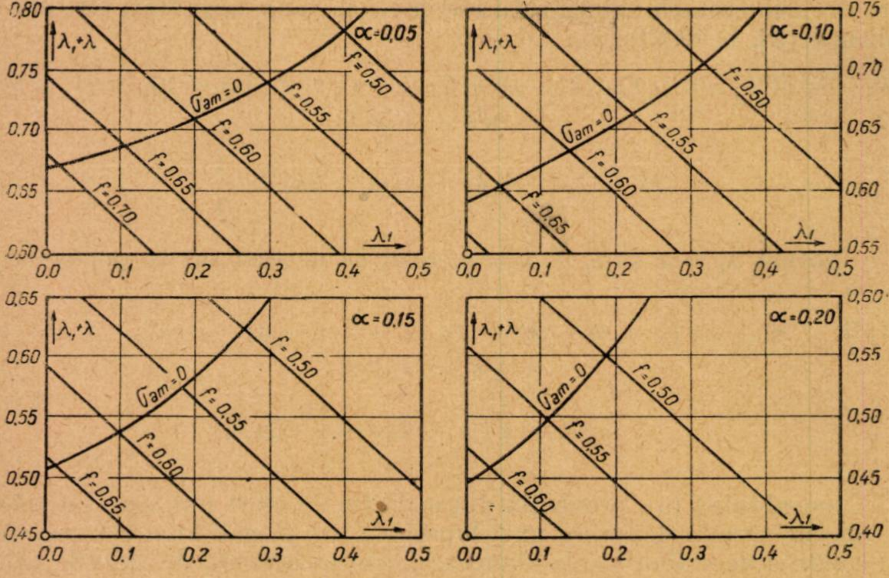


Fig. 2. — Relațiile (5) și (6) calculate pentru $f = 0{,}65$ și diferite grosimi relative α.

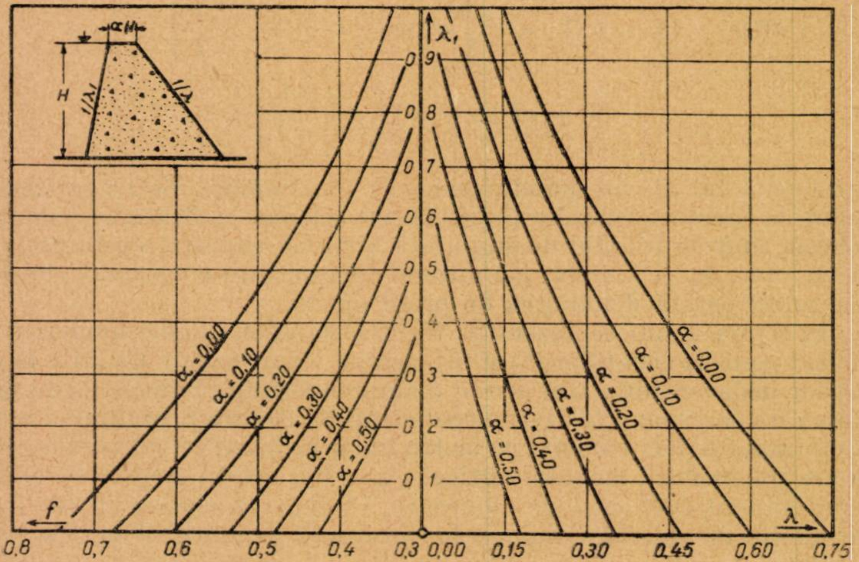


Fig. 3. — Înclinările paramentelor funcție de diferiți coeficienți f și α.

redus cu atît λ_1 rezultă mai mare. Profilul își asigură deci stabilitatea la alunecare prin o înclinare mai accentuată față de verticală a paramentului amonte.

3. În figura 4-stînga sînt reprezentate valorile $2V/H^2 = \lambda_1 + \lambda + 2\alpha$ (volumele specifice pe metru liniar de baraj) funcție de diverși

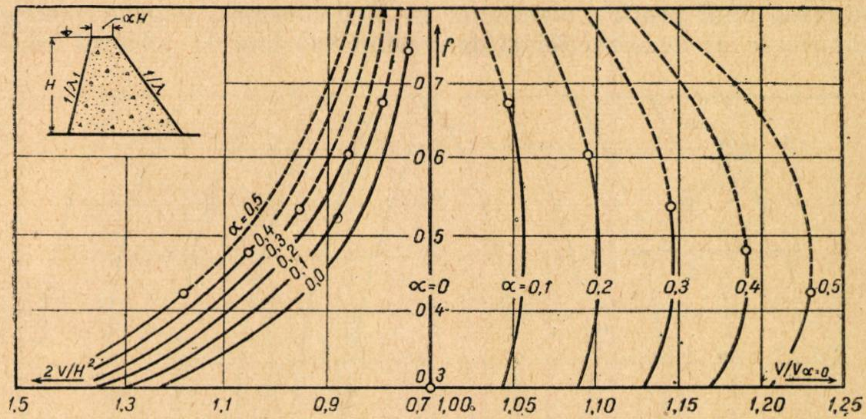


Fig. 4. — Volume specifice și rapoarte între volume pentru diferiți coeficienți f și α.

coeficienți f și α. Se constată că profilele triunghiulare ($\alpha = 0$) sînt mai economice decît cele trapezoidale, ele necesitînd în permanență un volum mai redus de beton. Punctele balustrate, care corespund profilelor cu parament amonte vertical ($\lambda_1 = 0$), confirmă concluzia trasă mai înainte în ceea ce privește economicitatea lor față de profilele cu parament amonte înclinat. Se exclud din aceste considerații valorile reprezentate prin linii întrerupte, ele referindu-se la profile cu înclinarea negativă în amonte (solicitate de tensiuni la piciorul aval în ipoteza lacului gol).

În figura 4-dreapta sînt trasate rapoartele între volumele profilelor trapezoidale și ale celor triunghiulare corespunzătoare. De remarcat că sporul procentual de volum crește cu cît grosimea relativă la coronament α se admite mai mare. Pentru $\alpha = 0{,}50$ spre exemplu, sporul procentual depășește cifra de 20%.

C. PROFIL TRAPEZOIDAL DEVERSANT

1. Dacă în cazul unui baraj obișnuit profilul trapezoidal nu este indicat din cauza sporului de volum pe care îl reclamă față de profilul clasic triunghiular, în cazul unui baraj deversant el este rațional, asigurînd grosimea la creastă pe care se înscrie forma deversantă. În această situație însă trebuie să se țină seama de efectul pe care îl are înecarea din aval (βH) și supraînălțarea nivelului din amonte (δH) asupra dimensiunilor barajului.

În cazul în care un profil trapezoidal obişnuit, dimensionat la presiunea apei de înălţime H, este solicitat suplimentar de înecarea din aval şi de supraînălţarea din amonte, condiţiile de stabilitate impuse iniţial se modifică în mod simţitor. Din aspectul curbelor trasate în figura 5, rezultă că :

— creşterea nivelului din amonte peste coronament (δ) înrăutăţeşte stabilitatea unui profil dimensionat în mod obişnuit, mărind coeficientul de alunecare al construcţiei şi provocînd tensiuni la piciorul amonte ;

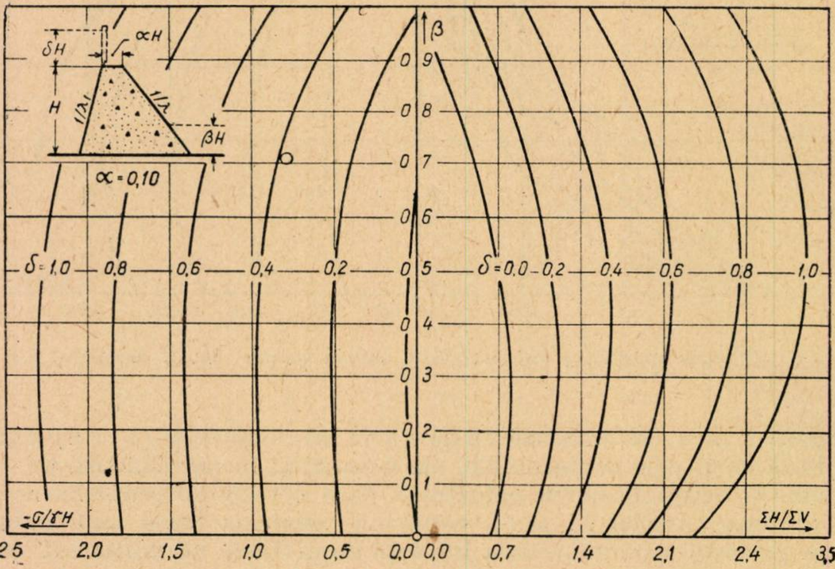


Fig. 5. — Eforturi de tensiune şi coeficienţi de alunecare provocaţi de creşterea nivelului din amonte (δ) şi din aval (β) pe un profil nedeversant.

— creşterea nivelului din aval (β) are aceleaşi efecte defavorabile asupra stabilităţii ; cînd acest nivel se apropie de coronament, acţiunea lui devine favorabilă ;

— nivelul critic din aval care creează cea mai defavorabilă situaţie variază între 0,25 H (pentru $\delta = 0$) şi 0,50 H (pentru $\delta = 1$).

2. În cele ce urmează se vor stabili relaţiile necesare pentru dimensionarea profilelor deversante, ţinînd seama de înecarea din aval şi de supraînălţarea din amonte. Se va considera că stavilele de pe coronament sînt închise şi în consecinţă se va neglija încărcarea favorabilă pe care ar exercita-o lama deversantă. Se va admite că diagrama subpresiunilor este formată din o sarcină constantă pe talpa barajului, egală cu coloana de apă din aval $\beta\gamma H$, şi o sarcină variind liniar de la valoarea $m(1 + \delta - \beta)\gamma H$ la piciorul amonte, spre zero la piciorul aval.

Ţinînd seama de încărcările indicate în figura 6, s-au scris ecuaţiile (1) şi (2) şi s-a determinat soluţia comună care conduce la profilul optim.

Ecuațiile prin intermediul cărora se poate dimensiona un profil oarecare sînt de forma

$$A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C = 0, \tag{8}$$

care reprezintă soluția comună ecuațiilor (1) și (2), și

$$M - N\lambda_1 - \lambda = 0, \tag{9}$$

care reprezintă ecuația (2).

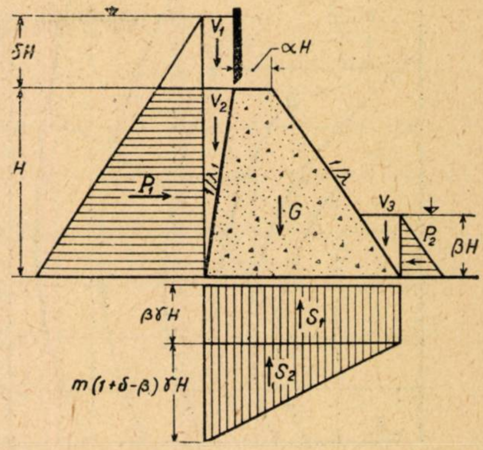


Fig. 6. — Forțele care acționează asupra unui profil deversant.

Notațiile care figurează în ecuațiile (8) și (9) sînt următoarele:

$$A = Re - Nh + n,$$

$$B = Se + Mh - Ng + j,$$

$$C = Te + Mg + p,$$

$$M = \frac{b - c}{a}, \quad N = \frac{d}{a}, \quad R = N^2,$$

$$S = -2\,MN\ , \ T = M^2,$$

$$a = k + m(\beta - \delta) - 2\beta + \beta^2,$$

$$b = (1 - \beta^2 + 2\delta)/f,$$

$$c = \alpha\,[2k - 2\beta + m(1 + \beta - \delta)], \qquad d = k - (2 - m)(\beta - \delta) + 1,$$

$$e = k + m(\beta - \delta) - \beta - \beta^2 + \beta^3, \qquad g = \alpha\,[3k - 2\beta - \beta^2 + m(1 + 2\beta - 2\delta)],$$

$$h = k + (2 - m)(1 - 2\beta + 2\delta) + 2\beta - \beta^2, \qquad k = (\gamma_b - m\gamma)/\gamma,$$

$$j = 2\alpha[\delta + (1 - \beta + \delta)(1 - m)], \qquad n = (1 - \beta + \delta)(1 - m),$$

$$p = \beta^3 - 1 - 3\delta + \alpha^2[k - \beta + m(\beta - \delta)].$$

De remarcat că ecuațiile (8) și (9) au o formă generală care se poate particulariza succesiv pînă la cazul profilului simplu triunghiular (pentru care $\alpha = \beta = \delta = 0$).

3. Pentru a avea o imagine a modului în care variază înclinările paramentelor față de verticală (λ_1 și λ) s-au efectuat o serie de calcule numerice funcție de: grosimea relativă α (admisă a fi $2/3\ \delta$, cum rezultă la profilarea unui deversor), înecarea relativă β și supraînălțarea relativă δ. Cifrele obținute, reprezentate în figura 7, conduc la următoarele concluzii:

— pentru o supraînălțare dată în amonte δ, pentru λ rezultă o valoare mare cînd $\beta = 0$ și $0 < \beta < 1$; cea mai mare valoare a lui λ rezultă pentru nivelul β care cere $\lambda_1 = 0$;

— pentru un nivel dat în aval β, λ_1 rezultă cu atît mai mare cu cît supraînălțarea δ este mai mare;

— pentru o supraînălţare dată în amonte δ, există un nivel critic în aval β pentru care λ_1 are valoarea maximă ; pentru diferiţi δ, zona critică este cuprinsă între $0{,}25H$ (pentru $\delta = 0$) şi $0{,}60\ H$ (pentru $\delta = 1$).

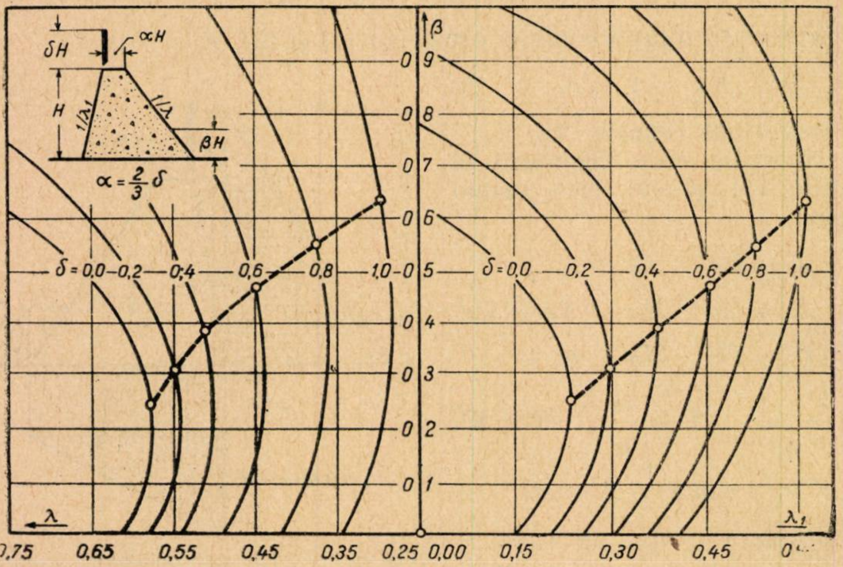


Fig. 7. — Înclinările paramentelor pentru $f = 0{,}65$ şi diferiţi coeficienţi α, β şi δ.

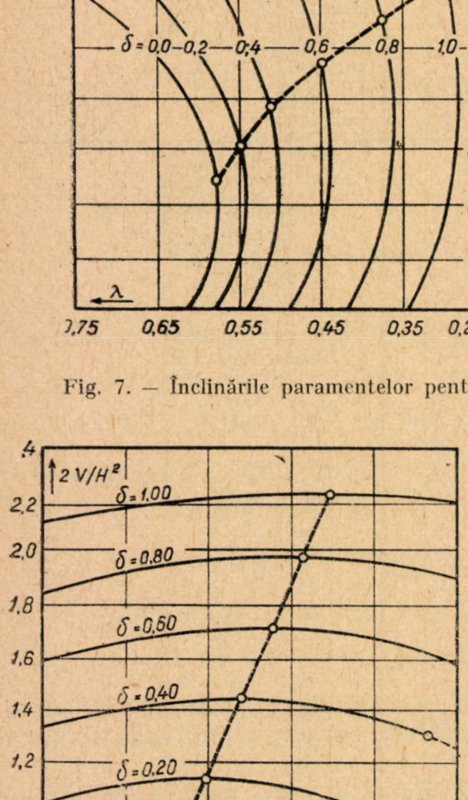


Fig. 8. — Volume specifice pentru $f = 0{,}65$ şi diferiţi coeficienţi α, β şi δ.

4. Calculînd volumele specifice $2V/H^2 = \lambda_1 + \lambda + 2\alpha$ corespunzătoare valorilor din figura 7, au rezultat curbele din figura 8. Se constată că :

— pentru un nivel dat în aval β, volumul barajului rezultă cu atît mai mare cu cît supraînălţarea din amonte δ este mai mare ;

— pentru o supraînălţare dată în amonte δ, există un nivel în aval β pentru care volumul barajului este maxim ; pentru diferiţi δ, zona respectivă este cuprinsă între $0{,}25H$ (pentru $\delta = 0$) şi $0{,}60\ H$ (pentru $\delta = 1$) ;

— în mod practic, nivelele β care conduc la valori maxime pentru λ_1 sînt identice cu cele care necesită maximum de volum ; deci o dată cu determinarea nivelului critic din aval se obţine şi profilul cu volumul maxim.

Ca urmare se poate trage concluzia că dimensionarea unui baraj deversant trebuie făcută admițînd nivelul maxim în amonte δ și căutînd nivelul critic din aval. Față de profilele dimensionate la alte nivele β, acest profil va avea cel mai mare volum. În același timp însă, în comparație cu alte profile care, în aceeași ipoteză de încărcare, nu satisfac la limită cele două condiții de stabilitate, acest profil va avea cel mai redus volum.

D. APLICAȚIE PRACTICĂ

1. Relațiile deduse mai sus au fost aplicate la dimensionarea unui baraj fluvial, cu corpul fix înalt de 30 m și o lamă deversantă barată prin stavile cu înălțimea de 8 m. Grosimea la coronament a fost aleasă de

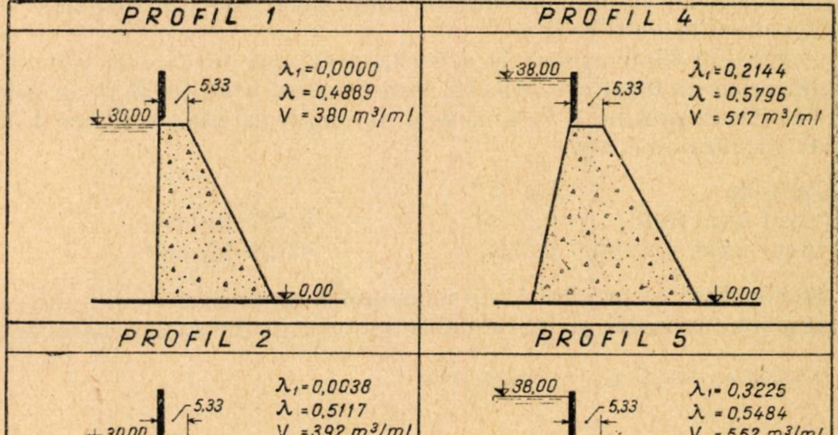

PROFIL 1
λ_1 = 0,0000
λ = 0,4889
V = 380 m³/ml
5,33
30,00
0,00
PROFIL 4
38,00
λ_1 = 0,2144
λ = 0,5796
V = 517 m³/ml
5,33
0,00
PROFIL 2
λ_1 = 0,0038
λ = 0,5117
V = 392 m³/ml
5,33
30,00
9,675
0,00
PROFIL 5
38,00
λ_1 = 0,3225
λ = 0,5484
V = 552 m³/ml
5,33
9,675
0,00
PROFIL 3
λ_1 = 0,0000
λ = 0,4533
V = 364 m³/ml
5,33
30,00
20,00
0,00
PROFIL 6
38,00
λ_1 = 0,1906
λ = 0,6567
V = 541 m³/ml
5,33
20,00
0,00

Fig. 9. — Profilul unui baraj fluvial dimensionat în diferite ipoteze de încărcare (m = 0,50 și f = 0,65).

$\frac{2}{3}$ 8 = 5,33 m. În calcule s-a admis un coeficient de frecare statică $f = 0{,}65$.

Dimensionările s-au efectuat pentru

— trei nivele caracteristice în aval : nivel nul, nivel critic ($\beta H = 9{,}657$ m) şi nivel maxim realizabil ($\beta H = 20$ m) ;

— două nivele caracteristice în amonte : nivel la cota crestei ($H = 30$ m) şi nivel la cota maximă [$(1 + \delta)H = 38$ m].

Înclinările paramentelor şi volumele corespunzătoare pe metru liniar de baraj sînt indicate în figura 9.

2. Faţă de rezultatele obţinute se constată că :

— profilele dimensionate în ipotezele cu nivel maxim în amonte au în permanenţă un volum specific mai mare decît cele dimensionate în ipotezele cu nivel la cota crestei ;

— profilul dimensionat în ipoteza nivelului maxim în amonte şi a nivelului critic în aval are cel mai mare volum specific faţă de celelalte.

Verificînd profilul 5 în ipotezele de încărcare ale profilelor 4 şi 6 au rezultat următoarele cifre

Ipoteza	$\Sigma H / \Sigma V$	σ_{am}
nivel aval nul	0,5783	$+ 0{,}537$ kg/cm^2
nivel aval maxim	0,5897	$- 0{,}108$ kg/cm^2

Se constată că profilul 5, dimensionat în ipoteza nivelului aval critic, se comportă favorabil şi în celelalte ipoteze de încărcare caracteristice.

Primită la redacţie la 14 ianuarie 1960

СООБРАЖЕНИЯ В СВЯЗИ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ РАЗМЕРОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛОТИН ТРАПЕЦОИДАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается вопрос определения размеров гравитационных плотин трапецоидального профиля, исходя из условий устойчивости на сдвиг и нулевого усилия в основании верховой грани. Выведены соотношения, которые приводят к оптимальным профилям со статической и экономической точек зрения для двух общих случаев, а именно: глухих плотин и водосливов. Указывается влияние двух новых параметров на определение размеров плотин: повышение горизонта воды над нормальным в верхнем бьефе и горизонт воды в нижнем бьефе. Доказывается наличие критического горизонта в нижнем бьефе, приводящего к самой невыгодной гипотезе загружения. Полученные соотношения применяются при определении размеров больших плотин.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Гравитационная плотина трапецоидального профиля: *а* — силы, действующие на плотину; *b* — общие решения неравенств (5) и (6).

Рис. 2. — Соотношения (5) и (6), рассчитанные при $f = 0,65$ и разной относительной толщине α.

Рис. 3. — Зависимость между уклонами граней и коэффициентами f и α.

Рис. 4. — Удельные объемы и соотношение между объемами при различных коэффициентах f и α.

Рис. 5. — Растягивающие усилия и коэффициенты устойчивости на сдвиг, вызванные повышением горизонта в верхнем (δ) и нижнем бьефах (β) для глухой плотины.

Рис. 6. — Силы, действующие на водосливную плотину.

Рис. 7. — Уклоны граней при $f = 0,65$ и при различных коэффициентах α, β и δ.

Рис. 8. — Удельные объемы при $f = 0,65$ и различных коэффициентах α, β и δ.

Рис. 9. — Профиль плотины с размерами, определенными при различных гипотезах загружения ($m = 0,50$ и $f = 0,65$).

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES BARRAGES-POIDS À PROFIL TRAPÉZOÏDAL

RÉSUMÉ

Dans cette étude on examine le problème de la détermination des dimensions des barrages-poids à profil trapézoïdal, en partant des conditions de stabilité au glissement et d'effort nul au pied amont. On déduit les relations qui conduisent aux profils optimums du point de vue statique et économique en deux cas généraux : profil usuel non déversant et profil déversant. On indique la manière dont deux nouveaux paramètres influencent le calcul : la surélévation du niveau amont et le niveau aval. On démontre l'existence d'un niveau critique en aval qui conduit à l'hypothèse de charge la plus défavorable. On applique les relations obtenues à l'étude d'un barrage fluvial.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Barrage-poids trapézoïdal : *a*) les forces qui agissent sur le profil ; *b*) les solutions communes des inégalités (5) et (6).

Fig. 2. — Les relations (5) et (6) calculées pour $f = 0,65$ et pour différentes épaisseurs relatives α.

Fig. 3. — Les inclinaisons des parements en fonction de différents coefficients f et α.

Fig. 4. — Volumes spécifiques et rapports entre les volumes pour différents coefficients f et α.

Fig. 5. — Efforts de traction et coefficients de glissement provoqués par la surélévation du niveau amont (δ) et aval (β) dans un profil non déversant.

Fig. 6. — Les forces qui agissent sur un profil déversant.

Fig. 7. — Les inclinaisons des parements pour $f = 0,65$ et pour différents coefficients α, β et δ.

Fig. 8. — Volumes spécifiques pour $f = 0,65$ et pour différents coefficients α, β et δ.

Fig. 9. — Le profil d'un barrage fluvial calculé pour différentes hypothèses de charge ($m = 0,50$ et $f = 0,65$).

BIBLIOGRAFIE

1. R. PRIŞCU, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, **IV** (1953).
2. R. PRIŞCU, M. CONSTANTINESCU, *Considérations concernant la surélévation et la construction en étapes des barrages-poids, par précontrainte*. Sixième congrès des grands barrages, New York, 1958.

STUDII

REZISTENȚA MATERIALELOR — ELASTICITATE — PLASTICITATE — REOLOGIE

ASUPRA UNOR SISTEMATIZĂRI ÎN CALCULUL STATIC AL CADRELOR MONOTONE MULTIPLE PRIN ECUAȚII CU DIFERENȚE FINITE

DE

T. CĂRARE [1]) şi C. AMZULESCU [2])

I

Dintre structurile cu o frecventă întrebuințare în tehnica construcțiilor şi la care pot fi aplicate cu un mare randament pentru calculul static ecuațiile cu diferențe finite, fac parte : cadrele înalte [1], grinzile continui, grinzile Vierendeel [2] şi cadrele de tip shed [3].

Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul cadrelor de tip shed, datorită periodicității sau monotoniei acestora, duce la o serie de rezolvări matematice elegante.

Economia de timp şi exactitatea de calcul sînt în acelaşi timp maxime.

În prezentul articol, preluîndu-se o metodă expusă într-o lucrare anterioară [3] se urmăreşte generalizarea şi sistematizarea calculului cadrelor shed prin aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite. Se stabileşte o metodă directă de determinare a tuturor necunoscutelor funcționale funcție de constante, ceea ce permite aplicarea metodei şi la cadre shed cu mai mult de $3n$ necunoscute, cum ar fi, spre exemplu, cadrele shed cu tiranți elastici şi rigizi, la care tabloul matricial este format din 4, respectiv 6 linii şi coloane. Se stabileşte o serie de formule generale, care fac posibil un calcul rapid şi exact al cadrelor de tip shed de cele mai variate forme, mergînd de la cadre cu bare drepte şi secțiune constantă, pînă la cadre cu rigle curbe şi stîlpi de secțiune variabilă.

În partea a doua a articolului se dă un exemplu de calcul rezolvat pe baza formulelor generale stabilite în partea teoretică.

★

---

[1]) INCERC

[2]) IPCMC

Din numărul m de panouri identice pe care le poate avea o structură în sheduri, detașăm panoul de rangul n (fig.1).

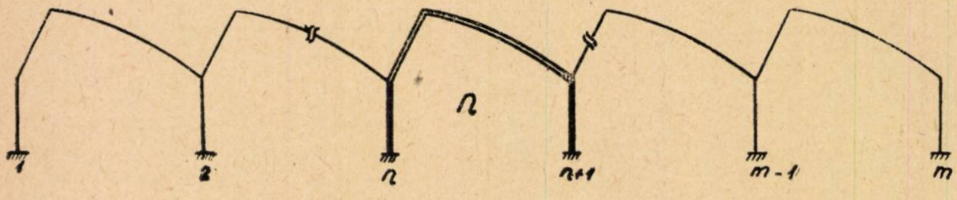


Fig. 1

Dacă pentru rezolvare aplicăm, spre exemplu, metoda forțelor, atunci matricea deplasărilor corespunzătoare panoului n, va fi de forma stabilită în tabloul 1.

În matricea C_n a deplasărilor, a și b sînt deschiderile cadrului shed, iar c și d sînt date de expresiile

$$c = h - \frac{h_i^*}{2} \tag{1.1}$$

$$d = h - \frac{\beta_1(3\beta_1\beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)\,h_s + \beta_2(\beta_2^2 h - \beta_1^2 h_i) - 2\,\beta_1\beta_2^2 h_i\, l_n \frac{\beta_2}{\beta_1}}{(\beta_2 - \beta_1)^3\,(\beta_1 h_s + \beta_2 h)}\,\beta_1 h_i \tag{1.2}$$

unde h_i^* este înălțimea redusă a stîlpilor și se calculează cu formula

$$h_i^* = \frac{2\,\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\,h_i\,. \tag{2}$$

Valoarea d poate fi calculată și cu următoarea expresie simplificată :

$$d = \frac{3h\,(h - h_i^*) + h_i^{*2}}{3c}\,. \tag{3}$$

În cazul întrebuințării formulei (3) aproximația care se face este de ordinul 1%.

Expresiile (1.1) și (1.2), în cazul stîlpilor de secțiune constantă, devin egale cu

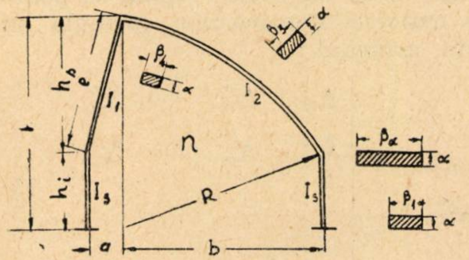
$$c = h - \frac{h_i}{2} \tag{4.1}$$

$$d = \frac{3h\,(h - h_i) + h_i^2}{3c} = \frac{3hh_s + h_i^2}{3c}\,. \tag{4.2}$$

Ecuația caracteristică asociată a matricei deplasărilor se poate găsi cu ușurință dezvoltînd după regulile determinanților modulul matricei [3].

TABLOUL Nr. 1

1 Elemente geometrice



h_e
h
h_i
I_1
I_2
I_5
I_5
n
R
β_4
α
β_α
β_1
a
b

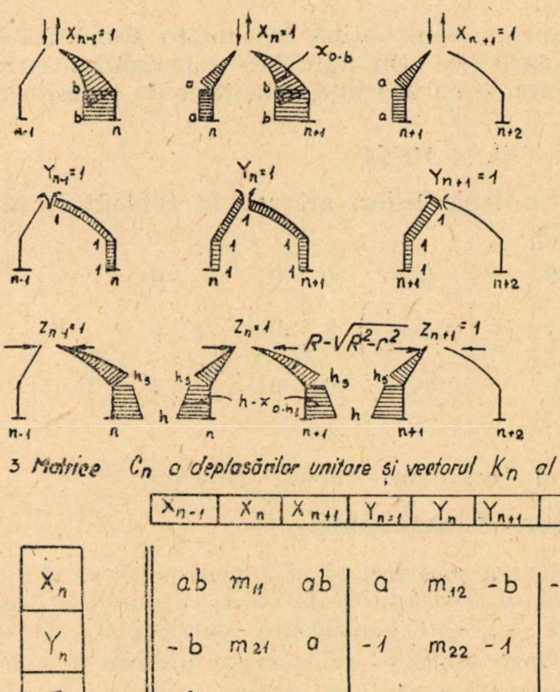
$$I_1 = \frac{\alpha \beta_4^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{\alpha \beta_3^3}{12}$$

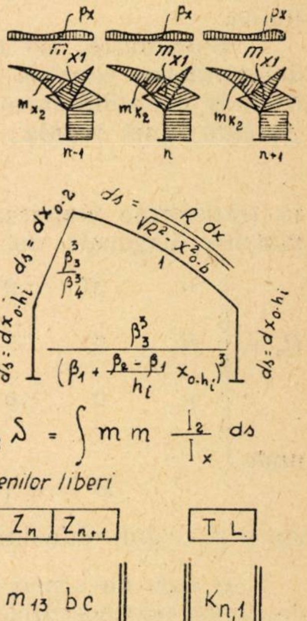
$$I_5 = \frac{\alpha \left[\beta_1 h_i + (\beta_2 - \beta_1) x_{o-h_i}\right]^3}{12 h_i^3}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_3^3}{\beta_4^3} \qquad \frac{I_2}{I_5} = \frac{\beta_3^3 h_i^3}{\left[\beta_1 h_i + (\beta_2 - \beta_1) x_{o-h_i}\right]^3}$$

2 Calculul deplasărilor



$X_{n-1} = 1$
$X_n = 1$
$X_{n+1} = 1$
x_{o-b}
a
b
$Y_{n-1} = 1$
$Y_n = 1$
$Y_{n+1} = 1$
1
$Z_{n-1} = 1$
$Z_n = 1$
$Z_{n+1} = 1$
$R - \sqrt{R^2 - r^2}$
h_5
h
$h - x_{o \cdot h_i}$
n-1
n
n+1
n+2



p_x
m_{x1}
m_{x2}
n-1
n
n+1
$ds = dx_{o-b}$
$ds = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x_{o-b}^2}}$
$\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}$
1
$ds = dx_{o \cdot h_i}$
$\frac{\beta_3^3}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i} x_{o \cdot h_i}\right)^3}$

$$EI_2\,\delta = \int m\,m\,\frac{I_2}{I_x}\,ds$$

3 Matrice C_n a deplasărilor unitare și vectorul K_n al termenilor liberi

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c}
 & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & Y_{n-1} & Y_n & Y_{n+1} & Z_{n-1} & Z_n & Z_{n+1} & T\,L \\
\hline
X_n & ab & m_{11} & ab & a & m_{12} & -b & -ac & m_{13} & bc & K_{n,1} \\
Y_n & -b & m_{21} & a & -1 & m_{22} & -1 & c & m_{23}^{*} & c & K_{n,2} \\
Z_n & cb & m_{31} & -ac & c & m_{32} & c & -dc & m_{33} & -dc & K_{n,3}
\end{array}$$

NOTĂ. Termenii matricei C_n şi ai vectorului K_n au fost simplificaţi cu valoarea $\frac{\beta_3^3\,(\beta_1+\beta_2)}{2\beta_1^2\,\beta_2^2}\,h_i$.

– Semnele deplasărilor m_{ik} sint cele rezultate din combinarea diagramelor unitare

– Semnele deplasărilor K_{ni} rezultate din combinarea diagramelor se vor schimba, întrucît termenii se consideră trecuţi în partea dreaptă.

Pentru cazurile mai complicate, cînd matricea deplasărilor este de ordinul 4, ceea ce corespunde unor cadre shed cu tiranți elastici sau de ordinul 6, ceea ce corespunde unor cadre shed cu tiranți rigizi, se poate aplica, pentru dezvoltarea modulului matricei deplasărilor, formula lui Salvadori [4] transformată după cum urmează:

$$\Delta_n = \frac{1}{\frac{1}{\gamma}\,\vartheta_{x_n x_{n-1}} + \vartheta_{x_n x_n} + \gamma\delta_{x_n x_{n+1}}} \begin{vmatrix} \Delta_{12}^{12} & \Delta_{12}^{13} \cdots\cdots & \Delta_{12}^{1n} \\ \Delta_{13}^{12} & \Delta_{13}^{13} \cdots\cdots & \Delta_{13}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1n}^{12} & \Delta_{1n}^{13} \cdots\cdots & \Delta_{1n}^{1n} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

unde indicele n arată ordinul determinantului de dezvoltat și Δ_{1i}^{1i} sînt determinanți de ordinul 2 obținuți din determinantul de ordinul n după regula dată de indici, cei superiori indicînd coloanele, iar cei inferiori liniile.

S-ar putea, de asemenea, să se obțină însemnate simplificări în determinarea ecuației caracteristice prin aplicarea calculului matricial, dacă ar fi posibil să se determine cu ușurință o matrice de transformare A, care după regula:

$$C_n' = A' C_n A$$

să transforme matricea C_n a deplasărilor, arătată în tabloul 1, într-o matrice diagonală de forma:

$$C_n' = \left\Vert \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) & 1 \end{array} \right\Vert \qquad (6)$$

unde

$$M = c\ (d - c)\ [m_{11} + (a - b)m_{12} - abm_{22}],$$

iar γ și ε sînt rădăcinile ecuației caracteristice.

O cale de urmat în găsirea matricei A și a transpusei ei A', este de a găsi necunoscutele grupate și sistemele de bază, ce pot diferi de la necunoscută la necunoscută [5], corespunzătoare matricei C_n'. În continuare, dacă notăm cu m_n' baza matricei deplasărilor unitare C_n' și cu m_n baza matricei deplasărilor unitare C_n, atunci între vectorii celor două baze există relațiile:

$$\begin{aligned} m_{n1}' &= a_{11}m_{n1} + a_{21}m_{n2} + a_{31}m_{n3}, \\ m_{n2}' &= a_{12}m_{n1} + a_{22}m_{n2} + a_{32}m_{n3}, \\ m_{n3}' &= a_{13}m_{n1} + a_{23}m_{n2} + a_{33}m_{n3}, \end{aligned} \qquad (7)$$

și avem posibilitatea să determinăm imediat matricea de transformare A, care este egală cu

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Ecuațiile caracteristice ce se obțin în cazul cadrelor shed sînt reciproce și de gradul IV

$$Mr^{n-2} + Nr^{n-1} + Pr^{n} + Nr^{n+1} + Mr^{n+2} = 0 . \tag{9}$$

Rădăcinile acestor ecuații sînt de forma

$$\gamma, \frac{1}{\gamma}, \varepsilon \text{ și } \frac{1}{\varepsilon} . \tag{10}$$

Obținînd rădăcinile ecuației caracteristice putem scrie, sub formă generală, soluțiile ecuațiilor de condiție, care sînt în același timp expresiile eforturilor din panoul n. Ele sînt de forma

$$\begin{aligned} X_n &= a_x C_1 \gamma^n + b_x C_2 \gamma^{-n} + c_x C_3 \varepsilon^n + d_x C_4 \varepsilon^{-n} + X_n , \\ Y_n &= a_y C_1 \gamma^n + b_y C_2 \gamma^{-n} + c_y C_3 \varepsilon^n + d_y C_4 \varepsilon^{-n} + Y_n , \\ Z_n &= a_z C_1 \gamma^n + b_z C_2 \gamma^{-n} + c_z C_3 \varepsilon^n + d_z C_4 \varepsilon^{-n} + Z_n . \end{aligned} \tag{11}$$

Aceste expresii conțin o serie de constante : C_1, C_2, C_3 și C_4 , ce urmează să fie determinate din condițiile ca valorile eforturilor X_n, Y_n și Z_n din expresiile (11) să verifice și panourile marginale.

Coeficienții $a_{x,y,z}$, $b_{x,y,z}$ și $c_{x,y,z}$ se determină din condițiile ca expresiile eforturilor să satisfacă identic relațiile de condiție din panoul n, oricare ar fi valorile constantelor.

Termenii $\bar{X}_n$, $\bar{Y}_n$ și $\bar{Z}_n$ sînt soluții particulare ce se determină în mod analog cu coeficienții $a_x, \ldots, c_z$.

Avem astfel la dispoziție pentru determinarea coeficienților $a_x, \ldots, c_z$ următoarele 4 sisteme de ecuații :

$$\begin{aligned} &(ab\gamma^{-1} + m_{11} + ab\gamma)\, a_x + (a\gamma^{-1} + m_{12} - b\gamma)\, a_y + (-ac\gamma^{-1} + m_{13} + bc\gamma) a_z = 0 , \\ &(-b\gamma^{-1} + m_{21} + a\gamma)\, a_x + (-\gamma^{-1} + m_{22} - \gamma)\, a_y + (c\gamma^{-1} + m_{23} + c\gamma)\, a_z = 0 , \\ &(cb\gamma^{-1} + m_{31} - ac\gamma) a_x + (c\gamma^{-1} + m_{32} + c\gamma) a_y + (-dc\gamma^{-1} + m_{33} - dc\gamma) a_z = 0 , \end{aligned} \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned} &(ab\gamma + m_{11} + ab\gamma^{-1})\, b_x + (a\gamma + m_{12} - b\gamma^{-1})\, b_y + (-ac\gamma + m_{13} + bc\gamma^{-1})\, b_z = 0 , \\ &(-b\gamma + m_{21} + a\gamma^{-1}) b_x + (-\gamma + m_{22} - \gamma^{-1})\, b_y + (c\gamma + m_{23} + c\gamma^{-1}) b_z = 0 , \\ &(cb\gamma + m_{31} - ac\gamma^{-1}) b_x + (c\gamma + m_{32} + c\gamma^{-1}) b_y + (-dc\gamma + m_{33} - dc\gamma^{-1}) b_z = 0 , \end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned} &(ab\varepsilon^{-1} + m_{11} + ab\varepsilon)\, c_x + (a\varepsilon^{-1} + m_{12} - b\varepsilon)\, c_y + (-ac\varepsilon^{-1} + m_{13} + bc\varepsilon)\, c_z = 0 , \\ &(-b\varepsilon^{-1} + m_{21} + a\varepsilon)\, c_x + (-\varepsilon^{-1} + m_{22} - \varepsilon) c_y + (c\varepsilon^{-1} + m_{23} + c\varepsilon) c_z = 0 , \\ &(cb\varepsilon^{-1} + m_{31} - ac\varepsilon)\, c_x + (c\varepsilon^{-1} + m_{32} + c\varepsilon)\, c_y + (-dc\varepsilon^{-1} + m_{33} - dc\varepsilon)\, c_z = 0 , \end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned}
&(ab\varepsilon+m_{11}+ab\varepsilon^{-1})\,d_x+(a\varepsilon+m_{12}-b\varepsilon^{-1})\,d_y+(-ac\varepsilon+m_{13}+bc\varepsilon^{-1})\,d_z=0,\\
&(-b\varepsilon+m_{21}+a\varepsilon^{-1})\,d_x+(-\varepsilon+m_{22}-\varepsilon^{-1})\,d_y+(c\varepsilon+m_{23}+c\varepsilon^{-1})d_z=0,\\
&(cb\varepsilon+m_{31}-ac\varepsilon^{-1})d_x+(c\varepsilon+m_{32}+c\varepsilon^{-1})d_y+(-dc\varepsilon+m_{33}-dc\varepsilon^{-1})\,d_z=0.
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Sistemele de ecuaţii (12) sînt omogene şi admit soluţii diferite de zero numai dacă determinantul principal este egal cu zero, ceea ce în cazul de faţă se realizează pentru toate cele patru sisteme de ecuaţii, deoarece determinanţii principali ai acestor ecuaţii provin din determinantul matricei deplasărilor, care aşa cum s-a văzut se anulează pentru valorile : γ, $\frac{1}{\gamma}$, ε şi $\frac{1}{\varepsilon}$.

Cele patru sisteme de ecuaţii (12) admit însă şi soluţii unice pentru coeficienţi, întrucît, în fiecare din cele patru sisteme de ecuaţii, unul dintre coeficienţi este egal cu 1, aceasta provenind din faptul că soluţia unuia dintre eforturi este dată de ecuaţia caracteristică. Această soluţie este de forma

$$W_n = C_1\,\gamma^n + C_2\,\gamma^{-n} + C_3\varepsilon^n + C_4\varepsilon^{-n} + \overline{W}_n, \tag{13}$$

de unde se vede că coeficienţii a_w, b_w, c_w şi d_w sînt toţi egali cu 1.

Avem libertatea să considerăm egală cu 1 oricare din cele patru serii de coeficienţi, acest lucru ducînd numai la o modificare corespunzătoare a valorilor constantelor, astfel încît, în cele din urmă, oricare ar fi calea aleasă, expresiile eforturilor rămîn aceleaşi.

Dacă considerăm coeficienţii $a_z=1$, $b_z=1$ şi $c_z=1$, atunci ceilalţi coeficienţi au expresiile

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{s_2\gamma^{-1}+t_2+s_3\gamma}{s_1\gamma^{-1}+t_1+s_1\gamma}, & a_y &= \frac{s_4\gamma^{-1}+t_3+s_5\gamma}{s_1\gamma^{-1}+t_1+s_1\gamma},\\
b_x &= \frac{s_2\gamma+t_2+s_3\gamma^{-1}}{s_1\gamma+t_1+s_1\gamma^{-1}}, & b_y &= \frac{s_4\gamma+t_3+s_5\gamma^{-1}}{s_1\gamma+t_1+s_1\gamma^{-1}},\\
c_x &= \frac{s_2\varepsilon^{-1}+t_2+s_3\varepsilon}{s_1\varepsilon^{-1}+t_1+s_1\varepsilon}, & c_y &= \frac{s_4\varepsilon^{-1}+t_3+s_5\varepsilon}{s_1\varepsilon^{-1}+t_1+s_1\varepsilon},\\
d_x &= \frac{s_2\,\varepsilon+t_2+s_3\,\varepsilon^{-1}}{s_1\,\varepsilon+t_1+s_1\,\varepsilon^{-1}}, & d_y &= \frac{s_4\,\varepsilon+t_3+s_5\,\varepsilon^{-1}}{s_1\,\varepsilon+t_1+s_1\,\varepsilon^{-1}},
\end{aligned} \tag{14}$$

în care

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\,m_{11}-(a-b)\,m_{12}+abm_{22},\\
t_1 &= -\,(a+b)^2-m_{12}^2+m_{11}\,m_{22},\\
s_2 &= a\,(cm_{22}+m_{23})+cm_{12}+m_{13},\\
t_2 &= m_{12}\,m_{23}-m_{13}\,m_{22},\\
s_3 &= -\,b\,(cm_{22}+m_{23})+cm_{12}+m_{13},\\
s_4 &= -\,a\,(bm_{23}+cm_{12})-bm_{13}-cm_{11},\\
t_3 &= -\,c\,(a+b)^2+m_{12}\,m_{13}-m_{11}\,m_{23},\\
s_5 &= -\,b\,(am_{23}-cm_{12})+am_{13}-cm_{11}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Soluțiile particulare $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ și $\overline{Z}_n$ rezultă din sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}(2ab + m_{11})\overline{X}_n + (a-b+m_{12})\overline{Y}_n + (bc-ac+m_{13})\overline{Z}_n &= K_{n.1},\\ (a-b+m_{21})\overline{X}_n + (-2+m_{22})\overline{Y}_n + (2c + m_{23})\overline{Z}_n &= K_{n.2},\\ (bc-ac+m_{31})\overline{X}_n + (2c + m_{32})\overline{Y}_n + (2cd + m_{33})\overline{Z}_n &= K_{n.3}.\end{aligned} \tag{16}$$

Pentru determinarea constantelor avem la dispoziție relațiile de condiție corespunzătoare panourilor 1 și m:

$$\begin{aligned}m_{11}X_1 + abX_2 + m_{12}Y_1 - bY_2 + m_{13}Z_1 + bcZ_2 &= K_{1.1},\\ m_{21}X_1 + aX_2 + m_{22}Y_1 - Y_2 + m_{23}Z_1 + cZ_2 &= K_{1.2},\\ m_{31}X_1 - acX_2 + m_{32}Y_1 + cY_2 + m_{33}Z_1 - dcZ_2 &= K_{1.3},\end{aligned} \tag{17.1}$$

$$\begin{aligned}abX_{m-2} + m_{11}X_{m-1} + aY_{m-2} + m_{12}Y_{m-1} - acZ_{m-2} + m_{13}Z_{m-1} &= K_{m-1.1},\\ -bX_{m-2} + m_{21}X_{m-1} - Y_{m-2} + m_{22}Y_{m-1} + cZ_{m-2} + m_{23}Z_{m-1} &= K_{m-1.2},\\ cbX_{m-2} + m_{31}X_{m-1} + cY_{m-2} + m_{32}Y_{m-1} - dcZ_{m-2} + m_{33}Z_{m-1} &= K_{m-1.3}.\end{aligned} \tag{17.2}$$

Din condiția ca soluțiile generale ale eforturilor (11) să satisfacă ecuațiile (17), se determină valorile celor patru constante.

În locul ecuațiilor (17), așa cum se arată în [1] se pot folosi ecuațiile mai simple

$$\begin{aligned}abX_0 + aY_0 - acZ_0 &= K_{0.1},\\ -bX_0 - Y_0 + cZ_0 &= K_{0.2},\\ cbX_0 + cY_0 - dcZ_0 &= K_{0.3},\end{aligned} \tag{18.1}$$

$$\begin{aligned}abX_m - bY_m + bcZ_m &= K_{m.1},\\ aX_m - Y_m + cZ_m &= K_{m.2},\\ -acX_m + cY_m - dcZ_m &= K_{m.3},\end{aligned} \tag{18.2}$$

rezultate din combinația ecuațiilor de margine (17) cu relațiile scrise în panoul n, pentru cazul particular $n = 1$, respectiv $n = m$. Matematic această combinație este permisă, întrucît se combină ecuații (ecuațiile de margine) cu identități (egalitățile deduse prin particularizare din relațiile de condiție scrise în panoul n, care sînt verificate identic de soluțiile (11) indiferent de valorile constantelor).

Se poate arăta cu ușurință că pentru orice tip de încărcare exterioară avem

$$\begin{aligned}K_{0.1} &= -aK_{0.2} \quad \text{și}\\ K_{m.1} &= bK_{m.2}\end{aligned} \tag{19}$$

şi atunci rămîn distincte următoarele patru ecuaţii

$$
\begin{aligned}
bX_0 + Y_0 - cZ_0 &= -K_{0.2},\\
bX_0 + Y_0 - dZ_0 &= \frac{1}{c} K_{0.3},\\
aX_m - Y_m + cZ_m &= K_{m.2},\\
aX_m - Y_m + dZ_m &= -\frac{1}{c} K_{m.3},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

care corespund numărului de constante ce urmează să fie determinate.

Într-adevăr, aşa cum rezultă din modul de formare al ecuaţiilor (18), va trebui să avem

$$
\begin{aligned}
K_{0.1} &= K_{n.1} - K_{1.1}\\
K_{0.2} &= K_{n.2} - K_{1.2}\\
K_{m.1} &= K_{n.1} - K_{m-1.1}\\
K_{m.2} &= K_{n.2} - K_{m-1.2}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Expresiile (21) ne arată însă că este mai simplu să calculăm deplasările $K_{0.i}$ şi $K_{m.i}$ folosind diagramele totale ale momentelor date de sarcinile exterioare. Astfel diagrama totală pentru calculul deplasărilor de tipul $K_{0.i}$, se obţine făcîndu-se diferenţa dintre ordonatele diagramei panoului n şi cele ale diagramei panoului 1 ; în mod analog din diagramele panoului n şi panoului $m-1$ se obţine diagrama totală pentru calculul deplasărilor de tipul $K_{m.i}$.

Se vede uşor că oricare ar fi tipul de încărcare, cele două diagrame totale au aspectul arătat în figura 2.

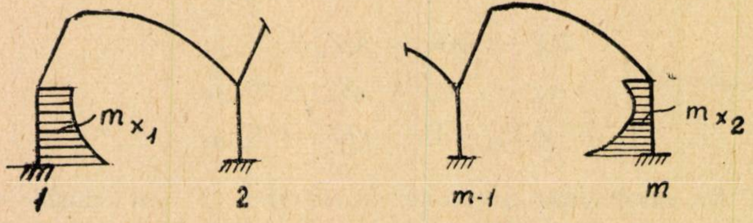


Fig. 2

Ca urmare, combinînd diagramele totale cu diagramele unitare corespunzătoare date în tabloul 1 vom avea

$$
\begin{aligned}
K_{0.1} &= -a\int_0^{h_i} m_{x_1}\frac{I_2}{I_s}\,dx = -a K_{0.2},\\
K_{0.2} &= \int_0^{h_i} m_{x_1}\frac{I_2}{I_s}\,dx,
\end{aligned}
$$

$$K_{m.1} = b \int_0^{h_i} m_{x_2} \frac{I_2}{I_s}\, dx = b\, K_{n.2},$$

$$K_{m.2} = \int_0^{h_i} m_{x_2} \frac{I_2}{I_s}\, dx,$$

verificîndu-se astfel relațiile (19).

Înlocuind în ecuațiile (20) valorile lui X_0, X_m, Y_0, Y_m, Z_0 și Z_m, deduse din soluțiile generale (11) prin particularizările $n = 0$ și $n = m$, obținem

$$\begin{aligned}(ba_x + a_y - c)\, C_1 + (bb_x + b_y - c)\, C_2 + (bc_x + c_y - c)\, C_3 + \\ + (bd_x + d_y - c)\, C_4 = A_\delta\end{aligned} \tag{22.1}$$

$$\begin{aligned}(bb_x + a_y - d)\, C_1 + (bb_x + b_y - d)\, C_2 + (bc_x + c_y - d)\, C_3 + \\ + (bd_x + d_y - d)\, C_4 = \mathrm{B}_\delta\end{aligned} \tag{22.2}$$

$$\begin{aligned}(aa_x - a_y + c)\, C_1 \gamma^m + (ab_x - b_y + c)\, C_2 \gamma^{-m} + (ac_x - c_y + c)\, C_3 \varepsilon^m + \\ + (ad_x - d_y + c)\, C_4 \varepsilon^{-m} = A_m,\end{aligned} \tag{22.3}$$

$$\begin{aligned}(aa_x - a_y + d)\, C_1 \gamma^m + (ab_x - b_y + d)\, C_2 \gamma^{-m} + (ac_x - c_y + d)\, C_3 \varepsilon^m + \\ + (ad_x - d_y + d)\, C_4 \varepsilon^{-m} = B_m,\end{aligned} \tag{22.4}$$

unde

$$\begin{aligned} A_0 &= - \quad K_{0.2} - b\bar{X}_n - \bar{Y}_n + c\bar{Z}_n, \\ B_0 &= \frac{1}{c} \quad K_{0.3} - b\bar{X}_n - \bar{Y}_n + d\bar{Z}_n, \\ A_m &= \quad K_{m.2} - a\bar{X}_n + \bar{Y}_n - c\bar{Z}_n, \\ B_m &= -\frac{1}{c} K_{m.3} - a\bar{X}_n + \bar{Y}_n - d\bar{Z}_n. \end{aligned}$$

Determinarea constantelor în cazul unui număr de panouri suficient de mare se simplifică, deoarece din ecuațiile (22.2) se pot neglija termenii multiplicați cu γ^{-m} și cu ε^{-m}, care sînt mici în raport cu ceilalți, obținîndu-se

$$C_1 = \frac{(ac_x - c_y + d)\, A_m - (ac_x - c_y + c)\, B_m}{(aa_x - a_y + c)(ac_x - c_y + d) - (ac_x - c_y + c)(aa_x - a_y + d)}\, \gamma^{-m}, \tag{23.1}$$

$$C_3 = \frac{(aa_x - a_y + c)\, B_m - (aa_x - a_y + d)\, A_m}{(aa_x - a_y + c)(ac_x - c_y + d) - (ac_x - c_y + c)(aa_x - a_y + d)}\, \varepsilon^{-m}. \tag{23.2}$$

Din sistemul de ecuații (22.1) se obțin celelalte două constante

$$C_2 = \frac{(bd_x+d_y-d)\,A_0-(bd_x+d_y-c)\,B_0}{(bb_x+b_y-c)\,(bd_x+d_y-d)-(bd_x+d_y-c)\,(bb_x+b_y-d)}, \tag{23.3}$$

$$C_4 = \frac{(bb_x+b_y-c)\,B_0-(bb_x+b_y-d)\,A_0}{(bb_x+b_y-c)\,(bd_x+d_y-d)-(bd_x+d_y-c)\,(bb_x+b_y-d)}. \tag{23.4}$$

În cazul cînd m_{x_1} și m_{x_2} au valorile constante m_1, respectiv m_2, determinarea constantelor se simplifică foarte mult, pentru că în acest caz se poate demonstra că avem

$$K_{0,\,3} = -\,cK_{0,\,2} \quad \text{și} \quad K_{m,\,3} = -\,cK_{m,\,2}. \tag{24}$$

Într-adevăr

$$K_{0,\,3} = -\int_0^{hi} m_1\,(h-x)\,\frac{I_2}{I_s}\,dx\,; \quad K_{0,\,2} = \int_0^{hi} m_1\,\frac{I_2}{I_s}\,dx,$$

$$K_{m,\,3} = -\int_0^{hi} m_2\,(h-x)\,\frac{I_2}{I_s}\,dx\,; \quad K_{m,\,2} = \int_0^{hi} m_2\,\frac{I_2}{I_s}\,dx.$$

În continuare se constată că

$$-\frac{K_{0,\,3}}{K_{0,\,2}} = -\frac{K_{m,\,3}}{K_{m,\,2}} = h - \frac{\displaystyle\int_0^{hi} x\,\frac{I_2}{I_s}\,dx}{\displaystyle\int_0^{hi}\frac{I_2}{I_s}\,dx}. \tag{25}$$

Cele două integrale au valorile

$$\int_0^{hi} x\,\frac{I_2}{I_s}\,dx = \int_0^{hi}\frac{\beta_3^3\,x\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\right)^3} = \frac{\beta_3^3}{2\,\beta_1\beta_2^2}\,h_i^2$$

$$\int_0^{hi}\frac{I_2}{I_s}\,dx = \int_0^{hi}\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\right)^3} = \frac{\beta_3^3\,(\beta_1+\beta_2)}{2\beta_1^2\,\beta_2^2}\,h_i$$

și ca urmare rapoartele (25) devin egale cu

$$-\frac{K_{0,\,3}}{K_{0,\,2}} = -\frac{K_{m,\,3}}{K_{m,\,2}} = h - \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\,h_i = c,$$

demonstrîndu-se astfel formulele (24).

Ținînd seama de relațiile (24) și de faptul că $K_{0,\,2} = m_1$ și $K_{m,\,2} = m_2$, relațiile (20) devin egale cu

$$bX_0 + Y_0 - cZ_0 = -m_1, \tag{26.1}$$

$$bX_0 + Y_0 - dZ_0 = -m_1, \tag{26.2}$$

$$aX_m - Y_m + cZ_m = +m_2, \tag{26.3}$$

$$aX_m - Y_m + dZ_m = +m_2. \tag{26.4}$$

Relațiile (26) pot fi însă posibile numai dacă

$$bX_0 + Y_0 = -m_1, \tag{27.1}$$

$$Z_0 = 0 \quad \text{și} \tag{27.2}$$

$$aX_m + Y_m = m_2, \tag{27.3}$$

$$Z_m = 0. \tag{27.4}$$

Relațiile (27) constituie condiții marginale noi mai simple decît relațiile (20) și ele sînt valabile numai dacă m_{x_1} și m_{x_2} sînt constante.

Folosind formulele (27), expresiile de calcul ale constantelor devin egale cu

$$C_1 = \frac{1}{\Delta_{13}}\left[-a\bar{X}_n + \bar{Y}_n + (ac_x - c_y)\bar{Z}_n + m_2\right]\gamma^{-m}, \tag{28.1}$$

$$C_3 = \frac{1}{\Delta_{13}}\left[-a\bar{X}_n - \bar{Y}_n - (aa_x - a_y)\bar{Z}_n - m_2\right]\varepsilon^{-m}, \tag{28.2}$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta_{24}}\left[-b\bar{X}_n - \bar{Y}_n + (bd_x \pm d_y)\bar{Z}_n - m_1\right], \tag{28.3}$$

$$C_4 = \frac{1}{\Delta_{24}}\left[\quad b\bar{X}_n + \bar{Y}_n - (bb_x + b_y)\bar{Z}_n + m_1\right], \tag{28.4}$$

în care

$$\Delta_{13} = a(a_x - c_x) - a_y + c_y,$$

$$\Delta_{24} = b(b_x - d_x) + b_y - d_y.$$

În concluzie, în calculul static al cadrelor monotone multiple de tip shed prin metoda ecuațiilor cu diferențe finite distingem următoarele etape

— determinarea deplasărilor de tipul m_{ik}

— determinarea termenilor liberi (K_{ni})

— determinarea deplasării $\delta_{Y_n Y_{n-1}}$, a coeficienților c și d și a matricei deplasărilor,

— determinarea ecuației caracteristice și rezolvarea ei,

— determinarea coeficienților $a_{x,\,y}$, $b_{x,\,y}$, $x_{x,\,y}$ și $d_{x,\,y}$,

— determinarea soluţiilor particulare,

— determinarea termenilor liberi ai ecuaţiilor marginale,

— determinarea constantelor,

— determinarea expresiilor de calcul ale eforturilor şi trasarea diagramelor.

După cum se vede calculul static este simplu de condus şi permite soluţionarea cu uşurinţă chiar a cazurilor celor mai complicate, cum ar fi spre exemplu cel al cadrelor cu stîlpi de secţiune variabilă şi riglă curbă, care constituie cazul cel mai general posibil şi din care prin particularizare se poate obţine orice tip de cadru shed.

În cadrul schimbării sarcinilor exterioare trebuie să fie recalculate

— valorile termenilor liberi (K_{ni}),

— soluţiile particulare $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ şi $\overline{Z}_n$,

— valorile termenilor liberi ai ecuaţiilor marginale,

— valorile constantelor.

Soluţiile particulare $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ şi $\overline{Z}_n$ pot fi cu uşurinţă recalculate dacă expresiile care dau aceste soluţii se pun sub forma

$$\overline{X}_n = n_{11} K_{n.1} + n_{12} K_{n.2} + n_{13} K_{n.3}, \tag{29.1}$$

$$\overline{Y}_n = n_{21} K_{n.1} + n_{22} K_{n.2} + n_{23} K_{n.3}, \tag{29.2}$$

$$\overline{Z}_n = n_{31} K_{n.1} + n_{32} K_{n.2} + n_{33} K_{n.3}, \tag{29.3}$$

în care coeficienţii n_{ik} sînt funcţii de elementele geometrice ale cadrului şi nu se modifică oricare ar fi sarcinile exterioare ce acţionează asupra cadrului.

Expresiile (23) care dau constantele pot fi puse sub forma

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= (u_{c_1} A_m + v_{c_1} B_m)\,\gamma^{-m}, \\ C_3 &= (u_{c_3} A_m + v_{c_3} B_m)\,\varepsilon^{-m}, \\ C_2 &= u_{c_2} A_0 + v_{c_2} B_0, \\ C_4 &= u_{c_4} A_0 + v_{c_4} B_0, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

iar expresiile (28) sub forma

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= q_1 \overline{X}_n + q_2 (m_2 + \overline{Y}_n) + (q_3 + 1) \overline{Z}_n, \\ C_3 &= q_1 \overline{X}_n - q_2 (m_2 + \overline{Y}_n) - q_3 \overline{Z}_n, \\ C_2 &= q_4 \overline{X}_n + q_5 (m_1 + \overline{Y}_n) + (q_6 + 1) \overline{Z}_n, \\ C_4 &= - q_4 \overline{X}_n - q_5 (m_1 + \overline{Y}_n) - q_6 \overline{Z}_n, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

şi avem astfel posibilitatea să recalculăm cu uşurinţă valorile constantelor în cazul schimbării sarcinilor.

II

Pentru exemplificare se vor determina eforturile într-un cadru shed cu stîlpi de secțiune variabilă și cu rigle curbe, folosindu-se formulele și sistematizările stabilite în partea întîia a articolului.

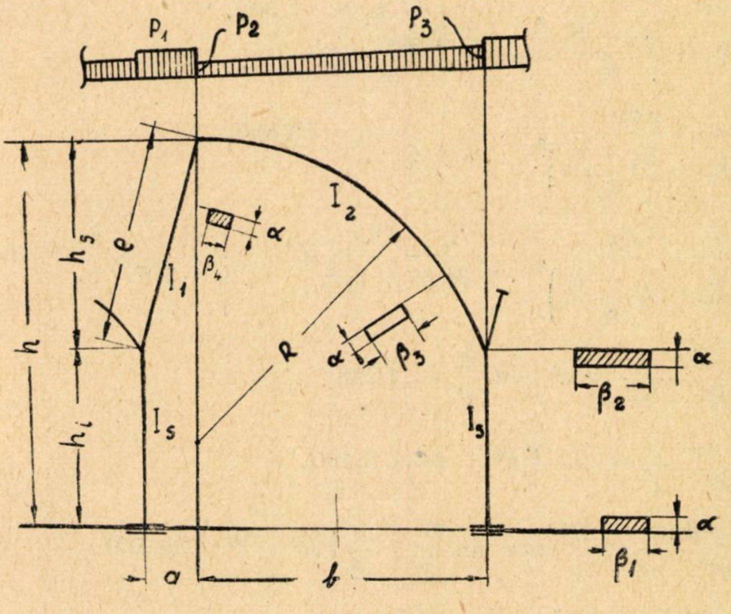


Fig. 3

Sarcina exterioară se va considera așa cum se arată în figura 3 constantă pe deschiderea riglei drepte și avînd o variație liniară pe deschiderea riglei curbe.

1. ELEMENTE INIȚIALE

Elementele geometrice ale cadrului shed și intensitățile sarcinilor exterioare sînt :

$a = 1{,}35$ m $\quad \alpha = 0{,}40$ m

$b = 7{,}65$ m $\quad \beta_1 = 0{,}60$ m $\quad p_1 = 1000$ kg/m

$e = 5{,}663$ m $\quad \beta_2 = 1{,}305$ m $\quad p_2 = 600$ kg/m

$h_s = 5{,}50$ m $\quad \beta_3 = 0{,}60$ m $\quad p_3 = 900$ kg/m

$h_i = 4{,}70$ m $\quad \beta_4 = 0{,}25$ m $\quad m = 15$

$h = 10{,}20$ m $\quad R = 8{,}07$ m

2. NOTAŢII

Pentru sistematizarea calculului deplasărilor este indicat să admitem notaţiile

$$I_1 = \int_0^{hi} \frac{dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\right)^3} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\,\beta_1^2\beta_2^2} h_i = 7{,}302,$$

$$I_2 = \int_0^{hi} \frac{x\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\right)^3} = \frac{1}{2\,\beta_1\beta_2^2} h_i^2 = 10{,}809,$$

$$I_3 = \int_0^{hi} \frac{x^2\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\right)^3} = \frac{\beta_1 - 3\beta_2}{2\,\beta_2^2(\beta_2 - \beta_1)^2} h_i^3 + \frac{h_i^3}{(\beta_2 - \beta_1)^3} l_n \frac{\beta_2}{\beta_1} = 26{,}926,$$

$$I_4 = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{b}{R} = 1{,}246,$$

$$I_5 = \int_0^b \frac{xdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R - \sqrt{R^2 - b^2} = 5{,}500,$$

$$I_6 = \int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{b}{R} - \frac{b}{2}\sqrt{R^2 - b^2} = 30{,}769,$$

$$I_7 = \int_0^b \frac{x^3dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^3}{3} - \frac{b^2 + 2R^2}{3}\sqrt{R^2 - b^2} = 188{,}688,$$

$$I_8 = \int_0^b \frac{x^4\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -(2b^2 + 3R^2)\frac{b\sqrt{R^2 - b^2}}{8} + \frac{3R^4}{8}\,\text{arc sin}\,\frac{b}{R} = 1215{,}260.$$

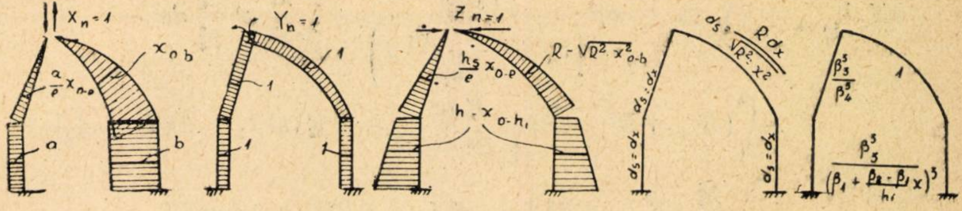
3. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR DE TIPUL m_{ik}

Folosind diagramele din figura 4, precum şi valorile integralelor calculate la punctul 2 se pot determina cu uşurinţă deplasările

$$EI_2\,\delta_{x_n\,x_n} = \int_0^{h_i} a^2 \frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}x\right)^3} + \int_0^{h_i} b^2 \frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}x\right)^3} +$$

$$+ \int_0^e \frac{a^2}{e^2} x^2 \frac{\beta_3^3}{\beta_4^3} dx + \int_0^b x^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = (a^2 + b^2)\,\beta_3^3\,I_1 +$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3} e\,a^2 + RI_6 = 391{,}04,$$



$X_n=1$
x_{0b}
$\frac{a}{e}x_{0-e}$
a
b
$Y_n=1$
1
1
1
1
$Z_{n=1}$
$\frac{h_s}{e}x_{0-e}$
$R-\sqrt{R^2-x^2_{0-b}}$
$h-x_{0-h_1}$
$ds=\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$
$ds=dx$
$ds=dx$
$ds=dx$
$\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}$
1
$\frac{\beta_3^3}{(\beta_1+\frac{\beta_2-\beta_1}{h_i}x)^3}$

Fig. 4

$$EI_2\,\delta_{x_n\,y_n} = -\int_0^{h_i} a\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}x\right)^3} + \int_0^{h_i} b\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\,x\right)} -$$

$$-\int_0^{e}\frac{a}{e}\,x\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx + \int\frac{xR}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = (b-a)\,\beta_3^3 I_1 -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,e\,a + R\,I_5 = 1{,}48,$$

$$EI_2\,\delta_{x_n\,z_n} = \int_0^{h_i} a\,(h_i-x)\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}x\right)^3} - \int_0^{h_i} b(h_i-x)\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\,x\right)^3} +$$

$$+\int_0^{e}\frac{a}{e}\,\frac{h_s}{e}\,x^2\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx - \int_0^{b} x\,(R-\sqrt{R^2-x^2})\,\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \beta_3^3(a-b)\,(h\,I_1-I_2) + \frac{1}{3}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,e\,ah_s - R^2\,I_5 + \frac{Rb^2}{2} = -14{,}97,$$

$$EI_2\,\delta_{y_n\,y_n} = 2\int_0^{h_i}\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\,x\right)} + \int_0^{e}\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx + \int\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= 2\,\beta_3^3 I_1 + \frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,e + RI_4 = 91{,}50,$$

$$EI_2\,\delta_{y_n\,z_n} = -\,2\int_0^{h_i}(h_i-x)\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}\,x\right)^3} - \int_0^{e}\frac{h_s}{e}\,x\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx -$$

$$-\int_0^{b}\frac{(R-\sqrt{R^2-x^2})\,R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\,2\,\beta_3^3\,(hI_1-I_2) - \frac{1}{2}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,eh_s -$$

$$-\,R^2 I_4 + R\,b = -\,262{,}25$$

$$EI_2\,\delta_{z_n\,z_n} = 2\int_0^{h_i}(h_i - x)^2\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\,x\right)^3} + \int_0^e \frac{h_s^2}{e^2}\,x^2\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx +$$

$$+ \int_0^b (R - \sqrt{R^2 - x^2)}\,\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\,\beta_3^3\,(h^2 I_1 - 2h\,I_2 + I_3) +$$

$$+ \frac{1}{3}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,e\,h_s^2 + 2\,R^3 I_4 - R\,I_6 - 2R^2 b = 1099{,}69.$$

4. DETERMINAREA TERMENILOR LIBERI

Admițînd pe rigla dreaptă o sarcină constantă de intensitate p_1 și pe rigla curbă o sarcină de intensitate exprimată prin legea

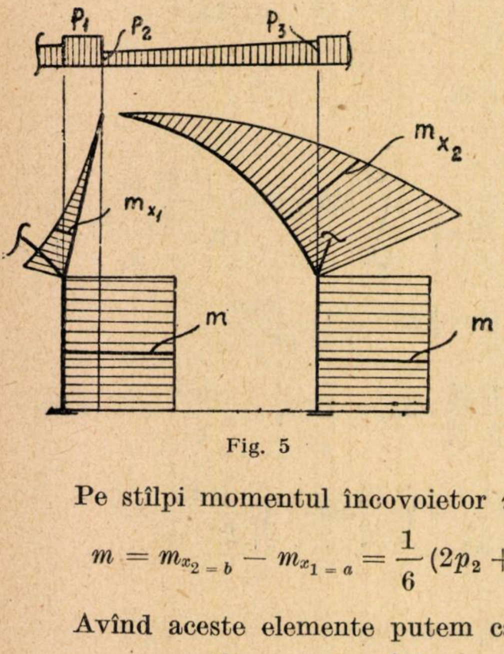


Fig. 5

$$p_x = p_2 + \frac{p_3 - p_2}{b}\,x_{0-b}\,,$$

vom avea pentru momentele încovoietoare (fig. 5) următoarele expresii :

$$m_{x_1} = \frac{1}{2}\,p_1\,x_{0-a}^2 = \frac{a^2}{2e^2}\,p_1\,x_{0-e}^2,$$

$$m_{x_2} = \frac{1}{2}\,p_x\,x_{0-b}^2 = \frac{1}{2}\,p_3\,x_{0-b}^2 +$$

$$+ \frac{p_2 - p_3}{3_b}\,x_{0-b}^3\,.$$

Pe stîlpi momentul încovoietor m va rezulta din diferența

$$m = m_{x_{2\,=\,b}} - m_{x_{1\,=\,a}} = \frac{1}{6}\,(2p_2 + p_3) - \frac{1}{2}\,p_1\,a^2 = 19{,}572 \text{ tm}.$$

Avînd aceste elemente putem calcula termenii liberi

$$EI_2\,\Delta_x^n = -\int_0^{h_i} am\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\,x\right)^3} - \int_0^{h_i} bm\,\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i}\,x\right)^3} +$$

$$+ \int_0^e \frac{a}{e}\,x\,\frac{a^2}{2e^2}\,p_1 x^2\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx - \int_b^b\left(\frac{1}{2}\,p_2 x^2 + \frac{p_3 - p_2}{2b}\,x^3\right)\frac{xR\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= -\,m\,\beta_3^3(a + b)\,I_1 - \frac{R}{2b}\,(p_3 - p_2)\,I_8 - \frac{R}{2}\,p_2 I_7 + \frac{1}{8}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,p_1\,a^3 e =$$

$$= -\,810{,}772,$$

$$EI_2\,\Delta_y^n = -\int_0^e \frac{a^2}{2e^2}\,p_1\,x^2\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx - \int_0^b \left(\frac{1}{2}\,p_2\,x^2 + \frac{p_3 - p_2}{2b}\,x^3\right)\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,p_1 a^2 e - \frac{R}{2}\,p_2\,I_6 - \frac{R}{2b}(p_3 - p_2)\,I_7 = -109{,}719,$$

$$EI_2\,\Delta_z^n = \int_0^e \frac{a^2}{2e^2}\,p_1\,x^2\,\frac{h_s}{e}\,x\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,dx +$$

$$+ \int_0^b \left(\frac{1}{2}\,p_2\,x^2 + \frac{p_3 - p_2}{2b}\,x^3\right)(R - \sqrt{R^2 - x^2})\,\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{\beta_3^3}{\beta_4^3}\,p_1\,a^2\,e\,h_s + \frac{R^2}{2}\,p_2\,I_6 + \frac{R^2}{2b}(p_3 - p_2)\,I_7 -$$

$$- \frac{Rb^3}{24}\,(3p_3 + p_2) = 387{,}567.$$

5. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR Y_n Y_{n-1} ŞI A COEFICIENŢILOR c ŞI d

$$\partial_{y_n\,y_{n-1}} = \frac{\beta_3^3(\beta_1 + \beta_2)\,h_i}{2\beta_1^2\,\beta_2^2} = 1{,}577,$$

$$h_i^* = \frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\,h_i = 2{,}960,$$

$$c = h - \frac{1}{2}\,h_i^* = 8{,}720,$$

$$d = h -$$

$$- \frac{\beta_1(3\beta_1\,\beta_2 - 3\beta_2^2 - \beta_1^2)\,h_s + \beta_2(\beta_2^2\,h - \beta_1^2\,h_i) - 2\beta_1\,\beta_2^2\,h_i\,l_n\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}{(\beta_2 - \beta_1)^3\,(\beta_1\,h_s + \beta_2\,h)}\,\beta_1\,h_i = 8{,}891.$$

Cu aceste valori se pot calcula toate deplasările arătate în tabela 1.

Tabela 1

	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	Y_{n-1}	Y_n	Y_{n+1}	Z_{n-1}	Z_n	Z_{n+1}	T.L.
X_n	+10,33	+247,93	+10,33	+1,35	+ 0,94	−7,65	−11,77	− 9,49	+66,71	+514,05
Y_n	− 7,65	+ 0,94	+ 1,35	−1,00	+ 58,01	−1,00	+ 8,72	−166,27	+ 8,72	+ 69,57
Z_n	+66,71	− 9,49	−11,77	+8,72	−166,27	+8,72	−77,52	+697,23	−77,52	−245,73

6. ECUAȚIA CARACTERISTICĂ

Notînd :

$$\Delta_{12}^{23} = (1{,}35\ r^{-1} + 0{,}94 - 7{,}65\ r)(8{,}72\, r^{-1} - 166{,}27 + 8{,}72\ r)$$

$$\Delta_{12}^{33} = (1{,}35\, r^{-1} + 0{,}94 - 7{,}65\, r)(-77{,}52\ r^{-1} + 697{,}23 - 77{,}52\, r)$$

$$\Delta_{22}^{33} = (-r^{-1} + 50{,}01 - r)(-77{,}52\, r^{-1} + 697{,}23 - 77{,}52\, r),$$

ecuația caracteristică se poate scrie :

$$(10{,}33\ r^{-1} + 247{,}93 + 10{,}33\, r)\ \Delta_{22}^{33} - (7{,}65\ r^{-1} + 0{,}94 + 1{,}35)\,\Delta_{13}^{33} + \\ + (66{,}71\, r^{-1} - 9{,}49 - 11{,}77\, r)\ \Delta_{12}^{23} = 0.$$

Dezvoltînd și făcînd toate reducerile obținem ecuația caracteristică

$$r^2 + 787{,}829\, r^{-1} - 5599{,}48 + 787{,}829\, r + r^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$\gamma = 6{,}901, \qquad \varepsilon = -794{,}875,$$

$$\frac{1}{\gamma} = 0{,}145 \qquad \frac{1}{\varepsilon} = -0{,}00126.$$

7. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR $a_{x,y}$, $b_{x,y}$, $c_{x,y}$ ȘI $d_{x,y}$

Calculăm mai întîi valorile intermediare

$s_1 = 357{,}090$, $s_5 = -394{,}903$,
$s_2 = 457{,}136$, $t_1 = 14\,300{,}535$,
$s_3 = -2599{,}097$, $t_2 = 394{,}221$,
$s_4 = -2110{,}744$, $t_3 = 40\,508{,}080$,

și apoi obținem

$a_x = -1{,}039$, $c_x = -7{,}663$,
$a_y = +2{,}243$, $c_y = -1{,}312$,
$b_x = +0{,}189$, $d_x = +1{,}344$,
$b_y = +2{,}248$ $d_y = -1{,}264$.

8. DETERMINAREA SOLUȚIILOR PARTICULARE

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în sistemul de ecuații (16) obținem

$$268{,}59\,\overline{X}_n - 5{,}36\,\overline{Y}_n + 45{,}45\,\overline{Z}_n = 514{,}05\ (K_{n.1}),$$

$$-5{,}36\,\overline{X}_n + 56{,}01\,\overline{Y}_n - 148{,}83\,\overline{Z}_n = 69{,}56\ (K_{n.2}),$$

$$45{,}45\,\overline{X}_n - 148{,}83\,\overline{Y}_n - 542{,}19\,\overline{Z}_n = -245{,}73\ (K_{n.3}).$$

Rezolvînd şi punînd în evidenţă coeficienţii u_{ik}, obţinem pentru soluţiile particulare, valorile

$$\overline{X}_n = (3{,}825\, K_{n,1} - 1{,}796\, K_{n,2} - 0{,}814\, K_{n,3})\, 10^{-3} = 2{,}041,$$
$$\overline{Y}_n = (-\,1{,}796\, k_{n,1} + 66{,}821\, K_{n,2} + 18{,}493\, K_{n,3})\, 10^{-3} = -\,0{,}819,$$
$$\overline{Z}_n = (-0{,}814\, k_{n,1} + 18{,}493\, K_{n,2} + 6{,}989\, K_{n,3})\, 10^{-3} = -\,0{,}849.$$

9. CALCULUL TERMENILOR LIBERI AI ECUAŢIILOR MARGINALE

Diagramele totale sînt cele arătate în figura 6.

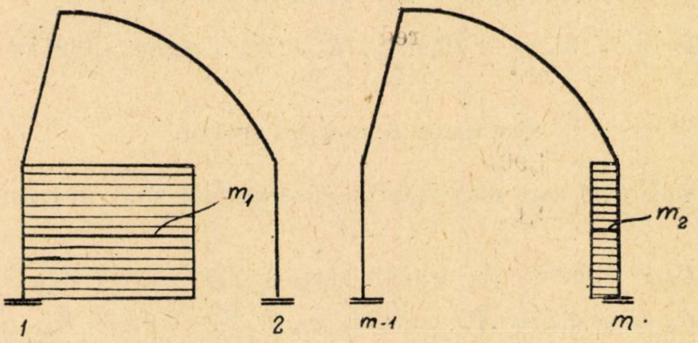


Fig. 6

Folosind diagramele din figura 5 şi diagramele totale din figura 6 obţinem termenii liberi ai ecuaţiilor marginale

$$EI_2\,\Delta_x^0 = -\int_0^{h_i} a m_1 \frac{\beta_3^3\, dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i} x\right)^3} = -\, a m_1\, \beta_3^3\, I_1$$

$$EI_2\,\Delta_y^0 = \int_0^{h_i} m_1 \frac{\beta_3^3\, dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i} x\right)^3} = m_1\, \beta_3^3\, I_1 = 1{,}437$$

$$EI_2\,\Delta_z^0 = -\int_0^{h_i} m_1 (h - x) \frac{\beta_3^3\, dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i} x\right)^3} = m_1\, \beta_3^3\, (hI_1 - I_2) = -\,1{,}437\, c =$$
$$= -\,12{,}529$$

$$EI_2\,\Delta_x^m = \int_0^{h_i} b m_2 \frac{\beta_3^3\, dx}{\left(\beta_1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_i} x\right)^3} = b m_2\, \beta_3^3\, I_1$$

$$EI_2\,\Delta_y^m=\int_0^{h_i} m_2 \frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}x\right)^3}=m_2\,\beta_3^3\,I_1=41{,}536$$

$$EI_2\,\Delta_z^m=-\int_0^{h_i} m_2\,(h-x)\frac{\beta_3^3\,dx}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2-\beta_1}{h_i}x\right)^3}=-\,m_2\beta_3^3(hI_1-I_2)=-362{,}186=$$

$$=-\,41{,}536\;c.$$

Împărțind prin $EI_2\,\vartheta_{v_n\;v_{n-1}}$ și schimbînd semnul întrucît termenii liberi din expresiile (26) sînt în dreapta egalului, vom avea

$$K_{0,2}=-\,m_1=-\,20{,}483,\quad K_{m,2}=-\,m_2=-\,0{,}911.$$

10. CALCULUL CONSTANTELOR

Formulele (31) care dau valorile constantelor sînt, în cazul de față, de forma

$$C_1=-\,0{,}251\;\overline{X}_n+0{,}186\;(m_2+\overline{Y}_n)-1{,}677\;\overline{Z}_n,$$
$$C_3=+\,0{,}251\;\overline{X}_n-0{,}186\;(m_2+\overline{Y}_n)+0{,}677\;\overline{Z}_n,$$
$$C_2=+\,1{,}437\;\overline{X}_n+0{,}188\;(m_1+\overline{Y}_n)-1{,}694\;\overline{Z}_n,$$
$$C_4=-\,1{,}437\;\overline{X}_n-0{,}188\;(m_1+\overline{Y}_n)+0{,}694\;\overline{Z}_n.$$

Făcînd înlocuirile obținem pentru constante valorile :

$$C_1=+\,0{,}590\gamma^{-15},$$
$$C_3=+\,0{,}259\varepsilon^{-15},$$
$$C_2=+\,0{,}366,$$
$$C_4=+\,0{,}483.$$

11. DETERMINAREA EXPRESIILOR DE CALCUL ALE EFORTURILOR

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în formulele (11) expresiile necunoscutelor funcționale corespunzătoare panoului n devin egale cu

$$X_n=-\,0{,}613\gamma^{n-15}+0{,}069\gamma^{-n}-1{,}985\varepsilon^{n-15}+0{,}649\varepsilon^{-n}+2{,}041\,,$$
$$Y_n=+\,1{,}323\gamma^{n-15}+0{,}823\gamma^{-n}-0{,}340\varepsilon^{n-15}-0{,}611\varepsilon^{-n}-0{,}819\,,$$
$$Z_n=+\,0{,}590\gamma^{n-15}+0{,}366\gamma^{-n}+0{,}259\varepsilon^{n-15}+0{,}483\varepsilon^{-n}-0{,}849\,.$$

Dînd lui n valori de la 1 la 14 obţinem pentru necunoscutele X, Y şi Z valorile date în tabela 2

Tabela 2

	1	2	3	4 — 11	12	13	14
X_n	+ 2,05	+ 2,04	+ 2,04	+ 2,04	+ 2,04	+ 2,03	+ 1,95
Y_n	— 0,70	— 0,80	— 0,82	— 0,82	— 0,81	— 0,79	— 0,63
Z_n	— 0,80	— 0,84	— 0,85	— 0,85	— 0,85	— 0,84	— 0,76

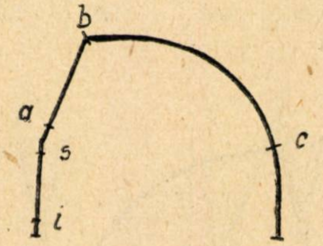


Fig. 7

Notînd secţiunile în care se calculează eforturile aşa cum se arată în figura 7, vom avea pentru calculul momentelor încovoietoare următoarele relaţii :

$$M_n^i = -2{,}501\gamma^{n-15} + 13{,}441\gamma^{-n} - 0{,}324\varepsilon^{n-15} - 461{,}682\varepsilon^{-n} + 1{,}203,$$

$$M_n^s = -0{,}126\gamma^{n-15} + 3{,}289\gamma^{-n} + 0{,}894\varepsilon^{n-15} + 1345{,}035\varepsilon^{-n} + 1{,}203,$$

$$M_n^a = -1{,}094\gamma^{n-15} - 1{,}283\gamma^{-n} + 0{,}915\varepsilon^{n-15} - 4{,}143\varepsilon^{-n} + 0{,}185,$$

$$M_n^b = +1{,}323\gamma^{n-15} + 0{,}823\gamma^{-n} - 0{,}340\varepsilon^{n-15} - 0{,}611\varepsilon^{-n} - 0{,}819,$$

$$M_n^c = -6{,}611\gamma^{n-15} - 0{,}662\gamma^{-n} - 16{,}950\varepsilon^{n-15} + 1{,}697\varepsilon^{-n} - 1{,}018,$$

determinate cu ajutorul relaţiilor :

$$M_n^i = -bX_{n-1} - aX_n - Y_{n-1} + Y_n + hZ_{n-1} - hZ_n + 19{,}572,$$

$$M_n^s = -bX_{n-1} - aX_n - Y_{n-1} + Y_n + h_sZ_{n-1} - h_sZ_n + 19{,}572,$$

$$M_n^a = -aX_n + Y_n - h_sZ_n - 0{,}911,$$

$$M_n^b = Y_n,$$

$$M_n^c = bX_n + Y_n - h_sZ_n - 20{,}483.$$

Valorile momentelor sînt date în tabela 3 iar diagramele în figurile 8*a* şi 8*b*.

Tabela 3

	1	2	3	4	5 — 11	12	13	14	15
M_n^i	+ 3,73	+ 1,48	+ 1,24	+ 1,21	+ 1,20	+ 1,19	+ 1,15	+ 0,84	— 1,62
M_n^s	— 0,01	+ 1,27	+ 1,21	+ 1,20	+ 1,20	+ 1,20	+ 1,20	+ 1,18	+ 1,96
M_n^a	— 0,01	+ 0,15	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,16	+ 0,02	—
M_n^b	— 0,70	— 0,80	— 0,82	— 0,82	— 0,82	— 0,82	— 0,79	— 0,63	—
M_n^c	— 1,12	— 1,03	— 1,02	— 1,02	— 1,02	— 1,04	— 1,16	— 1,96	—

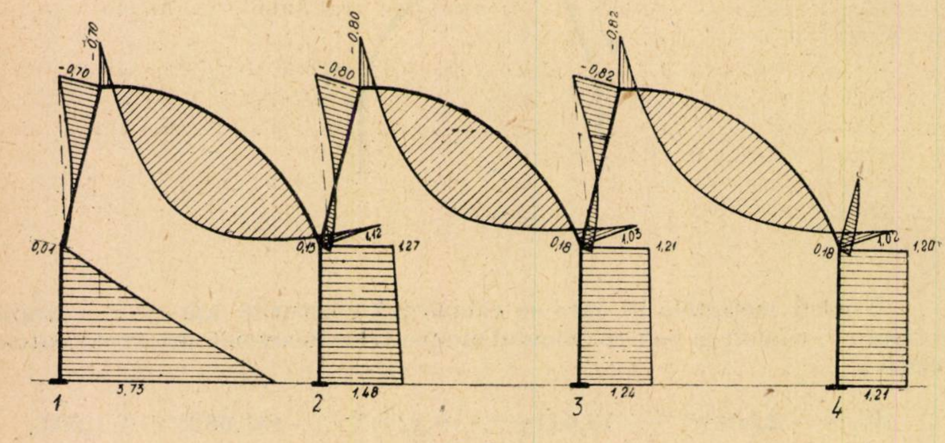

-0,70
-0,70
0,01
3,73
1
-0,80
-0,80
0,15
1,12
1,27
1,48
2
-0,82
-0,82
0,18
1,03
1,21
1,24
3
0,18
1,02
1,20
1,21
4

Fig. 8 *a*

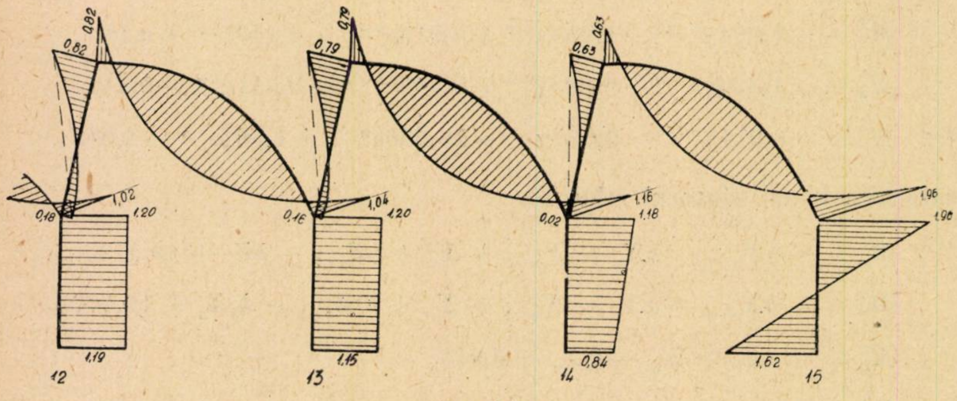

0,82
0,82
0,18
1,02
1,20
1,19
12
0,79
0,79
0,16
1,04
1,20
1,15
13
0,63
0,63
0,02
1,16
1,18
0,84
14
1,96
1,96
1,62
15

Fig. 8 *b*

Primită la redacţie la 6 noiembrie 1959

О СИСТЕМАТИЗАЦИИ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ МОНОТОННЫХ МНОГОКРАТНЫХ РАМ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

РЕЗЮМЕ

В статье обобщается и систематизируется расчет шедовых рам при помощи уравнений с конечными разностями.

Устанавливается прямой метод определения всех функциональных неизвестных в зависимости от постоянных, что дает возможность применить метод и в случае шедовых рам с числом неизвестных больше $3n$, какими являются, например, шедовые рамы с упругими или жесткими распорками, у которых матричная таблица составлена из 4, соответственно, 6 строк и столбцов.

Устанавливается ряд общих формул, позволяющих произвести быстрый и точный расчет шедовых рам самых различных форм от рам с прямыми стержнями и постоянного сечения до рам с кривыми ригелями и стойками переменного сечения.

Во второй части статьи приводится пример расчета, где решение находится при помощи общих формул, установленных в теоретической части.

QUELQUES SYSTÉMATISATIONS DANS LE CALCUL STATIQUE DES CADRES MONOTONES MULTIPLES, PAR DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

RÉSUMÉ

Les auteurs font la généralisation et la systématisation du calcul des cadres du type shed, au moyen des équations aux différences finies.

Ils proposent une méthode directe pour déterminer toutes les inconnues fonctionnelles en fonction de constantes, ce qui permet son application même aux cadres shed à plus de 3 n inconnues, tels par exemple les cadres shed à tirants élastiques ou rigides, dont le tableau matriciel est formé par 4, respectivement par 6 lignes et colonnes.

Les auteurs établissent plusieurs formules générales, permettant le calcul rapide et exact des cadres du type shed des formes les plus variées, allant des cadres à barres droites et à section constante jusqu'aux cadres à règles courbes et à poteaux à section variable.

Dans la seconde partie de l'article, on expose un exemple de calcul effectué au moyen des formules générales établies dans la partie théorique.

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. SEGAL, *Construcţii înalte.* Stroizdat, Moscova, 1949.
2. T. CĂRARE, C. AMZULESCU, *O nouă metodă de calcul a grinzilor în cadre*, Ed. Militară a M.F.A. ale R.P.R., Bucureşti, 1956.
3. — *Calculul cadrelor tip shed prin ecuaţii cu diferenţe finite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* (1957).
4. M. Г. САЛЬВАДОРИ, *Численные методы в технике.* Москва, 1955.
5. P. MAZILU, *Statica construcţiilor*, **II**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.

INFLUENŢA PERTURBAŢIILOR SEISMICE ASUPRA STRUCTURILOR ELASTICE[1]

DE

MIHAIL IFRIM[2]

Perturbaţiile seismice dau naştere în elementele de rezistenţă ale unei construcţii la o serie de eforturi suplimentare de care inginerul proiectant trebuie să ţină seama. Din punct de vedere tehnic, acţiunea cutremurului se caracterizează prin acele forţe orizontale care în mod curent se consideră că solicită o construcţie la nivelul fiecărui etaj.

Se poate presupune că mişcarea seismică se manifestă la baza construcţiei sub forma unei perturbaţii $U_0(t)$ care se consideră că reprezintă funcţia deplasărilor corespunzătoare mişcării seismice. Presupunîndu-se matematic precizată funcţia $U_0(t)$ este necesar să se determine răspunsul dinamic al unei structuri la această perturbaţie. Practic interesează distribuţia deplasărilor, vitezelor, acceleraţiilor sau a forţelor de inerţie ce se dezvoltă pe înălţimea construcţiei. În ultima analiză cunoaşterea acestor valori oferă posibilitatea unei concepţii şi dimensionări raţionale a construcţiilor situate în zone seismice.

Evaluarea răspunsului dinamic comportă o serie întreagă de etape de calcul care stabilesc influenţa atît a structurii cît şi a cutremurului.

În dezvoltările ce se vor expune, se tratează această problemă care se reduce la studiul oscilaţiilor forţate ale unei structuri elastice de tipul celei din figura 1, cu n grade de libertate dinamice (luînd în considerare şi amortizarea), cînd baza sa este supusă unei deplasări arbitrare $U_0(t)$.

Se menţionează posibilitatea de separare a caracteristicilor staticodinamice ale structurii de proprietăţile dinamice ale cutremurului.

În cele din urmă se propune o expresie simplificată pentru determinarea forţelor seismice, accesibilă calculelor practice, bazată pe variaţia coeficienţilor seismici spectrali funcţie de perioadele proprii de vibraţie ale structurilor.

---

[1] Comunicare prezentată în cadrul Colocviului naţional de mecanică ţinut în Bucureşti între 25 — 29 octombrie 1959.

[2] INCERC.

NOTAŢII GENERALE

a_{ki} — coeficient de formă care precizează răspunsul dinamic din punctul k, corespunzător modului normal i de vibraţie;

$C(T_i)$ — coeficient seismic spectral;

$F_k(i)$ — forţa seismică ce acţionează la nivelul k, corespunzînd modului i de vibraţie;

g — acceleraţia gravitaţională;

i — indice care precizează ordinul modurilor normale al frecvenţelor circulare şi perioadelor proprii de vibraţie;

j, k — puncte curente care marchează poziţia etajelor implicit a maselor M_j M_k, etc;

$M_k = \frac{Q_k}{g}$ masa sarcinii construcţiei aferente nivelului k;

n — numărul punctelor de fixare a maselor egal cu numărul etajelor şi numărul gradelor de libertate ale construcţiei;

Q_k — sarcina gravitaţională concentrată la nivelul k;

T_i — perioada proprie de vibraţie a construcţiei corespunzătoare modului normal i de vibraţie;

$U_0(t)$ — deplasarea arbitrară imprimată bazei construcţiei de unda seismică;

Z_{ki} — deplasarea punctului k corespunzătoare modului normal i;

$Z_k(i)$ — deplasarea reală a punctului k corespunzătoare modului normal i cînd structura este supusă perturbaţiei seismice $U_0(t)$;

$Z_k(t)$ — deplasarea reală a punctului k pe direcţia oscilaţiilor în urma perturbaţiei $U_0(t)$;

ν_i — factor critic de amortizare;

ω_i — frecvenţa circulară de vibraţie corespunzătoare modului normal i.

I

Referindu-ne la structura din figura 1, ecuaţia mişcării de tip D'Alembert care corespunde punctului k, se poate scrie sub forma

$$M_k \frac{d^2[Z_k(t) + U_0(t)]}{dt^2} + \beta_k \frac{dZ_k(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{n} K_{kj} Z_j(t) = 0, \tag{1.1}$$

unde

β_k — este coeficientul de amortizare, proporţional cu viteza, conform ipotezei lui Voigt,

K_{kj} — reprezintă rigiditatea în punctul k al sistemului. Se defineşte ca fiind forţa ce trebuie aplicată în punctul k astfel încît punctul j să se deplaseze cu o unitate ($Z_j = 1$).

Ecuaţia (1.1) se mai poate transforma astfel

$$M_k\ddot{Z}_k(t)+\beta_k\dot{Z}_k(t)+\sum_{j=1}^{n}K_{kj}Z_j(t)=-M_k\ddot{U}_0(t). \tag{1.2}$$

Dacă se scriu asemenea ecuaţii pentru toate masele structurii elastice, se obţine un sistem de ecuaţii de ordinul n, identic celui din cazul oscilaţiilor forţate datorită sarcinilor perturbatoare de tipul $-M_k\ddot{U}_0(t)$.

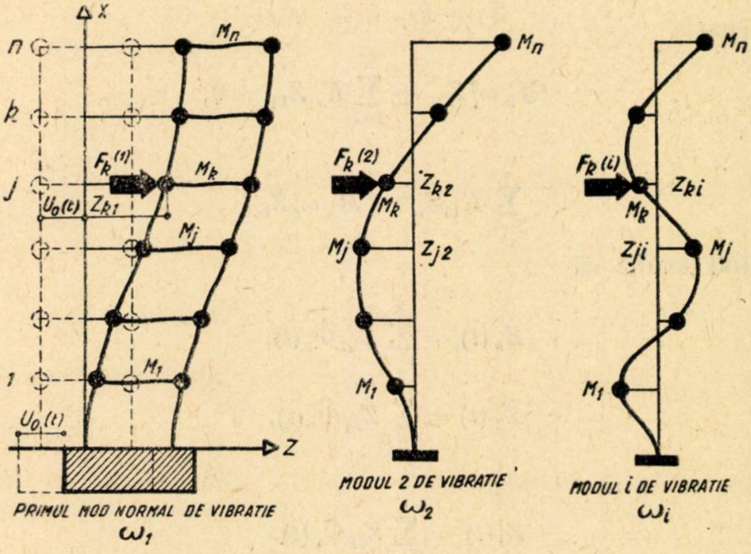

x
n
k
j
1
M_n
$F_k^{(1)}$
M_k
$U_0(t)$
Z_{k1}
M_j
M_1
$U_0(t)$
Z
PRIMUL MOD NORMAL DE VIBRATIE
ω_1
$F_k^{(2)}$
M_n
Z_{k2}
M_k
M_j
Z_{j2}
M_1
MODUL 2 DE VIBRATIE
ω_2
$F_k^{(i)}$
M_n
Z_{ki}
M_k
Z_{ji}
M_j
M_1
MODUL i DE VIBRATIE
ω_i

Fig. 1

Pentru ecuaţia de mai sus, soluţiile se obţin prin metoda separării variabilelor, în raport cu funcţiile proprii ale sistemului

$$Z_k(t)=\sum_{i=1}^{n}Z_{ki}\,\Phi_i(t), \tag{1.3}$$

în care

$\Phi_i(t)$ — este o funcţie de timp corespunzătoare fiecărei forme proprii i, de vibraţie, de tipul unei coordonate generalizate. Această funcţie precizează deformarea structurii elastice în timp.

Ecuaţiile de mişcare (1.2) se pot reduce la un sistem de n ecuaţii independente, funcţie de fiecare mod normal de vibraţie în parte. Pentru a arăta aceasta, vom face în continuare unele transformări premergătoare.

Din studiul vibraţiilor libere ale aceleiaşi structuri în modul i, fără amortizare, reiese

$$M_k\,\frac{d^2Z_{ki}(t)}{dt^2}+S_{ki}(t)=0, \tag{1.4}$$

unde forța elastică ce corespunde punctului k, este

$$S_{ki}(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{kj} Z_{ji}(t).$$

Considerînd pentru $Z_{ki}(t)$ și $Z_{ji}(t)$ o soluție armonică, identică cu (1.3)

$$Z_{ki}(t) = Z_{ki} \cos(\omega_i t + \gamma_i),$$

$$Z_{ji}(t) = Z_{ji} \cos(\omega_i t + \gamma_i),$$

rezultă ecuația

$$-M_k \omega_i^2 Z_{ki} + \sum_{j=1}^{n} K_{kj} Z_{ki} = 0, \tag{1.5}$$

de unde

$$\sum_{j=1}^{n} K_{kj} Z_{ji} = M_k \omega_i^2 Z_{ki}. \tag{1.6}$$

Ținînd seama că

$$\dot{Z}_k(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_{ki} \dot{\Phi}_i(t),$$

$$\ddot{Z}_k(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_{ki} \ddot{\Phi}_i(t),$$

și

$$Z_j(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_{ji} \Phi_i(t),$$

precum și de relația (1.6), ecuația (1.2) devine

$$M_k \sum_{i=1}^{n} Z_{ki} \ddot{\Phi}_i(t) + \beta_k \sum_{i=1}^{n} Z_{ki} \dot{\Phi}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} M_k \omega_i^2 \Phi_i(t) = -M_k \ddot{U}_0(t). \tag{1.7}$$

Vom dezvolta această ecuație grupînd termenii ei în modul următor :

$$M_k Z_{k1} \left[\ddot{\Phi}_1(t) + \frac{\beta_k}{M_k} \dot{\Phi}_1(t) + \omega_1^2 \Phi_1(t)\right] + M_k Z_{k2} \left[\ddot{\Phi}_2(t) + \frac{\beta_k}{M_k} \dot{\Phi}_2(t) + \right.$$

$$\left. + \omega_2^2 \Phi_2(t)\right] + \ldots + M_k Z_{ki} \left[\ddot{\Phi}_i(t) + \frac{\beta_k}{M_k} \dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t)\right] +$$

$$+ \ldots = -M_k \ddot{U}_0(t).$$

Înmulțind această ecuație cu Z_{k1}, dezvoltînd întreg sistemul corespunzător tuturor maselor $k = 1, 2, \ldots, n$ și introducînd notația

$$2\varepsilon_k = \frac{\beta_k}{M_k}$$

se obţine

$$\left.\begin{aligned}
&(k=1)\, M_1Z_{11}^2[\ddot{\Phi}_1(t)+2\varepsilon_1\dot{\Phi}_1(t)+\omega_1^2\Phi_1(t)]+M_1Z_{11}Z_{12}[\ddot{\Phi}_2(t)+\\
&\qquad +2\varepsilon_1\dot{\Phi}_2(t)+\omega_2^2\Phi_2(t)]+\dots=-M_1\ddot{U}_0(t)\,Z_{11},\\
&(k=2)\, M_2Z_1^2[\ddot{\Phi}_1(t)+2\varepsilon_2\dot{\Phi}_1(t)+\omega_1^2\Phi_1(t)]+M_2Z_{21}Z_{22}[\ddot{\Phi}_2(t)+\\
&\qquad +2\varepsilon_2\dot{\Phi}_2(t)+\omega_2^2\Phi_2(t)]+\dots=-M_2\ddot{U}_0(t)\,Z_{21},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(k=k)\, M_kZ_{k1}^2[\ddot{\Phi}_1(t)+2\varepsilon_k\dot{\Phi}_1(t)+\omega_1^2\Phi_1(t)]+M_kZ_{k1}Z_{k2}[\ddot{\Phi}_2(t)+\\
&\qquad +2\varepsilon_k\dot{\Phi}_2(t)+\omega_2^2\Phi_2(t)]+\dots=-M_k\ddot{U}_0(t)\,Z_{k1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(k=n)\, M_nZ_{n1}^2[\ddot{\Phi}_1(t)+2\varepsilon_n\dot{\Phi}_1(t)+\omega_1^2\Phi_1(t)]+M_nZ_{n1}Z_{n2}[\ddot{\Phi}_2(t)+\\
&\qquad +2\varepsilon_n\dot{\Phi}_2(t)+\omega_2^2\Phi_2(t)]+\dots=-M_n\ddot{U}_0(t)\,Z_{n1}.
\end{aligned}\right\}\quad(1.8)$$

Adunînd toate ecuaţiile (1.8), ţinînd seama de condiţia de ortogonalitate a formelor proprii

$$\sum_{k=1}^{n} M_kZ_{ki}Z_{kj}=0 \qquad (i\neq j)$$

şi presupunînd că

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_k\dots=\varepsilon_n=\varepsilon \qquad \text{(constant)}$$

rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} M_kZ_{k1}^2[\ddot{\Phi}_1(t)+2\varepsilon\,\dot{\Phi}_1(t)+\omega_1^2\,\Phi_1(t)]=-\sum_{k=1}^{n} M_k\ddot{U}_0(t)\,Z_{k1}. \qquad (1.9)$$

În continuare, înmulţind acelaşi sistem (1.8) cu Z_{k2}, $Z_{k3}, \dots$ $\dots Z_{kj}, \dots, Z_{kn}$, se obţin de asemenea o serie de ecuaţii de forma de mai sus, care, după cum se observă, se referă *numai* la primul mod de oscilaţie.

Pentru modul i, avem :

$$\sum_{k=1}^{n} M_kZ_{ki}^2[\ddot{\Phi}_i(t)+2\varepsilon\,\dot{\Phi}_i(t)+\omega_i^2\Phi_i(t)]=-\sum_{k=1}^{n} M_k\ddot{U}_0(t)\,Z_{ki}. \qquad (1.10)$$

Prin urmare, am transformat sistemul (1.2) în alt sistem cu n ecuaţii independente, funcţie de fiecare mod normal de oscilaţie.

Ecuaţia (1.10) poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{\Phi}_i(t)+2\varepsilon\,\dot{\Phi}_i(t)+\omega_i^2\,\Phi_i(t)=-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} M_kZ_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} M_kZ_{ki}^2}\cdot\ddot{U}_0(t).$$

Notînd cu

$$c_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} M_k Z_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} M_k Z_{ki}^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}^2}$$

şi

$$A_i(t) = -c_i \ddot{U}_0(t), \tag{1.11}$$

obţinem o ecuaţie identică celei corespunzătoare oscilaţiilor forţate a unui sistem cu un singur grad de libertate cu amortizare, care poate fi integrată direct

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon \dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = A_i(t).$$

Făcînd abstracţie de soluţia corespunzătoare oscilaţiilor libere care se amortizează rapid, rezultă

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_i^2 - \varepsilon^2}} \int_0^t A_i(\tau)\, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cdot \sin \sqrt{\omega_i^2 - \varepsilon^2}\,(t-\tau)\, d\tau. \tag{1.12}$$

În locul mărimii ε, vom introduce valoarea factorului critic de amortizare (ν_i) ce decurge din decrementul logaritmic (δ_i) al amortizării

$$\delta_i = 2\pi\nu_i = \varepsilon T_i = \varepsilon \frac{2\pi}{\omega_i},$$

de unde

$$\varepsilon = \nu_i \cdot \omega_i. \tag{1.13}$$

Menţionăm că factorul critic al amortizării este variabil pentru fiecare mod normal *i*. El reprezintă un procent din valoarea critică de amortizare la care mişcarea îşi pierde caracterul vibrator.

Înlocuind în (1.11) expresia lui ε (1.13) obţinem

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1-\nu_i^2}} \int_0^t A_i(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i \sqrt{1-\nu_i^2}\,(t-\tau)\, d\tau. \tag{1.14}$$

Decrementul logaritmic are valori subunitare şi deobicei destul de mici. Cu atît mai mic va fi deci factorul critic al amortizării. Pentru cazurile practice ν fiind mai mic de 0,30 (în cazul construcţiilor din beton armat $\nu \approx 0{,}10$), se poate neglija ν^2 în raport cu unitatea.

Aşadar, considerînd $\sqrt{1-\nu_i^2} \approx 1$, înlocuind în (1.14) relaţia (1.11), rezultă

$$\Phi_i(t) = -\frac{c_i}{\omega_i} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau. \tag{1.15}$$

Revenind la relaţia (1.3), se poate deduce expresia generală a deplasărilor corespunzătoare punctului k, la timpul $t > 0$

$$Z_k(t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\omega_i} Z_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau. \qquad (1.16)$$

Întrucît mişcarea seismică are o direcţie de propagare arbitrară, putîndu-se manifesta în orice sens, vom face abstracţie în calculele următoare de semnul minus din faţa expresiei (1.16).

Spre simplificare vom introduce o nouă notaţie, denumind *coeficient de formă*, expresia

$$a_{ki} = c_i \cdot Z_{ki} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}^2} Z_{ki}. \qquad (1.17)$$

În general, este mai comod a calcula separat deplasările, vitezele, acceleraţiile, forţele de inerţie sau forţa tăietoare de bază, corespunzătoare fiecărui mod de vibraţie în parte. Cunoaşterea acestor expresii este extrem de importantă întrucît în calculele practice nu se ţine seama de totalitatea formelor proprii. După cum se ştie, în cazurile cele mai speciale, luarea în considerare a primelor trei moduri este suficientă pentru a stabili comportarea construcţiei.

Expresiile corespunzătoare modului normal i de vibraţie deduse, pe baza relaţiilor (1.3) şi (1.15) sînt următoarele :

deplasările

$$Z_k(i) = \frac{a_{ki}}{\omega_i} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau\,; \qquad (1.18)$$

vitezele

$$\dot{Z}_k(i) = a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \cos \omega_i (t-\tau)\, d\tau\,; \qquad (1.19)$$

acceleraţiile

$$\ddot{Z}(i) = \omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau\,; \qquad (1.20)$$

forţele de inerţie

$$F_k(i) = M_k\, \omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau\,; \qquad (1.21)$$

forţa tăietoare de bază

$$F(i) = M_k\, \omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau. \qquad (1.22)$$

Valorile totale ale deplasărilor, vitezelor, accelerațiilor, forțelor de inerție sau a forței tăietoare de bază în punctele ce se obțin prin însumarea expresiilor (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) și (1.22) în raport cu i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Forma expresiilor de mai sus ne permite să punem în evidență separarea analitică a caracteristicilor statico-dinamice ale structurii, de proprietățile dinamice ale cutremurului.

Principial poate fi scrisă următoarea relație generală :

$$R_k(t) = R_{k\mathrm{I}} \cdot R_{k\mathrm{II}}, \tag{1.23}$$

unde

$R_k(t)$ — reprezintă răspunsul dinamic al structurii (deplasarea relativă față de teren, viteza absolută, accelerația relativă sau forța de inerție) corespunzător punctului k, datorită perturbațiilor seismice.

$R_{k\mathrm{I}}$ — reprezintă influența caracteristicilor statico-dinamice, specifice fiecărui tip de structură, asupra comportării construcției.

$R_{k\mathrm{II}}$ — reprezintă influența proprietăților dinamice ale undei seismice precum și a mediului prin care aceasta se propagă, asupra comportării construcției.

Vom sublinia, că funcție de modul în care este asimilată mișcarea terenului, pot rezulta diverse formulări ale acestei probleme. În esență, aprecierea influenței proprietăților dinamice ale undei seismice separă diversele metode dinamice de calcul, a forțelor seismice.

II

Cu scopul de a simplifica calculul practic al forțelor seismice, s-a sintetizat expresia (1.21) în felul următor :

$$F_k(i) = C(T_i) \cdot a_{ki} \cdot Q_k, \tag{2.1}$$

unde

$$C(T_i) = \frac{2\pi}{g} \cdot \frac{1}{T_i} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

reprezintă coeficientul seismic spectral de calcul. Acest coeficient variază cu perioada și gradul de amortizare al construcției și depinde de intensitatea cutremurului precum și de natura terenului.

Pentru a aprecia analitic coeficientul $C(T_i)$ este necesar a cunoaște valoarea integralei ce apare în expresia (2.2), numită în mod curent spectrul vitezelor (S_v). Pe baza înregistrărilor reale ale accelerațiilor și prelucrare adecvată cu ajutorul calculatorului electronic analog [4], în Institutele din California s-a reușit a se estima global influența cutremurului asupra construcției. Cunoscînd deci *spectrul vitezelor* (standard), se poate defini coeficientul $C\,(T_i)$ sub forma

$$C\,(T_i) = K\,\frac{S_v}{T_i}, \tag{2.3}$$

în care K este un coeficient ce transformă spectrul teoretic într-un spectru de proiectare [12], [13].

În Uniunea Sovietică, s-a determinat valoarea acelei integrale pornind de la o funcție a deplasărilor $U_0(t)$ ce a rezultat dintr-o prelucrare corespunzătoare a seismogramelor înregistrate în timpul diverselor cutremure [8]. Această funcție asimilează mișcarea terenului datorită acțiunii seismice prin suma unei serii de curbe armonice amortizate. Rezultatele obținute stau la baza normelor sovietice de calcul în regiunile seismice SN-8, din 1957 [14]. Un mod direct de apreciere a spectrului a elaborat și S. V. Medvedev [9].

Trebuie remarcat însă, că orice cale s-ar adopta, coeficientul seismic $C\,(T_i)$ are o variație hiperbolică în sensul lui M. A. Biot și E. C. Robinson de forma

$$C\,(T_i) = \frac{\alpha}{T_i}. \tag{2.4}$$

Această variație este explicabilă întrucît se știe că cu cît construcțiile sînt mai flexibile, coeficienții seismici sînt mai reduși, în timp ce perioada T crește. Se mai știe că din motive tehnice, coeficienții seismici trebuie plafonați atît superior cît și inferior. De asemenea, ei depind de *zona seismică*, de *natura terenului prin care se propagă unda seismică și de proprietățile fizico-mecanice ale terenului de fundații* prin fenomenul de interacțiune dintre teren și construcție.

Rezolvate aceste probleme, spectrele de răspuns pot fi trasate automat cu singura rezervă ca limitele coeficienților, superioară $C^S\,(T_i)$ și inferioară $C^I\,(T_i)$, să corespundă condițiilor de securitate. Cifrele respective pot fi precizate și din studiul avariilor sau distrugerilor la construcțiile importante pe bază probabilistică.

Coeficientul α trebuie să răspundă la toate aceste probleme. Pentru o anumită zonă seismică coeficienții seismici spectrali pot varia conform figurii 2.

Mai trebuie stabilite intervalele în care se găsesc diversele tipuri de construcții din punct de vedere al rigidității, și anume :

— construcții rigide $0 < T \leqslant T_1$,
— construcții semirigide $T_1 < T \leqslant T_2$,
— construcții flexibile $T_2 < T$.

În general, $T_1 = (0{,}25 \div 0{,}45)$ s iar $T_2 = (0{,}75 \div 1{,}0)$ s. Determinarea unor valori absolute este imposibilă și de aceea aceste cifre rămîn mai departe informative.

Mai trebuie subliniat că parametrul α ține seama de natura terenului prin care se propagă unda seismică. El poate fi majorat în cazul terenurilor slabe (α') sau redus în cazul terenurilor tari (α'').

Spectrul de răspuns reprezentat în figura 2 este tipic, aplicarea sa practică depinzînd de precizia cu care sînt determinați toți factorii de care s-a amintit.

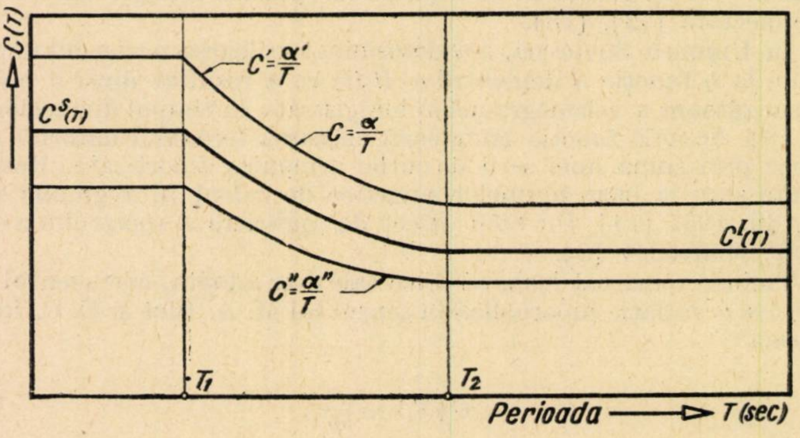


Fig. 2

Luînd acest procedeu ca bază de calcul, problema capătă un caracter dinamic evident iar construcția posedă o individualitate precisă întrucît are un reprezentant al său absolut în cauză : *perioada*.

Recomandările californiene din 1951, 1956, 1958 precum și cele sovietice din 1957 au abordat o concepție dinamică în ceea ce privește aprecierea sarcinilor seismice. Deși nu se poate vorbi de o perfecțiune, aceste prescripții reprezintă cele mai de seamă realizări aplicative ce s-au creat pînă acum în seismologia inginerească.

O concepție similară se pare că va sta la baza recomandărilor din Mexico [11].

Pentru R.P.R., autorul acestei comunicări a propus în cursul anului 1959 un procedeu similar privind evaluarea sarcinilor seismice. Singura rezervă pe care o ridică această propunere constă în faptul că aprecierea lui α s-a făcut mai mult empiric și prin extrapolarea unor rezultate din alte țări, din lipsă de înregistrări.

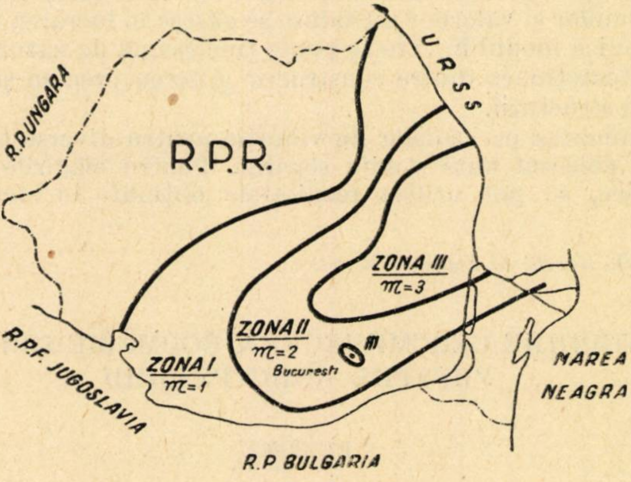
Astfel, pentru cazul construcțiilor obișnuite situate pe un *teren mediu* coeficientul α se propune

$$\alpha = 0{,}024\ \mathfrak{M}. \tag{2.5}$$

Expresia (1.5) are limitele

$$0{,}03\ \mathfrak{M} \leqslant C \leqslant 0{,}06\ \mathfrak{M}.$$

Prin $\mathfrak{M}$ s-au notat valorile magnitudinilor relative ale cutremurelor, care caracterizează intensitatea seismică a țării. Funcție de zona în care se amplasează construcția, coeficientul $\mathfrak{M}$ are valorile $\mathfrak{M}_{\text{I}} = 1$, $\mathfrak{M}_{\text{II}} = 2$ și $\mathfrak{M}_{\text{III}} = 3$ conform hărții de zonare seismică din figura 3.



R.P. UNGARA
U R S S
R.P.R.
ZONA III
$\mathfrak{M}=3$
ZONA II
$\mathfrak{M}=2$
București
III
ZONA I
$\mathfrak{M}=1$
R.P.F. JUGOSLAVIA
MAREA
NEAGRA
R.P BULGARIA

Fig. 3

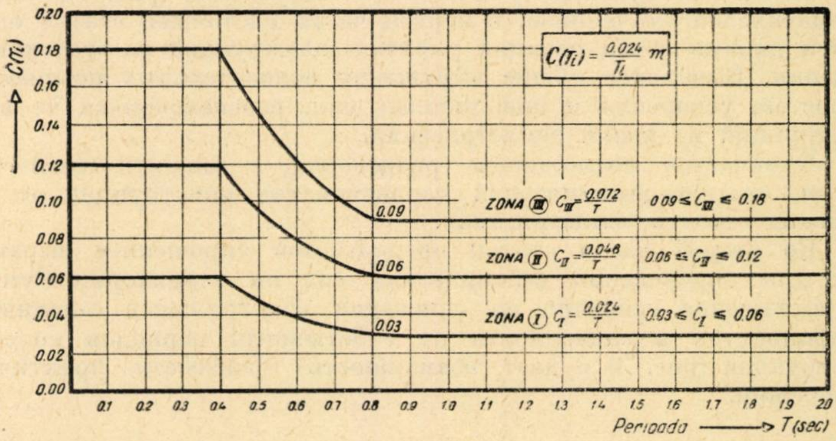


Fig. 4

În figura 4 sînt trasate spectrele seismice standard pentru cele trei zone seismice (de egală magnitudine relativă), pentru terenuri medii în conformitate cu formula

$$C(T_i) = \frac{0{,}024}{T_i}\mathfrak{M}. \tag{2.6}$$

Aceste curbe izospectrale propuse pentru aprecierea coeficienţilor seismici, pot caracteriza o anumită zonă de egală intensitate seismică. În acest fel se renunţă la scara Mercalli — modificată care are un caracter subiectiv.

Detalii privind aplicarea practică a formulei (2.1) şi justificări ale tuturor noţiunilor şi valorilor introduse se găsesc în lucrarea [7]. În aceeaşi lucrare se indică modul în care se poate ţine seama de natura terenului de fundaţie, interacţiunea dintre construcţie şi teren precum şi de gradul de amortizare a structurii.

Determinarea perioadelor de vibraţie pentru diverse tipuri de construcţii face obiectul unui studiu separat. Pentru clădirile alcătuite din cadre elastice, se pot utiliza rezultatele obţinute în lucrările [5], [6] şi altele.

Primită la redacţie la 2 decembrie 1959

ВЛИЯНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УПРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ

РЕЗЮМЕ

Предполагая, что функция $U_0(t)$, соответствующая сейсмическому движению, действующему у основания сооружения (рис. 1), является математически уточненной, в первой части настоящей статьи определяется динамическая реакция упругих конструкций на этот тип возмущения. Выводятся общие выражения относительных перемещений, скоростей, ускорения и инерционных сил, развивающихся по высоте конструкций во время землетрясения.

Отмечается возможность разделения, с аналитической точки зрения, статико-динамических характеристик конструкции от динамических свойств землетрясения.

Во второй части статьи предлагается упрощенное выражение (2.1) для определения сейсмических сил на территории Румынии. Это выражение основано на изменении спектральных сейсмических коэффициентов в зависимости от собственных периодов колебаний конструкций (рис. 3) и дает возможность произвести практические вычисления.

INFLUENCE DES PERTURBATIONS SÉISMIQUES SUR LES STRUCTURES ÉLASTIQUES

RÉSUMÉ

En supposant que la fonction $U_0(t)$, correspondant au mouvement séismique qui agit à la base d'une construction (fig. 1), est mathématiquement précisée, l'auteur détermine, dans la première partie de cet article,

la réponse dynamique des structures élastiques aux perturbations de cette catégorie. Il déduit les expressions générales des déplacements relatifs, des vitesses, des accélérations et des forces d'inertie développées le long de la hauteur des structures durant un tremblement de terre.

Il fait remarquer la possibilité de séparer, au point de vue analytique, les caractéristiques statiques et dynamiques de la structure, des propriétés dynamiques du séisme.

Dans la seconde partie de l'article, l'auteur propose une relation simplifiée (2.1) pour la détermination des forces séismiques sur le territoire roumain. Cette relation, accessible aux calculs d'ordre pratique, est fondée sur la variation des coefficients séismiques spectraux, en fonction des périodes propres de vibration des structures (fig. 3).

BIBLIOGRAFIE

1. Beleş Aurel A., *Cutremurul şi construcţiile*. Bucureşti, 1941.
2. Beleş Aurel A., Ifrim Mihail, *Aspecte actuale ale calculului construcţiilor la cutremure*. Lucrare prezentată la Consfătuirea Naţională de Seismologie, Bucureşti, 6—12 oct., 1959.
3. Biot M. A., *A Mechanical Analyser for the Prediction of Earthquake Stresses*. Bulletin of the Seismological Society of America, **31**, *2* April, 15 (1941).
4. Housner, G. W., Martel R. R., Alford I. L., *Spectrum Analysis of Strong-Mation*. Bulletin of the Seismological Society of America, **43**, *2*, 97 (1953).
5. Ifrim Mihail, *Calculul direct al frecvenţelor proprii, la clădirile acţionate de cutremure*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*, 211—217 (1959).
6. — *Appreciation on the Fundamental Vibration Frequency of Tall Structures Subjected to Seismic Actions*. Revue de Mécanique Appliquée, **IV**, *1*, 159—172 (1959).
7. — *Criteriul rigidităţii în calculul construcţiilor rezistente la cutremur*. Lucrare prezentată la Consfătuirea Naţională de Seismologie, Bucureşti, 6—12 oct., 1959.
8. Корчинский, И. Л., *Сейсмические нагрузки на здания и сооружения*. Москва, 1959,
9. Медведев С. В., *Определение землетрясений*. Бюллетень Совета по Сейсмологии Ан СССР, *6*, 1957.
10. Petrescu G., *Cutremure de pămînt*. Bucureşti, 1959.
11. Rosenblueth Emilio, *Consideraciones sobre diseno sismico*. México, Abril, 1959.
12. * * * *Lateral Forces of Earthquake and Wind*. (By Joint Committee of the San Francisco, California). Procedings ASCE, April, 77, separate *66* (1951).
13. * * * *Lateral Forces Building Code Requirements*. Recommendations of the Structural Engineers Association of Northen California, 1956.
14. * * * *Нормы и правила строительства в сейсмических районах* (*СН-8-57*), Москва, 1957.
15. Назаров, А. Г., *Метод инженерного анализа сейсмических сил*. Ереван-Москва, 1959.
16. Филипов А. П., *Колебания упругих систем*. Киев, 1956.

APARAT PENTRU DETERMINAREA GROSIMII STRATURILOR PROTECTOARE PE CALE NEDESTRUCTIVĂ

DE

I. ILIUC şi P. FREUND

În ultimii ani metodele de înnobilare şi acoperire a suprafeţelor au luat o mare dezvoltare. Asigurarea grosimii necesare a acestor straturi formează cheia bunei lor comportări în exploatare. O importanţă deosebită trebuie deci să joace controlul grosimii straturilor de acoperire. Cu toate acestea în foarte puţine cazuri se efectuează acest control şi atunci prin metode indirecte. Marea majoritate a metodelor de control se bazează pe metode destructive. Deoarece grosimea straturilor de acoperire variază în timp, este necesar şi controlul grosimii stratului la anumite intervale. Acest control însă se poate face numai prin metode nedestructive, metode care au apărut în ultimii ani.

1. METODE DE DETERMINARE

Vom arăta, pe scurt, metodele destructive şi nedestructive pentru determinarea grosimii straturilor de acoperire.

1.1. Metode destructive

1.1.1. Metoda gravimetrică constă în determinarea grosimii stratului de acoperire, pe cale indirectă, pe baza unor serii de cîntăriri. Rezultatele obţinute indică o valoare medie a grosimii stratului. Grosimea medie a stratului δ este dată de relaţia

$$\delta = \frac{\Delta G}{A\gamma}$$

unde,

δ — grosimea stratului de acoperire (cm),
A — suprafaţa acoperită cu strat protector (cm^2),
γ — greutatea specifică a stratului de acoperire (g/cm^3),

$\Delta G = G_1 - G_2$ — diferenţa de greutate dintre epruveta acoperită cu strat protector şi neacoperită (g).

1.1.2. Metoda micrometrică constă în determinarea grosimii δ ca diferenţa a două măsurători. Rezultatele obţinute reprezintă grosimea reală a stratului în punctul considerat

$$\delta = H - h,$$

unde,

H — grosimea suportului împreună cu stratul de acoperire (mm),
h — grosimea suportului înainte de acoperire (mm).

1.1.3. Metoda secţionării, după cum arată şi denumirea constă în secţionarea transversală a epruvetei şi apoi măsurarea directă pe cale optică (la microscop) a stratului de aport. Rezultatele măsurătorilor indică grosimea efectivă a stratului în secţiunea respectivă.

1.1.4. Metoda polizării constă în determinarea lungimii urmei, lăsate de o piatră de polizor în momentul în care stratul de bază devine tangent la piatră. În acest caz grosimea stratului se obţine pe baza relaţiei

$$\delta = \frac{b^2}{4D},$$

unde,

D — diametrul pietrei de polizor (mm),
b — lungimea urmei lăsate de polizor (mm),

1.2. Metode nedestructive

1.2.1. Metoda magnetică constă în determinarea grosimii stratului de acoperire, prin determinarea forţei de atracţie între un magnet permanent şi metalul de bază feromagnetic. În mod curent domeniul de măsură al acestor aparate este cuprins între 10 şi 500μ, iar precizia de măsură este de $\pm$ 10%. Indicaţiile reprezintă valoarea maximă a grosimii stratului în zona măsurată.

1.2.2. Metoda radiometrică utilizează proprietăţile diferitelor straturi de acoperire de a difuza radiaţiile α, β sau γ. Indicaţia aparatului ne dă grosimea medie a stratului de acoperire. Deoarece utilizarea izotopilor impun măsuri de protecţie speciale aceste instalaţii în marea lor majoritate sînt instalaţii fixe.

1.2.3. Metoda electroinductivă se bazează pe corespondenţa dependenţei dintre grosimea stratului de acoperire şi echivalentul lui electric, intensitatea I sau fluxul Φ.

2. APARAT ELECTROINDUCTIV PENTRU DETERMINAREA GROSIMII STRATURILOR DE ACOPERIRE

Problema determinării grosimii straturilor de acoperire, în cadrul Institutului de mecanică aplicată, a fost ridicată în vederea controlului grosimii straturilor anticorozive obţinute prin metalizare. Aparatul ales a fost unul de tip inductiv.

2.1. Principiul metodei

Caracterul dependenţei dintre grosimea δ şi curentul I sau fluxul Φ este reprezentată de legea circuitului magnetic, care pentru miezuri executate din material feromagnetic este :

$$\Phi = \frac{wI}{\frac{l}{\mu s}} \tag{1}$$

unde,

Φ — fluxul magnetic,
wI — forța magneto-motoare,
μ — permeabilitatea circuitului magnetic,
s — secțiunea,
l — lungimea.

În relația (1) numitorul caracterizează proprietățile geometrice și magnetice ale circuitului magnetic și se notează cu Rm.

Dacă tensiunea, fluxul, numărul de spire și secțiunea sînt constante, atunci intensitatea este direct proporțională cu reluctanța (Rm), deci

$$I = k \cdot Rm. \tag{2}$$

Pentru un circuit feromagnetic neomogen, cu secțiunea constantă, expresia reluctanței este de forma:

$$Rm = \frac{1}{s}\left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2}\right),$$

mărimea l_2 în cazul nostru este chiar δ. Valoarea lui este mică față de l_1 însă și valoarea permeabilității μ_2 este mult mai mică decît μ_1. În acest fel contribuția celui de-al doilea termen la valoarea totală a reluctanței este importantă. Dacă se ține seama de toți parametrii unei inductanțe atunci dependența dintre curentul I și grosimea δ are forma din figura 1,
unde I_2 — curentul maxim determinat de componenta rezistivă a circuitului,
I_0 — curentul de magnetizare.

Din analiza figurii 1 rezultă:
- o variație importantă a curentului la valori mici ale lui δ,
- limitarea curentului datorită componentei rezistive,
- existența unui curent corespunzător lui $\delta = 0$.

Pentru măsurarea curentului, deci și a grosimii δ se poate utiliza schema în punte, care are avantajul de a compensa curentul I_0, reducînd în același timp și influența variațiilor tensiunii de alimentare de la rețea. Montajul sub această formă simplă nu poate fi echilibrat cu ajutorul unui singur element variabil. Pentru înlăturarea acestui inconvenient s-a utilizat o schemă cu compensare, cu două punți de redresare, traductorul fiind realizat sub forma unui transformator.

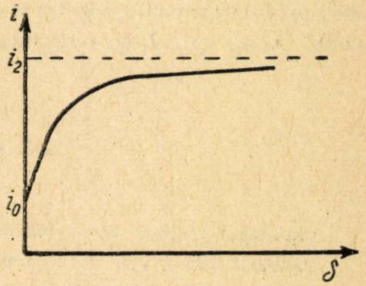


Fig. 1

În cazul notațiilor din figura 2 curentul indus în secundar este

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) - \dot{Z}_M^2}\,\dot{U}_1 .$$

Prin modificarea lui δ curentul I_2, din secundar variază prin intermediul lui $\dot{Z}_M$, $\dot{Z}_1$ și $\dot{Z}_2$.

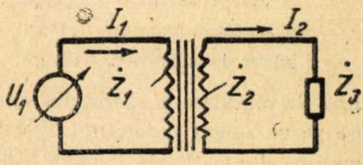


Fig. 2

2.2. Schema realizată

Pe baza principiului de mai înainte s-a realizat schema indicată în figura 3, unde s-a notat cu: *1*—traductor, 2 — punte de redresare, 3 — potențiometru de nul, 4 — rezistențe, 5 — instrument de măsură, 6 — potențiometru pentru limita superioară a scalei.

Pentru calculul elementelor montajului se consideră schema echivalentă, indicată în figura 4. Valorile lui R_1, R_3 sînt identice și egale cu rezistența internă a punții de redresare inclusiv rezistențele adiționale (R_i). Dacă $U_I = U_{II}$ (la echilibru) atunci $I_1 = I_3 = \frac{U_I}{R_i}$, $I_2 = 0$. Dacă $U_{II}=0$, atunci $I_2 = I_{2\,\max} = \frac{U_I}{R_i + 2R_2}$

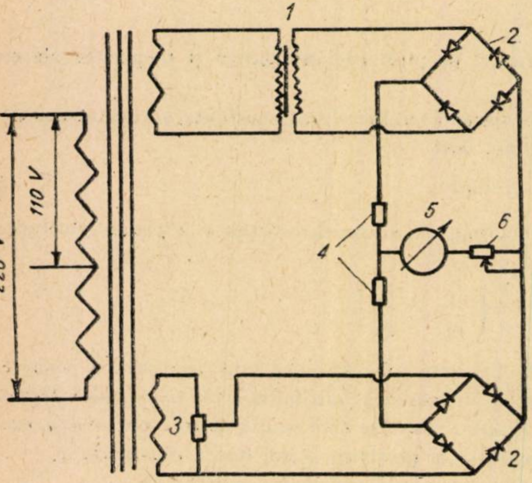


Fig. 3

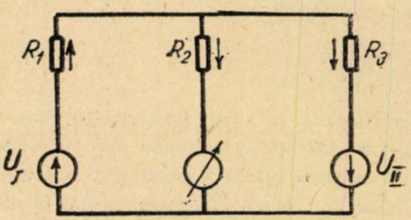


Fig. 4

și $I_{1,3} = I_{1,3\,\min} = \dfrac{U_I}{R_i\left(1 + \dfrac{R_2}{R_i + R_2}\right)}$. Tensiunea U depinde de dimensiunile traductorului; pentru un anumit traductor se obține o valoare optimă a lui U. Curenții $I_{1,3}$ se aleg din condiția $I_{2\,\max} < 0{,}1\, I_1$ iar rezistențele adiționale se aleg în funcție de acesta.

2.3. Caracteristicile aparatului

Aparatul realizat are următoarele caracteristici:

Gabarit 180 × 125 × 140 mm,

Greutatea aparatului inclusiv cordoane și palpator 2 kg,

Tensiunea de alimentare 110/220 V,

Tensiunea de lucru în primar, $U = 1{,}5$ V,

Intensitatea maximă I_2 max = 100 μA,

Limita de măsură 0—1 mm.

Curba de etalonare a aparatului este redată în figura 5 și este valabilă pentru straturi depuse pe un suport de oțel (0L.38,42). Aceeași curbă de etalonare poate fi utilizată și la depuneri pe alte materiale de bază, tratate sau aliate, cu observația că precizia indicațiilor scade de la ±5 % la o eroare relativă de 10 %. Pentru menținerea preciziei este necesară o reetalonare cu materialul de bază pe care se aplică stratul de aport. Asupra rezultatelor obținute are o oarecare influență și calitatea suprafeței materialului de bază.

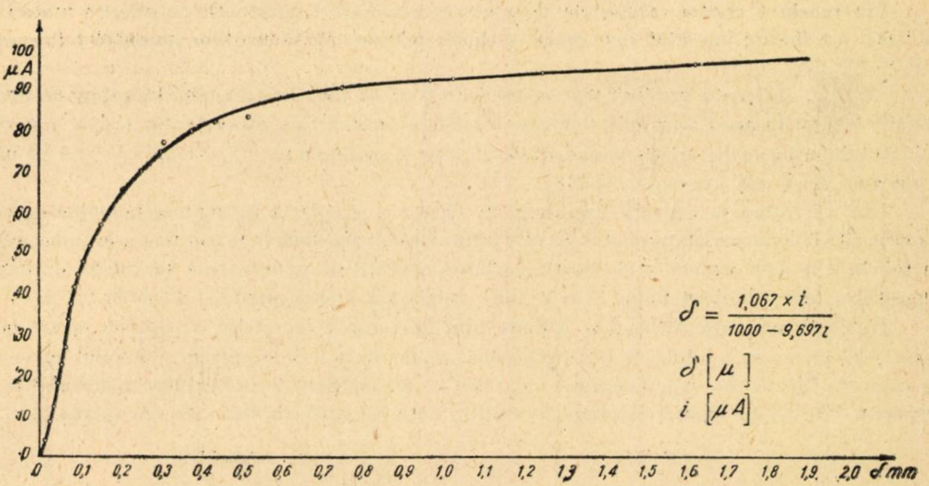


Fig. 5

2.3.1. Influența unor factori asupra preciziei de măsurare

Curba de etalonare a aparatului, indicată în figura 5 este valabilă după cum s-a menționat, pentru oțeluri moi. Poziția de 0 și 100 μA a curbei de etalonare depinde de o serie de caracteristici a materialului de bază.

2.3.1.*a*. Influența compoziției materialului de bază se explică prin variația permeabilității magnetice în funcție de compoziția chimică și structura rețelei cristaline. Variația permeabilității este cu toate acestea destul de redusă la oțelurile uzuale. Aceste diferențe se fac simțite la valori mici ale stratului de acoperire; pe măsură ce grosimea (întrefierul) crește această influență scade; astfel pentru grosimi ce depășesc 30 μ nu se mai observă influența

Tabela 1

Grosimea stratului δ microni	Materialul de bază			
	OL38	OL42	OL C 35	Rapid 1)
0	0	0	0	0
10	4	4	5	7
20	9	9	10	13
30	14	14	15	18
65	33	33	33	36
130	54	54,5	54	54
200	67	67	67	66
300	76	76	75	75
500	85	85	85	85

---

1) Compoziția oțelului; 19% W; 4% Cr; 1% V; 0,76% C; 0,15% Mo

compoziţiei materialului de bază. La oţeluri bogat aliate, această influenţă se face simţită pînă la 70 μ.

În tabela 1 redăm rezultatele unor serii de măsurători, efectuate pe diferite materiale de bază. La fiecare material s-au reglat poziţiile extreme ale indicaţiilor aparatului la 0 respectiv 100 μA.

2.3.1.*b*. Influenţa grosimii materialului de bază se face simţită pînă la valori de aproximativ 2 mm. În acest sens au fost făcute o serie de încercări pe epruvete din acelaşi material (OL38) sub formă de discuri cu diametrul de 45 mm şi grosimile de 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 mm şi nu s-au constatat influenţe sensibile.

2.3.1.*c* Influenţa calităţii suprafeţei de bază, se manifestă în mod asemănător cu cea a compoziţiei chimice a materialului. Aceste influenţe sînt sensibile la măsurarea grosimilor mici. În tabela 2 redăm dezechilibrul datorit variaţiei calităţii de prelucrare a suprafeţei de bază. Aparatul a fost echilibrat (adus la 0 şi 100 μA) pentru microasperităţi medii de 3,8 μ.

2.3.1.*d*. Influenţa curburii se resimte prin micşorarea suprafeţei de contact dintre palpator şi piesă. Această influenţă este însă redusă de tendinţa de concentrare a fluxului în zonele de contact. Încercările experimentale au arătat că fixînd limitele indicaţiilor aparatului la 0 respectiv 100 μA pe suprafaţa plană, deviaţiile datorită curburii sînt cele din tabela 3.

Tabela 2

H microasperităţi microni	μA	δ microni
3,8	0	0
9	2	5
14	5	12

Tabela 3

Diametrul cilindrului mm	Devieri faţă de 0 μA
70	8
150	5

Aceste influenţe pot fi eliminate prin readucerea aparatului de măsură între limitele 0—100 μA pe suprafaţa curbă. În tabela 4 redăm rezultatele unor măsurători respectînd indicaţiile de mai sus. Măsurătorile s-au executat pe generatoarea cilindrului.

În concluzie, rezultă că influenţele diferiţilor factori se elimină foarte uşor prin reglarea aparatului între limitele 0—100 μA. Acest lucru se face pe piesa de bază, a cărei grosime de acoperire urmează a se determina.

Tabela 4

Grosimea reală a stratului δ microni	Indicaţiile aparatului pentru cilindrul cu			
	d = 70 mm		d = 120 mm	
	μA	grosimea indicată	μA	grosimea indicată
0	0	0	0	0
10	5	10,25	4	10
20	11	24	9	20
30	17	38	15	35
65	35	75	34	70
130	55	135	54,5	130
200	68	230	67	220
300	75	310	75	310
500	85	510	85	510

3. MODUL DE LUCRU

Aparatul se conectează la rețea și se reglează pozițiile extreme ale indicatorului, în cazul în care acestea nu corespund cu indicațiile 0 și 100 μA.

Măsurătoarea se face prin intermediul unui cap de palpare, care se aplică pe stratul pe care vrem să măsurăm. Indicația minimă a microampermetrului reprezintă echivalentul electric al grosimii stratului de măsurat. În cazul în care stratul de acoperire nu prezintă rugozități ce ar putea influența rezultatele măsurătorii, cum este cazul la acoperirile galvanice, vopsele, lacuri, nu este necesară nici o pregătire specială a stratului. Pentru specificul măsurătorilor straturilor depuse prin metalizare cu pulverizare, deoarece stratul prezintă rugozități importante sînt necesare unele operațiuni de pregătire ; astfel aplatisarea sau turtirea proeminențelor exagerate prin frecare cu o piesă metalică dură sau șmirghel. În figura 6 se arată aspectul profilului stratului metalizat înainte și după turtirea proeminențelor. Diferențele de măsură constatate cu ajutorul microscopului Schmaltz sînt de aproximativ 0,1 mm. Pentru determinarea corectă a grosimii stratului trebuie ori să se țină seama de aceste rugozități, ori să se aplatizeze în prealabil rugozitățile. În mod curent aceste rugozități, care depind de regimul de funcționare al aparatului sînt cuprinse între 0,08 și 0,16 mm.

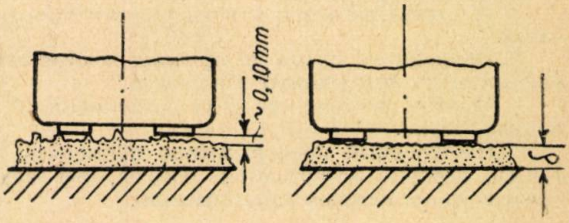


Fig. 6

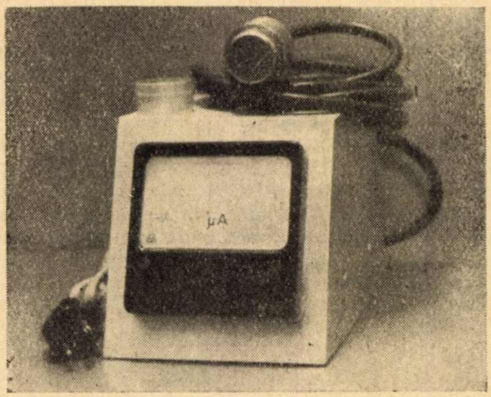


Fig. 7

În figura 7 se prezintă fotografia aparatului realizat.

Primită la redacție la 16 decembrie 1959

ПРИБОР ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ЗАЩИТНЫХ СЛОЕВ НЕРАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ

РЕЗЮМЕ

Определение толщины металлических покрытий играет особо важную роль в контроле коррозионной стойкости антикоррозионного слоя.

В статье излагается неразрывный метод для определения толщины этих слоев.

Приводятся схема и принцип построенного прибора, а также факторы, влияющие на результаты измерений.

Прибор состоит из двух отдельных частей: измерительного мостика и мерного щупа.

Построенный прибор можно применять для определения толщин от 0 до 1,0 мм, которые встречаются, вообще, при защите от коррозии путем нанесения тонких слоев методом металлизации.

APPAREIL POUR LA DÉTERMINATION DE L'ÉPAISSEUR DES COUCHES PROTECTRICES, SANS LES ENDOMMAGER

RÉSUMÉ

La détermination de l'épaisseur des couches protectrices jouent un rôle bien important dans le contrôle de la résistance à la corrosion des couches anticorrosives.

Les auteurs proposent une méthode permettant de déterminer l'épaisseur de ces couches, sans les détruire ou les endommager.

Ils donnent le schéma et exposent le principe de l'appareil qu'ils ont réalisé, tout en indiquant les facteurs qui exercent une influence sur les résultats des mesures.

L'appareil comprend deux parties distinctes : le pont de mesure et le « palpeur ».

L'appareil peut servir pour la détermination des épaisseurs allant de 0—1,0 mm, c'est-à-dire des épaisseurs couramment utilisées pour la protection contre la corrosion par ces couches métallisées.

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

CONGRESUL DE MECANISME — AACHEN — 1959

DE

RADU C. BOGDAN

În cursul anului 1959 a avut loc la Aachen al XIX-lea Congres de Mecanisme. Organizat de VDI (Verein Deutsche Ingenieur), de peste 30 de ani, Congresul se ţine regulat din doi în doi ani, în diferite localităţi, stabilindu-se în fiecare an o anumită tematică.

Lucrările Congresului, în anul acesta, au fost grupate în jurul următoarelor două teme :

1. *Construcţia de mecanisme cu mare eficienţă şi economicitate*
2. *Calitatea transmisiei şi forţele masice*

Au participat în special cercetători, profesori, ingineri din R.F.G. şi R.D.G., precum şi unii invitaţi din alte ţări ca : U.R.S.S., S.U.A., Turcia, R.P.R.

În anul acesta, ca şi în anii trecuţi, participarea a fost cu totul remarcabilă. S-au prezentat lucrări de un interes deosebit pentru specialişti, aspectele teoretice fiind completate cu aplicaţiile practice. Programul Congresului a îmbinat în mod armonios şedinţele de comunicări cu vizite la fabrici, uzine şi reuniuni.

O expoziţie de diferite modele de mecanisme şi materiale documentare de specialitate au completat în mod foarte util programul Congresului.

Informarea la zi asupra stadiului cercetărilor în diferitele domenii ale ştiinţei şi tehnicii constituie pentru specialistul respectiv o preocupare majoră. În afara consultării nenumăratelor publicaţii, congresele şi conferinţele sînt mijloace directe de informare şi cunoaştere mai adîncă a rezultatelor obţinute. Contactul personal, în astfel de ocazii între specialiştii respectivi reprezintă desigur o bază rodnică a schimbului de experienţă şi a unei cît mai folositoare colaborări.

Primele legături directe cu specialiştii germani din acest domeniu, stabilite cu doi ani în urmă, la Congresul de la Konstanz, ne-au oferit posibilitatea de a urmări în mod continuu anumite aspecte ale activităţii tehnico-ştiinţifice din acest domeniu, deosebit de important pentru construcţia de maşini. Legată şi de participarea noastră din martie 1958 la a II-a Conferinţă Unională asupra problemelor de bază ale teoriei maşinilor şi mecanismelor de la Moscova, ca şi de consultarea lucrărilor celei de-a V-a conferinţe de mecanisme din S.U.A., octombrie 1958, Conferinţa de la Aachen din septembrie 1959 ne-a înlesnit formarea unei imagini cît mai complete asupra activităţii pe scară mondială, în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor. Valoarea unor asemenea posibilităţi de documentare şi informare este incontestabil cu totul deosebită. Legăturile stabilite în astfel de ocazii au o influenţă apreciabilă asupra propriilor noastre cercetări, deschizîndu-ne perspective cît mai largi. Dar în acelaşi timp ne confirmă că eforturile noastre ne conduc la rezultate comparabile cu acelea ale unor cercetători din ţările cu o tradiţie mai îndelungată în acest domeniu.

★

În cele ce urmează vom expune unele dintre problemele discutate la această conferinţă : Cunoscutul om de ştiinţă german — prof. dr. ing. Meyer zur Capellen a prezentat comunicarea *Încărcări şi vibraţii în mecanisme cu manivele.*

Cercetătorul a arătat că la mecanismele bielă-manivelă forţele masice şi încărcarea elementelor variază periodic, provocînd vibraţii ; aceste încărcări trebuie considerate şi cercetate din punct de vedere dinamic. În continuare, subliniază următoarele aspecte :

— Efectele rigidităţii de torsiune dintre elementul condus şi masa cuplată, precum şi dintre motorul de antrenare şi manivelă, asupra stării de mişcare.

— Încărcările bielei prin forţele masice şi influenţa lor asupra proceselor de mişcare, în cazul unei biele elastice.

— Efectul forţelor masice din întregul mecanism asupra batiului (vibraţii în fundaţie).

Astfel, autorul expune comportarea vibratorie a mecanismelor şi încărcările în elementele mecanismelor. Prezentarea unor modele experimentale exemplifică tratarea teoretică a problemelor expuse.

În cadrul secţiei a doua, prof. Meyer zur Capellen a mai prezentat comunicarea *Analiza armonică aplicată la mecanisme cu manivelă*, bazată pe studii anterioare ale autorului ; de altfel această problemă este studiată şi în cadrul laboratorului de teoria maşinilor şi mecanismelor din I. M. A., unele rezultate fiind publicate încă înaintea desfăşurării Congresului, în paginile revistei S.C.M.A.

În comunicarea sa, prof. dr. phil. habil. R. Beyer, specialist de renume mondial, se ocupă de *Efectele forţelor şi maselor în mecanismele spaţiale.* După ce se referă la unele lucrări din literatura apărută sau în curs de apariţie care au pus bazele cercetărilor cu acest subiect în mecanismele plane, subliniază importanţa creării unei teorii complete de *Dinamică grafică a mecanismelor spaţiale* prezentînd unele rezultate obţinute personal cît şi în dizertaţii de la Institutul Politehnic din München.

În continuare, autorul precizează problemele de bază ce apar frecvent în cadrul studiilor de dinamica mecanismelor spaţiale, cum ar fi determinarea forţei sau momentului de antrenare al elementului iniţial al unui mecanism, atunci cînd unui element de legătură al mecanismului spaţial i se imprimă un moment din afară.

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se face reducerea maselor şi forţelor în mecanismele spaţiale, ca metodă de rezolvare a principalelor probleme ale dinamicii mecanismelor. În încheiere, autorul relevează posibilităţile de verificare experimentală a rezultatelor obţinute cu metoda expusă.

Măsurarea deplasărilor şi forţelor în mecanisme articulate şi cu came a făcut obiectul comunicării prezentate de asist. ing. O. Dingerkus (Aachen). După unele considerente de ordin general, cercetătorul prezintă importanţa metodelor experimentale de cercetare a mecanismelor, cu ajutorul unor instalaţii speciale. În continuare, arată unele dintre aplicaţiile posibile, comparînd rezultatele teoretice şi experimentale pe un anumit tip de mecansime.

Şi în acest domeniu, laboratorul de teoria mecanismelor şi maşinilor de la I.M.A. tratează unele probleme cu caracter de generalitate, dezvoltînd metoda mecano-electronică de cercetare experimentală a mecanismelor, iniţiată de noi cu cîţiva ani în urmă.

Prof. dr. ing. Bekir Dizioglu de la Institutul politehnic din Istambul a dezvoltat comunicarea : *Influenţa forţelor masice prin elemente de arc şi amortizare în mecanisme.* Autorul obţine la unele mecanisme, prin introducerea unor elemente de amortizare şi resoarte, mărimi noi —

cum ar fi constanta de amortizare etc., pe care le foloseşte în sinteza dinamică a mecanismelor. Astfel, se poate modifica comportarea dinamică a mecanismului ,,influenţîndu-se favorabil" asupra procesului mişcării.

Autorul prezintă o metodă grafică şi tratează unele exemple.

Prof. dr. ing. habil. W. Lichtenheldt (Dresda) s-a ocupat în comunicarea sa de *Construcţia buclei cu culisă*, aducînd unele contribuţii în cazul construcţiei buclei cu culisă atunci cînd sînt date 4 poziţii ale unui plan mobil. În această situaţie bucla cu culisă determinată univoc, este în general, dublu excentrică. Dînd un exemplu cu trei poziţii ale planului, se arată cum se poate ajunge la bucle cu culisă simplu excentrice.

Problema *Deplasări şi forţe în mecanisme cu manivela şi lanţ* a fost expusă de ing. K. Hain (Braunschweig).

Autorul consideră acele tipuri de mecanisme la care, de la o articulaţie a lanţului deplasările şi forţele sînt transmise mai departe prin mecanisme cu manivelă, dînd naştere unor noi legi de mişcare.

Luînd în considerare traiectoria unei articulaţii de lanţ, deduce din cazul general al patrulaterului articulat o serie de mecanisme cu manivelă şi lanţ; dacă se iau ca bază lanţurile cinematice cu şase elemente, se obţine un sistem complex de mecanisme. În continuare, se prezintă unele din aceste mecanisme care pot realiza opriri matematic exacte; se expune apoi determinarea deplasărilor şi a forţelor în mecanismele manivelă-lanţ.

Alte comunicări au prezentat unele probleme cu privire la metode de calcul pentru profilul discurilor cu came, cinematica suporturilor de perii la maşini electrice, influenţa toleranţelor asupra preciziei mecanismelor etc.

Menţionăm, de asemenea, comunicarea prof. H. Rothbart (S.U.A.): *Dinamica mecanismelor cu came.*

Semnalăm participarea la Congres, în anul acesta, a acad. I. I. Artobolevski, savant de renume mondial, şi a prof. N. S. Kojevnicov din U.R.S.S.

Acad. I. I. Artobolevski, a cărui activitate deosebită în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, este bine cunoscută, a prezentat, în cadrul discuţiilor, rezultatele cercetărilor din U.R.S.S. în probleme de dinamica maşinilor. Comunicarea a fost urmărită cu un viu interes de cei prezenţi; a reieşit că forma organizatorică superioară a cercetării ştiinţifice în U.R.S.S şi în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, stimulează şi mobilizează oamenii de ştiinţă în munca lor creatoare, iar rezultatele lor contribuie efectiv la progresul ştiinţei şi rezolvarea unor principale probleme actuale; cercetările sovietice sînt în avangardă în teoria mecanismelor şi maşinilor pe plan mondial.

Noi am transmis lucrarea *Contribuţii la cinematica diadei Cebîşev* prin care dăm o soluţie generală a tratării mecanismelor plane articulate.

★

Comunicările prezentate au oferit o imagine completă a stadiului actual al problemelor ce preocupă pe specialiştii germani. Un accent deosebit s-a pus pe necesitatea tratării în viitor a problemelor de dinamica mecanismelor, care îşi vor găsi o aplicare pe o scară din ce în ce mai vastă în construcţia de maşini.

Discuţiile ce au urmat au înlesnit un schimb viu de idei ce s-au dovedit deosebit de interesante.

Se poate aprecia că preocupările în domeniul teoriei mecanismelor au luat o dezvoltare foarte mare azi, nu numai în ţările cu o tradiţie în acest domeniu, cum sînt U.R.S.S., R.D.G. şi R.F.G., dar şi în alte ţări, de exemplu S.U.A., unde în ultimul timp se acordă o atenţie cu totul specială. Toate acestea dovedesc cu prisosinţă necesitatea lărgirii cercetărilor în acest domeniu, care este baza teoretică a dezvoltării construcţiilor moderne de maşini şi aparate.

Un bilanţ al dezvoltării mondiale a cercetării în domeniul teoriei mecansimelor şi maşinilor, aşa după cum poate fi sintetizat din materialele prezentate la manifestările din ultimul timp, ne arată că şi în ţara noastră s-au pus bazele trainice ale unei activităţi susţinute în diferite centre (Bucureşti, Iaşi, Cluj, Timişoara), cu rezultate dintre cele mai meritorii. Climatul cu totul deosebit creat cercetării ştiinţifice de regimul nostru democrat popular, rezultatele obţinute pînă în prezent, constituie garanţia sigură a dezvoltării pe o scară din ce în ce mai largă a acestei activităţi şi la noi.

RECENZII

M. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1959, 402 pag. + 6 anexe.

Prin comportarea lor spațială deosebit de favorabilă, prin faptul că se reduce greutatea proprie, prin faptul că pot folosi la acoperirea de suprafețe foarte mari, plăcile curbe subțiri și-au găsit o aplicare foarte largă în construcții civile și industriale și în construcții de mașini, în construcții navale și în aviație, precum și în multe alte domenii.

Este interesant de observat că metodele exacte (în cadrul ipotezelor corespunzătoare) ale teoriei elasticității nu pot fi aplicate, din cauza unor dificultăți de calcul ce nu pot fi depășite. De aceea se introduc anumite ipoteze simplificatoare privind deformația corpului, dintre care cea mai importantă este ipoteza lui Love a elementului liniar (de natura ipotezelor din rezistența materialelor). În felul acesta se pot stabili ecuațiile diferențiale de echilibru și de deformație ale plăcilor curbe subțiri. Totuși problema rămîne dificilă; integrări exacte ale ecuațiilor obținute s-au putut efectua numai în puține cazuri particulare și cu anumite condiții la limită date. Aceasta face ca să prezinte un interes deosebit utilizarea unor metode aproximative de calcul. Una dintre aceste metode, ușor accesibilă unui inginer proiectant, este metoda ecuațiilor cu diferențe finite și diferitele metode în strînsă legătură cu aceasta (metoda poligonului funicular, metoda plurilocală etc.); menționăm de asemenea formele perfecționate ale acestei metode, cum este metoda relaxării. Ing. M. Soare a aplicat cu mult succes aceste metode la calculul plăcilor curbe subțiri.

În cap. I autorul stabilește ecuațiile generale ale plăcilor curbe subțiri și discută diferitele posibilități de integrare a lor. Se arată ipotezele simplificatoare ce se pot face; se discută de asemenea valabilitatea teoriei fără momente, după A. L. Goldenweiser, pe baza liniilor de alterare a stării de eforturi.

Cap. II cuprinde o privire generală asupra metodei diferențelor finite, sub diferitele ei aspecte, precum și caracteristicele aplicării ei la ecuații de tipul celor întîlnite la calculul plăcilor curbe subțiri.

Teoria de membrană la plăcile subțiri de rotație, în cazul unei stări de eforturi cu sau fără simetrie axială, este studiată în cap. III și IV. Se arată modul de utilizare al seriilor trigonometrice, precum și al ecuațiilor cu diferențe finite.

În cap. V găsim tratată teoria de membrană pentru plăci curbe subțiri oarecare, cu ajutorul unei funcții de eforturi. Se studiază îndeosebi condițiile la limită ce se pot pune, precum și singularitățile ce pot interveni.

Cap. VI și VII cuprind teoria de membrană pentru plăcile curbe subțiri de translație și pentru plăcile curbe subțiri în formă de suprafețe cu două directoare și plan director. Menționăm în special aplicarea metodei plurilocale.

Teoria de încovoiere la plăci curbe subţiri, avînd forma unei suprafeţe de rotaţie completă, este studiată în cap. VIII; în acest caz metoda diferenţelor finite se dovedeşte deosebit de fructuoasă. Menţionăm, în special, justificarea unor metode analitice aproximative cu ajutorul diferenţelor finite.

În cap. IX se dau rezultate din teoria de încovoiere a plăcilor subţiri prismatice şi cilindrice. Se tratează diferite cazuri, plăci rezemate pe timpane sau nu, plăci rigidizate cu nervuri etc.

Cap. X cuprinde cîteva rezultate privind studiul pe modele al plăcilor curbe subţiri.

Fiecare capitol este însoţit de o bogată bibliografie, trecută în ordinea cronologică a publicării lucrărilor; în felul acesta, chiar bibliografia constituie un scurt istoric pentru problema respectivă.

Şase anexe în care se dă starea de eforturi pentru un număr de cazuri de încărcare însoţesc lucrarea; ele sînt foarte utile pentru calculul practic.

Lucrarea este ilustrată prin numeroase exemple numerice de calcul, duse pînă la rezultate finale. Aceste exemple sînt adevărate mici proiecte şi corespund, în cea mai mare parte, la lucrări proiectate în ţara noastră — unele din ele fiind deja executate. În felul acesta lucrarea prezentată de autor este strîns legată de practica inginerului constructor. Exemplele de calcul corespund — în special — acestui domeniu al tehnicii.

Acest volum conţine numeroase studii cu caracter original, datorite ing. M. Soare, unele consideraţii fiind publicate pentru prima oară cu această ocazie.

Lucrarea de mai sus reprezintă (exceptînd o secţiune cu caracter monografic din *Manualul pentru calculul construcţiilor* şi o ediţie anterioară, într-o formă incipientă, a acestei cărţi) prima lucrare tipărită în limba romînă din domeniul plăcilor curbe subţiri, avînd un caracter original. Ea prezintă interes pentru studenţii facultăţilor de construcţii, pentru inginerii proiectanţi şi pentru cercetătorii ştiinţifici şi reprezintă, în acelaşi timp, o contribuţie romînească, valoroasă la acest capitol al mecanicii corpului solid deformabil.

P. P. Teodorescu

M. A. VELICANOV, *Ruslovo proţes* (Procesul fluvial) Gos. Izd. Fiziko-Matematicescoi literat, Moskva, 1958.

În această lucrare, autorul, eminent specialist sovietic în problemele hidraulicei fluviale îşi prezintă concluziile îndelungatelor sale studii asupra formării şi dinamicei albiilor de rîuri. El şi-a început aceste studii în urmă cu peste 50 de ani, participînd la lucrările de navigabilizare a fluviului Volga, şi le-a continuat cu ocazia regularizărilor multor cursuri de apă, ca Enisei, Obi, Tomi, Dvina, Berezina ş.a.

Noţiunea de *proces de albie*, ca interacţiunea între curenţi şi albie, a fost introdusă în literatura ştiinţifică de prof. Velicanov în 1948; dar conţinutul acestei noţiuni a apărut încă în secolul trecut în legătură cu eforturile unor savanţi ca Leliavski în Rusia şi Fargue în Franţa de a rezolva în mod ştiinţific problema navigabilizării cursurilor de apă. Se înţelege că la nivelul de atunci al cunoştinţelor, concluziile obţinute nu puteau avea decît un caracter calitativ — hidrodinamica teoretică, dar mai ales cea experimentală se găseau într-un stadiu incipient, — ori analiza proceselor fluviale cu mijloacele hidraulicei tehnice nu poate fi edificatoare.

Trebuie menţionat că prof. Velicanov este unul dintre primii care încearcă să folosească cele mai noi rezultate ale teoriilor actuale asupra turbulenţei, în analiza proceselor fluviale.

Planul de expunere este alcătuit în modul următor: la început (cap. I, II, III, IV) se prezintă morfologia formațiilor de albii și cea a curenților secundari, strîns legați de formarea albiilor. Sînt expuse de asemenea, caracteristicele calitative ale proceselor fluviale, schițate în lucrările clasice de hidraulică fluvială. În încheiere se conchide că tulburența ar fi un factor principal al proceselor fluviale.

Apoi, după o scurtă enumerare a cîtorva principii de statistică matematică se introduc noțiunile de statistică a pulsațiilor și statistică a aluviunilor (cap. V, VI, VII).

Într-un capitol următor, se amintesc cîteva principii de hidrodinamică (cap. VIII).

Se consideră că cititorul cunoaşte bazele hidrodinamicii fluidelor reale și ca atare, ecuațiile de plecare se dau fără demonstrații. Mai detaliat sînt prezentate două probleme legate între ele, aceea a macroturbulenței și a circulației transversale (cap. IX, X).

În continuare, se prezintă teoria generală a mişcării aluviunilor, aşa cum o concepe astăzi autorul, în primul rînd a celor de fund, apoi a celor în suspensie (cap. XI, XII).

Teoria gravitațională a mişcării aluviunilor, apărută în 1943, este prezentată cu importante completări. Autorul o concepe ca o generalizare teoretică și ca o concluzie a numeroaselor încercări și formule empirice, cu care în curs de peste 50 de ani s-a încercat definirea debitului solid (cap. XIII, XIV, XV). Pentru cazul particular al unei repartiții staționare a aluviunilor pe verticală, sînt prezentate rezultatele unui bogat material experimental adunat și verificat de autor în decurs de mai mulți ani (cap. XVI).

Într-un capitol special se schițează căile de rezolvare a problemelor în regim instaționar care e caracteristic de altfel pentru procesele fluviale. Ca o ilustrare, sînt examinate două cazuri limită: procesul de acumulare pură (colmatarea biefurilor barajelor) și procesul de eroziune pură (cap. XVII).

În ultimul capitol sînt examinate problemele practice ale influenței lucrărilor de regularizare asupra procesului fluvial. Fără să intre în detaliile problemelor hidraulicei construcțiilor de regularizare (acestea sînt expuse în lucrările de specialitate) — autorul insistă asupra aspectelor principale ale problemei, tratate istoric: adică începînd cu discuția de la sfîrșitul secolului trecut între partizanii epiurilor și cei ai dragajelor și pînă la stadiul actual de dezvoltare a lucrărilor de regularizare pe fluviile Uniunii Sovietice.

În sfîrșit, se prezintă o metodică de modelare în laborator a proceselor fluviale, într-o formă îmbunătățită față de publicațiile precedente. Cartea are un index bibliografic cuprinzînd 47 de lucrări de bază, în domeniul hidraulicei albiilor.

Din cele arătate mai sus, rezultă că această ultimă lucrare a prof. M.A. Velicanov prezintă un interes deosebit pentru cei care se ocupă de studiul regularizării rîurilor. Însă anumite capitole cuprinse în lucrare pot interesa cercuri mai largi de hidraulicieni. În particular, capitolele în care sînt prezentate unele concluzii ale teoriei moderne a turbulenței precum și interpretarea acestora de către autor.

În esență, este vorba în primul rînd de analiza datelor experimentale asupra pulsațiilor de viteză și presiune în scurgerile turbulente, cu ajutorul statisticei matematice. Această idee nu poate trezi obiecții, mai ales în cazul scurgerilor în albii mobile de mari proporții, în care structura dinamică a curenților este determinată de o masă de combinații a unor factori interdependenți (repartiția firelor de curent, repartiția aluviunilor antrenate). De aceea studiul acestor procese necesită utilizarea aparatului matematic corespunzător analizei maselor de fenomene întîmplătoare, adică al statisticei matematice. Mai mult: prelucrarea unui bogat material factic pare să demonstreze scăderea rapidă a coeficientului de corelație al vitezelor în două puncte, cu distanța între aceste puncte; ceea ce ar duce la o concluzie de mare importanță practică și teoretică și anume, că pentru distanțe finite între două puncte în masa fluidului în mişcare, relația între valorile parametrilor mişcării în cele două puncte își pierde caracterul funcţional şi devine stohastică. Aceasta s-ar traduce prin imposibilitatea de a se descrie complet mişcarea turbulentă doar cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale şi al condiţiilor la limită şi ar justifica o dată în plus aplicarea metodelor statisticei matematice.

Al doilea moment important este descoperirea şi rolul hotărîtor, în procesele de albii, al vîrtejurilor de mari proporţii. Încă Reynolds stabilise că energia preluată de mişcarea pulsatorie dela cea medie (în regim staţionar) este în medie egală cu energia de pulsaţii care trece în căldură. Descompunerea cronogramelor de viteze în spectre după frecvenţe (funcţia spectrală se defineşte ca $f(w) = 4\int_0^\infty r(t) \cos \omega t \, dt$, unde t, este timpul, ω frecvenţa şi $r(t)$ coeficientul de corelaţie) pare să demonstreze un aspect care precizează teza precedentă şi anume : energia mişcării medii se transmite întîi pulsaţiilor de joasă frecvenţă (dar de mare amplitudine) şi de la aceasta trece la cele de înaltă frecvenţă (dar de dimensiuni mici). Această *descompunere* a vîrtejurilor ar avea loc pînă la o limită condiţionată de vîscozitatea fluidului respectiv. La această limită dimensiunile vîrtejurilor sînt prea mici pentru ca el să se dividă mai departe prin inerţie şi energia lor trece nemijlocit în căldură.

Independent de gradul de generalitate al tezelor lui Velicanov, cartea sa oferă un bogat material de reflectare, prezentat la un înalt nivel ştiinţific şi reprezintă una din puţinele încercări de legare a concluziilor empirice ale clasicilor hidraulicei fluviale, cu ultimele rezultate ale teoriei turbulenţei.

E. Răzvan

* * * *Nové príspevky k teórii stavebných konštrukcií* (Noi cercetări în teoria construcţiilor civile). Vydavatelstvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava, 1959, 606 pag.

Acest volum prezintă comunicările ţinute cu ocazia primului congres cehoslovac în domeniul teoriei construcţiilor civile, din 24—26 septembrie 1957. El a fost editat de către Academia slovacă de ştiinţe, sub îngrijirea membrilor corespondenţi, dr. ing. A. Turecký şi K. Havelka. Alături de lucrările specialiştilor cehi, remarcăm lucrări ale unor oameni de ştiinţă din R.P. Polonă şi a unui specialist din R.D.G., precum şi lucrări de sinteză a doi profesori din U.R.S.S.

Prima parte a volumului cuprinde comunicări din domeniul construcţiilor alcătuite din bare (probleme de statica şi dinamica construcţiilor). Astfel A. Turecký prezintă o trecere în revistă a metodelor de calcul ale cadrelor. I. M. Rabinovici (Moscova) arată în ce direcţie se îndreaptă cercetările sovietice în acest domeniu. A. P. Siniţîn (Moscova) studiază problema grinzilor pe un mediu elastic stratificat. Dintre diferitele lucrări cuprinse în această parte mai menţionăm *Calculul static şi dinamic al grinzilor continue de deschideri egale*, prezentat de Vl. Koloušek. Alte articole privesc calculul cadrelor sau calculul arcelor. Zd. Sobotka se ocupă astfel de calculul cadrelor în domeniul plastic.

A doua parte a cărţii, mai voluminoasă, se ocupă de construcţii alcătuite din corpuri continue (care din punct de vedere al calculului nu se pot reduce la probleme unidimensionale). J. Benda şi L. Mejzlík folosesc metoda diferenţelor finite, primul pentru a calcula plăci subţiri poligonale, cel de-al doilea pentru a rezolva anumite probleme legate de construcţii hidrotehnice ; de asemenea Z. Drahoňovský introduce o metodă de calcul asemănătoare pentru calculul unor plăci autoportante. J. Balaš se ocupă de determinarea stării de tensiune în gropi adînci de fundaţie iar J. Brilla îşi pune probleme analoage pentru un semiplan elastic anizotrop. W. Nowacki (Varşovia) se ocupă de stabilitatea plăcilor cilindrice subţiri iar W. Olszak şi A. Sawczuk (Varşovia) prezintă o lucrare de sinteză privind plăcile plane şi curbe subţiri neomogene şi anizotrope, în domeniul plastic. Menţionăm de asemenea articolul lui Z. Jiroušek privind o metodă grafică de calcul a problemei plane a teoriei elasticităţii, ca şi lucrarea lui V. Kolář privind calculul plăcilor plane dreptunghiulare cu goluri. A. Tesár se ocupă de influenţa deformaţiilor unghiulare asupra elementelor de construcţie.

În a treia parte a volumului se dau cîteva rezultate privind calculul pe modele. Remarcăm astfel un studiu privind comportarea podurilor oblice, făcut de H. Vogt (R. D. Germană), precum şi cercetările lui M. Cigánek în domeniul planşeelor ciuperci.

Fiecare parte a cărţii este însoţită de discuţii dezvoltate.

Este important de observat faptul că lucrările prezentate la acest congres au un pronunţat caracter teoretic. Ele sînt izvorîte însă din necesităţi practice şi sînt duse — în general — pînă la calcule numerice, pînă la posibilităţi de aplicare directă a rezultatelor.

Cartea prezintă un interes deosebit pentru inginerii constructori din ţara noastră, arătînd în special orientarea cercetărilor ştiinţifice în acest domeniu, în republica prietenă; lucrarea prezintă de asemenea interes şi prin faptul că unele direcţii de cercetare au fost abordate şi în ţara noastră.

P. P. Teodorescu

I. L. POVH, *Aerodinamiceskii experiment v maşinostroenii* (Experimentarea aerodinamică în domeniul construcţiilor de maşini). Maşghiz, Moskva—Leningrad 1959, 395 pag.

În cartea lui I. L. Povh sînt expuse metodica şi tehnica experimentării în instalaţii aerodinamice, cu aplicare la laboratoarele industriale sau de cercetări.

Nu este examinată tehnica experimentării aparatelor de zbor, lucrarea fiind orientată în direcţia încercărilor pentru organe de maşini.

În ultimii ani, aerodinamica experimentală, care a apărut şi s-a dezvoltat în legătură cu progresul aviaţiei, a căpătat o aplicare din ce în ce mai largă în diferite ramuri ale industriei, şi în primul rînd în ramura construcţiei de maşini.

Crearea unor maşini moderne ca : turbinele cu abur, cu gaze sau hidraulice, ventilatoare, compresoare, pompe, motoare cu ardere internă, cazane — nu este de conceput fără cercetarea minuţioasă a mişcării lichidelor sau gazelor în diversele lor organe. Studiul frecării şi uzurii maşinilor, studiul funcţionării diverselor lagăre, studiul răcirii unor agregate implică de asemenea cunoaşterea metodelor aerodinamicei experimentale.

Actualul stadiu al cunoştinţelor teoretice în domeniul mecanicii fluidelor nu permite rezolvarea problemelor practice, fără o verificare experimentală a rezultatelor. Acest lucru este valabil chiar în domeniul construcţiei de avioane, în care teoria este foarte dezvoltată.

Cartea cuprinde două părţi :

Prima (cap. I—V) este consacrată bazelor teoretice ale modelării proceselor studiate descrierii instalaţiilor experimentale şi metodelor proiectării acestora.

A doua parte (cap. VI—XII) prezintă bazele metodicei măsurătorilor pentru parametri caracteristici ai scurgerii (viteze, presiuni). Nu sînt tratate, probabil din cauza spaţiului limitat, problemele măsurării debitelor, temperaturilor, a forţelor, momentelor ş.a. De asemenea, nu sînt descrise tipurile existente de micromanometre.

Ultimul capitol este consacrat metodelor analogice, care au căpătat în ultimul timp o largă dezvoltare : analogia electrohidrodinamică şi analogia gazohidrodinamică.

Lucrarea se bazează pe o bogată bibliografie (173 de titluri) cuprinzînd cele mai recente lucrări de specialitate precum și pe o vastă experiență proprie a autorului.

O serie de capitole prezintă interes pentru cercuri mai largi de specialiști :

Astfel, într-un prim capitol, intitulat *Teoria similitudinii ca bază a modelării curenților*, se analizează influența asupra proceselor studiate, a diverselor numere caracteristice : Reynolds, Mach, Euler, Strouchal, Prandtl, Fronde ș.a.

Într-un capitol următor se descriu diversele tipuri de tunele aerodinamice, în special subsonice. Se dau apoi principiile de calcul și proiectare ale diverselor organe ale acestora : difuzori, confuzori, rețele, coturi.

De mare interes sînt și capitolele care prezintă ultimele realizări sovietice în domeniul aparaturii și metodicii de măsură a vitezelor și presiunilor. Sînt prezentate dispozitive pentru măsurarea vectorului vitezei în curenți paraleli sau spațiali, pentru măsurarea presiunilor asupra elementelor de rotație, precum și pentru măsurarea proceselor nestaționare.

În mod special, sînt tratate metodele fizice de măsurare a vitezelor și pulsațiilor de viteză : katatermometre și termoaneometre, anemometrele acustice.

Se dau o serie de dispozitive inedite de eliminare a influenței pierderilor prin frecare în lagăre, la încercarea mașinilor rotative.

În sfîrșit, după cum s-a menționat sînt prezentate două metode analogice și anume : analogia EGDA și analogia scurgerii hidroaerodinamice, folosite și la noi în cercetările hidrotehnice.

E. Răzvan

V. N. SELOACEV, *Razrabotka neftevodonosnîh plastov pri uprugom rejime* (Exploatarea stratelor petrolifere și acvifere în regim elastic). Gosudarstvenoe Naucino-Tehnicescoe Izdatelstvo Nefteanoi i Gorno Toplivnoi literaturî — Moskva 1959.

Profesorul V. N. Seloacev, cunoscut specialist în domeniul curgerii fluidelor prin medii poroase, aduce o prețioasă contribuție prin publicarea lucrării *Exploatarea stratelor petrolifere și acvifere în regim elastic.*

Importanța acestei cărți constă în aplicabilitatea teoriilor expuse la rezolvarea unor probleme fundamentale, de interes practic, necesare realizării unei exploatări raționale.

Scopul principal este descrierea și analiza particularităților de comportare a sondelor, stratelor petrolifere și acvifere în timpul exploatării, în cazul existenței regimului sus amintit.

În general, curgerea fluidelor în aceste condiții de exploatare este nestaționară și descrierea matematică conduce la rezolvarea unei ecuații parabolice, analoagă ecuației conductibilității termice, cu diferite condiții inițiale și la limită.

Materialul este complet și judicios expus introducînd progresiv pe cititor în problemele de bază ale teoriei exploatării în regim elastic. Acest lucru, ușurează mult înțelegerea problemelor tratate și contribuie la înlăturarea dificultăților inerente întîlnite în înțelegerea aspectelor fizice, extrem de complexe, care de obicei apar în alte lucrări similare, unde aceste probleme nu sînt tratate suficient de larg și profund, din acest punct de vedere.

Meritul autorului constă în faptul că a reușit să ne prezinte o lucrare de sinteză, care conține cele mai importante rezultate obținute în ultimul timp în acest domeniu, făcînd, în același timp, ca materialul expus să fie accesibil unui cerc larg de tehnicieni.

Astăzi utilitatea cunoașterii particularităților de curgere, care constituie premizele teoretice necesare elaborării metodelor de prevedere a comportării în timp într-un regim elastic al zăcămintelor cu o avansare a apelor din acviferul adiscent şi a metodelor de cercetare a sondelor în regim nestaţionar, a devenit unanim recunoscută.

Cartea oferă cititorului posibilitatea explicării unor fenomene observate în cursul exploatării sondelor şi totodată, în urma analizei critice a rezultatelor obţinute, ridică probleme noi pentru acei ce vor să adîncească studiul curgerii fluidelor compresibile prin medii poroase, în condiţiile exploatării zăcămintelor petrolifere.

Trebuie menţionat că aplicarea teoriilor expuse şi a rezultatelor prezentate în lucrare, la proiectarea exploatării primare, permite obţinerea unor concluzii teoretice şi practice extrem de importante.

Cu toate că lucrarea nu conţine o expunere matematică detaliată, cei interesaţi pot găsi, pentru aprofundarea acestor aspecte ale problemelor, indicaţii preţioase în literatura de specialitate redată într-o bogată bibliografie.

Lucrarea trebuie privită ca o primă etapă în dezvoltarea teoriei regimului elastic în exploatarea stratelor petrolifere şi acvifere. Din acest motiv, conţinutul şi forma de expunere a principalelor probleme se dezvoltă pe larg fără a se utiliza raţionamentele matematice, formulele fiind redate numai pentru înţelegerea şi explicarea anumitor concluzii strict necesare din punct de vedere fizic; rezolvarea lor efectuîndu-se plecînd de la analiza cazurilor simple la cele complexe.

Autorul îşi propune ca într-o viitoare lucrare să prezinte şi să analizeze detaliat, în mod critic, metodele matematice utilizate în soluţionarea problemelor hidrodinamice ale regimului elastic.

Capitolul I—VII şi X se referă la comportarea sondelor, stratelor petrolifere şi acvifere în timpul exploatării lor în cazul curgerii nestaţionare monofazice a unui lichid elastic printr-un mediu poros, omogen şi izotrop. Analiza metodelor speciale de cercetare hidrodinamică a sondelor, care au o importanţă deosebită în teoria exploatării, sînt tratate în capitolul IX.

Capitolul VIII este dedicat metodelor aproximative de rezolvare a problemelor legate de teoria regimului elastic.

În ceea ce priveşte capitolele XI—XIII, acestea trebuie privite ca o anexă la textul de bază.

Formularea matematică a fiecărei probleme cercetate anterior şi indicarea în linii generale a metodelor de rezolvare se redau în capitolul XIII.

Proprietăţile privind elasticitatea fluidelor conţinute în zăcămînt şi a mediului poros sînt examinate pe larg în capitolele XI şi XII.

În afară de acestea, în capitolul XII se trec în revistă toate cunoştinţele dobîndite în lumina cercetărilor efectuate pînă în prezent, referitoare la influenţa elasticităţii stratului şi lichidului asupra comportării acestuia în procesul de exploatare.

Unele capitole, de exemplu: I—III, VI, VII, X, XI şi o mare parte din capitolul III, pot servi ca bază de studiu atît pentru studenţi cît şi pentru elevii şcolilor medii de petrol.

Cartea conţine de asemenea numeroase tabele şi grafice, construite după formule frecvent utilizate, care uşurează mult efectuarea calculelor numerice extrem de laborioase.

H. Pascal şi *V. Dumitru*

* * *, *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berichte* (Institutul german de cercetări pentru aviaţie, Rapoarte). Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen.

Institutul german de cercetări pentru aviaţie publică rapoarte care conţin lucrări teoretice şi experimentale în domeniile ştiinţifice care au directă legătură cu problemele aviaţiei. În cele ce urmează, continuăm prezentarea unui grup de lucrări de mecanica fluidelor și aerodinamică din această serie, pe care am început-o într-un număr anterior al revistei.

Raportul nr. 23, publicat în 1956, cuprinde lucrarea *Über eine Hypothese, die den Mechanismus der Turbulenz-Entstehung betrifft* (Asupra unei ipoteze referitoare la mecanismul producerii turbulenții) de U. Domm. Autorul admite că undele Tollmien se transformă, prin concentrarea intensității turbionare, în vîrtejuri discrete. În cazul plăcii plane, tratat în lucrare, rezultă în felul acesta un șir de vîrtejuri în apropierea peretelui. Autorul dezvoltă calculele referitoare la stabilitatea acestui șir de vîrtejuri, trăgînd concluzia că echilibrul lui este instabil. Se ajunge astfel la formarea unor vîrtejuri de intensitate mai mare care generează turbulența.

În raportul nr. 34, publicat în 1957 cu titlul *Zahlentafeln universeller Funcktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten* (Tabele numerice ale funcțiilor universale ale noii serii pentru calculul straturilor limită laminare) H. Görtler prezintă tabelele numerice necesare pentru utilizarea practică a metodei pe care a propus-o în vederea determinării caracteristicilor scurgerii în stratul limită laminar staționar în fluidele incompresibile. Se schițează în introducere metoda, care a fost publicată în altă parte, reamintindu-se că aceasta se bazează pe o soluție formal exactă a problemei generale menționate mai sus. Această soluție conduce la reprezentarea funcției de curent sub forma unei serii, ai cărei coeficienți sînt chiar funcțiile universale tabulate în lucrare. La rîndul lor, funcțiile universale depind numai de un parametru geometric care este unghiul la vîrful amonte al corpului în jurul căruia se produce scurgerea. În tabele sînt date valorile numerice pentru 19 funcții și pentru derivatele lor de primele trei ordine, în trei cazuri și anume vîrf ascuțit, vîrf rotund și contur simetric, vîrf rotund și contur de formă oarecare.

Lucrarea *Die instationäre zweidimensionale Überschallströmung um eine plötzlich angestellte dünne Platte* (Scurgerea supersonică nestaționară bidimensională în jurul unei plăci subțiri care primește brusc o incidență) de I. Ryhming, formează raportul nr. 35, publicat în 1957. Este vorba de un studiu teoretic prin care se determină repartiția vitezelor pe o placă plană de lungime infinită, aflată într-un curent supersonic, care capătă brusc un unghi mic de incidență. Se ajunge la concluzia că vitezele de perturbație depind numai de raportul dintre coordonatele spațiale și timp. Se poate studia de asemenea în condiții bune situația din unda provocată de schimbarea unghiului de incidență al plăcii.

Raportul nr. 41, publicat în 1957, cuprinde lucrarea *Der Überdruck Windkanal in Aachen* (Sufleria cu suprapresiune din Aachen) de A. Naumann, A. Heyser și W. Trommsdorff. Se dă o descriere a acestei instalații, construită între anii 1952 și 1955 care funcționează cu intermitență, comportînd două compresoare cu piston de cîte 60 kW fiecare și o baterie de 24 rezervoare de presiune, cu o presiune admisibilă maximă de 250 atmosfere. Au fost prevăzute două camere de experiență, una verticală și una orizontală, dintre care s-a realizat inițial numai aceea verticală. Durata de funcționare este cuprinsă între 20 și 30 secunde, numărul lui Mach pentru camera verticală fiind 3,2, în timp ce în camera orizontală se speră să se atingă $M = 6$. În lucrare se dă și o estimare a performanțelor aerodinamice ale sufleriei, care pune în evidență influența condițiilor de lucru asupra constanței numărului lui Reynolds. Prezintă interes și descrierea ventilului care lucrează după un principiu nou, fiind în același timp ventil de închidere rapidă și organ de reglaj al presiunii. Aerul care trece prin suflerie este încălzit într-un schimbător de căldură încălzit la rîndul său cu gaze. Se dau și unele rezultate ale încercărilor preliminare.

Raportul nr. 43, publicat în 1957, conține lucrarea *Hitzdrahtmessungen in einer aufgespaltenen Kármánschen Wirbelstrasse* (Măsurători cu firul cald într-un șir de vîrtejuri Kármán separat) de O. Wehrmann. Este vorba de un studiu experimental asupra șirurilor de vîrtejuri alternate

Kármán în care s-a obţinut prin introducerea unei plăci subţiri de 0,1 mm grosime, separarea celor două şiruri de vîrtejuri. În felul acesta au putut fi executate măsurători de viteze, după ce în prealabil au fost stabilite criteriile de interpretare a semnalelor firului cald, care corespund nucleului unui vîrtej. Rezultatele au fost comparate cu soluţia dată de Oseen şi Hamel pentru creşterea în timp a vîrtejurilor reale, găsindu-se o bună concordanţă.

Studiul intitulat : *Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung nicht angestellter gepfeilter Flügel grosser Streckung bei kleiner Dicke in Unterschallströmung* (O metodă aproximativă pentru calculul repartiţiei vitezelor la aripile în săgeată subţiri de alungire mare, fără incidenţă, în curent supersonic) de F. Keune, este cuprins în raportul nr. 48, publicat în 1958. Soluţia se obţine prin adunarea la aceea corespunzătoare alungirii infinite a încă doi termeni şi anume unul corespunzător unei scurgeri bidimensionale în plane paralele cu direcţia mişcării în jurul aripii şi un altul care reprezintă o aşa-numită influenţă spaţială. Primul dintre aceşti termeni depinde de schimbarea formei profilului şi a coardei locale, în direcţia anvergurii iar al doilea este funcţie de variaţia repartiţiei suprafeţei profilului tot în direcţia anvergurii. Acest ultim termen este de altfel analog cu mişcarea laterală în jurul unei carene.

Efectul săgeţii este studiat pentru forme de aripi şi repartiţii de grosime cu caracter general. În cazul aripii în săgeată cu coardă şi grosime constantă în direcţia anvergurii, rezultatele referitoare la efectul săgeţii concordă cu cele date de soluţia exactă cunoscută.

Aplicarea regulei Prandtl-Glauert arată că aceasta nu dă rezultate corecte decît pentru aripile de alungire mare. Mai multe exemple de calcul, pentru diferite forme de aripi, au scopul de a arăta simplitatea metodei de calcul şi concordanţa cu soluţiile exacte.

Tot o lucrare de F. Keune şi anume *Flügel kleiner Streckung mit kleiner Dicke bei Nullauftrieb* in *Unter- und Überschallströmung* (Aripi de alungire mică subţiri la portanţă nulă în curent sub- şi supersonic) este conţinută în raportul nr. 50, publicat în 1958. Metoda de studiu este asemănătoare cu aceea utilizată în lucrarea precedentă. Scurgerea se compune din două părţi şi anume o scurgere bidimensională în plane normale pe direcţia de zbor, aceeaşi pentru cazul subsonic şi pentru cel supersonic şi o aşa-numită influenţă spaţială care depinde numai de variaţia secţiunii aripii în direcţia coardei (normal pe direcţia de zbor).

Scurgerea bidimensională se obţine cu ajutorul unei distribuţii de surse în plan, în timp ce influenţa spaţială, care dă diferenţa caracteristică între scurgerea subsonică şi cea supersonică, este o mişcare indusă de o distribuţie de surse pe axa Ox a aripii (axa paralelă cu direcţia de zbor). Această ultimă scurgere poate fi calculată cu ajutorul datelor geometrice ale aripii.

Influenţa compresibilităţii asupra repartiţiei vitezelor este reprezentată printr-un termen aditiv, proporţional cu logaritmul factorului Prandtl-Glauert. Mai multe exemple numerice, pentru diferite forme de aripi, sînt calculate în vederea comparării cu rezultatele exacte cunoscute. Se arată că se obţine o bună concordanţă, avantajul metodei propuse constînd în simplitatea calculelor.

Raportul nr. 51, publicat în 1958, cuprinde lucrarea *Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil* (Unda de şoc normală pe un profil curb) de J. Zierep. Se studiază unda de şoc ce se naşte pe un perete curb, în cazul unei scurgeri staţionare. Se determină forma geometrică a undei în apropierea profilului şi caracteristicile scurgerii în vecinătatea peretelui şi a undei de şoc. Rezultatele constituie şi o justificare teoretică a unui efect observat la profilele convexe, pe cale experimentală, cu mai mulţi ani în urmă.

T. Oroveanu

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

* * * A. B. REZNIAKOV, *Metod podobiia*. Izdat. Akad. Nauk Kazahskoi SSR. Alma Ata 1959, 151 p.

* * * *Materiali IV Vsesoiuznoi Conferenții po selevim potokam*. Alma Ata, 1959, 231 p.

* * * *II Vsesoiuznaia Topologhiceskaia Konferențiia*. Tbilisi, 1959, 53 p.

* * * *Trudi Tallinskogo Politehniceskogo Instituta*. Vîp. 167, 168, 1959.

* * * *Trudi, Moskovskii ord. Trudovogo Krasnogo Znameni Institut Neftehimiceskoi i Gazovoi Promîșlennosti im.* Gubkina. Vîp. 25, 26, 1959.

* * * *Trudi Tbiliceskogo Matematicskogo Instituta*. Vîp. XXVI, 1959.

* * * *Trudi Kazahskoi Aviaționnoi Instituta*. Vîp. 45, 46, 48, 49, 50.

H. PFEIFER, *Elektronisches Rauschen*. Teil I. Verlag Technik, Berlin, 1959, 302 p.

* * * *Leonhard Euler, 1707—1957. Zum 250. Geburtstag*. Redactor responsabil : Kurt Schröder Akademie-Verlag, Berlin, 1959, 336 p.

* * * *Rheology of Disperse Systems*. Proceedings of a conference organised by the British Society of Rheology, Edited by C. C. Mill, Pergamon Press, London, 1959, 223 p.

* * * *The Rheology of Elastomers*. Proceedings of a conference organized by the British Society of Rheology, 1957. Pergamon Press, London, 1959, 202 p.

* * * *Advances in Aeronautical Science*. Proceedings of the Ist International Congress of the Aeronautical Sciences. Madrid. Vol. I, 562 p. ; Vol. II, 1144 p. ; Pergamon Press. London, 1959.

* * * *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt*. Berichte. No. 105, 110, 117, 118, 119, 120, 123, 1959.

* * * *Flugtekniske Försöksanstalten*. (Suedia). Reports No. 22, 23, 25—50, 51—64, 66—85.

Disertații Institutul Politehnic Aachen

P. WERNER, *Zur mathematischen Theorie akustische Wellenfelder*. 1959, 97 p.

J. BIELEFELD, *Über die Starrheit von Werkzeugmaschinengestellen*. 1959, 81 p.

K. H. KARSCH, *Über das mechanische und thermische Verhalten der Alkaliboratgläser*. 1959, 74 p.

K. E. SCHWARTZ, *Zerspannungsablauf una Schleifergebnis beim Aussenrundschleifen*. 1959, 96 p.

W. BARKÉ, *Untersuchungen an stetigen und unstetigen Nachformsystemen für Drehmaschinen*. 1959, 150 p.

G. STUTE, *Ausnutzung elektrischer Entladungen zur Metallbearbeitung*. 1959, 110 p.

W. W. AMELING, *Eine neue Rechenmethode zur Lösung der Stabilitätsgleichung der Synchronmaschine*. 1958, 98 p.

H. STEFFEN, *Die Vibrationsverdichtung bitumöser Beläge*. 1959, 113 p.

H. RINKENS, *Kabrische und mikroskopische Untersuchungen zur Kristallisation von Hochpolymeren*. 1959, 63 p.

K. FISCHER, *Die Berechnung der freien Energie und der Struktur von Kristallen mit Fehlstellen*. 1959, 40 p.

B. FRANZEN, *Vergleich von Korona- und Hitzdrahtmanometer durch Messung von Turbulenz-Spektren*. 1959, 60 p.

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

4
ANUL XI
1960

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membrii :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie Bucureşti ;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic Bucureşti ;

M. ARCAN, şef secţie la Institutul de cercetări în construcţie şi economia construcţiilor (INCERC).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille, 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări științifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*).

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 4 1960

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE, Aripa triunghiulară subţire, de rezistenţă minimă în curent supersonic 817
AL. MARINESCU, Stabilitatea dinamică a convertoplanelor în evoluţii frecvente de zbor 835

HIDROMECANICĂ

T. OROVEANU, Asupra dezlocuirii lichid-lichid, într-un mediu poros 847
V. MANEA, O extindere a domeniului de utilizare a legii Darcy 865
S. HÎNCU, Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu pantă de fund 877

UNGERE–FRECARE—UZURĂ

N. TIPEI, Problema bidimensională a lubrificaţiei în regim turbulent incompresibil, în cazul viscozităţii variabile 883
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra comportării dinamice a lagărelor cu aer 893

ELASTICITATE–PLASTICITATE–REZISTENŢA MATERIALELOR

J. BRILLA, Probleme la limită mixte pentru plăcile anizotrope 909
P. P. TEODORESCU, Asupra unor sisteme infinite de ecuaţii liniare care intervin în problema plană a teoriei elasticităţii pentru un domeniu dreptunghiular . . . 925
LIVIU LIBRESCU, Asupra teoriei structurilor subţiri construite din straturi elastice 937
HOREA SANDI, Ecuaţiile barelor subţiri elastice. II 957

TEHNOLOGIA MEDIILOR CONTINUE SOLIDE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU, Rezistenţa la uzură a sculei în funcţie de parametrii geometrici ai acesteia 983

VIBRAŢII

Pag.

ANDREI RIPIANU, Determinarea pulsaţiilor proprii corespunzătoare vibraţiilor de torsiune a arborilor cotiţi 997

E. PROCOPOVICI, Măsurarea vibraţiilor şi şocurilor mecanice cu traductori capacitivi 1019

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

K. K. PONOMAREV, O metodă matricială pentru calculul vibraţiilor cadrelor . . . 1027

CEZAR AMZULESCU, Asupra unor formule practice pentru calculul învelitorilor circulare cilindrice 1037

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE 1069

RECENZII 1071

| Prof. dr. ing. A. BĂRGLĂZAN | 1077

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1079

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI, № 4 1960

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

Стр.

Э. КАРАФОЛИ и А. НЭСТАСЕ, Тонкое треугольное крыло минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке 817

А. МАРИНЕСКУ, Динамическая устойчивость конвертопланов при обычных режимах полета 835

ГИДРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ, О вытеснении жидкости другой жидкостью в пористой среде 847

В. МАНЯ, Распространение области применимости закона Дарси 865

С. ХЫНКУ, Определение длины стабилизации движения жидкостей со свободной поверхностью в широких каналах с донным уклоном 877

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ, Двухмерная задача смазки в несжимаемом турбулентном режиме при переменной вязкости 883

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О динамическом поведении воздушных подшипников 893

УПРУГОСТЬ—ПЛАСТИЧНОСТЬ—СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ж. БРИЛЛА, Смешанные граничные задачи для анизотропных пластинок 909

П. П. ТЕОДОРЕСКУ, О некоторых бесконечных системах линейных уравнений, встречающихся в плоской задаче теории упругости для прямоугольной области 925

Л. ЛИБРЕСКУ, К теории тонких оболочек, составленных из упругих слоев 937

Х. САНДИ, Уравнения упругих тонких стержней (II) 957

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. П. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Износоустойчивость инструмента в зависимости от его геометрических параметров 983

ВИБРАЦИИ Стр.

А. РЫПЯНУ, Определение собственных пульсаций, соответствующих крутильным колебаниям коленчатых валов 997

Е. ПРОКОПОВИЧ, Измерение колебаний и механических ударов при помощи емкостных датчиков 1019

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

К. К. ПОНОМАРЕВ, Матричный прием расчета колебаний рам 1027

Ч. АМЗУЛЕСКУ, О некоторых практических формулах для расчета круглых цилиндрических оболочек 1037

НАУЧНЫЕ СЪЕЗДЫ И СОВЕЩАНИЯ 1069

РЕЦЕНЗИИ 1071

Проф. д-р инж. А. БЭРГЛЭЗАН 1077

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 1079

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„*РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*"

публикует :

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie :

— des études originales *à caractère hautement scientifique, des recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— des notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— des exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau ; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée;*

— des notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— *Aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)* ;

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction)* ;

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, nº 4 1960

SOMMAIRE

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

Page

ELIE CARAFOLI et ADRIANA NĂSTASE, L'aile triangulaire mince à traînée minimum, en courant supersonique 817

AL. MARINESCU, Stabilité dynamique des convertoplanes en évolutions fréquentes de vol. 835

HYDROMÉCANIQUE

T. OROVEANU, Sur le déplacement liquide-liquide dans un milieu poreux 847

V. MANEA, Une extension du domaine d'utilisation de la loi de Darcy 865

S. HÎNCU, Determination of the stabilizing length of the motion of fluids with free surface in large channels with bottom slope 877

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

N. TIPEI, The two-dimensional problem of incompressible turbulent lubrication in case of variable viscosity 883

V. N. CONSTANTINESCU, Sur le comportement dynamique des paliers à air . . . 893

ÉLASTICITÉ—PLASTICITÉ—RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

J. BRILLA, Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten 909

P. P. TEODORESCU, Sur quelques systèmes infinis d'équations linéaires qui interviennent dans le problème plan de la théorie de l'élasticité pour un domaine rectangulaire 925

LIVIU LIBRESCU, Sur la théorie des structures minces, construites par des couches élastiques 937

HOREA SANDI, Équations des barres minces élastiques. II 957

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. P. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, La résistance à l'usure d'un outil en fonction de ses paramètres géométriques 983

VIBRATIONS

Page

ANDREI RIPIANU, Determination of the natural frequency of torsional vibrations of crankshafts 997

E. PROCOPOVICI, La mesure des vibrations et des chocs mécaniques au moyen de traducteurs capacitifs 1019

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

K. K. PONOMAREV, Une méthode matricielle pour le calcul des vibrations des cadres 1027

CEZAR AMZULESCU, Considérations sur quelques formules pratiques pour le calcul des coques cylindriques circulaires 1037

VIE SCIENTIFIQUE 1069

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1071

Prof. dr. ing. A. BĂRGLĂZAN 1077

LIVRES REÇUS DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 1079

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

AEROMECANICĂ

ARIPA TRIUNGHIULARĂ SUBȚIRE, DE REZISTENȚĂ MINIMĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

ELIE CARAFOLI și ADRIANA NĂSTASE

În această lucrare, ne propunem să determinăm forma suprafeței aripii triunghiulare nesimetrice subțiri (fig. 1), avînd rezistența de undă minimă, la care sînt date portanța, momentul de picaj și proiecția în plan.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

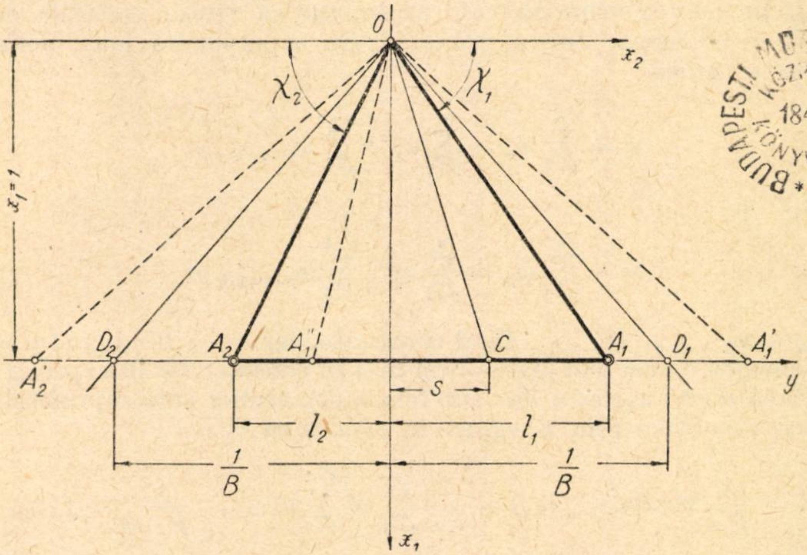


Fig. 1

Tratînd aripa triunghiulară nesimetrică, am luat astfel în considerare cazul general care poate fi aplicat apoi la cazul aripilor delta, la aripile poligonale, sau la cazul aripilor trapezoidale, aşa cum s-a făcut de altfel într-o lucrare anterioară [1].

Continuînd mai departe generalizarea, vom considera că există în plus pe aripă o muchie de separaţie OC (fig. 1), care va putea fi eventual luată ca şarniera unui volet de bord de atac.

În calculul rezistenţei la înaintare s-au inclus şi forţele de succiune care apar pe bordurile de atac subsonice.

Nu s-a ţinut seamă de efectul de frecare.

Problema aripii de rezistenţă minimă a mai făcut obiectul a numeroase cercetări utilizînd diferite metode, dintre care menţionăm : metoda armonică [2], [3], [4], [5], [6], metoda tăieturilor [7], metoda variaţională [8], [9], [10], [11], [12] etc.

Metoda variaţională, care se pretează mai bine la aplicaţiile practice şi pe care o vom utiliza şi noi, a fost aplicată în cazul aripilor delta şi al aripilor simetrice în formă de coadă de rîndunică sau de formă rombică [8], [9], [11].

Vom porni de la expresia generală a vitezei axiale de perturbaţie u, dată în [13]. Considerarea acestei reprezentări ne-a permis să sistematizăm în aşa fel problema studiului aripilor triunghiulare cu muchie de separaţie de rezistenţă minimă, încît ea să depindă de efectuarea unui singur tip de integrală, pe care o vom nota cu I_k şi pentru care s-a dat o formulă de recurenţă algebrică simplă.

Considerăm un sistem de axe $Ox_1x_2x_3$, Ox_1 fiind paralelă cu curentul de la infinit U_∞, iar aripa fiind presupusă aplatisată în planul Ox_1x_2 (fig. 1). În cele ce urmează vom presupune că viteza verticală de perturbaţie w pe aripă, este exprimată prin superpoziţia unor polinoame omogene w_p adică

$$w = \sum_{p=1}^{n} w_p = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{q=0}^{p-1} w_{p-q-1,q}\, y^q \tag{1}$$

pe OA_1C şi

$$\overline{w} = \sum_{p=1}^{n} \overline{w}_p = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{q=0}^{p-1} \overline{w}_{p-q-1,q}\, y^q \tag{2}$$

pe OA_2C, $w_{p-q-1,q}$, $\overline{w}_{p-q-1,q}$ fiind constante, iar $n-1$ fiind gradul polinomului omogen de cel mai mare ordin luat în consideraţie în expresia lui w.

Dacă $w(x_1, x_2)$ este dat sub forma (1), atunci cota suprafeţei aripii $Z(x_1, x_2)$ se obţine prin integrare în raport cu x_1,

$$Z = \frac{1}{U_\infty}\int w\, dx_1 + f(x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{p=1}^{n} x_1^{p} \sum_{q=0}^{p-1} w_{p-q-1,q}\, \frac{y^q}{p-q} + f(x_2) \tag{3}$$

unde $f(x_2)$ este o funcţie arbitrară de x_2, care ne va putea folosi pentru a pune eventuale condiţii pe bordurile aripii. O formulă analogă obţinem pentru $\overline{Z}$ înlocuind în (3), w prin $\overline{w}$ dat de (2) şi f prin $\overline{f}$, o altă funcţie arbitrară de x_2.

Considerînd w de forma (1), (2), s-au obținut în [13] pentru aripile triunghiulare prevăzute cu muchie de separație, următoarele expresii pentru viteza axială de perturbație u pe aripă

$$u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_2 + s)(l_1 - y)}{(l_1 + l_2)(s - y)}} \right] \tag{4}$$

pentru aripa subțire cu ambele borduri subsonice,

$$u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{(1 + By)(l_1 - y)}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(1,p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(l_1 - y)}{(1 + Bl_1)(s - y)}} + \right.$$

$$\left. + \delta_k^{(p)} A_k^{(2p)} y^k \arccos \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1 + By)}{(1 + Bl_1)(y + l_2)}} \right] \tag{5}$$

pentru aripa subțire cu un bord de atac subsonic și cu celălalt supersonic și

$$u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(1,p)} y^k \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - By)}{2B(l_1 - y)}} + \right.$$

$$+ \delta_k^{p} A_k^{(2p)} y^k \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + By)}{2B(l_2 + y)}} +$$

$$\left. + \delta_k^{(p)} A_k^{(p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - By)}{2B(s - y)}} \right] \tag{6}$$

pentru aripa subțire cu ambele borduri de atac supersonice. În formulele (4) – (6) $\delta_k^{(p)}$ are următoarea semnificație :

$$\delta_k^{(p)} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } k \neq p \ ^{*)} \\ 0 \text{ pentru } k = p \end{cases}$$

l_1, l_2, s definesc pozițiile bordurilor OA_1 și OA_2 și a muchiei OC pe axa Oy (vezi fig. 1), $y = \dfrac{x_2}{x_1}$ iar $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

De asemenea, menționăm că în relațiile (5) și (6) am dat primului termen o formă convenabilă, spre a putea sistematiza mai bine calculul caracterististicilor aerodinamice (vezi anexa).

Relațiile dintre coeficienții vitezei axiale de perturbație u și cei ai vitezei verticale de perturbație w și $\overline{w}$ fiind liniare și perfect determinate sub forma indicată în lucrările noastre anterioare [13], [14] vom putea scrie

$$G_k^{(p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(g_{kj}^{(p)} w_{p-j-1,j} + \overline{g}_{kj}^{(p)} \overline{w}_{p-j-1,j} \right) \tag{7 a}$$

$$A_k^{(p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(a_{kj}^{(p)} w_{p-j-1,j} + \overline{a}_{kj}^{(p)} \overline{w}_{p-j-1,j} \right) \tag{7 b}$$

$$A_k^{(1,p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(a_{kj}^{(1,p)} w_{p-j-1,j} + \overline{a}_{kj}^{(1,p)} \overline{w}_{p-j-1,j} \right) \tag{7 c}$$

$$A_k^{(2,p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(a_{kj}^{(2,p)} w_{p-j-1,j} + \overline{a}_{kj}^{(2,p)} \overline{w}_{p-j-1,j} \right) \tag{7 d}$$

---

*) $\delta_k^{(p)} = 1 - \delta_k^p$ unde δ_k^p este simbolul lui Kroenecker.

în care $g_{kj}^{(p)}$, $\bar{g}_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(p)}$ $\bar{a}_{kj}^{(p)}$ etc., sînt funcții de forma în plan a aripii (l_1, l_2), de poziția muchiei (s), de numărul Mach și sînt calculați o dată pentru totdeauna, separat pentru fiecare din cazurile (4), (5), și (6).

Rezultă că, pentru a găsi o aripă de rezistență minimă, trebuie să determinăm coeficienții $w_{p-j-1,j}$ și $\bar{w}_{p-j-1,j}$, care intervin în expresia lui w și $\bar{w}$. Trebuie găsit deci

$$c_x + c_s = \text{minim} \tag{8}$$

cu condițiile

$$c_z = \text{constant}, \quad c_m = \text{constant}. \tag{9}$$

Această problemă de extremum cu legături se poate reduce la calculul extremumului fără legături a expresiei

$$H = (c_x + c_s) + \lambda_1 c_z + \lambda_2 c_m \tag{10}$$

unde λ_1 și λ_2 sînt multiplicatorii lui Lagrange.

Expresia extremumului funcției H se obține anulînd prima variație a sa $\delta H = 0$.

În cele ce urmează, vom determina caracteristicile aerodinamice ale aripilor subțiri cu ambele borduri subsonice și vom vedea apoi ce modificări trebuie aduse rezultatelor pentru cazul aripilor cu un bord sau cu ambele borduri supersonice.

a. Aripa triunghiulară cu ambele borduri de atac subsonice

Expresia coeficientului de portanță pentru aripile triunghiulare este următoarea :

$$c_z = \frac{8}{U_\infty (l_1 + l_2)} \int_{OA_1A_2} u x_1 \, dx_1 \, dy, \tag{11}$$

ținînd seamă de expresia (4) a lui u, condiția c_z = const. devine

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-1} (\Lambda_{pj} w_{p-j-1,j} + \bar{\Lambda}_{pj} \bar{w}_{p-j-1,j}) = \frac{c_z (l_1 + l_2) U_\infty}{8\pi} = \text{const.}, \tag{12}$$

unde

$$\Lambda_{pj} = \frac{1}{\pi (p+1)} \sum_{k=0}^{p} \left[g_{kj}^{(p)} \mathcal{J}_k + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(p)}}{k+1} \mathcal{K}_k \right], \tag{13}$$

iar $\mathcal{J}_k$ și $\mathcal{K}_k$ au semnificația din anexă (A 6) și (A 17). În ceea ce privește $\bar{\Lambda}_{pj}$ acesta se obține din Λ_{pj} înlocuind pe $g_{kj}^{(p)}$ și $a_{kj}^{(p)}$ cu corespondentele lor barate.

În mod analog, coeficientul de tangaj este

$$c_m = \frac{8}{U_\infty (l_1 + l_2)^2} \int_{OA_1A_2} u x_1^2 \, dx_1 \, dy, \tag{14}$$

folosind expresia (4) a lui u condiția $c_m = \text{const.}$ devine

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{p+1}{p+2}\left(\Lambda_{pj}\, w_{p-j-1,\,j} + \overline{\Lambda}_{pj}\, \overline{w}_{p-j-1,\,i}\right) = \frac{c_m U_\infty (l_1 + l_2)^2}{8\pi} = \text{const.} \tag{15}$$

Calculul rezistenței de undă. Expresia coeficientului de rezistență este

$$c_x = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)}\left[\int_{.OA_1C} w u x_1\, dx_1\, dy + \int_{.OA_2C} \overline{w} u x_1\, dx_1\, dy\right]. \tag{16}$$

Dacă ținem seama de (1), (2), și (4) obținem următoarea expresie pentru coeficientul de rezistență :

$$\begin{aligned} c_x = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{q=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{p-1}\big[&\Omega_{prqj}\, w_{r-q-1,\,q}\, w_{p-j-1,\,j} + \Omega_{prqj}^{(1)}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q}\, w_{p-j-1,\,j} + \\ &+ \overline{\Omega}_{prqj}\, w_{r-q-1,\,q}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j} + \overline{\Omega}_{prqj}^{(1)}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j}\big], \end{aligned} \tag{17}$$

în care

$$\Omega_{prqj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(p + r)}\sum_{k=0}^{p}\left[g_{kj}^{(p)}\, \mathcal{J}_{k+q}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(p)}}{k+q+1}\, \widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}(s)\right], \tag{18 a}$$

$$\Omega_{prqj}^{(1)} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(p + r)}\sum_{k=0}^{p}\left[g_{kj}^{(p)}\, \mathcal{J}_{k+q}^{(1)}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(p)}}{k+q+1}\, \widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{(1)}(s)\right], \tag{18 b}$$

unde $\mathcal{J}_{k+q}(s)$ $\mathcal{J}_{k+q}^{(1)}(s)$ $\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}(s)$ $\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{(1)}(s)$ au respectiv semnificațiile din (A 9), (A 12), (A 29) și (A 32) iar $\overline{\Omega}_{prqj}$ și $\overline{\Omega}_{prqj}^{(1)}$ se obțin din Ω_{prqj} și respectiv $\Omega_{prqj}^{(1)}$ înlocuind $g_{kj}^{(p)}$ și $a_{kj}^{(p)}$ prin corespondentele lor barate.

Expresia coeficientului de succiune o obținem în același mod ca în lucrarea [15]. Dacă ținem seama de succiunea ambelor borduri pentru toate mișcările omogene pînă la ordinul n obținem următoarea expresie a coeficientului total de succiune :

$$\begin{aligned} c_s = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{q=0}^{r-1}\big[&\Delta_{prqj}\, w_{p-j-1,\,j}\, w_{r-q-1,\,q} + \Delta_{prqj}^{(1)}\, w_{p-j-1,\,j}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q} + \\ &+ \overline{\Delta}_{prqj}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j}\, w_{r-q-1,\,q} + \overline{\Delta}_{prqj}^{(1)}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q}\big], \end{aligned} \tag{19}$$

unde

$$\Delta_{prqj} = \frac{1}{p+r}\sum_{k=0}^{p}\sum_{k'=0}^{r}\left[S_1 l_1^{k+k'} + (-1)^{k+k'}\, l_2^{k+k'} S_2\right] g_{kj}^{(p)}\, g_{k'q}^{(r)} \tag{20}$$

iar

$$S_1 = -\frac{4\pi}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)^2 \cos\chi_1}\sqrt{\frac{1 - B^2 l_1^2}{1 + l_1^2}};$$

$$S_2 = -\frac{4\pi}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)^2 \cos\chi_2}\sqrt{\frac{1 - B^2 l_2^2}{1 + l_2^2}} \tag{21}$$

χ_1 și χ_2 fiind unghiurile bordurilor de atac OA_1 și OA_2 cu axa Ox_2 iar $\Delta_{prqj}^{(1)}$ $\overline{\Delta}_{prqj}$ și $\overline{\Delta}_{prqj}^{(1)}$ se obțin din Δ_{prqj} înlocuind unul din coeficienții $g_{k'q}^{(r)}$, $g_{kj}^{(p)}$ sau respectiv ambii coeficienți prin corespondenții lor barați.

b. **Aripa subțire cu un bord de atac subsonic și cu altul supersonic**

În acest caz pornim de la expresia (5) a lui u care se prelungește în afara conului Mach la stînga sub forma

$$u = \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2p)} w_{p-j-1,j}\, y^k \,. \tag{22}$$

Condiția c_z = const. are tot forma (12) în care însă se înlocuiesc expresiile Λ_{pj} cu corespondentele lor stelate care au expresia

$$\overset{*}{\Lambda}_{pj} = \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=0}^{p} \left\{ g_{kj}^{(p)} \overset{*}{\mathcal{J}}_k + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(1,p)}}{k+1} \overset{*}{\mathcal{K}}_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2p)}}{k+1} \left[\frac{\pi(-1)^k l_2^{k+1}}{2} + \mathcal{K}_{k,1}^{(*)} \right] \right\}, \tag{23}$$

unde $\overset{*}{\mathcal{J}}_k$, $\overset{*}{\mathcal{K}}_k$ și $\mathcal{K}_{k,1}^{(*)}$ au semnificația din (A 7), (A 18) și (A 20) iar $\overline{\overset{*}{\Lambda}}_{pj}$ se obține $\overset{*}{\Lambda}_{pj}$ înlocuind $g_{kj}^{(p)}$ $a_{kj}^{(1,p)}$ și $a_{kj}^{(2p)}$ prin corespondentele lor barate.

Pentru condiția c_m = const. facem aceleași observații și înlocuiri ca și pentru condiția c_z = const.

Coeficientul de rezistență are aceeași formă ca și (17) cu observația că toate expresiile Ω_{prqj} se înlocuiesc cu corespondentele lor stelate care au următoarele forme:

$$\overset{*}{\Omega}_{prqj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(r+p)} \sum_{k=0}^{p} \left[g_{kj}^{(p)} \overset{*}{\mathcal{J}}_{k+q}(s) + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(1p)}}{k+q+1} \overset{*}{\widetilde{\mathcal{K}}}_{k+q}(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q,1}^{(*)}(s) - s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bs)}{(1+Bl_1)(s+l_2)}} \right) \right], \tag{24 a}$$

$$\Omega_{prqj}^{*(1)} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(r+p)} \sum_{k=0}^{p} \left[g_{kj}^{(p)} \mathcal{J}_{k+q}^{*(1)}(s) + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(1,p)}}{k+q+1} \widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{*(1)}(s) + \right.$$

$$+ \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q,1}^{(*)(1)}(s) + \frac{1}{2} \pi (-1)^{q+k} l_2^{k+q+1} + \right.$$

$$\left. \left. + s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bs)}{(1+Bl_1)(s+l_2)}} \right) \right] \tag{24 b}$$

unde $\mathcal{J}^{*}_{k+q}(s)$, $\mathcal{J}^{*(1)}_{k+q}(s)$, $\widetilde{\mathcal{K}}^{*}_{k+q}(s)$, $\widetilde{\mathcal{K}}^{*(1)}_{k+q}(s)$, $\mathcal{K}^{(*)}_{k+q,1}(s)$ și $\mathcal{K}^{(*)(1)}_{k+q,1}(s)$ au semnificațiile din (A 10), (A 13), (A 30), (A 33), (A 23) și (A 26) iar $\overline{\Omega}^{*}_{prqj}$ și $\Omega^{*(1)}_{prqj}$ se obțin din Ω^{*}_{prqj} și $\Omega^{*(1)}_{prqj}$ înlocuind $g^{(p)}_{kj}$, $a^{(1,p)}_{kj}$ și $a^{(2,p)}_{kj}$ prin corespondentele lor barate.

Expresia coeficientului de succiune este datorită în acest caz doar bordului subsonic și are o formă similară cu (19) în care însă înlocuim expresiile Δ_{prqj} cu corespondentele lor stelate care au în acest caz forma

$$\Delta^{*}_{prqj} = \frac{1}{p+r} \sum_{k=0}^{p} \sum_{k'=0}^{r} S_1 l_1^{k+k'} g^{(p)}_{kj} g^{(r)}_{k'q}, \tag{25}$$

unde

$$S_1 = -\frac{4\pi}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(1 + Bl_1)\cos\chi_1} \sqrt{\frac{1 - B^2 l_1^2}{1 + l_1^2}}. \tag{26}$$

În mod analog Δ^{*}_{prqj} $\overline{\Delta}^{*}_{prqj}$ și $\overline{\Delta}^{*(1)}_{prqj}$ se obțin înlocuind în Δ^{*}_{prqj} pe unul din coeficienții $g^{(r)}_{k'q}$ $g^{(p)}_{kj}$ sau respectiv ambii coeficienți prin corespondenții lor barați.

c. Aripa subțire cu ambele borduri de atac supersonice

Pornim de la expresia (6) a lui u și ținem seamă că ea se prelungește în afara conului Mach în stînga, cu o expresie de forma (22), iar în dreapta cu o expresie similară care se obține înlocuind în (22) $a^{(2,p)}_{kj}$ cu $a^{(1p)}_{kj}$.

Cu aceste observații condiția $c_z = \text{const.}$ se obține înlocuind în (12) expresiile Λ_{pj} prin corespondentele lor dublu stelate care au următoarea expresie:

$$\begin{aligned}\Lambda^{**}_{pj} = \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=0}^{p} \Bigg\{ & g^{(p)}_{kj} \mathcal{J}^{**}_{k} + \frac{\delta^{(p)}_{k} a^{(1,p)}_{kj}}{k+1} \left[\frac{\pi l_1^{k+1}}{2} + \mathcal{K}^{(**)}_{k} \right] + \\ & + \frac{\delta^{(p)}_{k} a^{(2,p)}_{kj}}{k+1} \left[\frac{\pi(-1)^k l_2^{k+1}}{2} + \mathcal{K}^{(**)}_{k,1} \right] + \frac{\delta^{(p)}_{k} a^{(p)}_{kj}}{k+1} \mathcal{K}^{**}_{k} \Bigg\}\end{aligned} \tag{27}$$

unde $\mathcal{J}^{**}_{k}$, $\mathcal{K}^{(**)}_{k}$, $\mathcal{K}^{(**)}_{k,1}$ și $\mathcal{K}^{**}_{k}$ au semnificația din (A 8), (A 21), (A 22) și (A 19) iar $\overline{\Lambda}_{pj}$ se obține din Λ_{pj} înlocuind $g^{(p)}_{kj}$, $a^{(1,p)}_{kj}$, $a^{(2,p)}_{kj}$ și $a^{(p)}_{kj}$ cu corespondentele lor barate.

Observațiile făcute pentru $c_z = \text{const.}$ rămîn valabile și pentru condiția $c_m = \text{const.}$

Analog, coeficientul de rezistență se obține înlocuind expresiile Ω_{prqj} cu corespondentele lor dublu stelate care au următoarea semnificație :

$$\Omega_{prqj}^{**} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(r + p)} \sum_{k=0}^{p} \Bigg[g_{kj}^{(p)} \mathcal{J}_{k+q}^{**}(s) + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(p)}}{k+q+1} \widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{**}(s) +$$

$$+ \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(1,p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q}^{(**)}(s) + \frac{\pi l_1^{k+q+1}}{2} - s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B(l_1 - s)}} \right) +$$

$$+ \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2,p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q,1}^{(**)}(s) - s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bs)}{2B(l_2 + s)}} \right) \Bigg] \qquad (28\ a)$$

$$\Omega_{prqj}^{**(1)} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(r + p)} \sum_{k=0}^{p} \Bigg[g_{kj}^{(p)} \mathcal{J}_{k+q}^{**(1)}(s) + \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(p)}}{k+q+1} \widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{**(1)}(s) +$$

$$+ \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(1,p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q}^{(**)(1)}(s) + s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B(l_1 - s)}} \right) +$$

$$+ \frac{\delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2,p)}}{k+q+1} \left(\mathcal{K}_{k+q,1}^{(**)(1)}(s) + s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bs)}{2B(l_2 + s)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi (-1)^{k+q} l_2^{k+q+1}}{2} \right) \Bigg], \qquad (28\ b)$$

unde $\mathcal{J}_{k+q}^{**}(s)$, $\mathcal{J}_{k+q}^{**(1)}(s)$ $\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{**}(s)$, $\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q}^{**(1)}(s)$ $\mathcal{K}_{k+q}^{(**)}(s)$ $\mathcal{K}_{k+q}^{(**)(1)}(s)$, $\mathcal{K}_{k+q,1}^{(**)}(s)$ şi $\mathcal{K}_{k+q,1}^{(**)(1)}(s)$ au semnificația din (A 11), (A 14), (A 31), (A 34), (A 24), (A 27), (A 25) şi (A 28) iar $\overline{\Omega}_{prqj}^{**}$ şi $\overline{\Omega}_{prqj}^{**(1)}$ se obțin din Ω_{prqj}^{**} şi $\Omega_{prqj}^{**(1)}$ înlocuind coeficienții $g_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(1,p)}$ $a_{kj}^{(2,p)}$ şi $a_{kj}^{(p)}$ prin corespondenții lor barați.

Expresia coeficientului de succiune este nulă în cazul aripii cu ambele borduri de atac supersonice.

d. Aripa triunghiulară cu un bord de fugă

În cazul în care unul din bordurile aripii, de exemplu l_1 devine bord de fugă, substituim l_1 prin $-l_1'$ şi anulăm coeficienții $g_{kj}^{(p)}$ în expresiile caracteristicilor aerodinamice :

1 — de la punctul a. în cazul aripii cu un bord de atac subsonic şi cu unul de fugă subsonic ;

2 — de la punctul b. în cazul aripii cu un bord de atac supersonic şi cu un bord de fugă subsonic ;

3 — în cazul în care atît bordul de atac cît şi bordul de fugă sînt supersonice, expresia vitezei axiale de perturbație are următoarea formă pe întreaga aripă :

$$u = \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \delta_k^{(p)} a_{kj}^{(2p)} y^k w_{p-j-1,j}, \qquad (29)$$

iar caracteristicile aerodinamice se obțin simplu în acest ultim caz.

e. Calculul valorilor optime ale coeficienților vitezei verticale de perturbație

În cele de mai sus am obținut toți termenii care intră în expresia lui H. Ea depinde de integralele de tip I_k și K_k. Noi am arătat (vezi anexa) că integralele K_k se reduc la integralele de tip I_k pentru care am stabilit o formulă de recurență algebrică simplă. Putem calcula deci prima variație a lui H. Anulînd această variație ($\delta H = 0$) și ținînd seama că coeficienții $w_{p-j-1,j}$ și $\overline{w}_{p-j-1,j}$ sînt liniari independenți, noi obținem relații de forma

$$\begin{aligned}\Pi_{\theta\sigma} + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-1} \big[&(\Omega_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Delta_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j})\, w_{p-j-1,j} + \\ &+ (\overline{\Omega}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \overline{\Delta}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j})\, \overline{w}_{p-j-1,j} \big] = 0,\end{aligned} \tag{30}$$

ecuație ce reprezintă coeficientul variației $\delta w_{\theta\sigma}$ și

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\theta\sigma} + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-1} \big[&(\Omega^{(1)}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Delta^{(1)}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j})\, w_{p-j-1,j} + \\ &+ (\overline{\Omega}^{(1)}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \overline{\Delta}^{(1)}_{p,\theta+\sigma+1,\sigma,j})\, \overline{w}_{p-j-1,j} \big] = 0,\end{aligned} \tag{31}$$

ecuație ce reprezintă coeficientul variației $\delta \overline{w}_{\theta\sigma}$ iar

$$\begin{aligned}\Pi_{\theta\sigma} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} \Big[&(\Omega_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma} + \Delta_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma})\, w_{r-q-1,q} + (\Omega^{(1)}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma} + \\ &+ \Delta^{(1)}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma})\, \overline{w}_{r-q-1,q} + \left(\lambda_1 + \frac{\theta+\sigma+2}{\theta+\sigma+3}\lambda_2\right) \Lambda_{\theta+\sigma+1,\sigma} \Big]\end{aligned} \tag{32 a}$$

și $\overline{\Pi}_{\theta\sigma}$ se obține din $\Pi_{\theta\sigma}$ barînd expresiile Ω, Δ și Λ adică

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\theta\sigma} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} \Big[&(\overline{\Omega}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma} + \overline{\Delta}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma})\, w_{r-q-1,q} + (\overline{\Omega}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma} + \\ &+ \overline{\Delta}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,r,q,\sigma})\, \overline{w}_{r-q-1,q} + \left(\lambda_1 + \frac{\theta+\sigma+2}{\theta+\sigma+3}\lambda_2\right) \overline{\Lambda}_{\theta+\sigma+1,\sigma} \Big].\end{aligned} \tag{32 b}$$

Ecuațiile (30), (31) împreună cu cele două condiții de legătură $c_z = \text{const.}$ și $c_m = \text{const.}$ formează un sistem de ecuații liniare care determină în mod univoc valorile coeficienților $w_{p-j-1,j}$ și $\overline{w}_{p-j-1,j}$ și a multiplicatorilor λ_1 și λ_2. Problema poate fi deci socotită rezolvată.

f. Exemple de aplicații curente

Rezultatele obținute mai sus se pot ușor particulariza și obține o serie de aripi importante din punct de vedere practic. De exemplu :

1) *Aripa triunghiulară fără muchie*. În acest caz anulăm toți coeficienții $\overline{w}_{p-j-1,j}$

atît în expresiile caracteristicilor aerodinamice cît și în sistemul (30)—(31). De asemenea, singularitățile muchiei de separație trebuie anulate. În consecință, termenii caracteristicilor aerodinamice care se înmulțesc cu : $a_{kj}^{(p)}$ la paragraful **a.**, cu $a_{kj}^{(1,p)}$ la paragraful **b.** și cu $a_{kj}^{(p)}$ la paragraful **c.** dispar în acest caz. Totodată, în expresia coeficientului de rezistență, integralele de tip I_k și K_k ce intervin în Ω_{prqj} trebuie extinse pe toată aripa. Aplicații importante la acest tip de aripă sînt :

I — Aripa delta fără muchie. Pe lîngă particularizările sus-amintite trebuie să mai facem $l_1 = l_2 = l$.

II — Aripa trapezoidală și aripa dreptunghiulară fără muchie. Pentru a obține aripa de rezistență minimă în acest caz, trebuie să facem $l_2 \to \infty$ în expresiile vitezei axiale de perturbație u cît și în expresiile caracteristicilor aerodinamice de la punctul **b.** pentru aripile dreptunghiulare și pentru aripile trapezoidale cu bordul de atac lateral subsonic, sau în cele de la punctul **c.** pentru aripile trapezoidale cu bordul de atac lateral supersonic. De asemenea, în expresiile caracteristicilor aerodinamice mai trebuie inclusă contribuția porțiunii centrale S a aripii care se obține foarte ușor deoarece se exprimă pe această porțiune a aripii sub formă polinomială (vezi fig. 2). Pentru detalii a se vedea [1].

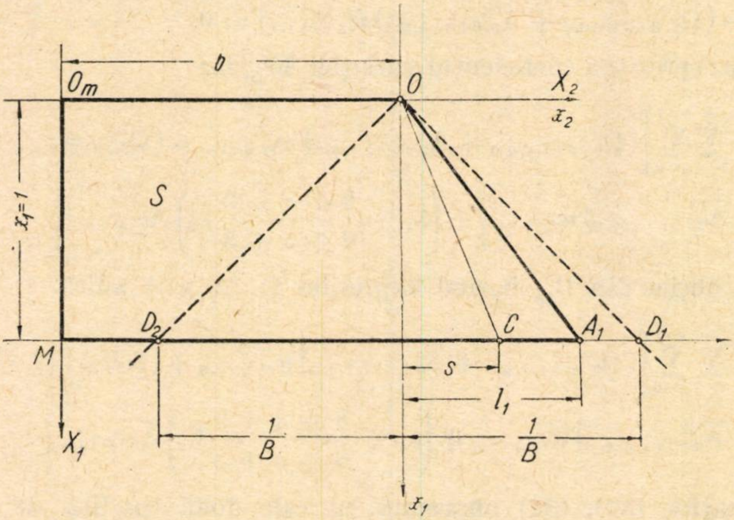


Fig. 2

2) *Aripa pentagonală fără muchie.* Studiul aripii triunghiulare nesimetrice cu unul sau ambele borduri supersonice poate fi utilizat la studiul aripilor pentagonale simetrice (fig. 3).

În acest caz, trebuie să ținem seamă, în calculul caracteristicilor aerodinamice, de contribuția mișcărilor produse de conurile Mach din O_1 și O_2 precum și de mișcarea de pe (S) care se obține ușor deoarece aici u se exprimă sub formă polinomială.

3) *Aripa delta cu muchie pe centru.* În acest caz facem $l_1 = l_2 = l$ și $s = 0$ atît în expresiile caracteristicilor aerodinamice cît și în sistemul (30—31).

4) *Aripa delta cu borduri de atac subsonice și cu două muchii de separație dispuse simetric.* Aceste muchii pot fi considerate ca eventuale șarniere

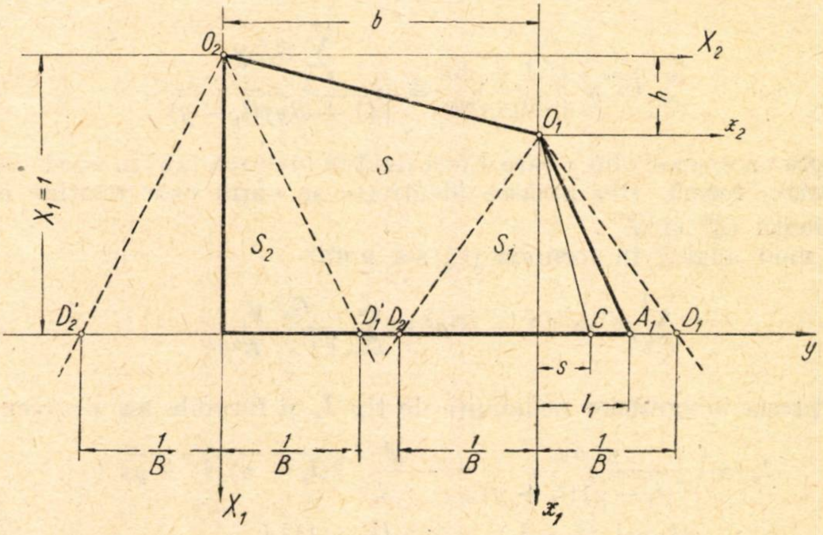


Fig. 3

ale unor voleți de bord de atac. În acest caz, trebuie făcute următoarele adaptări :

Expresia vitezei axiale de perturbație u trebuie completată cu un termen datorit muchiei din stînga și expresia sa devine în acest caz :

$$u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{l^2 - y^2}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(p)} y^k \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+s)(l-y)}{2l(s-y)}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (-1)^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+s)(l+y)}{2l(s+y)}} \right) \right], \tag{33}$$

în Λ_{pj} și Ω_{prqj} pentru integralele $\mathcal{J}_k$ și $\mathcal{K}_k$ se ia limita $l_2 = 0$ și apoi $l_1 = l_2 = l$ în rest iar integralele $\mathcal{K}_k$ și $\widetilde{\mathcal{K}}_k$ se înlocuiesc cu expresiile $\mathcal{K}_k + (-1)^k \mathcal{K}_k'$ și respectiv $\widetilde{\mathcal{K}}_k + (-1)^k \widetilde{\mathcal{K}}_k'$ unde $\mathcal{K}_k'$ și $\widetilde{\mathcal{K}}_k'$ se obțin din $\mathcal{K}_k$ și $\widetilde{\mathcal{K}}_k$ înlocuind s cu $-s$.

5) *Aripa trapezoidală cu muchie.* Muchia poate fi luată în acest caz ca volet pentru bordul de atac lateral. În acest caz, facem observațiile de la 1 III pentru aripile cu două regimuri de distribuție a vitezei verticale de perturbație w.

6) *Aripa pentagonală cu muchie.* Se obțin cu aceleași observații ca la 2) dar luînd în considerație și termenii proveniți din singularitățile muchiei.

ANEXA DE CALCUL

a. În formula (4) s-a notat pentru uniformitate $G_k^{(p)} = C_k^{(p)}$ (A 1)

b. În formula (5) s-a făcut modificarea

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_k^{(p)} y^k \sqrt{\frac{1+By}{l_1-y}} \equiv \frac{\sum\limits_{k=0}^{p} G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{(1+By)(l_1-y)}}, \tag{A 2}$$

în raport cu expresia lui u care a fost dată în lucrarea [13] în mod necesar sub prima formă. Din această identitate se obţin uşor relaţiile dintre coeficienţii $C_k^{(p)}$ şi $G_k^{(p)}$.

c. În mod analog în formula (6) s-a notat

$$\sum_{k=0}^{p-2} C_k^{(p)} y^k \sqrt{1-B^2y^2} \equiv \sum_{k=0}^{p} \frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{1-B^2y^2}}. \tag{A 3}$$

d. Expresia integralelor nedefinite de tip I_k şi formula lor de recurenţă

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1-y)(l_2+y)}} &= -\frac{y^{k+1}}{k}\sqrt{(l_1-y)(l_2+y)} + \\ &+ \frac{(2k-1)(l_1-l_2)}{2k} I_{k-1} + \frac{(k-1)l_1l_2}{k} I_{k-2}, \end{aligned} \tag{A 4}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \arcsin \frac{l_2-l_1+2y}{|l_1+l_2|}; \\ I_1 &= -\sqrt{(l_1-y)(l_2+y)} + \frac{l_1-l_2}{2} \arcsin \frac{l_2-l_1+2y}{l_1+l_2}. \end{aligned} \tag{A 5}$$

e. Tabelul integralelor I_k definite (notate cu $\mathcal{I}_k$).

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1-y)(i_2+y)}} &= \frac{(2k-1)(l_1-l_2)}{2k} \mathcal{I}_{k-1} + \\ &+ \frac{l_1l_2(k-1)}{k} \mathcal{I}_{k-2} = \mathcal{I}_k(l_1, l_2) \quad \left(\mathcal{I}_0 = \pi \quad \mathcal{I}_1 = \frac{l_1-l_2}{2}\pi\right) \end{aligned} \tag{A 6}$$

$$\mathcal{I}_k^* = \int_{-\frac{1}{B}}^{l_1} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1-y)(1+By)}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \mathcal{I}_k\left(l_1, l_2 = \frac{1}{B}\right), \tag{A 7}$$

$$\mathcal{I}_k^{**} = \int_{-\frac{1}{B}}^{+\frac{1}{B}} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{1-B^2y^2}} = \frac{1}{B} \mathcal{I}_k\left(l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right), \tag{A 8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_k(s) = \int_s^{l_1} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y}} &= + \frac{s^{k-1}}{k}\sqrt{(l_1 - s)(l_2 + s)} + \\ &+ \frac{(2k-1)(l_1 - l_2)}{2k}\mathcal{J}_{k-1}(s) + \frac{k-1}{k} l_1 l_2 \mathcal{J}_{k-2}(s) = \mathcal{J}_k(s\, l_1, l_2),\end{aligned} \tag{A 9}$$

$$\mathcal{J}^*_k(s) = \int_s^{l_1} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1 - y)(1 + By)}} = \frac{1}{\sqrt{B}}\mathcal{J}_k\left(s, l_1,\ l_2 = \frac{1}{B}\right), \tag{A 10}$$

$$\mathcal{J}^{**}_k(s) = \int_s^{\frac{1}{B}} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{1 - B^2y^2}} = \frac{1}{B}\mathcal{J}_k\left(s, l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right), \tag{A 11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(1)}_k(s) = \int_{-l_2}^{s} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} &= - \frac{s^{k-1}}{k}\sqrt{(l_1 - s)(l_2 + s)} + \\ &+ \frac{(2k-1)(l_1 - l_2)}{2k}\mathcal{J}^{(1)}_{k-1}(s) + \frac{k-1}{k} l_1 l_2 \mathcal{J}^{(1)}_{k-2}(s) = \mathcal{J}^{(1)}_k(s, l_1, l_2),\end{aligned} \tag{A 12}$$

$$\mathcal{J}^{*(1)}_k(s) = \int_{-\frac{1}{B}}^{s} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{(l_1 - y)(1 + By)}} = \frac{1}{\sqrt{B}}\mathcal{J}^{(1)}_k\left(s, l_1,\ l_2 = \frac{1}{B}\right), \tag{A 13}$$

$$\mathcal{J}^{**(1)}_k(s) = \int_{-\frac{1}{B}}^{s} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{1 - B^2y^2}} = \frac{1}{B}\mathcal{J}^{(1)}_k\left(s, l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right). \tag{A 14}$$

Observații

1. Integralele $\mathcal{J}^*_k$ și $\mathcal{J}^{**}_k$ se reduc la integrale de tip $\mathcal{J}_k$ prin simple schimbări de notații.

2. Integralele $\mathcal{J}_k(s)$ și $\mathcal{J}^{(1)}_k(s)$ se obțin din integralele $\mathcal{J}_k$ la care înlocuim limita de integrare inferioară sau respectiv cea superioară cu s.

f. Expresia integralelor nedefinite de tip K_k.

$$\begin{aligned}K_k = \frac{\sqrt{(l_1 - s)(l_2 + s)}}{2}\int \frac{y^{k+1}\,dy}{(y - s)\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} &= sK_{-1} + \\ &+ \frac{\sqrt{(l_2 + s)(l_1 - s)}}{2}\sum_{j=0}^{k} s^j I_{k-j}\end{aligned} \tag{A 15}$$

iar

$$\begin{aligned}K_{-1} &= \frac{\sqrt{(l_1 - s)(l_2 + s)}}{2}\int \frac{dy}{(y - s)\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\left[\sqrt{(l_1 - s)(y + l_2)} - \sqrt{(s + l_2)(l_1 - y)}\right]^2}{y - s} & \text{(a)} \\ \dfrac{i}{2}\arcsin\dfrac{[(l_2 + s)(l_1 - y) + (l_1 - s)(l_2 + y)]}{|l_1 + l_2|\,|y - s|} & \text{(b)} \end{cases}\end{aligned} \tag{A 16}$$

(a) fiind valabil pentru $(l_1 - s)(l_2 + s) > 0$ (muchia subsonică);

(b) fiind valabil pentru $(l_1 - s)(l_2 + s) < 0$ (cazul cînd muchia devine bord de atac supersonic).

În concluzie, integralele de tip K_k se reduc la integrale de tip I_k.

g. Tabelul integralelor K_k definite (notate cu $\mathcal{K}_k$).

$$\mathcal{K}_k = \frac{\sqrt{(l_2+s)(l_1-s)}}{2}\int_{-l_2}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-s)\sqrt{(l_1-y)(l_2+y)}} = \mathcal{K}_k(s, l_1, l_2), \quad \text{(A 17)}$$

$$\mathcal{K}_k^{*} = \frac{\sqrt{(1+Bs)(l_1-s)}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-s)\sqrt{(l_1-y)(1+By)}} = \mathcal{K}_k\left(s, l_1, l_2 = \frac{1}{B}\right), \quad \text{(A 18)}$$

$$\mathcal{K}_k^{**} = \frac{\sqrt{1-B^2s^2}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{+\frac{1}{B}} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-s)\sqrt{1-B^2y^2}} = \mathcal{K}_k\left(s, l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right), \quad \text{(A 19)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(*)} = \frac{\sqrt{(l_1+l_2)(Bl_2-1)}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(l_2+y)\sqrt{(l_1-y)(1+By)}}, \quad \text{(A 20)}$$

$$\mathcal{K}_k^{(**)} = \frac{\sqrt{B^2l_1^2-1}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{+\frac{1}{B}} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-l_1)\sqrt{1-B^2y^2}}, \quad \text{(A 21)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(**)} = \frac{\sqrt{B^2l_2^2-1}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{+\frac{1}{B}} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y+l_2)\sqrt{1-B^2y^2}}, \quad \text{(A 22)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(*)}(s) = \frac{\sqrt{(l_1+l_2)(Bl_2-1)}}{2}\int_{s}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(l_2+y)\sqrt{(l_1-y)(1+By)}}, \quad \text{(A 23)}$$

$$\mathcal{K}_k^{(**)}(s) = \frac{\sqrt{B^2l_1^2-1}}{2}\int_{s}^{\frac{1}{B}} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-l_1)\sqrt{1-B^2y^2}}, \quad \text{(A 24)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(**)}(s) = \frac{\sqrt{B^2l_2^2-1}}{2}\int_{s}^{\frac{1}{B}} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y+l_2)\sqrt{1-B^2y^2}}, \quad \text{(A 25)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(*)(1)}(s) = \frac{\sqrt{(l_1+l_2)(Bl_2-1)}}{2}\int_{-l_2}^{s} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y+l_2)\sqrt{(l_1-y)(1+By)}}, \quad \text{(A 26)}$$

$$\mathcal{K}_k^{(**)(1)}(s) = \frac{\sqrt{B^2l_1^2-1}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{s} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-l_1)\sqrt{1-B^2y^2}}, \quad \text{(A 27)}$$

$$\mathcal{K}_{k,1}^{(**)(1)}(s) = \frac{\sqrt{B^2l_2^2-1}}{2}\int_{-\frac{1}{B}}^{s} \frac{y^{k+1}\,dy}{(l_2+y)\sqrt{1-B^2y^2}}. \quad \text{(A 28)}$$

Observaţii

1. Pentru integralele (A 17 — 19) este valabilă expresia lui K_{-1} sub forma (a) de la (A 16). Se constată uşor că $\mathcal{K}_{-1} = \mathcal{K}^{*}_{-1} = K^{**}_{-1} = 0$.

2. Pentru integralele (A 20—A 22) este valabilă expresia (b) de la (A 16). Se constată uşor că

$$\mathcal{K}^{(*)}_{-1,1} = \mathcal{K}^{(**)}_{-1,1} = +\frac{\pi}{2} \qquad \mathcal{K}^{(**)}_{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Integralele $\mathcal{K}^{(*)}_{k}(s)$ şi $\mathcal{K}^{(*)(1)}_{k}(s)$ se obţin din integralele $\mathcal{K}^{(*)}_{k}$ înlocuind limita inferioară şi respectiv limita superioară cu s.

Integralele $\widetilde{\mathcal{K}}_{k}(s)$ şi $\widetilde{\mathcal{K}}^{(1)}_{k}(s)$.

Prin definiţie

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{k}(s) = \frac{\sqrt{(l_2 + s)(l_1 - s)}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}_{k-j}(s) \tag{A 29}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{*}_{k}(s) = \frac{\sqrt{(1 + Bs)(l_1 - s)}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}^{*}_{k-j}(s) \tag{A 30}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{**}_{k}(s) = \frac{\sqrt{1 - B^2 s^2}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}^{**}_{k-j}(s) \tag{A 31}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(1)}_{k}(s) = \frac{\sqrt{(l_2 + s)(l_1 - s)}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}^{(1)}_{k-j}(s) \tag{A 32}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{*(1)}_{k}(s) = \frac{\sqrt{(1 + Bs)(l_1 - s)}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}^{*(1)}_{k-j}(s) \tag{A 33}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{**(1)}_{k}(s) = \frac{\sqrt{1 - B^2 s^2}}{2} \sum_{j=0}^{k} s^{j} \mathcal{J}^{**(1)}_{k-j}(s). \tag{A 34}$$

Primită la redacţie la 26 martie 1960.

ТОНКОЕ ТРЕУГОЛЬНОЕ КРЫЛО МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе определяется вид поверхности тонкого треугольного асимметрического крыла минимального сопротивления, для которого даны подъемная сила, момент пикирования и проекция в плоскости.

Считается, что, кроме того, на крыле имеется ребро, разделяющее распределение w, которое можно рассматривать как шарнир предкрылка.

В расчет лобового сопротивления влючают и подсасывающие силы.

Исследование проводится в рамках конических движений высшего порядка, а применяемый метод является вариационным.

Применение общего выражения осевой скорости возмущений u в том виде, который приводится в предыдущих наших работах, дало возможность систематизировать расчеты так, чтобы исследование треугольного крыла минимального сопротивления с ребром раздела зависило от выполнения лишь одного типа интеграла, который мы обозначим I_k и для которого даем простую алгебраическую рекурентную формулу. Далее метод применяется к ряду обычно используемых крыльев минимального сопротивления: Δ-образным, трапецоидальным, прямоугольным (которые явились предметом самостоятельной работы), многоугольным крыльям с предкрылками или без них.

L'AILE TRIANGULAIRE MINCE À TRAÎNÉE MINIMUM, EN COURANT SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage, les auteurs déterminent la forme de la surface de l'aile triangulaire non symétrique, mince, qui doit réaliser une traînée minimum, quand la portance, le moment de tangage et la projection dans le plan sont donnés.

On considère qu'il y a de plus sur l'aile une arête de séparation de la distribution de w_f qui peut constituer, par exemple, la charnière d'un volet de bord d'attaque.

Dans le calcul de la traînée sont incluses les forces de succion.

L'étude est effectuée dans le cadre des mouvements coniques d'ordre supérieur et c'est la méthode variationnelle qui est appliquée.

En considérant l'expression générale de la vitesse axiale de perturbation u donnée dans leurs travaux antérieurs, les auteurs ont pu systématiser le calcul de manière que l'étude de l'aile triangulaire avec arête de séparation, à traînée minimum, est réduit au calcul d'un seul type d'intégrale, qu'ils désignent par I_k et pour laquelle ils donnent une formule de récurrence algébrique simple. Ensuite, ils indiquent l'application de la méthode à toute une série d'ailes à traînée minimum couramment utilisées : ailes delta, ailes trapézoïdales et rectangulaires (ayant fait l'objet d'un travail distinct), ailes polygonales avec ou sans volets de bord d'attaque.

BIBLIOGRAFIE

1. ELIE CARAFOLI, ADRIANA NĂSTASE, *Aripi trapezoidale de rezistență minimă în curent supersonic.* Comunicare făcută la Primul Congres Unional de Mecanică teoretică și aplicată de la Moscova, Ianuarie 27—Februarie 3, 1960 (sub tipar, în revista sovietică Механика).
2. М. Н. КОГАН, *О телах минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке газа.* Прикладная математика и механика, **XXI**, 2 (1957).
3. E. W. GRAHAM, *The Calculation of Minimum Supersonic Drag by Solution of an Equivalent Two-dimensional Potential Problem.* Douglas Aircraft Report, SM-22666, Dec. (1956).
4. — *Note on the Use of Artificial Distribution of Singularities in Supersonic Minimum Drag Problems.* Douglas Aircraft Corporation, Report No. SM-23022, Dec. (1957).
5. A. A. NIKOLSKI, *Sur la théorie du courant axial symétrique avec le hodographe axial symétrique.* Actes de IX-ème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles (1957).
6. Е. В. БУЛЫГИНА, *К задаче о крыле заданного объема с минимальным волновым сопротивлением.* Прикладная математика и механика, **XXII**, *6* (1958).
7. E. W. GRAHAM, *A Geometric Problem Related to the Optimum Distribution of Lift on Planar Wing in Supersonic Flow.* Journal of Aero-Space Sciences, Dec. (1958).
8. MAURICE FÉNAIN, DENISE VALLÉE, *Application de la théorie des écoulements homogènes à la recherche de l'adaptation de certains ailes en régime supersonique.* ONERA, Mémo Technique, *14* (1959).
9. KAINER, *Calculation of the Optimum Supersonic Delta Wings.* CONVAIR (San Diego) Report ZA 259 Oct. (1957).
10. Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ, *Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений.* Прикладная математика и механика, **XXI**, *2* (1957).
11. P. GERMAIN, *Sur le minimum de traînée d'une aile de forme en plan donnée.* Comptes Rendus Acad. Sci., Févr. (1957).
12. Ю. Л. ЖИЛИН, *Крылья минимального сопротивления.* Прикладная математика и механика, **XXI**, *2* (1957).
13. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, *1* (1957).
14. ELIE CARAFOLI, ADRIANA NĂSTASE, *L'étude des ailes triangulaires minces à symétrie forcée en courant supersonique.* Revue de Mécanique Appliquée, *4* (1958).

STUDII

AEROMECANICĂ

STABILITATEA DINAMICĂ A CONVERTOPLANELOR ÎN EVOLUȚII FRECVENTE DE ZBOR

DE

AL. MARINESCU

Convertoplanele apărute din necesitatea de a satisface pe de-o parte cerințele zborului pe verticală și pe de altă parte cerințele zborului orizontal cu viteze sporite, au înregistrat o rapidă dezvoltare, unele tipuri ieșind chiar din faza experimentală spre a fi utilizate.

Dintre tipurile de convertoplan cu perspective de perfecționare menționăm tipurile cu aripă orientabilă o dată cu elicele (fig. 1) și cu elice orientabile aripa rămînînd fixă (fig. 2). O problemă actuală în legătură cu aceste aparate de zbor este și aceea a stabilității de care ne ocupăm în prezenta lucrare. În zbor orizontal, convertoplanul se comportă ca un avion la care problema stabilității este bine-cunoscută, iar în zbor vertical și la punct fix acesta se apropie cu unele diferențe de comportarea elicopterului.

Obiectul prezentei lucrări este studiul stabilității dinamice în zbor vertical și la punct fix a tipurilor sus-menționate de convertoplan, într-o formă generalizată.

Este demn de menționat că de problema stabilității convertoplanului s-a ocupat și K. Hohenemser*), iar lucrările [1], [2] au furnizat multe elemente utile elaborării acestei lucrări.

Calculele sînt conduse în următoarele ipoteze :

a) cele două elice sînt identice ca formă și se rotesc cu viteze egale și de sens contrar;

b) elicele sînt egal distante de axul longitudinal al aerodinei;

c) discul elicelor este aproximativ paralel cu planul Oxy.

---

*) Actele Congresului de mecanică aplicată, Bruxelles, 1956.

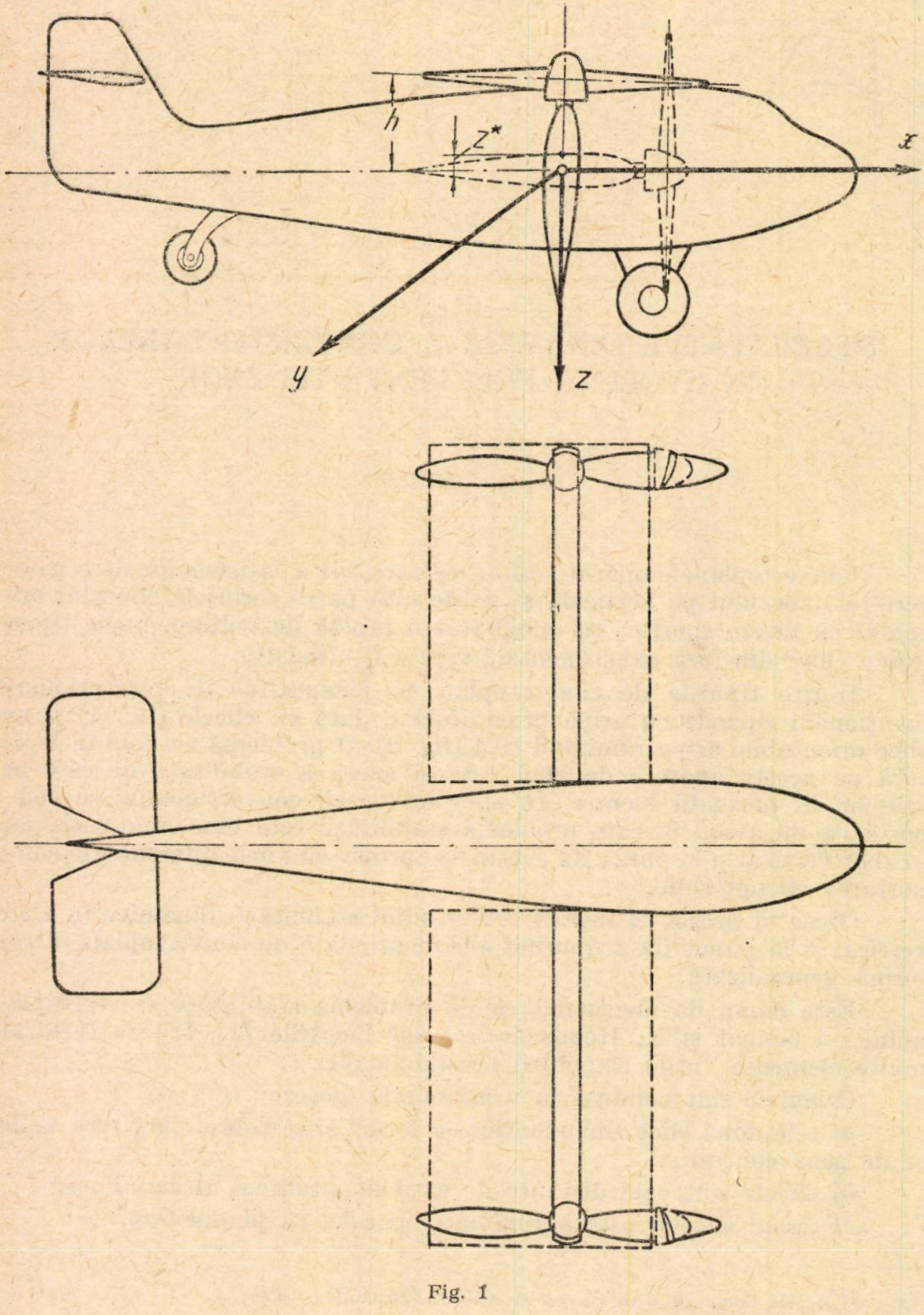


Fig. 1

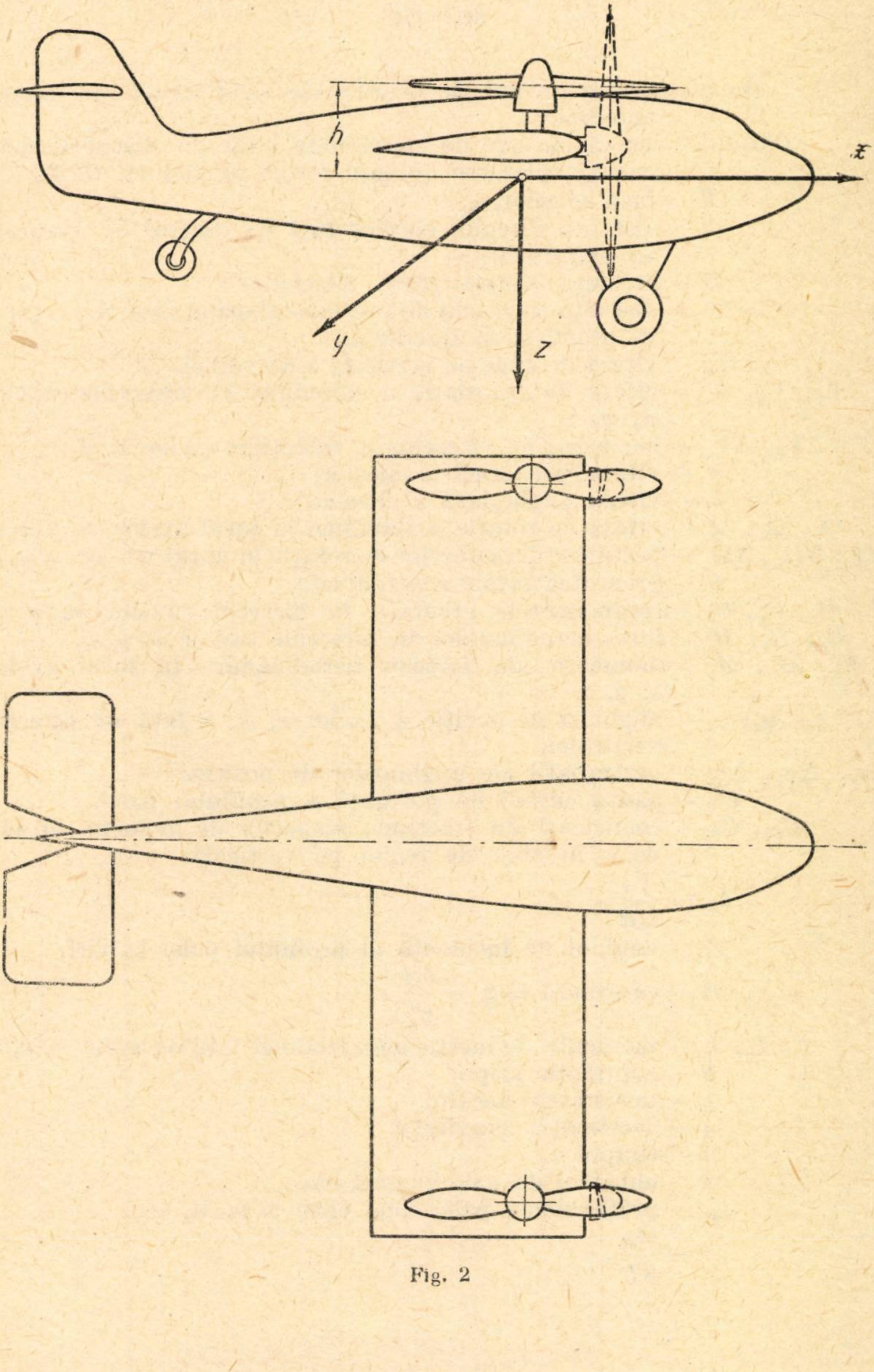


Fig. 2

NOTAŢII

$Oxyz$ — sistem de axe de coordonate rigid legate de corpul aerodinei,

$O'x'y'z'$ — sistem de axe de coordonate legat de discul elicelor convertoplanului (planul $Ox'y'$ paralel cu Oxy),

R — raza elicelor,

h — distanţa discului elicelor faţă de centrul de greutate al aerodinei,

H — distanţa dintre axele elicelor,

z^* — distanţa centrului de presiune al aripii faţă de centrul de greutate al aerodinei,

V_0 — viteza de zbor pe verticală a aerodinei,

V_x, V_y, V_z — viteze de translaţie a aerodinei în direcţiile axelor x, y, z,

ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z — perturbaţiile vitezelor în direcţiile axelor x, y, z,

U — viteza periferică a elicelor,

ω — viteza unghiulară a elicelor,

Ω_x, Ω_y, Ω_z — viteza de rotaţie a aerodinei în jurul axelor x, y, z,

$\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$ — perturbaţiile vitezelor de rotaţie în jurul axelor x, y, z,

G — greutatea totală a aerodinei,

G_x, G_y, G_z — componentele greutăţii în direcţiile axelor x, y, z,

R_x, R_y, R_z — forţe aerodinamice în direcţiile axelor x, y, z,

M_x, M_y, M_z — momente ale forţelor aerodinamice în jurul axelor x, y, z,

φ_x, φ_y, φ_z — unghiuri de poziţie a axelor x, y, z faţă de direcţia verticalei,

$\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_z$ — perturbaţii ale unghiurilor de poziţie,

C'_a — panta curbei de portanţă a profilului palei,

C_{T0}, C_{d0} — coeficienţi de tracţiune respectiv de moment ai elicelor în zbor de regim pe verticală,

$\Lambda_0 - \dfrac{V_0}{\omega R}$,

β^* — unghiul de incidenţă al profilului palei la vîrf,

B — constantă $= 2 + \dfrac{0{,}4}{\beta^*}$,

I_x, I_y, I_z — momente de inerţie ale aerodinei faţă de axele x, y, z,

S — suprafaţa aripii,

ρ — densitatea aerului,

g — acceleraţia gravităţii,

t — timpul,

z — numărul de pale al unei elice,

t_{07} — profunzimea palei unei elice la 0,7R,

$\tau - \dfrac{zt_{07}}{8R}$.

ECUAŢIILE GENERALE DE MIŞCARE

În raport cu sistemul de axe $O\ x\ y\ z$ rigid legat de aerodină ecuaţiile mişcării neperturbate se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{dV_x}{dt} &= \frac{g}{G}(R_x + G\cos\varphi_x) + \Omega_z V_y - \Omega_y V_z = F_1(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{dV_y}{dt} &= \frac{g}{G}(R_y + G\cos\varphi_y) + \Omega_x V_z - \Omega_z V_x = F_2(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{dV_z}{dt} &= \frac{g}{G}(R_z + G\cos\varphi_z) + \Omega_y V_x - \Omega_x V_y = F_3(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_x}{dt} &= \frac{M_x}{I_x} + \frac{I_z - I_y}{I_x}\Omega_y\Omega_z = F_4(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_y}{dt} &= \frac{M_y}{I_y} + \frac{I_x - I_z}{I_y}\Omega_z\Omega_x = F_5(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_z}{dt} &= \frac{M_z}{I_z} + \frac{I_y - I_x}{I_z}\Omega_x\Omega_y = F_6(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\varphi_x}{dt} &= \frac{\Omega_y\cos\varphi_z - \Omega_z\cos\varphi_y}{\sin\varphi_x} = F_7(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\varphi_y}{dt} &= \frac{\Omega_z\cos\varphi_x - \Omega_x\cos\varphi_z}{\sin\varphi_y} = F_8(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y).
\end{aligned} \tag{1}$$

Ecuaţiile mişcării perturbate în baza sistemului (1) se pot scrie în prima aproximaţie

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_1}{\partial \Delta \varphi_x}\Delta\varphi_x,\\
\frac{d\Delta V_y}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_2}{\partial \Delta \varphi_x}\Delta\varphi_x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\Delta \varphi_x}{dt} &= \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_8}{\partial \Delta \varphi_x}\Delta\varphi_x.
\end{aligned} \tag{2}$$

Mişcarea de regim (zbor vertical) este definită de

$$\begin{aligned}
&V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = V_0,\\
&\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0,\\
&\varphi_x = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_y = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pentru zborul la punct fix în relațiile (3), $V_0 = 0$.

Spre a defini explicit sistemul (2) pentru aerodinele în cauză, trebuie stabilite expresiile funcțiunilor $F_1, F_2, \ldots, F_8$ de variabilele $\Delta V_x, \Delta V_y, \ldots, \Delta\varphi_x$.

În expresiile acestor funcții vom insista numai asupra termenilor proveniți din contribuția elicelor. Scriind că

$$\begin{aligned}
\Delta R_{xe} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^2 C_{x'}, \\
\Delta R_{ye} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^2 C_{y'}, \\
\Delta R_{ze} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^2 C_{z'}, \\
\Delta M_{xe} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^3 C_{mx'}, \\
\Delta M_{ye} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^3 C_{my'}, \\
\Delta M_{ze} &= \frac{\rho}{2} U^2 \pi R^3 C_{mz'},
\end{aligned} \tag{4}$$

și ținînd seama că $C_{z'} = C_{T0}$ iar $C_{mz'} = - C_{d0}$ după referința [1] avem în cazul translației

$$\begin{aligned}
C_{x'} &= - B \left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2} \frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0} \right) \frac{\Delta V_x}{V_0}, \\
C_{y'} &= - B \left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2} \frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0} \right) \frac{\Delta V_y}{V_0}, \\
C_{mx'} &= - \left(\Lambda_0 C_{T0} - \frac{\Lambda_0^2}{2} \frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} \right) \frac{\Delta V_x}{V_0}, \\
C_{my'} &= - \left(\Lambda_0 C_{T0} - \frac{\Lambda_0^2}{2} \frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} \right) \frac{\Delta V_y}{V_0},
\end{aligned} \tag{5}$$

și

$$\begin{aligned}
C_{x'} &= - \frac{1}{2} \frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0} \cdot \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \\
C_{y'} &= - \frac{1}{2} \frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0} \cdot \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \\
C_{mx'} &= - 2B \frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} \cdot \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \\
C_{my'} &= - 2B \frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} \cdot \frac{\Delta\Omega_y}{\omega},
\end{aligned} \tag{6}$$

în cazul rotației.

Pentru cazul zborului la punct fix expresiile (5) și (6) vor fi discutate ulterior.

Deoarece variabilele ΔV_z și $\Delta\Omega_z$ se traduc prin amortizări aperiodice, ținînd seama de faptul că momentele datorite perturbațiilor $\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$, ΔV_x, ΔV_y, ca și forțele datorite perturbațiilor $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$ își schimbă semnul cu schimbarea sensului rotației elicelor [1], sistemul de ecuații diferențiale (2) al mișcării perturbate pentru convertoplanul cu aripă și elice orientabile se scrie,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Delta V_x}{dt} = \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ - B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{\Delta V_x}{V_0} \right. + \frac{g}{G}\frac{\rho}{2} V_0^2 S\, C'_a \frac{\Delta V_x}{V_0} + \\
&+ \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{h\Delta\Omega_y}{\omega}\right\} - V_0\Delta\Omega_y + \\
&+ \left(\frac{g}{G}\frac{\rho}{2} V_0^2 S\, C'_a - g\right)\Delta\varphi_y + \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ - B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\right\}\Delta\varphi_y, \\
&\frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ - B\left((\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\right\}\frac{\Delta V_y}{V_0} + V_0\Delta\Omega_x + \\
&+ \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\right\}\frac{h\Delta\Omega_x}{V_0} + g\Delta\varphi_x + \\
&+ \frac{g}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\right\}\Delta\varphi_x, \\
&\frac{d\Delta\Omega_x}{dt} = \frac{1}{I_x}\frac{\rho}{2} U^2\pi R^3 \left\{ - \frac{2h}{R} B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{\Delta V_y}{V_0} \right. - \\
&\left. - \frac{2h}{R} B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{h\Delta\Omega_x}{V_0} - 4B\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0}\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\} - \\
&- \frac{1}{I_x} C'_a \frac{\rho}{2} U^2\, 0{,}49\, (2R)^2 \tau H^2 \frac{\Delta\Omega_x}{U} + \\
&+ \frac{1}{I_x}\frac{gh}{G}\rho U^2\pi R^2 \left\{ B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\right\}\Delta\varphi_x, \\
&\frac{d\Delta\Omega_y}{dt} = \frac{1}{I_y}\frac{\rho}{2} U^2\pi R^3 \left\{ \left[\frac{2h}{R} B\left(\Lambda_0 Cd_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) + \frac{C'_a V_0^2}{RU^2} z^\star\right]\frac{\Delta V_x}{V_0} \right. - \\
&\left. - 4B\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0}\frac{\Delta\Omega_y}{\omega} - \frac{2h}{R} B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{h\Delta\Omega_y}{\omega}\right\} + \\
&+ \frac{1}{I_y}\frac{\rho}{2} U^2\pi R^2 \frac{V_0^2}{U^2} C'_a z^\star \Delta\varphi_y + \frac{1}{I_y}\rho U^2\pi R^2 \left[B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) h\right]\Delta\varphi_y, \\
&\frac{d\Delta\varphi_y}{dt} = \Delta\Omega_y ;\ \frac{d\Delta\varphi_x}{dt} = \Delta\Omega_x .
\end{aligned}\tag{7}$$

Introducem sistemul de mărimi adimensionale utilizat de noi şi în alte lucrări

$$\overline{\Delta\varphi_x} = \Delta\varphi_x,\quad \overline{\Delta\varphi_y} = \Delta\varphi_y,\quad \frac{U\omega}{g} = \bar{\sigma},\quad \frac{V_0\omega}{g} = \sigma,$$

$$\bar{I}_x = \frac{gI_x}{GR^2},\quad \bar{I}_y = \frac{gI_y}{GR^2},\quad \bar{t} = \frac{g}{U}t,$$

$$\overline{\Delta V_x} = \frac{\Delta V_x}{U},\quad \overline{\Delta V_y} = \frac{\Delta V_y}{U},\quad \overline{\Delta\Omega_x} = \frac{\Delta\Omega_x}{\omega},\quad \overline{\Delta\Omega_y} = \frac{\Delta\Omega_y}{\omega},$$

şi sistemul (7) devine

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\Delta V_x}}{d\bar{t}} &= -\alpha_1\overline{\Delta V_x} + \alpha_2\overline{\Delta\Omega_y} - \alpha_3\overline{\Delta\varphi_y},\\
\frac{d\overline{\Delta V_y}}{d\bar{t}} &= -\alpha_4\overline{\Delta V_y} + \alpha_5\overline{\Delta\Omega_x} + \alpha_6\overline{\Delta\varphi_x},\\
\frac{d\overline{\Delta\Omega_x}}{d\bar{t}} &= -\beta_1\overline{\Delta V_y} - \beta_2\overline{\Delta\Omega_x} + \beta_3\overline{\Delta\varphi_x},\\
\frac{d\overline{\Delta\Omega_y}}{d\bar{t}} &= \beta_4\overline{\Delta V_x} - \beta_5\overline{\Delta\Omega_y} + \beta_6\overline{\Delta\varphi_y},\\
\frac{d\overline{\Delta\varphi_y}}{d\bar{t}} &= \bar{\sigma}\,\overline{\Delta\Omega_y},\\
\frac{d\overline{\Delta\varphi_x}}{d\bar{t}} &= \bar{\sigma}\,\overline{\Delta\Omega_x}.
\end{aligned}\tag{8}$$

ECUAŢIILE MIŞCĂRII LONGITUDINALE ŞI LATERALE

Din sistemul (8) se vede cu uşurinţă că mişcarea longitudinală se poate separa de cea laterală. În acest caz vom avea pentru mişcarea longitudinală

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\Delta V_x}}{d\bar{t}} &= -\alpha_1\overline{\Delta V_x} + \alpha_2\overline{\Delta\Omega_y} - \alpha_3\overline{\Delta\varphi_y},\\
\frac{d\overline{\Delta\Omega_y}}{d\bar{t}} &= \beta_4\overline{\Delta V_x} - \beta_5\overline{\Delta\Omega_x} + \beta_6\overline{\Delta\varphi_y},\\
\frac{d\overline{\Delta\varphi_y}}{d\bar{t}} &= \bar{\sigma}\,\overline{\Delta\Omega_y},
\end{aligned}\tag{9}$$

iar pentru mişcarea laterală

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\Delta V_y}}{d\bar{t}} &= -\,\alpha_4\,\overline{\Delta V_y} + \alpha_5\,\overline{\Delta\Omega_x} + \alpha_6\,\overline{\Delta\varphi_x}\,,\\
\frac{d\overline{\Delta\Omega_x}}{d\bar{t}} &= -\,\beta_1\,\overline{\Delta V_y} - \beta_2\,\overline{\Delta\Omega_x} + \beta_3\,\overline{\Delta\varphi_x}\,,\\
\frac{d\overline{\Delta\varphi_x}}{d\bar{t}} &= \bar{\sigma}\,\overline{\Delta\Omega_x}\,.
\end{aligned}\tag{10}$$

În sistemele (9), (10) s-a notat

$$\alpha_1 = \frac{\rho}{G}\,\frac{U^3}{V_0}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) - \frac{\rho U}{2G}\,V_0 S C_a'\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho U^2 h\,\omega}{G V_0}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) - \frac{V_0\,\omega}{g}\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho U^2}{G}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) - \left(\frac{\rho}{2G}\,V_0^2 S C_a' - 1\right),$$

$$\alpha_4 = \frac{\rho U^3}{G V_0}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right),$$

$$\alpha_5 = \frac{\rho U^2 h\,\omega}{G V_0}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) + \frac{V_0\,\omega}{g}\,,$$

$$\alpha_6 = \frac{\rho U^2}{G}\,\pi R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right) + 1,$$

$$\beta_1 = \frac{\rho}{\bar{I}_x G R^2\omega}\,U^3\pi R^3 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{hU}{V_0 R}\,,$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 = {} & \frac{2\rho}{\bar{I}_x G R^2\omega}\,U^3\pi R^3\left[B\,\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} + B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{h^2\omega}{2RV_0}\right] + \\
& + \frac{2\rho}{I_x G R^2\omega}\,U^3 R^2 C_a'\,\frac{0{,}49\,t_{07}\,z}{8R}\,\frac{H^2\omega}{U}\,,
\end{aligned}$$

$$\beta_3 = \frac{\rho}{\bar{I}_x G R^2\omega}\,U^3 h R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right),$$

$$\beta_4 = \frac{\rho}{\bar{I}_y G R^2\omega}\,U^3\pi R^3\left[B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{hU}{V_0 R} + \frac{z^\star V_0}{RU}\right],$$

$$\beta_5 = \frac{2\rho}{\bar{I}_y G R^2\omega}\,U^3\pi R^3\left[B\,\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0} + B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right)\frac{h^2\omega}{2RV_0}\right],$$

$$\beta_6 = \frac{\rho}{\bar{I}_y G R^2\omega}\,U^3 h R^2 B\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\,\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right).$$

Făcînd în sistemele (9), (10) substituțiile

$$\overline{\Delta V}_x = \overline{\Delta V}_{x0}\, e^{\Lambda\bar{t}},\ \overline{\Delta V}_y = \overline{\Delta V}_{y0}\, e^{\Lambda\bar{t}},\ \overline{\Delta \Omega}_x = \overline{\Delta \Omega}_{x0}\, e^{\Lambda\bar{t}},$$
$$\overline{\Delta \Omega}_y = \overline{\Delta \Omega}_{y0}\, e^{\Lambda\bar{t}},\ \overline{\Delta \varphi_x} = \overline{\Delta \varphi_{x0}}\, e^{\Lambda\bar{t}},\ \overline{\Delta \varphi_y} = \overline{\Delta \varphi_{y0}}\, e^{\Lambda\bar{t}}.$$

Din condiția de a nu avea soluții toate nule obținem următoarele ecuații caracteristice: pentru mișcarea longitudinală:

$$\Lambda^3 + A_1\ \Lambda^2 + A_2\ \Lambda + A_3 = 0, \tag{11}$$

în care

$$A_1 = \alpha_1 + \beta_5,$$
$$A_2 = \alpha_1\beta_5 - \bar{\sigma}\beta_6 - \alpha_2\beta_4,$$
$$A_3 = \alpha_3\bar{\sigma}\beta - \alpha_1\bar{\sigma}\beta_6.$$

Pentru mișcarea laterală

$$\Lambda^3 + A_1\ \Lambda^2 + A_2\ \Lambda + A_3 = 0, \tag{12}$$

în care

$$A_1 = \alpha_4 + \beta_1,$$
$$A_2 = \alpha_4\beta_2 - \bar{\sigma}\beta_3 + \alpha_5\beta_1$$
$$A_3 = \alpha_6\bar{\sigma}_6\beta_1 - \beta_3\bar{\sigma}\alpha_4.$$

Pentru cazul zborului la punct fix în sistemul de ecuații (7) toți termenii care conțin V_0 ca factor devin nuli și mărimile

$$-B_0\left(\Lambda_0 C_{d0} - \frac{\Lambda_0^2}{2}\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right),$$
$$-2B\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0};\ B\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0},$$

vor fi cele corespunzătoare lui $\Lambda_0 = 0$. În ambele evoluții de zbor (vertical și la punct fix) pentru convertoplanul cu aripă fixă, termenii datorită forțelor de pe aripă în coeficienții ecuațiilor (9) și (10) sînt nuli.

Prin analiza ecuațiilor (11) și (12) avem astfel posibilitatea examinării mișcărilor perturbate precum și influența diverșilor factori constructivi de care acestea depind.

Criteriile lui Hurvitz pentru ecuațiile (11) respectiv (12) sînt

$$A_1 > 0,$$
$$A_3 > 0,$$
$$A_1A_2 - A_3 > 0. \tag{13}$$

Cum pentru cazurile obișnuite $\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0} < 0$ iar $U \gg V_0$ din examinarea expresiilor (13) se poate deduce că convertoplanul este dinamic stabil longitudinal dacă este îndeplinită inegalitatea

$$\bar{I}_y < \frac{\alpha_1\bar{\beta}_5^2 - \bar{\sigma}\bar{\beta}_5\bar{\beta}_6 - \alpha_2\bar{\beta}_4\bar{\beta}_5}{\bar{\sigma}(\alpha_3\bar{\beta}_4 - \alpha_1\bar{\beta}_6) + \alpha_2\alpha_1\bar{\beta}_4 + \bar{\sigma}\alpha_1\bar{\beta}_6 - \alpha_1^2\bar{\beta}_5}. \tag{14}$$

De asemenea, convertoplanul este dinamic stabil lateral dacă este îndeplinită inegalitatea

$$\bar{I}_x < \frac{\alpha_4 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 - \bar{\sigma} \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_3 + \alpha_5 \bar{\beta}_1^2}{\bar{\sigma}(\alpha_6 \bar{\beta}_1 - \alpha_4 \bar{\beta}_3) + \bar{\sigma} \alpha_4 \bar{\beta}_3 - \alpha_4^2 \bar{\beta}_2 - \alpha_4 \alpha_5 \bar{\beta}_1}. \qquad (15)$$

În expresiile (14), (15) mărimile $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, $\bar{\beta}_3$ respectiv $\bar{\beta}_4$, $\bar{\beta}_5$, $\bar{\beta}_6$, nu sînt altceva decît mărimile nebarate înmulțite cu $\bar{I}_x$ respectiv $\bar{I}_y$. Alegerea parametrilor $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ pentru condițiile de stabilitate a fost indicată de faptul că inerția fuzelajului joacă un rol dominant în acest sens.

Primită la redacție la 19 decembrie 1959.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕРТОПЛАНОВ ПРИ ОБЫЧНЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЕТА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается задача динамической устойчивости двух типов конвертопланов при обычных режимах полета.

Устанавливаются уравнения продольного и бокового возмущенного движения и приводятся условия динамической устойчивости.

STABILITÉ DYNAMIQUE DES CONVERTOPLANES EN ÉVOLUTIONS FRÉQUENTES DE VOL

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente le problème de la stabilité dynamique de deux types de convertoplanes pendant les évolutions de vol ordinaires.

Il établit les équations des mouvements perturbés longitudinal et latéral et énonce les conditions de stabilité dynamique.

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Teoria elicopterului*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.
2. — *Asupra stabilității dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *1* (1956).
3. И. П. БРАТУХИН, *Проектирование и конструкции вертолетов*. Оборонгиз, 1955.

HIDROMECANICĂ

ASUPRA DEZLOCUIRII LICHID-LICHID ÎNTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere.* Problema dezlocuirii unui lichid care saturează un mediu poros de către un alt lichid prezintă un interes practic deosebit deoarece rezultatele se aplică la studiul exploatării zăcămintelor de petrol în care se injectează apă, fie pentru menținerea presiunii, fie în cadrul operației numite recuperare secundară. Dificultățile matematice au făcut ca la început această problemă să fie tratată cu ipoteze destul de depărtate de realitate. Pe de altă parte, teoria formulată de S.E. Buckley și M.C. Leverett [1], fără aproximații cu caracter fundamental, a dat naștere la anumite discuții datorită unor rezultate a căror justificare nu pare destul de riguroasă din punct de vedere teoretic [4].

Din aceste motive, credem că mai există posibilitatea de a se aduce unele contribuții la clarificarea teoriei acestui fenomen precum și eventuale indicații pentru calculele practice.

În studiul pe care l-am făcut, am admis că noțiunea de permeabilitate relativă în scurgerea unui sistem multifazic rămîne valabilă și în cazul dezlocuirii unui fluid de către altul. În acest fel, am presupus implicit că legea lui Darcy rămîne valabilă și am putut utiliza ecuațiile obișnuite pentru scurgerea unui fluid eterogen. Pe această cale, am ajuns la unele rezultate care ne-au permis să soluționăm o problemă de dezlocuire.

2. *Ecuația diferențială a problemei.* Considerațiile ce urmează pot fi aplicate la orice sistem alcătuit din două fluide nemiscibile dar, pentru a preciza cea mai importantă aplicație, ne vom referi numai la petrol și apă. Dacă notăm cu p_t presiunea în faza petrol și cu p_a presiunea în faza apă, aceasta din urmă considerată ca umectantă, avem pentru presiunea capilară p_c expresia

$$p_c = p_t - p_a \tag{1}$$

şi se ştie că această presiune poate fi determinată experimental ca funcţie de saturaţia în apă s_a a mediului poros

$$p_c = f(s_a). \tag{2}$$

Pe de altă parte, dacă introducem şi saturaţia în petrol s_t avem relaţia evidentă

$$s_a + s_t = 1, \tag{3}$$

deoarece admitem că fenomenul de care ne ocupăm se produce tot timpul la presiuni superioare aceleia de saturaţie. În acest caz, saturaţia în gaze libere s_g este mereu nulă.

Notînd cu m porozitatea, cu k_t şi k_a permeabilităţile de fază respectiv pentru petrol şi pentru apă, cu γ_t şi γ_a greutăţile specifice şi cu η_t şi η_a viscozităţile dinamice, ecuaţiile de continuitate în scurgerea unidimensională au, pentru cele două faze, forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_t \frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial p_t}{\partial x}\right) &= m\,\frac{\partial(\gamma_t s_t)}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_a \frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial p_a}{\partial x}\right) &= m\,\frac{\partial(\gamma_a s_a)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4}$$

Greutăţile specifice γ_t şi γ_a ca şi viscozităţile η_t şi η_a sînt funcţii de presiune, în timp ce permeabilităţile de fază k_t şi k_a sînt funcţii de saturaţia în petrol sau în apă. Dacă ţinem seama de faptul că deasupra presiunii de saturaţie γ_t este practic constant şi că acelaşi lucru se poate spune şi despre γ_a, iar viscozităţile η_t şi η_a pot fi considerate de asemenea constante, rezultă o simplificare destul de importantă a ecuaţiilor (4) care devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial p_t}{\partial x}\right) &= m\,\frac{\partial s_t}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial p_a}{\partial x}\right) &= m\,\frac{\partial s_a}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Interesul practic al acestei simplificări constă în faptul că nu mai avem în ecuaţii coeficienţi care depind de presiune. Mai departe din (1) şi (2) obţinem

$$\frac{\partial p_t}{\partial x} - \frac{\partial p_a}{\partial x} = \frac{\partial p_c}{\partial x} = f'(s_a)\,\frac{\partial s_a}{\partial x} \tag{6}$$

sau

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = \frac{\partial p_t}{\partial x} - f'(s_a)\,\frac{\partial s_a}{\partial x}. \tag{7}$$

În felul acesta, a doua ecuație (5) ia forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_a}{\eta_a}\left(\frac{\partial p_t}{\partial x} - f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x}\right)\right] = m\frac{\partial s_a}{\partial t}. \tag{8}$$

În același timp, dacă adunăm membru cu membru ecuațiile (5), ținînd seama și de relația (3), găsim

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial p_t}{\partial x} + \frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial p_a}{\partial x}\right) = 0, \tag{9}$$

rezultat evident datorită faptului că am neglijat compresibilitatea celor două fluide.

Înlocuind relația (7) în (9) ajungem la ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{k_t}{\eta_t} + \frac{k_a}{\eta_a}\right)\frac{\partial p_t}{\partial x} - \frac{k_a}{\eta_a}f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x}\right] = 0 \tag{10}$$

care, integrată o dată în raport cu x, ne dă

$$\left(\frac{k_t}{\eta_t} + \frac{k_a}{\eta_a}\right)\frac{\partial p_t}{\partial x} - \frac{k_a}{\eta_a}f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x} = -\,C(t), \tag{11}$$

$C(t)$ fiind o funcție de timp care, în anumite cazuri ce vor fi precizate mai departe, se poate reduce la o constantă.

Din (11) deducem însă imediat

$$\frac{\partial p_t}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{\eta_a}{\eta_t}\frac{k_t}{k_a}}f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x} - \frac{C(t)}{\frac{k_t}{\eta_t} + \frac{k_a}{\eta_a}} \tag{12}$$

iar dacă introducem acest rezultat în (8) găsim ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{1 + \frac{\eta_a}{\eta_t}\frac{k_t}{k_a}} - 1\right)\frac{k_a}{\eta_a}f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\frac{C(t)}{1 + \frac{\eta_a}{\eta_t}\frac{k_t}{k_a}} = m\frac{\partial s_a}{\partial t}. \tag{13}$$

Semnificația funcției $C(t)$ este imediată; într-adevăr, se observă cu ușurință că $C(t)$ este debitul total de fluid pe unitatea de suprafață. Pentru a-i da o expresie mai simplă, vom presupune că limita inițială dintre apă și petrol se află la $x = 0$. Saturația în petrol fiind egală acolo cu aceea reziduală, avem $k_t = 0$ și prin urmare

$$C(t) = -\left(\frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)_{x=0} = q_{a0}\,. \tag{14}$$

Este evident că debitul de apă q_{a0} care intră în mediul poros poate fi funcție numai de timp. În cazul particular al unei injecții de apă cu debit constant, funcția $C(t)$ se reduce însă la o constantă.

Cu notația introdusă, ecuația (13) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{\eta_a}{\eta_t}\frac{k_t}{k_a}}-1\right)\frac{k_a}{\eta_a}f'(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x}\right]-q_{a0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+\frac{\eta_a}{\eta_t}\frac{k_t}{k_a}}=m\frac{\partial s_a}{\partial t} \qquad (15)$$

și prezintă un anumit interes teoretic deoarece nu conține ca funcție necunoscută decît saturația în apă s_a. Prin urmare, fără a cunoaște o relație între saturația în apă și presiune, care de altfel nu se poate stabili în mod biunivoc, am reușit să eliminăm presiunea și să obținem ecuația diferențială a saturației s_a. Singurele aproximații făcute au fost acelea referitoare la greutățile specifice și la viscozități, care nu afectează decît în foarte mică măsură exactitatea rezultatelor.

Din păcate, ecuația (15) are o formă foarte complicată care o face inaccesibilă metodelor cunoscute de rezolvare. Pentru a se ajunge la rezultate aplicabile este deci necesar să se recurgă la unele aproximații. Dintre acestea, cea mai acceptabilă în ceea ce privește concordanța cu fenomenul fizic, este aceea de a se neglija diferența de presiune dintre cele două fluide care, în condiții obișnuite, este destul de mică.

3. *Ecuația diferențială simplificată a problemei.* Se știe că presiunea capilară variază puțin cu saturația în apă atunci cînd aceasta din urmă este suficient de mare. La saturații în apă mici, se poate admite că factorul predominant în procesul de dezlocuire este permeabilitatea foarte redusă pentru apă. În aceste condiții, dacă neglijăm presiunea capilară, ecuațiile (5) devin

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial p}{\partial x}\right)&=m\frac{\partial s_t}{\partial x},\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial p}{\partial x}\right)&=m\frac{\partial s_a}{\partial x}.\end{aligned} \qquad (16)$$

iar dacă facem uz de relația (3) și adunăm apoi membru cu membru ecuațiile precedente, obținem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{k_t}{\eta_t}+\frac{k_a}{\eta_a}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=0, \qquad (17)$$

rezultat care corespunde ecuației (9) și are aceeași interpretare. Mai departe, avem

$$\left(\frac{k_t}{\eta_t}+\frac{k_a}{\eta_a}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=-\,q_{a0}, \qquad (18)$$

unde q_{a0} are aceeași semnificație ca și mai înainte, putînd fi o funcție de timp sau o constantă.

Cu notația

$$\frac{k_t}{\eta_t} + \frac{k_a}{\eta_a} = F(s_a), \tag{19}$$

relația precedentă devine

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{q_{a0}}{F(s_a)}. \tag{20}$$

Înlocuind acest rezultat în a doua ecuație (16) și aranjînd convenabil termenii, găsim

$$\frac{m}{q_{a0}} \frac{\partial s_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_a}{\eta_a} \frac{1}{F(s_a)}\right] = 0. \tag{21}$$

Dacă punem

$$\frac{k_a}{\eta_a} \frac{1}{F(s_a)} = \frac{1}{1 + \frac{\eta_a}{\eta_t} \frac{k_t}{k_a}} = g(s_a), \tag{22}$$

avem în cele din urmă

$$\frac{m}{q_{a0}} \frac{\partial s_a}{\partial t} + g'(s_a) \frac{\partial s_a}{\partial x} = 0. \tag{23}$$

Observăm că ecuația la care am ajuns este aceea dedusă de S. E. Buckley și M. C. Leverett pe altă cale; funcția $g(s_a)$ este cunoscută, de obicei, sub numele de fracțiunea de apă din curent.

Remarcăm, de asemenea, că la ecuația (23) se poate ajunge direct din (15) dacă punem $f'(s_a) = 0$. Am preferat să reluăm demonstrația deoarece faptul că presupunem $f'(s_a) = 0$ poate să însemne nu numai că presiunea capilară este nulă ci și că are o valoare constantă.

Vom căuta în continuare soluțiile exacte ale ecuației (23), pentru o distribuție inițială dată a saturației.

4. *Considerații generale asupra rezolvării problemei de valori inițiale.* Problema integrării ecuației cu derivate parțiale de primul ordin (23), care este cvasiliniară, nu prezintă dificultăți deosebite. Considerînd domeniul din spațiul t, x, s_a care ne interesează ($t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $0 \leqslant s_a \leqslant 1$) se observă că funcțiile $\frac{m}{q_{a0}}$ și $g'(s_a)$ nu se anulează simultan în nici un punct al acestui domeniu, fapt care rezultă din condițiile fizice ale problemei ($q_{a0} > 0$ și finit în orice moment). De asemenea, tot din considerente de ordin fizic și din examinarea curbei de variație a funcției $g'(s_a)$ rezultă că atît $\frac{m}{q_{a0}}$ cît și $g'(s_a)$ au derivate de ordinul întîi continue în domeniul precizat mai înainte. Aceste condiții sînt necesare pentru a se putea rezolva problema de valori inițiale pentru ecuația (23) în cazul general.

Se știe [9] că problema integrării acestei ecuații este echivalentă cu aceea a integrării sistemului

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{m}{q_{a0}}, \quad \frac{dx}{d\sigma} = g'(s_a), \quad \frac{ds_a}{d\sigma} = 0, \tag{24}$$

în care σ este un parametru. Curbele integrale ale acestui sistem sînt caracteristicile ecuației (23). Se observă imediat că acestea sînt curbe plane, cuprinse în planele $s_a = \text{const}$.

Integrarea sistemului (24) se face cu ușurință; astfel dacă presupunem mai întîi că debitul q_{a0} este constant, găsim

$$t = \frac{m}{q_{a0}}\sigma + t_0, \quad x = g'(s_a)\sigma + x_0, \tag{25}$$

deoarece a treia ecuație ne conduce numai la concluzia că s_a este o constantă pentru fiecare caracteristică; t_0 și x_0 sînt constante de integrare.

Problema de valori inițiale constă în găsirea unei suprafețe integrale a ecuației (23) dîndu-se o curbă, definită în cazul nostru prin

$$t_0(\tau) = 0, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad s_a(\tau) = \varphi(\tau), \tag{26}$$

τ fiind un parametru. Funcțiile (26) trebuie să aibă derivate de ordinul întîi continue care satisfac relația

$$\left(\frac{dt_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 \neq 0. \tag{27}$$

De asemenea, curba de pe suprafața t, x definită prin primele două ecuații (26) nu trebuie să aibă puncte duble. Se constată imediat că toate aceste condiții sînt satisfăcute dacă funcția $\varphi(\tau)$ este convenabil aleasă, adică dacă distribuția inițială a saturației în apă are derivata de primul ordin continuă. Mai departe, deoarece curba dată nu este o caracteristică și avem realizată condiția

$$\frac{\dfrac{dt_0}{d\tau}}{\dfrac{dx_0}{d\tau}} \neq \frac{\dfrac{m}{q_{a0}}}{g'(s_a)}, \tag{28}$$

soluția este unică pentru datele inițiale (26). În fond, aceste date revin la a fixa în momentul inițial $t = 0$, pe axa Ox $(x \geqslant 0)$ valorile saturației în apă s_a, ceea ce, din punct de vedere fizic reprezintă corect condiția inițială a scurgerii lineare.

Pentru găsirea efectivă a soluției, observăm că din a treia relație (26) obținem

$$\tau = \varphi^{-1}(s_a), \tag{29}$$

unde prin φ^{-1} am notat funcția inversă a lui $\varphi(\tau)$; de asemenea, din prima ecuație (25), combinată cu prima relație (26), avem

$$\sigma = \frac{q_{a0}}{m}\, t. \tag{30}$$

Înlocuind aceste rezultate în a doua ecuație (25) găsim

$$x = \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_a)\, t + \varphi^{-1}(s_a), \tag{31}$$

sau

$$s_a = \varphi\left[x - \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_a)\, t\right]. \tag{32}$$

Pentru a vedea care este valoarea saturației la $x = 0$ (frontiera inițială dintre zona de apă și aceea de petrol), vom observa că putem scrie

$$g'(s_a) = -\frac{\eta_a\left(k_a \dfrac{dk_t}{ds_a} - k_t \dfrac{dk_a}{ds_a}\right)}{\eta_t\left(k_a + \dfrac{\eta_a}{\eta_t}\, k_t\right)^2}, \tag{33}$$

iar pentru $x = 0$, unde $k_t = 0$, avem

$$[g'(s_a)]_{x=0} = -\left[\frac{\eta_a}{\eta_t}\,\frac{1}{k_a}\,\frac{dk_t}{ds_a}\right]_{x=0}. \tag{34}$$

Dacă $\dfrac{dk_t}{ds_a} = 0$ pentru $x = 0$, atunci și $g'(s_a) = 0$ și din (32) rezultă

$$s_a = \varphi(0), \tag{35}$$

saturația în apă avînd deci în orice moment o valoare constantă pe care o vom nota cu s_{a0}. Deoarece dependența permeabilității de fază k_t de saturația în apă s_a nu este cunoscută analitic ci numai grafic, nu putem afla pe cale teoretică derivata $\dfrac{dk_t}{ds_a}$. Datele experimentale indică însă că se poate admite că această derivată se anulează atunci cînd saturația în petrol devine egală cu acea reziduală. De altfel, pentru $s_a \geqslant s_{a0}$ funcția $g(s_a)$ este o constantă așa că derivata ei trebuie să fie nulă.

Pentru calculul numeric al soluției se poate utiliza formula (31); la un moment oarecare $t = t_1$, avem

$$\chi(s_a) = x \tag{36}$$

unde

$$\chi(s_a) = \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_a)\, t_1 + \varphi^{-1}(s_a). \tag{37}$$

Dacă se trasează pe o diagramă, funcția $\chi(s_a)$ se obține, așa cum rezultă din (36) valoarea saturației în apă în funcție de distanța x. Operația trebuie repetată pentru fiecare timp t_1 ales. În legătură cu acest calcul, trebuie făcută însă o observație importantă. Astfel, la un timp oarecare t_1, avem

$$\frac{dx}{ds_a} = \frac{q_{a0}}{m} t_1\, g''(s_a) + [\varphi^{-1}(s_a)]'. \tag{38}$$

Pentru valori mari ale lui s_a, $g''(s_a)$ este negativă; de asemenea, în general $\varphi(\tau)$ din ultima relație (26) este o funcție descrescătoare de τ, astfel că și τ, respectiv x, este o funcție descrescătoare de s_a. Derivata $[\varphi^{-1}(s_a)]'$ fiind deci și ea negativă, rezultă că pentru valori mari ale saturației în apă $\frac{dx}{ds_a}$ este negativă. Din punct de vedere fizic, această observație nu necesită demonstrație deoarece este evident că pe măsură ce x crește saturația în apă este mai mică.

Dacă derivata (38) se anulează pentru o anumită valoare a saturației în apă s_{af}, funcția $x(s_a)$ prezintă în acel punct o valoare extremă. Considerațiile precedente ne conduc la concluzia că este vorba de un maxim. Prin urmare, calculele se efectuează plecînd de la valoarea maximă a saturației în apă s_{a0}, care corespunde la $x = 0$ pînă la valoarea s_{af} care anulează derivata (3) la timpul t_1 ales. Pentru $s_a < s_{af}$ formula (31) își pierde sensul fizic, iar cele spuse mai sus arată că există un front de dezlocuire corespunzător saturației s_{af}, în fața căruia saturația în apă nu variază în urma procesului de dezlocuire. Valoarea lui s_{af} este la rîndul ei o funcție de timp, iar dacă sistemul are o lungime finită l, putem calcula saturația s_{al} corespunzătoare frontului de dezlocuire pentru $x = l$. Într-adevăr dacă frontul de dezlocuire ajunge la capătul sistemului la timpul t_l, din (31) obținem

$$l = \frac{q_{a0}}{m} t_l\, g'(s_{al}) + \varphi^{-1}(s_{al}) \tag{39}$$

și deoarece derivata (38) trebuie să se anuleze mai avem

$$\frac{q_{a0}}{m} t_l\, g''(s_{al}) + [\varphi^{-1}(s_{al})]' = 0. \tag{40}$$

Din (39) și (40) rezultă

$$l = \varphi^{-1}(s_{al}) - \frac{g'(s_{al})}{g''(s_{al})} [\varphi^{-1}(s_{al})]' \tag{41}$$

relație din care se poate calcula s_{al}; rezolvarea este însă anevoioasă și se poate face numai pe cale grafică.

Existența frontului de dezlocuire a fost pusă în evidență în teoria elaborată de S. E. Buckley și M. C. Leverett. Justificarea matematică rezidă în faptul că $g'(s_a)$ nu este o funcție monoton crescătoare sau descrescătoare de s_a, de unde a apărut necesitatea de a se considera numai o porțiune a acestei curbe. În modul adoptat de prezentare a problemei, se pune clar în evidență existența unui maxim pentru funcția $x(s_a)$, datorit desigur tot faptului că funcția $g'(s_a)$ are la rîndul ei un maxim. Se observă însă că valoarea saturației în apă care anulează derivata (38) depinde și de repartiția inițială a acestei saturații. Mai menționăm în treacăt că ecuația vitezei de avansare a unui plan de saturație constantă, dedusă de autorii amintiți mai sus, se obține imediat dacă eliminăm pe $d\sigma$ între primele două ecuații ale sistemului (24).

Soluția găsită ne permite să urmărim în fiecare moment poziția unui plan de saturație în apă constantă s_{a1}. Într-adevăr, dacă la momentul t_1 acest plan se găsește în x_1 din (32) avem

$$s_{a1} = \varphi\left[x_1 - \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_{a1})\, t_1\right]. \tag{42}$$

La un alt timp t, aceeași saturație va corespunde unui alt x și vom avea, tot din (32),

$$s_{a1} = \varphi\left[x - \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_{a1})\, t\right]. \tag{43}$$

Deoarece o anumită valoare a funcției φ corespunde la o singură valoare a argumentului¹), rezultă că putem scrie

$$x_1 - \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_{a1})\, t_1 = x - \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_{a1})\, t, \tag{44}$$

sau

$$x - x_1 = \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_{a1})\,(t - t_1). \tag{45}$$

Trecînd acum la un caz mai general, vom presupune că debitul q_{a0} este o funcție continuă de timp, care nu se anulează în nici un moment și are derivata de ordinul întîi continuă. Integrarea sistemului (24) ne dă

$$\sigma = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} q_{a0}\, dt, \quad x = g'(s_a)\,\sigma + x_0 \tag{46}$$

și păstrînd toate celelalte condiții neschimbate, găsim

$$x = \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt + \varphi^{-1}(s_a), \tag{47}$$

respectiv

$$s_a = \varphi\left[x - \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt.\right] \tag{48}$$

---

¹) Această afirmație presupune o repartiție inițială monotonă a saturației s_a.

Pentru calculul efectiv, se procedează în modul indicat mai înainte, alegîndu-se diferite momente t_1 şi trasînd pentru fiecare dintre acestea funcţia din membrul al doilea al relaţiei (47). Şi în acest caz, dacă derivata

$$\frac{dx}{ds_a} = \frac{g''(s_a)}{m} \int_0^{t_1} q_{a0}\, dt + [\varphi^{-1}(s_a)]', \tag{49}$$

se anulează, există un front de dezlocuire. Relaţia care dă valoarea acestei saturaţii pentru $x = l$ este tot (41).

Dacă ne fixăm atenţia asupra unui sistem de lungime finită l, pentru a ne apropia de situaţiile reale, se observă că în ambele cazuri studiate mai sus derivata funcţiei $x(s_a)$ se anulează într-un punct x_f $(0 < x_f \leqslant l)$ numai dacă pentru $x_f \leqslant x \leqslant l$ saturaţia în apă este mai mică decît s_{al}. Dacă la un timp oarecare în întreg intervalul $(0, l)$ avem $s \geqslant s_{al}$, deplasarea se efectuează fără front de dezlocuire.

Prin acelaşi raţionament ca şi mai sus, putem găsi o formulă analogă cu (45) care să ne dea în fiecare moment poziţia unui plan de saturaţie constantă dată.

5. *Aplicaţie la un caz particular*. Pentru a exemplifica rezultatele obţinute, vom expune soluţia pentru o expresie dată a repartiţiei iniţiale a saturaţiei în apă. Se ştie că la contactul iniţial dintre apă şi petrol există o zonă de tranziţie de întindere redusă, în interiorul căreia saturaţiile în cele două lichide variază mult [5]. Ţinînd seama de acest fapt, vom pune condiţia iniţială sub forma

$$t = 0, \quad s_a = (s_{a0} - s_{ai})\, e^{-\alpha^2 x} + s_{ai}, \tag{50}$$

s_{a0} fiind saturaţia maximă în apă, la contactul iniţial apă-petrol $(x = 0)$ şi s_{ai} saturaţia în apă interstiţială în zona de petrol. Expresia precedentă aproximează deci variaţia saturaţiei în apă în zona de tranziţie printr-o lege exponenţială. În ceea ce priveşte saturaţia în apă interstiţială, teoretic aceasta atinge valoarea s_{ai} la infinit. Este însă uşor de observat că dacă $\alpha^2 \gg 1$, pentru x destul de mic termenul exponenţial este practic neglijabil şi saturaţia diferă extrem de puţin de s_{ai}. Mai mult încă, deoarece constanta pozitivă α^2 este arbitrară, putem să alegem pentru aceasta o valoare suficient de mare astfel ca zona de tranziţie să fie redusă la dimensiuni minime, ceea ce revine în fond la neglijarea ei, aşa cum se face de obicei.

Din (50) rezultă

$$(x)_{t=0} = \frac{1}{\alpha^2} \log \frac{s_{a0} - s_{ai}}{s_a - s_{ai}} \tag{51}$$

şi deoarece aceasta este funcţia $\varphi^{-1}(s_a)$, soluţia (31) devine

$$x = \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_a)\, t - \frac{1}{\alpha^2} \log \frac{s_a - s_{ai}}{s_{a0} - s_{ai}}, \tag{52}$$

respectiv

$$\frac{s_a - s_{ai}}{s_{a0} - s_{ai}} = e^{-\alpha^2\left[x - \frac{q_{a0}}{m} g'(s_a)\, t\right]}. \tag{53}$$

Este adevărat că pentru $s_a = s_{ai}$ logaritmul din (52) devine infinit, dar soluția nu are sens decît dacă $s_a > s_{ai}$. Pentru o diferență oricît de mică între s_a și s_{ai}, logaritmul are o valoare finită și calculele pot fi efectuate fără dificultăți în modul indicat mai înainte.

Dacă debitul q_{a0} este funcție de timp, avem

$$x = \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt - \frac{1}{\alpha^2}\log\frac{s_a - s_{ai}}{s_{a0} - s_{ai}} \tag{54}$$

și

$$\frac{s_a - s_{ai}}{s_{a0} - s_{ai}} = e^{-\alpha^2\left[x - \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt\right]}. \tag{55}$$

Bineînțeles pentru funcția $q_{a0}(t)$ trebuie să fie îndeplinite condițiile pe care le-am precizat anterior.

6. *Studiul problemei cu luarea în considerație a efectului gravitației.* Dacă se ține seama și de efectul gravitației ecuațiile (16) devin

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_t x \sin\alpha)\right] = m\frac{\partial s_t}{\partial t},\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_a x \sin\alpha)\right] = m\frac{\partial s_a}{\partial t}, \end{aligned} \tag{56}$$

α fiind unghiul pe care stratul, respectiv axa Ox, îl face cu orizontala. Am admis că apa pătrunde în strat pe la partea inferioară.

Dacă ținem seama de relația (3) și adunăm ecuațiile precedente, găsim

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_t x \sin\alpha) + \frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_a x \sin\alpha)\right] = 0, \tag{57}$$

sau

$$\frac{k_t}{\eta_t}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_t x \sin\alpha) + \frac{k_a}{\eta_a}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma_a x \sin\alpha) = -q_{a0}, \tag{58}$$

q_{a0} fiind debitul de apă care pătrunde în strat, presupus constant în cele ce urmează.

Mai departe, după calcule simple, deducem

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q_{a0} + \frac{k_t}{\eta_t}\gamma_t \sin\alpha + \frac{k_a}{\eta_a}\gamma_a \sin\alpha}{\frac{k_t}{\eta_t} + \frac{k_a}{\eta_a}}, \tag{59}$$

şi înlocuind în a doua ecuţia (56) rezultă

$$m\frac{\partial s_a}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q_{a0}-(\gamma_a-\gamma_t)\dfrac{k_t}{\eta_t}\sin\alpha}{1+\dfrac{\eta_a}{\eta_t}\dfrac{k_t}{k_a}}\right]=0. \tag{60}$$

Cu notaţia

$$\frac{q_{a0}-(\gamma_a-\gamma_t)\dfrac{k_t}{\eta_t}\sin\alpha}{1+\dfrac{\eta_a}{\eta_t}\dfrac{k_t}{k_a}}=h\,(s_a), \tag{61}$$

ajungem la ecuaţia

$$m\frac{\partial s_a}{\partial t}+h'\,(s_a)\frac{\partial s_a}{\partial x}=0, \tag{62}$$

de aceeaşi formă cu (23).

Sistemul ale cărui curbe integrale sînt caracteristicile ecuaţiei (62) este

$$\frac{dt}{d\sigma}=m,\quad \frac{dx}{d\sigma}=h'\,(s_a),\quad \frac{ds_a}{d\sigma}=0 \tag{63}$$

şi dacă ne dăm condiţiile (26) ajungem, pe aceeaşi cale ca şi mai înainte la soluţia

$$s_a=\varphi\left[x-\frac{h'\,(s_a)}{m}\,t\right]. \tag{64}$$

Dacă pentru $x=0$ avem $h'(s_a)=0$, atunci saturaţia în apă s_{a0} corespunzătoare este constantă. Derivata funcţiei $h\,(s_a)$ are o formă destul de complicată şi din acest motiv vom da mai jos numai valoarea ei pentru $x=0$ $(k_t=0)$ care este

$$[h'\,(s_a)]_{x=0}=-\left[\left(\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\eta_t}\sin\alpha+q_{a0}\frac{\eta_t}{\eta_a}\frac{1}{k_a}\right)\frac{dk_t}{ds_a}\right]_{x=0}. \tag{65}$$

Aşa cum am mai spus, putem admite că pentru $x=0$ avem $\dfrac{dk_t}{ds_a}=0$ şi în felul acesta saturaţia în apă are valoarea constantă s_{a0}.

În ceea ce priveşte calculul numeric al soluţiei, observăm că din (64) rezultă o relaţie de aceeaşi formă cu cele discutate mai înainte şi anume

$$x=\frac{h'\,(s_a)}{m}\,t+\varphi^{-1}\,(s_a). \tag{66}$$

De rîndul acesta, existenţa unui front de dezlocuire este condiţionată de alura funcţiei $h'(s_a)$. Nu vom intra în amănunte deoarece am intenţionat numai să arătăm că luarea în considerare a efectului gravitației nu conduce la dificultăți matematice deosebite față de cazul în care acest efect se neglijează, bineînțeles dacă nu se urmărește și determinarea formei reale a frontului de dezlocuire.

Dacă debitul q_{a0} este funcție de timp, vom scrie expresia funcției $h(s_a)$ sub forma

$$h(s_a) = q_{a0}\, g(s_a) - (\gamma_a - \gamma_t)\frac{k_t}{\eta_t}\sin\alpha\, g(s_a) = q_{a0}\, g(s_a) - (\gamma_a - \gamma_t)\sin\alpha\,\psi(s_a) \quad (67)$$

cu

$$\psi(s_a) = \frac{k_t}{\eta_t}\, g(s_a) \quad (68)$$

de unde rezultă

$$h'(s_a) = q_{a0}\, g'(s_a) - (\gamma_a - \gamma_t)\sin\alpha\,\psi'(s_a). \quad (69)$$

Cu condițiile (26) sistemul (63) ne dă

$$x = \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt - (\gamma_a - \gamma_t)\frac{\sin\alpha}{m}\psi'(s_a)\, t + \varphi^{-1}(s_a), \quad (70)$$

respectiv

$$s_a = \varphi\left[x - \frac{g'(s_a)}{m}\int_0^t q_{a0}\, dt + (\gamma_a - \gamma_t)\frac{\sin\alpha}{m}\psi'(s_a)\, t\right]. \quad (71)$$

La $x = 0$, am arătat mai înainte că avem $g'(s_a) = 0$ iar

$$[\psi'(s_a)]_{x=0} = \left[\frac{g(s_a)}{\eta_t}\frac{dk_t}{ds_a}\right]_{x=0} \quad (72)$$

și prin urmare dacă $\frac{dk_t}{ds_a} = 0$ pentru $x = 0$ saturația în apă are valoarea constantă s_{a0}.

Observațiile făcute mai sus în legătură cu frontul de dezlocuire rămîn valabile. Calculele numerice comportă utilizarea metodelor grafice, deoarece expresiile analitice ale diferitelor funcții de saturația în apă s_a ce intervin în formule nu sînt cunoscute.

7. *Observații asupra unei soluții particulare.* Dacă ne raportăm, de exemplu, la formula (32), se constată cu ușurință că

$$x = \frac{q_{a0}}{m}\, g'(s_a)\, t \quad (73)$$

este de asemenea o soluție a ecuației (23). Suprafața integrală reprezentată prin (73) trece prin curba

$$t_0(\tau) = 0, \qquad x_0(\tau) = 0, \quad (74)$$

ceea ce înseamnă că în momentul inițial nu avem dată o repartiție a saturației în apă sub forma unei funcții de τ, respectiv de x. Așadar, saturația inițială în apă a mediului poros este nulă sau constantă. În ceea ce privește frontul de dezlocuire, saturația s_{af} corespunzătoare acestuia este constantă și are valoarea pentru care $g'(s_a)$ este maximă. Bineînțeles, soluții de același fel există și pentru cazul în care q_{a0} este funcție de timp sau se ia în considerare efectul gravitației. Expresiile corespunzătoare rezultă din (48), (64) și (71).

Această situație a fost studiată de S. E. Buckley și M. C. Leverett [1] precum și de alți cercetători [8]. Precizăm însă că atunci cînd saturația inițială în apă a mediului poros este mai mare decît aceea care corespunde maximului funcției $g'(s_a)$, frontul de dezlocuire nu reprezintă o variație bruscă a saturației în apă.

8. *Cazul unui mediu poros neomogen.* Metoda de studiu adoptată permite să se ia în considerare și cazul în care mediul poros are permeabilitatea și porozitatea variabile. În acest scop, vom introduce permeabilitățile relative

$$\tilde{k}_t = \frac{k_t}{k}, \quad \tilde{k}_a = \frac{k_a}{k} \tag{75}$$

și vom presupune că permeabilitatea k a mediului poros este o funcție continuă de x, pozitivă pentru orice valoare a lui x. Aceeași ipoteză o vom face și pentru porozitatea m. Se știe că în general mărimile k și m pot fi privite ca independente și în cele ce urmează vom adopta acest punct de vedere.

Mai departe, vom admite că în fiecare punct al mediului poros $\tilde{k}_t$ și $\tilde{k}_a$ sînt funcții de saturația în apă s_a, variația lor fiind aceeași ca și pentru un mediu poros cu permeabilitate constantă. Acest lucru înseamnă că vom considera valabile curbele stabilite pentru mediile poroase omogene.

În consecință, ecuațiile (16) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{k}_t k}{\eta_t}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= m\frac{\partial s_t}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{k}_a k}{\eta_a}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= m\frac{\partial s_a}{\partial t}, \end{aligned} \tag{76}$$

și dacă urmăm un raționament cu totul asemănător celui utilizat mai înainte, găsim ecuația

$$\frac{1}{q_{a0}}\frac{\partial s_a}{\partial t} + \frac{g'(s_a)}{m}\frac{\partial s_a}{\partial x} = 0, \tag{77}$$

în care $g'(s_a)$ este derivata funcției $g(s_a)$ definită prin (22).

După cum se observă imediat, variația permeabilității nu are nici o consecință asupra fenomenului studiat. Lucrul acesta se poate deduce direct din faptul că raportul permeabilităților de fază $\frac{k_t}{k_a}$ rămîne tot o funcție numai de saturația în apă s_a. În schimb, variația porozității are o influență certă asupra dezlocuirii.

Pentru exemplificare, vom studia cazul în care q_{a0} este o funcție de timp. Calculele, conduse în același mod ca și mai înainte, cu utilizarea condițiilor (26), ne dau

$$\int_{\varphi^{-1}(s_a)}^{x} m(x)\,dx = g'(s_a)\int_0^t q_{a0}\,dt, \tag{78}$$

respectiv

$$H(x) = g'(s_a)\int_0^t q_{a0}\,dt + H\,[\varphi^{-1}(s_a)], \tag{79}$$

unde am introdus notația

$$H(\xi) = \int m(\xi)\,d\xi. \tag{80}$$

La un timp oarecare t_1 avem

$$m(x)\,\frac{dx}{ds_a} = g''(s_a)\int_0^{t_1} q_{a0}\,dt + m(\varphi^{-1}(s_a))\,[\varphi^{-1}(s_a)]' \tag{81}$$

și deoarece $m(x) > 0$ pentru orice x, semnul derivatei $\frac{dx}{ds_a}$ depinde de acela al derivatelor $g''(s_a)$ și $[\varphi^{-1}(s_a)]'$. Considerații analoge cu cele făcute mai înainte, ne arată că dacă $\frac{dx}{ds_a}$ se anulează pentru o valoare s_{af} a saturației în apă, aceasta din urmă corespunde frontului de dezlocuire. Variația porozității influențează valoarea saturației în apă la frontul de dezlocuire, dar se constată că în cazul soluției particulare discutată în paragraful precedent, această influență dispare. Așadar, și atunci cînd porozitatea este variabilă, dacă nu este dată o saturație inițială în apă a mediului poros, variabilă cu distanța, frontul de dezlocuire are o saturație în apă constantă care corespunde maximului funcției $g'(s_a)$.

9. *Observații finale și concluzii.* Prezentul studiu a avut ca obiect cercetarea problemei dezlocuirii unui lichid de către altul într-un mediu poros, sub un aspect cît mai general posibil. Ne-am limitat la scurgerea liniară pentru a obține rezultate mai simple dar, cu toate acestea, luarea în considerație a efectului capilarității conduce la o ecuație care nu poate fi integrată prin metode cunoscute. În schimb, neglijarea diferenței de presiune dintre faze permite să se ajungă la o ecuație ușor integrabilă, care a mai fost studiată de A. M. Pirverdian [7], atît pentru cazul scurgerii liniare

cît şi pentru acela al scurgerii radiale[1]). De asemenea, S. N. Buzinov şi I. A. Ciarnîi [2] au considerat problema deplasării frontului de dezlocuire, pornind de la soluţia aceleaşi ecuaţii în cazul în care există o repartiţie iniţială dată a saturaţiei în apă. În cercetările noastre, am căutat în primul rînd să precizăm condiţiile în care poate fi rezolvată problema matematică de valori iniţiale pentru ecuaţia (23) şi cele similare ei. Printre constatările făcute cu această ocazie, semnalăm în special faptul că repartiţia iniţială a saturaţiei în apă are o influenţă destul de însemnată asupra fenomenului de dezlocuire în perioada iniţială a acestuia. Mai departe, am tratat sumar soluţia pentru o anumită repartiţie iniţială a saturaţiei în apă care, după părerea noastră, reprezintă mai corect situaţia reală decît ipoteza obişnuită de a admite o variaţie discontinuă a saturaţiei în apă la contactul iniţial apă-petrol.

În continuare, am arătat cum poate fi introdus în calcule şi efectul gravitaţiei. Cu această ocazie, menţionăm că pe calea urmată de noi nu se poate stabili influenţa pe care o are gravitaţia asupra formei frontului de dezlocuire. Această ultimă problemă a fost tratată, cu unele ipoteze simplificatoare, de către A. M. Pirverdian [6] precum şi de către I. A. Ciarnîi [3] în condiţii mai generale.

În sfîrşit, am arătat că în cazul unui mediu poros neomogen fenomenul de dezlocuire este influenţat numai de variaţia porozităţii.

Primită la redacţie la 3 martie 1960.

О ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

РЕЗЮМЕ

Исходя из обычных предположений, которые делаются при исследовании движения неоднородных жидкостей в пористых средах, устанавливается дифференциальное уравнение для одномерного движения. Члены, учитывающие эффект капилярности, обусловливают то, что найденное уравнение нельзя проинтегрировать известными методами. Пренебрежение этим эффектом ведет к квазилинейному уравнению с частными производными первого порядка, для которого задачу начальных значений можно решить без труда. Рассматривается случай как постоянного, так и изменяющегося во времени расхода. Приводится решение и для случая, когда эффектом силы тяжести нельзя пренебречь. В заключение, показывается, каково влияние неоднородности пористой среды на явление вытеснения.

---

[1]) Nu am luat în discuţie scurgerea radială deoarece soluţia se obţine pe aceeaşi cale ca şi pentru scurgerea liniară.

SUR LE DÉPLACEMENT LIQUIDE-LIQUIDE DANS UN MILIEU POREUX

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ les hypothèses habituelles concernant l'étude de l'écoulement des fluides hétérogènes à travers les milieux poreux, on établit l'équation différentielle de l'écoulement linéaire. A cause des termes qui représentent l'effet de la capillarité, cette équation n'est pas intégrable par les méthodes connues. Si l'on néglige l'effet de la capillarité, on arrive à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, quasi linéaire, pour laquelle on peut facilement résoudre le problème aux valeurs initiales. On envisage les deux situations possibles concernant le débit, c'est-à-dire débit constant ou variable avec le temps selon une loi quelconque. On donne de même la solution pour le cas où il faut tenir compte de l'effet de la pesanteur. Pour finir, on met aussi en évidence l'influence qu'exerce sur le phénomène le fait que le milieu poreux peut ne pas être homogène.

BIBLIOGRAFIE

1. S. E. BUCKLEY, M. C. LEVERETT, *Mechanism of Fluid Displacement in Sands.* AIME Transactions, **146**, 107—116 (1942).
2. С. Н. БУЗИНОВ, И. А. ЧАРНЫЙ, *О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости.* Известия Академии Наук, СССР, ОТН, *7*, 142—146 (1957).
3. И. А. ЧАРНЫЙ *Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде.* Известия Академии Наук, СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, *3*, 104—120 (1959).
4. N. CRISTEA, *Hidraulica subterană.* **II.** Ed. tehnică, Bucureşti, 1958, 385—363 şi 403—405.
5. M. MUSKAT, *Physical Principles of Oil Production.* McGraw Hill, New York, 1949, 311—321.
6. А. М. ПИРВЕРДИАН, *О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах.* Прикладная математика и механика, **XVI**, *2*, 223—226 (1952).
7. — *Движение двухфазной несжимаемой смеси в пористой среде.* Прикладная математика и механика, **XVI**, *6*, 711—714 (1952).
8. D. R. SHREWE, L. W. WELCH, Jr. : *Gas Drive and Gravity Drainage Analysis for Pressure Maintenance Operations.* Journal of Petroleum Technology, June, 136—143 (1956).
9. R. SAUER, *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.* Springer, Berlin-Göttingen — Heidelberg, 1958, 36—39.

HIDROMECANICĂ

O EXTINDERE A DOMENIULUI DE UTILIZARE A LEGII DARCY

DE

V. MANEA

Cercetările şi studiile efectuate asupra scurgerii fluidelor prin medii poroase în marea lor majoritate se bazează pe cunoscuta lege a lui Darcy sau legea rezistenţei de filtraţie [1]; exprimată analitic această lege se scrie sub forma

$$V = kj \tag{1}$$

unde V este viteza de filtraţie, k coeficientul de filtraţie şi j panta piezometrică. Introducerea noţiunii de rezistenţă de filtraţie de către N. P. Puzîrevski şi K. Terzagi permite scrierea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării fluidelor prin medii poroase sub forma

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + m\overline{f}_e + m\overline{R}, \tag{2}$$

unde m reprezintă coeficientul de porozitate, $\overline{f}_e$ cîmpul forţelor exterioare aplicate asupra unităţii de masă, iar $\overline{R}$ rezistenţa de filtraţie raportată de asemeni la unitatea de masă.

Rezistenţa de filtraţie $\overline{R}$ poate fi pusă ca o funcţie de viteză. În primă aproximaţie se poate admite o dependenţă liniară, iar pentru viteze mai mari o lege parabolică sau o altă lege.

Introducînd în (2)

$$m\overline{R} = -q\overline{V}, \tag{3}$$

se obţine ecuaţia de mişcare a fluidelor prin medii poroase nedeformabile. În cazul mişcărilor lente, forţele de inerţie sînt mici în comparaţie cu celelalte şi pot fi deci, neglijate. Dacă $\overline{f}_e$ reprezintă numai cîmpul gravitaţional ecuația (2) reprezintă chiar legea lui Darcy. C. A. Hristianovici consideră pentru rezistența de filtrație o funcție oarecare de viteză. Detalii asupra acestei chestiuni pot fi găsite în [2][1]).

Rezultatele experimentale prezentate în [1][2]) confirmă justețea legii lui Darcy pînă la anumite valori ale numărului $\mathcal{R}_e$ definit de exemplu de N. N. Pavlovski prin formula

$$\mathcal{R}_e = \frac{vd}{\nu} \frac{1}{0{,}75\, \mathrm{m} + 0{,}23},$$

unde d este diametrul efectiv al particolelor, iar ν viscozitatea cinematică. Pentru valori mari ale vitezei de filtrație se impune înlocuirea legii lui Darcy printr-o lege neliniară.

Revenind la ecuația (1), vom menționa că pentru coeficientul de filtrație s-a propus o dependență de coeficientul de porozitate de forma

$$k = k_1 \frac{m^3}{(1-m)^2}$$

unde k_1, este o constantă depinzînd de temperatură și diametrul efectiv[3]).

Rezultă pentru coeficientul q din (3) o comportare analogă cu $\frac{1}{k}$ adică

$$q \sim \frac{(1-m)^2}{m^3}.$$

Ținînd seama de (3) ecuația (2) se scrie

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + m\overline{f}_e - q\,\overline{V} \tag{4}$$

de unde se observă că pentru cazurile limită $m = 1$ avem scurgerea unui fluid ideal, iar pentru $m = 0$ viteza de scurgere este nulă.

Ne propunem să completăm ecuația (4) astfel încît prin trecerea la limită să obținem ecuația Navier-Stokes, adică scurgerea unui fluid vîscos.

Pentru aceasta vom introduce tensorul tensiunilor sub forma

$$\sigma_{ik} = -p\,\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \tag{5}$$

unde p este presiunea, δ_{ik} simbolul lui Kronecker, iar σ'_{ik} tensorul tensiunilor datorite viscozității fluidului [3]. Admițînd legătura între tensorul tensiunilor și tensorul viteză de deformare după legea generalizată a lui Newton, vom scrie tensorul tensiunilor datorite viscozității sub forma

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi\,\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{6}$$

---

[1]) p. 39.

[2]) p. 50.

[3]) p. 55–56.

astfel că ecuațiile de mişcare a fluidelor se completează cu termenii

$$\nu\Delta\bar{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\bar{v}), \tag{6'}$$

unde $\bar{v}$ reprezintă viteza locală a particulelor de fluid. În cazul scurgerii printr-un mediu poros vom considera valabilă relația (6) şi (6'), cu deosebirea că $\bar{v}$ va reprezenta viteza de filtrație, coeficienții μ şi ζ avînd aceleaşi valori ca în scurgerea vîscoasă.

În consecință, în locul ecuației (4) vom scrie

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + m\bar{f}_e - q\bar{V} + \nu\Delta\bar{V} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\bar{V}), \tag{7}$$

care pentru $m \to 1$ se transformă în ecuația Navier-Stokes. La această ecuație se adaugă ecuația de continuitate

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{V}) = 0, \tag{8}$$

precum şi ecuația de stare

$$\rho = f(p), \tag{9}$$

În privința condițiilor la limită, vom observa că pe pereții impermeabili ce mărginesc mediul poros respectiv, viteza de filtrație e nulă (în studiul scurgerilor prin medii poroase, bazate pe legea lui Darcy, condiția la limită este de forma $\bar{V}\cdot\bar{n} = 0$). Pentru suprafețele libere ce mărginesc mediul poros vom avea presiunea egală cu presiunea din exterior.

În continuare, vom studia cîteva exemple de scurgeri simple. Vom considera scurgerea staționară bidimensională printr-un mediu poros delimitat de doi pereți plani paraleli a unui fluid incompresibil, neglijînd cîmpul forțelor exterioare. Față de un sistem de referință ales ca în figura 1, viteza este paralelă cu axa ox.

În acest caz ecuațiile ce descriu această mişcare sînt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= -qu + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

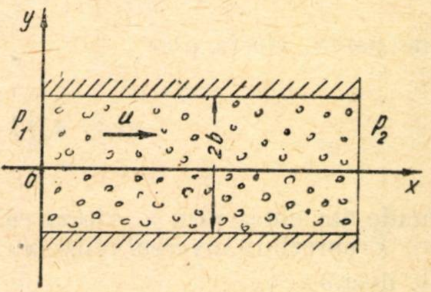


Fig. 1

Din ultimele două ecuații rezultă că presiunea e funcție numai de x iar viteza numai de y. Soluția primei ecuații este

$$u = A\operatorname{ch}\lambda y + B\operatorname{sh}\lambda y - \frac{1}{q\rho}\frac{dp}{dx}, \tag{11}$$

unde $\lambda^2 = \frac{q}{\nu}$.

Din condiția ca la perete, $y = \pm b$, viteza să fie nulă se determină constantele A și B. Expresia (11) capătă forma

$$u = \frac{-1}{\rho q} \cdot \frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\lambda y}{\operatorname{ch}\lambda b}\right). \tag{11'}$$

La limită cînd $\lambda \rightarrow 0$ (11′) devine

$$u = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx}(b^2 - y^2). \tag{11''}$$

În cazul mediilor poroase cu permeabilitate mică, coeficientul λ ia valori mari, ceea ce face ca viteza să fie practic constantă în secțiune. În apropierea peretelui putem pune

$$\frac{\cos \lambda (b - \delta)}{\cos \lambda b} \cong e^{-\lambda\delta},$$

deci

$$u = -\frac{1}{q\rho}\frac{dp}{dx}(1 - e^{-\lambda\delta}).$$

De aici rezultă că la distanța

$$\delta = \frac{1}{\lambda}$$

de perete viteza este

$$u_\delta = u_A\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cong 0{,}632\ U_A$$

unde am notat prin u_A viteza calculată după legea lui Darcy. Remarcăm că λ reprezintă inversul rădăcinii pătrate din coeficientul de permeabilitate c, deci $\delta \simeq \sqrt{c}$.

Prin urmare scurgerea printr-un mediu poros cu permeabilitate mică este puțin influențată de prezența pereților, astfel că legea lui Darcy aproximează foarte bine fenomenul de scurgere.

Pentru medii poroase cu permeabilitate mare se impune utilizarea ecuației (7).

Un aspect mai interesant îl constituie scurgerea în apropierea peretelui. Considerațiile făcute în problema stratului limită presupun suprafața netedă precum și aderența fluidului la perete. Dacă suprafața prezintă o anumită rugozitate[1]), putem asimila scurgerea pe suprafață ca o scurgere printr-un mediu cu porozitate variind de la 0 la 1 pe intervalul de grosime δ.

Presupunînd mișcarea lentă ecuația (7) devine

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -qu + v\frac{d^2u}{dy^2} \qquad (12)$$

unde $u = u(y)$. Coeficientul q este o funcție de y devenind ∞ pentru $y = 0$ și 0 pentru $y = \delta$.

Vom scrie mai întîi ecuația (12) în variabile adimensionale introducînd notațiile

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}\,U_\delta \\ y &= \delta\eta \\ x &= X \end{aligned} \qquad (13)$$

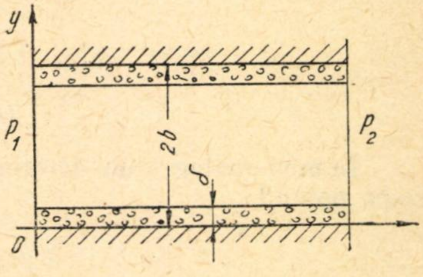


Fig. 2

vom avea

$$\frac{\delta^2}{\mu U_\delta}\frac{dp}{dx} = -\frac{q\delta^2}{\nu}\bar{u} + \frac{d^2\bar{u}}{d\eta^2}. \qquad (14)$$

Pentru coeficientul $\frac{q\delta^2}{\nu}$ vom utiliza expresia

$$\frac{q\delta^2}{\nu} = \frac{1-\eta}{\eta}, \qquad (15)$$

de unde

$$q = \frac{\nu}{\delta^2}\frac{1-\eta}{\eta}.$$

Înlocuind q în (14) se obține

$$\eta\frac{\delta^2}{\mu U_\delta}\frac{dp}{dx} = (\eta - 1)\,\bar{u} + \eta\frac{d\bar{u}^2}{d\eta^2}. \qquad (14')$$

Vom căuta să obținem soluția acestei ecuații cu ajutorul seriei de puteri. O soluție particulară a acestei ecuații poate fi luată de forma

$$\bar{u}_p = \eta^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\eta^k. \qquad (16)$$

---

[1]) Este evident că forma asperităților suprafeței trebuie să permită această asimilare cu un mediu poros, ale cărui caracteristici se vor stabili prin considerații geometrice asupra formei acestora, completate cu încercări experimentale.

Substituind în mod corespunzător în (14′) conform cu (16) obţinem prin identificare relaţiile

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ a_0 &= \frac{\delta^2}{2\mu U_\delta}\,\frac{dp}{dx} \\ a_1 &= \frac{a_0}{3.2} \\ a_2 &= \frac{a_1 - a_0}{4.3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= \frac{a_{k-1} - a_{k-2}}{(k+2)(k+1)} \end{aligned} \tag{17}$$

În mod analog vom determina soluţia ecuaţiei (14′) fără membrul drept punînd

$$\overline{u}_0 = \eta^\beta \sum_{m=0}^{\infty} b_m \eta^m \tag{18}$$

ai cărei coeficienţi se determină prin identificare. Astfel rezultă

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{b_0}{(\beta+1)\beta} \\ b_2 &= \frac{b_1 - b_0}{(\beta+2)(\beta+1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_k &= \frac{b_{k-1} - b_{k-2}}{(\beta+k)(\beta+k-1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Din ecuaţia caracteristică rezultă valorile lui β şi anume

$$\beta_1 = 1$$
$$\beta_2 = 0$$

După cum se ştie [4] pentru determinarea coeficienţilor (19) este utilă numai rădăcina $\beta = 1$. Deci o primă soluţie a ecuaţiei omogene este

$$u_{01} = \eta \sum_{m=0}^{\infty} b_m \eta^m. \tag{20}$$

Pentru construirea celei de-a doua soluţii vom urma procedeul clasic, în virtutea căruia avem

$$\overline{u}_{02} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \eta^n + \gamma\,\overline{u}_{01} \ln \eta \tag{21}$$

unde termenul $C_0 \neq 0$. Soluția generală a ecuației omogene va fi de forma

$$\overline{u}_0 = \overline{u}_{01} + A\,\overline{u}_{02}, \tag{22}$$

iar soluția ecuației (14′)

$$\overline{u} = \overline{u}_0 + \overline{u}_p, \tag{23}$$

A fiind o constantă arbitrară.

Condițiile la limită ale problemei sînt următoarele :

$$\begin{aligned} \overline{u} &= 0 \quad \text{pentru } \eta = 0, \\ \overline{u} &= 1 \quad \text{pentru } \eta = 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Pentru a satisface primei condiții e necesar să avem $A = 0$. Prin urmare soluția (23) se reduce la

$$\overline{u} = \overline{u}_{01} + \overline{u}_p, \tag{25}$$

în care avem de determinat coeficientul b_0 cu ajutorul celei de a doua condiții (24). Astfel vom avea

$$b_0 = \frac{1 - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k}{\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{b_0}}, \tag{26}$$

rapoartele $\frac{b_m}{b_0}$ fiind date de (19).

Vom avea pentru viteză ținînd seamă de (13) o expresie de forma

$$u = \frac{\delta^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\eta^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}\eta^k + \frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}}\left(U_\delta - \frac{\delta^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}\right)\eta \sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}\eta^m \tag{27}$$

graficul funcțiilor reprezentate prin cele două serii fiind dat în figura 3.

În restul domeniului ocupat de fluid avem o mișcare viscoasă. Dacă în ecuația (12) facem $q = 0$, rezultă ecuația

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}, \tag{28}$$

a cărei soluție este

$$u_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + c_1 y + c_2. \tag{29}$$

Constantele c_1 şi c_2 le determinăm din condiţia ca pentru

$$\left.\begin{aligned} y &= \delta \\ y &= 2b - \delta \end{aligned}\right\} u_1 = U_\delta ,$$

astfel încît (29) devine

$$u_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y - \delta)\,(y - 2b + \delta) + U_\delta . \tag{30}$$

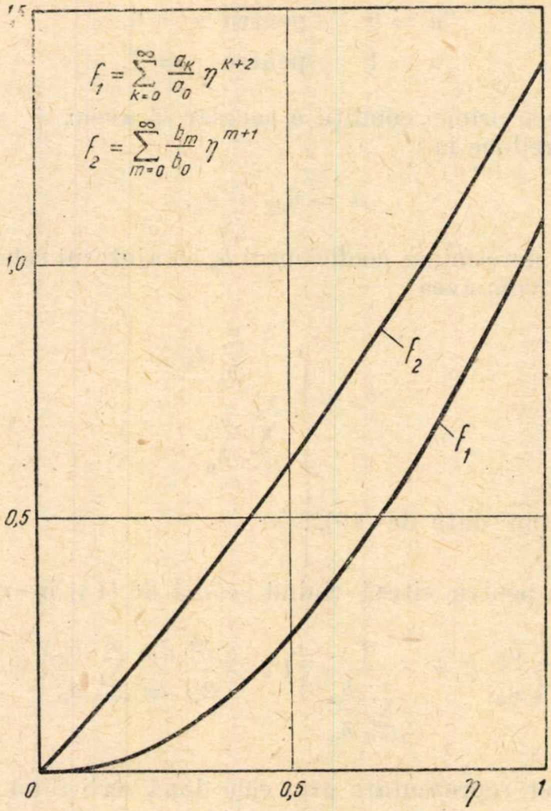


Fig. 3

Expresiile (27) şi (30) dau viteza de scurgere a fluidului viscos, prima în vecinătatea peretelui, cea de-a doua în restul domeniului. În ambele expresii intervine viteza U_δ pe care o vom determina din condiţia ca pentru $y = \delta$ să avem

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=\delta} . \tag{31}$$

Efectuînd calculele corespunzătoare rezultă

$$U_\delta = \frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{b_m}{b_0}}\,\frac{1}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}\left\{2\delta(\delta-b)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}+\right.$$

$$\left.+\,\delta^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}\,(m+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}-\sum(k+2)\frac{a_k}{a_0}\sum\frac{b_m}{b_0}\right)\right\}. \qquad (32)$$

Printr-un calcul aproximativ al sumei seriilor care intervin în (32) avem

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}\cong 1{,}085\,; \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}\cong 1{,}38,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\frac{a_k}{a_0}\cong 2{,}174\,; \qquad \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{b_m}{b_0}\cong 1{,}57.$$

Cu aceste valori (32) devine

$$U_\delta \cong \frac{1}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}(0{,}935\;\delta^2 - 1{,}75\;b\delta). \qquad (32')$$

Viteza medie de scurgere între pereți este dată de formula

$$u_{\text{med}} = \frac{1}{2b}\left\{2\int_0^{\delta} u\,dy + \int_{\delta}^{2b-\delta} u_1\,dy\right\}, \qquad (33)$$

în care dacă înlocuim u și u_0 conform cu (27) și (30) obținem

$$u_{\text{med}} = \frac{\delta}{b}\left\{\frac{\delta^2}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+3}\,\frac{a_k}{a_0}+\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{b_0}}\left(U_\delta - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\frac{\delta^2}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+2}\,\frac{b_m}{b_0}\right\}-\frac{1}{3b\mu}\,\frac{dp}{dx}(b-\delta)^3+\left(1-\frac{\delta}{b}\right)U_\delta, \qquad (34)$$

sau înlocuind

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+3}\,\frac{a_k}{a_0}\cong 0{,}356,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+2}\,\frac{b_m}{b_0}\cong 0{,}636,$$

cît și $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}$ cu valoarea dată mai sus, rezultă următoarea expresie pentru viteza medie :

$$u_{\text{med}} = u_{0\text{med}}\left\{-0{,}03\left(\frac{\delta}{b}\right)^3+0{,}18\left(\frac{\delta}{b}\right)^2-0{,}38\left(\frac{\delta}{b}\right)+1\right\}, \qquad (34')$$

unde am notat

$$u_{0\text{med}} = \frac{-1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{2b^2}{3},$$

viteza medie în absența rugozității.

În figura 4 sînt date graficele distribuției vitezelor de scurgere între doi pereți plani paraleli în prezenta porozității, (u), cît și în absența ei (u_0). Distanța dintre pereți este $2b = 2\delta$.

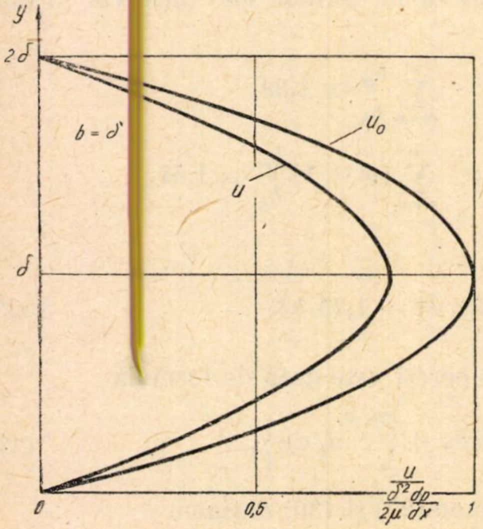


Fig. 4

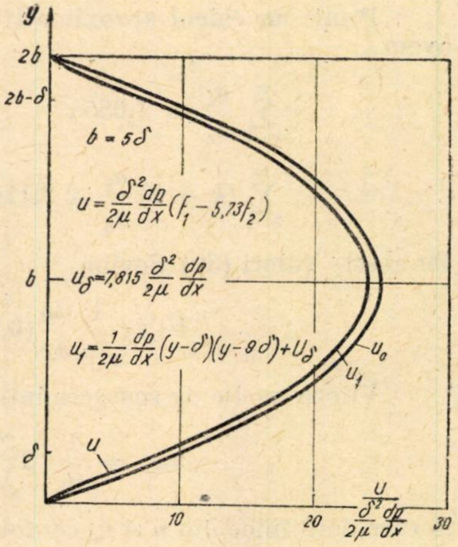


Fig. 5

În figura 5 sînt reprezentate grafice similare, pentru scurgerea între doi pereți aflați la distanța $2b = 10\,\delta$.

Dependența vitezei medii de scurgere de raportul $\frac{\delta}{b}$ este reprezentată grafic în figura 6.

În cele de pînă acum am căutat să punem în evidență posibilitatea de extindere a domeniului de utilizare a legii Darcy sau eventual a unei legi mai generale. Astfel în problema scurgerilor hidrodinamice în jurul corpurilor, se poate ține seama de rugozitate asimilînd-o cu un mediu cu porozitate variabilă, avînd o grosime anumită. În acest mod se pot

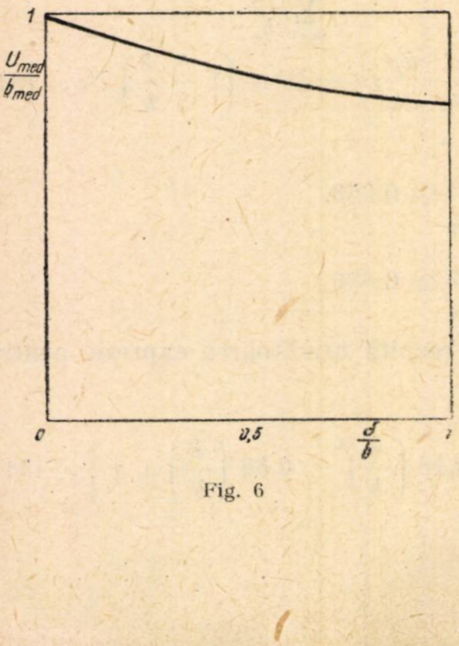


Fig. 6

obţine rezultate interesante în problema frecării unui fluid de suprafaţa corpului în jurul căruia se scurge. Desigur că acest mod de a pune problema permite evaluarea influenţei rugozităţii asupra stratului limită sau asupra scurgerii fluidelor în pături subţiri sau asupra stabilităţii mişcării.

Primită la redacţie la 6 februarie 1960.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ДАРСИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье показывается, что применяя общее уравнение течения вязкой жидкости в пористой среде, можно разрешить некоторые проблемы, как например, проблему обтекания тела с шероховатой поверхностью.

Уравнение применяется к случаю течения между двумя плоскопараллельными шероховатыми стенками.

UNE EXTENSION DU DOMAINE D'UTILISATION DE LA LOI DE DARCY

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur montre que l'utilisation d'une équation plus générale de l'écoulement d'un fluide visqueux, à travers un milieu poreux, permet de résoudre certains problèmes, tels, par exemple, celui de l'écoulement d'un fluide autour d'un corps dont la surface est rugueuse.

Il applique la méthode à l'écoulement entre deux parois planes parallèles rugueuses.

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде*. Москва, 1953.
2. П. И. Полубарина-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*. Москва, 1952.
3. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифщиц, *Механика сплошных сред*. Москва, 1953.
4. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*. **III**, partea a II-a. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

STUDII

HIDROMECANICĂ

DETERMINAREA LUNGIMII DE STABILIZARE A MIŞCĂRII FLUIDELOR CU SUPRAFAŢĂ LIBERĂ ÎN CANALE LARGI CU PANTĂ DE FUND

DE

S. HÎNCU [1]

Într-o lucrare anterioară [1] s-a determinat lungimea de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu fund orizontal în regim laminar şi turbulent.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem efectul unei pante i a fundului asupra lungimii de stabilizare a mişcării fluidelor în canale largi cu nivel liber.

Mişcarea fluidului o raportăm la un sistem de axe de coordonate oxy (fig. 1).

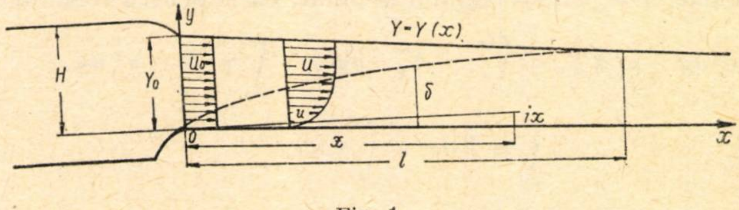


Fig. 1

Din cauza valorilor mici ale pantei i, axul ox se confundă cu linia fundului canalului, iar axul oy coincide cu verticala.

Ca şi în lucrarea [1] presupunem realizate următoarele condiţii:

— în secţiunea de intrare a fluidului în canal, viteza este uniform distribuită;

— în aval de secţiunea de intrare, datorită frecării şi aderenţei fluidului de fundul canalului apare şi se dezvoltă stratul limită, deasupra căruia fluidul se mişcă fără frecare;

---

[1] Institutul de studii şi cercetări hidrotehnice.

— în orice secţiune verticală a curentului presiunea se repartizează hidrostatic.

Folosim următoarele notaţii :
U_0 — viteza fluidului în secţiunea de început,
U — viteza fluidului în zona fără frecare într-o secţiune curentă,
u — viteza curentului în stratul limită,
Y — $Y(x)$ — curba suprafeţei libere de scurgere,
δ — grosimea stratului limită,
$\delta^\star = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ — grosimea de eliminare,
τ_0 — efortul unitar de frecare pe fund,
ρ — masa specifică a fluidului,
μ — coeficientul de vîscozitate dinamică a fluidului,
ν — coeficientul de vîscozitate cinematică,
g — acceleraţia gravitaţională,
γ — greutatea specifică a fluidului,
H — înălţimea energetică totală a curentului,
Y_0 — înălţimea curentului în secţiunea de intrare,
$\mathcal{F}r = \frac{U_0}{\sqrt{gY_0}}$ numărul lui Froude,
$\mathcal{R}e = \frac{U_0 Y_0}{\nu}$ numărul lui Reynolds,

$$\eta = \frac{U}{U_0},\ X = \frac{x}{Y_0}.$$

Considerînd două secţiuni verticale, una în originea axelor de coordonate şi alta la distanţa x, putem scrie următoarele ecuaţii ale mişcării, valabile, atît pentru regimul laminar, cît şi pentru regimul turbulent

$$\int_0^Y \rho u^2 dy - \rho U_0^2 Y_0 = \int_0^{Y_0} \gamma (Y_0 - y) dy - \int_0^Y \gamma (Y - y)\, dy + \int_0^x \gamma i Y dx - \int_0^x \tau_0 dx, \tag{1}$$

ecuaţia cantităţii de mişcare

$$U (Y - \delta^\star) = U_0 Y_0, \tag{2}$$

ecuaţia continuităţii

$$\frac{U_0^2}{2g} + Y_0 + ix = \frac{U^2}{2g} + Y, \tag{3}$$

ecuaţia energiei.

Derivînd ecuaţia (1) în raport cu variabila X, obţinem

$$\int_0^Y 2 \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \rho U^2 \frac{dY}{dx} + \gamma Y \frac{dY}{dx} + \tau_0 - \gamma i Y = 0. \tag{4}$$

a. *Regim laminar de mişcare a fluidului.* Admitem că distribuţia vitezelor în stratul limită este parabolică

$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}. \tag{5}$$

În acest caz

$$\delta^* = \frac{1}{3}\delta, \tag{6}$$

iar pentru efortul unitar de frecare la perete obţinem

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}. \tag{7}$$

În locul ecuaţiilor (2) şi (4) putem scrie

$$U\left(Y - \frac{1}{3}\delta\right) = U_0 Y_0, \tag{8}$$

$$2\rho U\left(Y - \frac{7}{15}\delta\right)\frac{dU}{dx} + \rho U^2\left(\frac{dY}{dx} - \frac{7}{15}\frac{d\delta}{dx}\right) + \gamma Y\frac{dY}{dx} - \gamma i Y + 2\mu\frac{U}{\delta} = 0. \tag{9}$$

Din ecuaţiile (3) şi (8) exprimăm variabilele Y şi δ funcţie de U şi le introducem în ecuaţia (9). Obţinem după unele transformări

$$\frac{dx}{dU} = \frac{\left(7\rho U_0 Y_0 - 9\rho U H + 13\rho\frac{U^3}{2g} - 9\rho i U x\right)\left(H - \frac{U^2}{2g} + ix - \frac{U_0 Y_0}{U}\right)}{2\rho i U^2\left(H - \frac{U^2}{2g} + ix - \frac{U_0 Y_0}{U}\right) - \frac{10}{3}\mu U} \tag{10}$$

Trecînd la forme adimensionale ecuaţia (10) devine

$$dX = \frac{\left[7 - 9\eta\left(1 + \frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2}\right) + 13\eta^3\frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2} - 9i\eta X\right]\left[1 + \frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2} - \eta^2\frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2} + iX - \frac{1}{\eta}\right]}{2i\eta^2\left[1 + \frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2} - \eta^2\frac{\mathfrak{F}_r{}^2}{2} + iX - \frac{1}{\eta}\right] - \frac{10}{3\mathfrak{R}_e}\eta} d\eta. \tag{11}$$

Ecuaţia diferenţială (11) nu poate fi integrată prin cuadratură. Se pot obţine soluţii ale ei pentru diverse valori i prin aproximaţii succesive. Pentru $i = 0$ ecuaţia (11) a fost integrată în lucrarea [1]. Pentru valori mici ale pantei i se introduce în ecuaţia (11) relaţia $X = X_0 = f(\mathfrak{R}_e, \mathfrak{F}_r\ \eta)$ corespunzătoare valorii $i = 0$. Prin integrare numerică sau grafică se găseşte $X_{01} = f_1(\mathfrak{R}_e, \mathfrak{F}_r, \eta, i)$. Această dependenţă poate fi îmbunătăţită integrînd a doua oară ecuaţia (11) punînd $X = X_{01}$ ş.a.m.d.

Lungimea de stabilizare X_e corespunde secțiunii în care $\delta = Y_l$ și deci $\eta = \eta_l$. Valoarea limitei de intergrare η_l este dată de ecuația

$$\eta_l^3 \mathcal{F}r^2 - \eta_l (\mathcal{F}r^2 + 2 + 2i X_l) + 3 = 0, \tag{12}$$

obținută din ecuațiile (3) și (8).

Pentru a stabili influența pantei fundului canalului asupra lungimii de stabilizare a mișcării fluidului s-a integrat ecuația (11) pentru $\mathcal{F}r = 0$, $\mathcal{R}e = 500$ și $i = 0{,}001$. S-a obținut $X_l = 43$, față de $X_l = 51{,}5$, cît corespunde pentru $\mathcal{F}r = 0$, $\mathcal{R}e = 500$ și $i = 0$. Prin urmare panta fundului canalului micșorează sensibil lungimea de stabilizare a mișcării fluidului în canal.

Lungimea de stabilizare a mișcării laminare a fluidului în canale largi cu pantă de fund i a fost determinată și de Chen-Che-Pen în lucrarea [2]. La integrarea ecuațiilor mișcării Chen-Che-Pen nu a luat în considerație termenii care conțin acțiunea forțelor de inerție, ceea ce a făcut ca valorile obținute de el să fie cu mult inferioare celor obținute de noi.

b. *Regim turbulent de mișcare a fluidului.* Admitem că în stratul limită repartiția vitezelor este dată de relația

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \tag{13}$$

iar efortul unitar de frecare a fluidului de fundul canalului poate fi exprimat sub forma

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \rho\, U^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{14}$$

Folosind relația (13), ecuațiile (2) și (4) devin

$$U\left(Y - \frac{\delta}{8}\right) = U_0 Y_0, \tag{15}$$

$$2\rho\, U \frac{dU}{dx}\left(Y - \frac{2}{9}\delta\right) + \rho\, U^2\left(\frac{dY}{dx} - \frac{2}{9}\frac{d\delta}{dx}\right) + \gamma\, Y \frac{dY}{dx} + \tau_0 - \gamma i Y = 0. \tag{16}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (3) și (15) explicităm variabilele Y și δ funcție de U și le introducem apoi în ecuația (16). După unele transformări obținem

$$dx = \frac{\left[16\rho U_0 Y_0 - 23\rho U H + 37\rho \frac{U^3}{2g} - 23\rho i U x\right]\left[UH - \frac{U^3}{2g} - U_0 Y_0 + iUx\right]^{\frac{1}{4}}}{7\rho i U^2 \left[HU - \frac{U^3}{2g} - U_0 Y_0 + iUx\right]^{\frac{1}{4}} - 0{,}121\, \nu^{\frac{1}{4}}\, \rho U^2} \cdot dU. \tag{17}$$

Introducînd mărimile adimensionale X, η, $\mathcal{R}e$, $\mathcal{F}e$, ecuaţia (17) devine

$$dX=\frac{\left[\frac{16}{\eta^2}-\frac{23\left(1+\frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right)}{\eta}+37\eta\frac{\mathcal{F}r^2}{2}-23\frac{iX}{\eta}\right]\left[\eta\left(1+\frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right)-\eta^3\frac{\mathcal{F}r^2}{2}-1+i\eta X\right]^{\frac{1}{4}}}{7i\left[\eta\left(1+\frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right)-\eta^3\frac{\mathcal{F}r^2}{2}-1+i\eta X\right]-\frac{0{,}121}{\mathcal{R}e^{\frac{1}{4}}}}\cdot d\eta. \tag{18}$$

Ecuaţia (18) poate fi integrată numeric sau grafic prin aproximaţii succesive, luînd iniţial $X = X_0 = f\ (\mathcal{R}e,\ \mathcal{F}r,\ \eta)$ corespunzătoare pantei $i=0$ şi apoi repetînd calculele după acelaşi procedeu ca şi în cazul regimului laminar de scurgere a fluidului.

Pentru $i = 0$ şi $\mathcal{F}r=0$ ecuaţia (18) a fost integrată de noi în lucrarea [1]. În acest caz ecuaţia (18) coincide cu ecuaţia diferenţială a mişcării fluidelor în canale largi sub presiune, studiată de noi în lucrarea [3].

Valoarea limitei η_l de integrare a ecuaţiei (18) este dată de relaţia

$$\eta_l^3\mathcal{F}r^2-\eta_l\left(\mathcal{F}r^2+2+2\,i\,X_l\right)+\frac{16}{7}=0, \tag{19}$$

obţinută din ecuaţiile de continuitate şi a energiei punînd condiţia $\delta = Y_l$.

Pentru a stabili influenţa pantei fundului canalului asupra mărimii lungimii de stabilizare a mişcării fluidului cu nivel liber s-a integrat numeric ecuaţia (18) pentru $\mathcal{F}r = 0$, $\mathcal{R}e = 4\,000$ şi $i = 0{,}001$. S-a obţinut pentru lungimea de stabilizare a fluidului valoarea $X = 31$, faţă de $X = 34{,}3$, cît corespunde pentru $\mathcal{F}r = 0$, $\mathcal{R}e = 4\,000$ şi $i = 0$.

Prin urmare şi în cazul regimului turbulent de mişcare a fluidului panta fundului canalului micşorează lungimea de stabilizare a mişcării. Pentru valorile susmenţionate ale numerelor $\mathcal{R}e$ şi $\mathcal{F}r$ panta de $1^0/_{00}$ produce o scurtare a lungimii de stabilizare cu cca 10%.

Primită la redacţie la 18 noiembrie 1959

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ШИРОКИХ КАНАЛАХ С ДОННЫМ УКЛОНОМ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается влияние донного уклона каналов на длину стабилизации движения жидкостей со свободной поверхностью.

Исследование проводится, разрешая при помощи последовательных приближений интегральные уравнения движения жидкостей, на

начальном участке каналов. Приходим к выводу, что как при ламинарном, так и при турбулентном режимах, уклон дна канала оказывает существенное влияние на длину стабилизации движения. Положительный уклон дна канала на 1% влечет за собой уменьшение длины стабилизации примерно на 16% при ламинарном и на 10% при турбулентном режимах движения.

DETERMINATION OF THE STABILIZING LENGTH OF THE MOTION OF FLUIDS WITH FREE SURFACE IN LARGE CHANNELS WITH BOTTOM SLOPE

ABSTRACT

This paper discusses the influence of the bottom slope on the stabilizing length of the motion of fluids with free surface.

The study is made by solving through successive approximations the integral equations of the fluid motion within the stabilizing portion. The conclusion is reached that both for laminar and turbulent flows, the slope of the channel bottom influences sensibly the motion stabilizing length. Thus, a positive bottom slope of about 1 per cent results in the shortening of the stabilizing length by about 16 per cent in laminar flow and 10% in turbulent flow.

BIBLIOGRAFIE

1. S. HÎNCU, *Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu fund orizontal.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1* (1959).
2. CHEN-CHE-PEN, *Etablissement du régime laminaire dans un canal infiniment large rectangulaire de pente i.* Comptes Rendus des Séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris, **240**, *4*, 401 (1955).
3. S. HÎNCU, *Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării turbulente a fluidelor în canale largi şi conducte circulare sub presiune.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 973 (1958).
4. С. М. ТОРГ, *Основные задачи теории ламинарных течений.* Москва, 1951.

STUDII

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

PROBLEMA BIDIMENSIONALĂ A LUBRIFICAȚIEI ÎN REGIM TURBULENT INCOMPRESIBIL, ÎN CAZUL VISCOZITĂȚII VARIABILE

DE

N. TIPEI

Dacă se consideră ecuația presiunilor medii $\bar{p}$ în mișcarea bidimensională, expresia acestora este

$$\bar{p}_\infty = 6V\int\frac{\mu}{h^2}\left(1-\frac{h_0}{h}\right)\left[1+0{,}01167\,\mathcal{R}_e^{*0{,}725}\left(\frac{h}{h_1}\right)^{0{,}725\,(1-q)}\right]dx_1 + C_2, \qquad (1)$$

unde s-a notat, ca de obicei, h grosimea peliculei fluide, $V = V_{11} + V_{21}$ suma vitezelor celor două suprafețe după direcția axei x_1, μ viscozitatea, iar $\mathcal{R}_e^* = \frac{\sigma^{*2}}{0{,}16}\,\frac{\rho V h_1}{\mu_1}$, h_1 fiind grosimea maximă a peliculei, μ_1 viscozitatea în punctul $h = h_1$, ρ densitatea și $\sigma^* = \pm\left(\frac{dl^*}{dx_2}\right)_{\substack{x_2=0\\x_2=h}}$ valoarea la perete a derivatei lungimii de amestec. Exponentul

$$q = \frac{\ln\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)}{\ln\left(\frac{h}{h_1}\right)}, \qquad (2)$$

este cuprins între zero și unitate și determină legea de variație a lui μ cu punctul prin intermediul lui h [1].

Ecuația (1) arată că $\bar{p}_\infty$ se poate lega foarte ușor de soluția $p_{\infty l}$ binecunoscută pentru cazul regimului laminar, și anume

$$\bar{p}_\infty = p_{\infty l} + \frac{0{,}07\,\mu_1 V\,\mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{h_1^{0{,}725+0{,}275\,q}}\int\frac{1}{h^{1{,}275-0{,}275\,q}}\left(1-\frac{h_0}{h}\right)dx_1 + C_2, \qquad (3)$$

iar dacă $q = 1$ se regăsesc, de asemenea, toate rezultatele obținute pentru regimul laminar, în care însă viteza V este multiplicată prin raportul

$$\frac{k_1}{12} = 1 + 0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0.725}. \tag{4}$$

1. *Suprafețe plane.* Dacă h_0 este grosimea în dreptul maximului de presiune, h_2 grosimea minimă iar l lungimea zonei comune a suprafețelor pe direcția Ox_1, se obține prin integrarea ecuației (3)

$$\left.\begin{aligned}
\bar{p}_\infty = {} & \frac{6\, V \mu_1 l}{1 - \dfrac{h_2}{h_1}} \left[\frac{4}{h_1^{1+q} h^{1-q}} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2-q} \frac{h_0}{h} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{h_1^{1{,}725+0{,}275\, q}\, h^{0{,}275\,(1-q)}} \left(\frac{1}{0{,}275\,(1-q)} - \frac{1}{1{,}275 - 0{,}275\, q} \frac{h_0}{h} \right) \right] + C_2, \\
h_0 = {} & \frac{\dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{1}{h_2^{1-q}} - \dfrac{1}{h_1^{1-q}} \right) + \dfrac{0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{0{,}275\,(1-q)} \left(\dfrac{1}{h_2^{0{,}275\,(1-q)}} - \dfrac{1}{h_1^{0{,}275\,(1-q)}} \right)}{\dfrac{1}{2-q}\left(\dfrac{1}{h_2^{2-q}} - \dfrac{1}{h_1^{2-q}} \right) + \dfrac{0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{1{,}275 - 0{,}275\, q} \left(\dfrac{1}{h_2^{1{,}275-0{,}275\, q}} - \dfrac{1}{h_1^{1{,}275-0{,}275\, q}} \right)}, \\
C_2 = {} & p_0 - \frac{6\, V \mu_1 l}{1 - \dfrac{h_2}{h_1}} \left[\frac{1}{(1-q)\, h_1^{2-q}} - \frac{h_0}{(2-q)\, h_1^{3-q}} - \right. \\
& \left. - \frac{0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0.725}}{h_1^{1{,}275-0{,}275\, q}} \left(\frac{1}{0{,}275\,(1-q)} - \frac{h_0}{(1{,}275 - 0{,}275)\, h_1} \right) \right].
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Coeficientul global de portanță rezultă apoi

$$\begin{aligned}
\zeta_\infty = {} & \frac{h_2^2 \displaystyle\int_0^l (\bar{p}_\infty - p_0)\, dx_1}{\mu_1 V l^2} = \frac{6}{\left(\dfrac{h_1}{h_2} - 1 \right)^2} \left\{ \frac{1 - \left(\dfrac{h_2}{h_1} \right)^q}{(1-q)\, q} - \right. \\
& - \frac{h_0}{(2-q)\,(1-q)\, h_1^q} \left(\frac{1}{h_2^{1-q}} - \frac{1}{h_1^{1-q}} \right) + \\
& + 0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*0{,}725} \left[\frac{1 - \left(\dfrac{h_2}{h_1} \right)^{0{,}725+0{,}275\, q}}{0{,}275\,(1-q)\,(0{,}725 + 0{,}275\, q)} - \right. \\
& \left. \left. - h_0 \frac{\dfrac{1}{h_2^{0{,}275\,(1-q)}} - \dfrac{1}{h_1^{0{,}275\,(1-q)}}}{(1{,}275 - 0{,}275\, q)\, 0{,}275\,(1-q)\, h_1^{0{,}725+0{,}275\, q}} \right] \right\} + \frac{(C_2 - p_0) h_2}{\mu_1 V l}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Se poate calcula apoi punctul de aplicație x_1^* al rezultantei presiunilor P_v

$$\frac{x_1^*}{l} = -\frac{l}{h_1^2\left(1-\frac{h_2}{h_1}\right)^2 P_{p0}}\int_{h_1}^{h_2} (\bar p_\infty - p_0)\,(h_1 - h)\,dh =$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{1-\frac{h_2}{h_1}}\Bigg\{ 1 - \frac{6}{\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)\frac{h_1}{h_2}\zeta}\Bigg\{ \frac{1-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1+q}}{1-q^2} - \frac{h_0\left[1-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{q}\right]}{h_1(2-q)\,q} + \qquad (7) \\ + 0{,}01167\ \mathcal{R}_e^{*0{,}725}\left[\frac{1-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1{,}725+0{,}275\,q}}{0{,}275\ (1-q)\ (1{,}725+0{,}275\,q)} - \right. \\ \left. - \frac{h_0}{h_1}\,\frac{1-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{0{,}725+0{,}275\,q}}{(1{,}275-0{,}275q)\ (0{,}725+0{,}275\ q)}\right]\Bigg\}\Bigg\} + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{(C_2-p_0)\,h_2^2}{\mu_1\,Vl\,\zeta_\infty}. \end{aligned}$$

În general, valorile presiunilor cresc o dată cu $\mathcal{R}_e^*$ (fig. 1) dar alura curbelor rămîne simțitor aceeași. Aceeași observație se poate face și pentru ζ_∞ (fig. 2) care a fost reprezentat în funcție de $\frac{h_1}{h_2}$ respectiv de înclinarea suprafețelor, după V. N. Constantinescu [2].

Frecarea este dată de coeficientul adimensional

$$k_{\mu 0} = -\frac{h_2}{\mu_1 Vl}\int \mu\left(\frac{\partial \bar v_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} dx_1 = -\frac{h_2}{\mu_1 Vl}\int \mathcal{C}_{11}\,dx_1, \qquad (8)$$

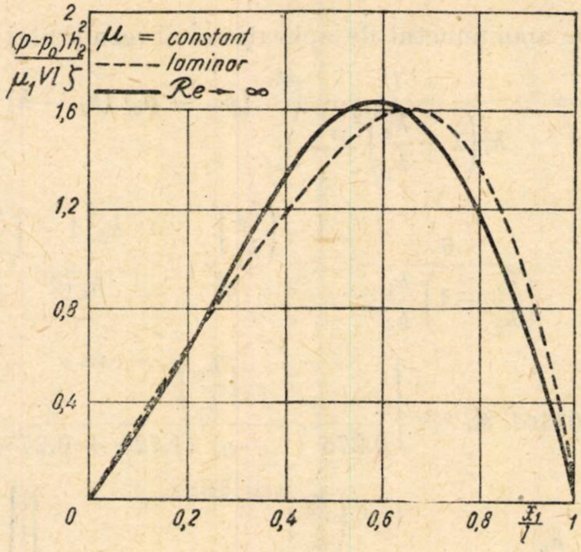
în care $\mathcal{C}_{11} = \frac{\partial \bar p}{\partial x_1}\,x_2^*$ este o funcție de x_1 prin intermediul presiunilor $\bar p$ iar x_2^* este cota punctului în care vitezele v_1, după axa Ox_1, ale fluidului au valoarea maximă sau minimă. Eventual x_2^* poate fi în afara intervalului $0 \div h$, dacă v_1 nu admite valori extreme.

Coeficientul de frecare este apoi

$$f = \frac{h_2\,k_{\mu 0}}{l\zeta_\infty}. \qquad (9)$$

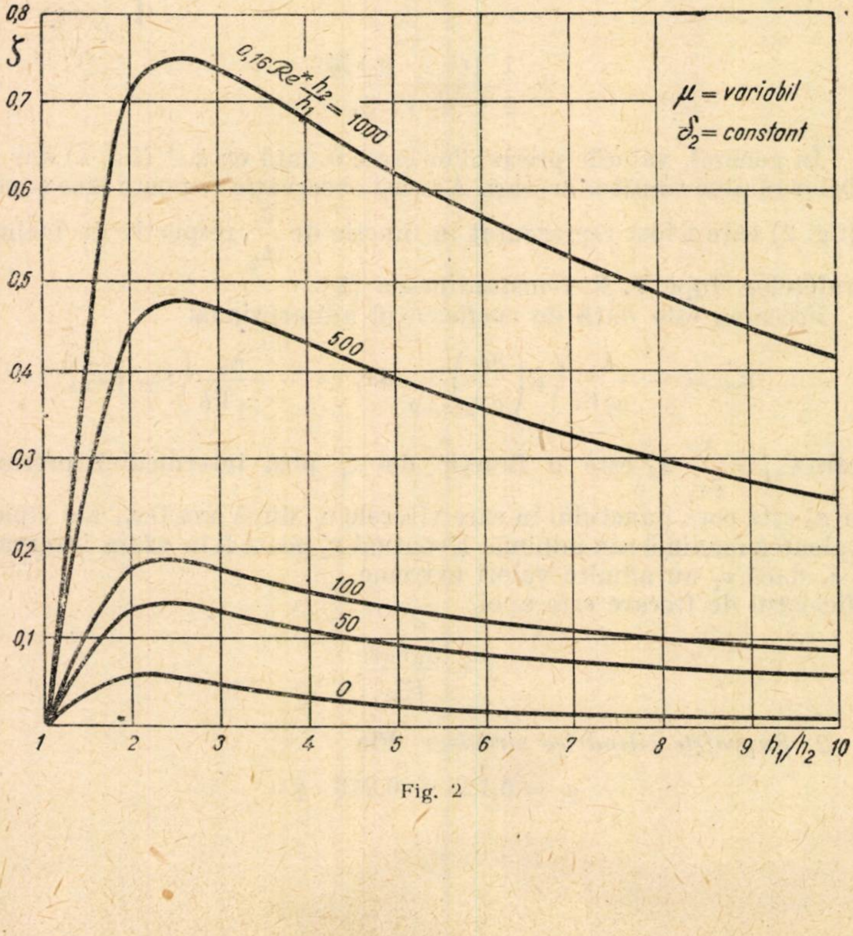
2. *Suprafețe cilindrice circulare.* Fie

$$q_t = 0{,}725 + 0{,}275\ q. \qquad (10)$$



$\frac{(p-p_0)h_2^2}{\mu_1 V l \zeta}$
2
1,6
1,2
0,8
0,4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
$\frac{x_1}{l}$
1
μ = constant
laminar
Re → ∞

Fig. 1



ζ
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$0{,}16\, Re^* \frac{h_2}{h_1} = 1000$
500
100
50
0
μ = variabil
δ_2 = constant
1
2
3
4
5
6
7
8
9
h_1/h_2
10

Fig. 2

Se vede imediat că soluția ecuației (3) se poate pune sub forma

$$\overline{p}_\infty = p_{\infty l} + 0{,}01167\, \mathcal{R}_e^{*\,0{,}725}\, p_{\infty t}, \tag{11}$$

unde $p_{\infty t}$ are aceeași expresie ca și $p_{\infty l}$ (în mișcarea laminară) dacă valoarea lui q se înlocuiește în aceasta prin q_t. Dacă c este jocul radial, r_1 raza fusului, $\epsilon = \dfrac{e}{c}$ excentricitatea relativă, notînd

$$\Xi_2 = \epsilon^2 (1 - q)\left[\frac{q}{2} + \left(1 - \frac{q}{2}\right)\frac{h}{c(1 - \epsilon^2)}\right], \tag{12}$$

s-a stabilit relația care dă pe $p_{\infty l}$ [2]

$$p_{\infty l} = \frac{6\mu_1 V r_1}{c^2 (1 + \epsilon)_q (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2} - q}}\left\{\left(1 - \frac{h_0}{(1 - \epsilon^2)\, c} - \frac{1}{2}\,\Xi_2\right)\operatorname{arc\,cos}\frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 - \epsilon^2}\left[\left(1 - q - \frac{2 - q}{1 - \epsilon^2}\,\frac{h_0}{c}\right)\epsilon + \frac{1}{2}\,\Xi_2\,\frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}\right]\frac{\sin\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}\right\} + C_2. \tag{13}$$

Pentru condițiile la limită uzuale, $p = p_0$ pentru $\theta = \dfrac{x_1}{r_1} = 0$ $(h = h_1)$ și $\theta = \pi\ (h = h_2)$ se determină apoi constantele h_0 și C_2

$$h_0 = c(1 - \epsilon^2)\frac{1 - \dfrac{q(1 - q)}{4}\epsilon^2 + 0{,}01167\,[(1 - \epsilon)^{1 - q}\,\mathcal{R}_e^*]^{0{,}725}.\left[1 - 0{,}1375\,\epsilon^2 (1 - q)\,\dfrac{q_t}{2}\right]}{1 + \dfrac{\epsilon^2}{2}(1 - q)\left(1 - \dfrac{q}{2}\right) + 0{,}01167\,[(1 - \epsilon)^{1 - q}\,\mathcal{R}_e^*]^{0{,}725}.\left[1 + 0{,}1375\,\epsilon^2 (1 - q)\,\dfrac{q_t}{2}\right]} \tag{14}$$

$$C_2 = p_0.$$

În particular, pentru $q = 0$ ecuația presiunilor va fi

$$\overline{p}_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1 V r_1}{c^2}\left\{\left[\left[\frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{h_0}{2c}\,\frac{2 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{0{,}01167\,\mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{(1 + \epsilon)^{0{,}725}(1 - \epsilon^2)^{0{,}775}}\left(1 - \frac{h_0}{c\,(1 - \epsilon^2)} - \frac{\Xi_{2t}}{2}\right)\right] \times \operatorname{arc\,cos}\frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta} - \tag{15}$$

$$- \left\{\epsilon\left[\frac{1}{1 - \epsilon^2}\left(1 - \frac{2h_0}{c\,(1 - \epsilon^2)}\right) + \frac{0{,}01167\,\mathcal{R}_e^{*0{,}725}}{(1 + \epsilon)^{0{,}725}(1 - \epsilon^2)^{0{,}275}}\left(0{,}275 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdot - \frac{1{,}275}{1 - \epsilon^2}\cdot\frac{h_0}{c}\right)\right] + \frac{1}{2(1 - \epsilon^2)}\left(\frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}\,\frac{h_0}{c} + \Xi_{2t}\right)\frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}\right\}\left.\frac{\sin\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}\right\}\Bigg].$$

Coeficienții adimensionali Ct, Cn care dau componentele rezultantei presiunilor după linia centrelor P_{pot} și perpendicular pe aceasta P_{pon} se pot serie imediat, ținînd seama de (11)

$$\left.\begin{aligned} Ct_\infty &= Ct_{\infty l} + 0{,}01167\left[\frac{\mathcal{R}_e^*}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right]^{0,725}(Ct_{\infty l})_{q=q_t}, \\ Cn_\infty &= Cn_{\infty l} + 0{,}01167\left[\frac{\mathcal{R}_e^*}{(1+\epsilon)^{1-q}}\right]^{0,725}(Cn_{\infty l})_{q=q_t}, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

iar coeficienții de portanță ζ și ζ^* rezultă din aceștia

$$\zeta_\infty = \frac{3\sqrt{Ct_\infty^2 + Cn_\infty^2}}{(1+\epsilon)^{-q}}; \quad \zeta_\infty^* = (1-\epsilon)^2\zeta_\infty. \quad (17)$$

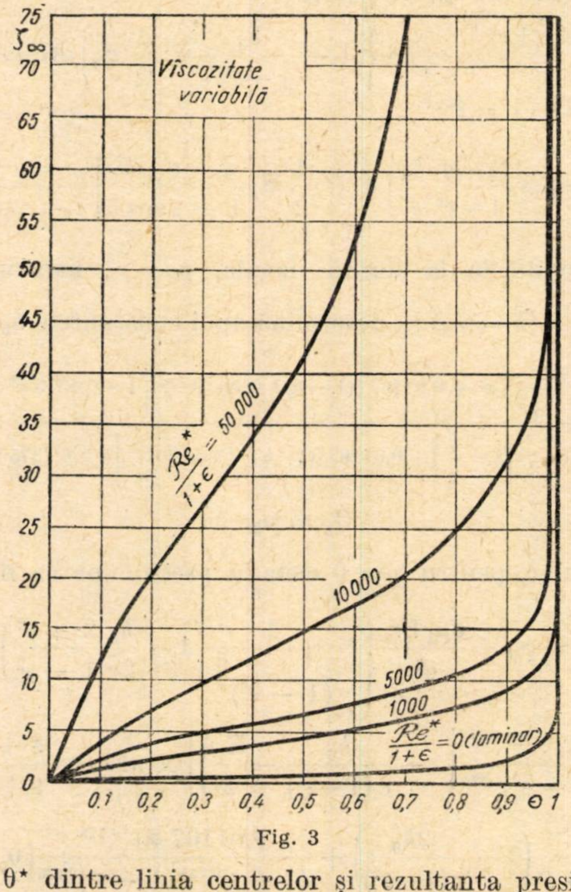


Fig. 3

Unghiul θ^* dintre linia centrelor și rezultanta presiunilor este dat de relația $\operatorname{tg}\theta^* = \frac{Cn}{Ct}$.

În figurile 3, 4 și 5 s-au reprezentat curbele $\zeta_\infty(\epsilon)$, $\zeta_\infty^*(\epsilon)$ și traiectoria axei fusului [3]. Astfel, coeficienții de portanță cresc o dată cu $\mathcal{R}_e^*$, păstrînd însă alura cunoscută pentru mişcarea laminară. Traiectoria axei fusului este mai puțin influențată de variația lui q iar acordul dintre teorie şi experiență este foarte bun.

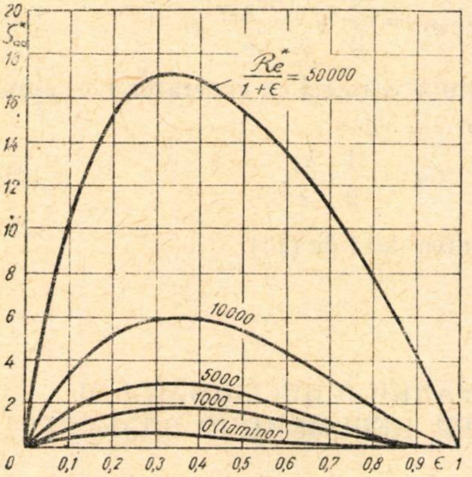


Fig. 4

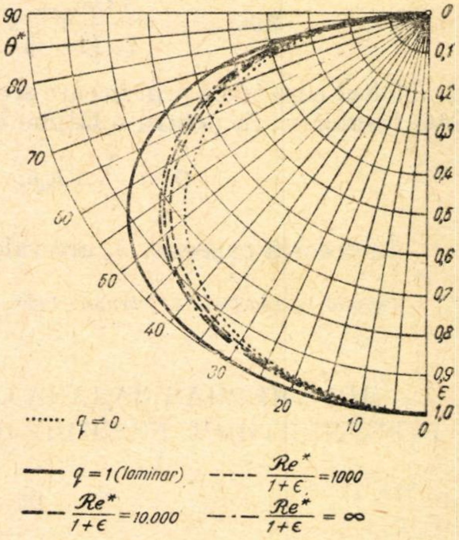


Fig. 5

Pentru determinarea momentelor se remarcă că există următoarele relații :

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = -\frac{\mathcal{C}_{11}}{\mu};\quad \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=h} = -\frac{1}{\mu}\left(\mathcal{C}_{11} - \frac{\partial \bar{p}_\infty}{\partial x_1} h\right). \tag{18}$$

Dacă zona de suprapresiuni este cuprinsă între unghiurile θ_1 şi θ_2, pe porțiunea $\theta_2 \div 2\pi + \theta_1$ mişcarea este de tip Couette, cu o valoare $\mathcal{C}_{11}^{**}$ a constantei respective. Dacă umplerea este completă în zona unde $\bar{p}_\infty = p_0$, atunci lățimea efectivă a filmului de ulei este egală cu aceea a lagărului $b_\theta = b$; în cazul contrariu, se poate pune $b_\theta = \frac{h_2}{h} b$ [1].

Cu aceste observații, coeficienții adimensionali de moment se scriu pentru fus $Cm_{1\infty}$ şi cuzinet $Cm_{2\infty}$, dacă $\psi = \frac{c}{r_1}$

$$\left.\begin{aligned} Cm_\infty &= \frac{\psi M_{1\infty}}{\pi \mu_1 V b} = \frac{\psi\, r_1}{\pi \mu_1 V}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{C}_{11}\, d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi+\theta_1} \frac{b_\theta}{b} \mathcal{C}_{11}^{**}\, d\theta\right), \\ Cm_{2\infty} &= \frac{\psi M_{2\infty}}{\pi \mu_1 V b} = -\frac{\psi r_2}{\pi \mu_1 V b}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\mathcal{C}_{11} - \frac{\partial \bar{p}_\infty}{\partial x_1} h\right) d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi+\theta_1} \frac{b_\theta}{b} \mathcal{C}_{11}^{**} d\theta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Calculul acestor coeficienţi este în general dificil, deoarece $\mathscr{C}_{11}$ sau $\mathscr{C}^{**}_{11}$ pot fi funcţii complicate de θ. Din $Cm_{1,2\infty}$ se pot deduce uşor coeficienţii $km_{1,2\infty}$ sau coeficienţii de frecare $f_{1,2\infty}$

$$km_{1,2\infty} = \frac{3\, Cm_{1,2\infty}}{\zeta_\infty (1-\varepsilon)},\; f_{1,2\infty} = \frac{\pi}{2}\, \psi \left| \frac{Cm_{1,2\infty}}{\zeta_\infty} \right|, \tag{20}$$

iar debitul care trece prin fiecare secţiune paralelă cu generatoarele suprafeţei fusului va fi, pentru o lăţime b,

$$Q = \frac{1}{2} V h_0 b, \qquad Cq = \frac{1}{2}\, \frac{h_0}{c}. \tag{21}$$

În această expresie, h_0 are valoarea dată de (14).

Primită la redacţie la 17 februarie 1960.

ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА СМАЗКИ В НЕСЖИМАЕМОМ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

РЕЗЮМЕ

Исходя из уравнения усредненных по времени давлений и общего закона изменения вязкости, даются решения задачи (распределение давлений) для плоских или круговых цилиндрических поверхностей. В обоих случаях выводятся суммарные характеристики, несущая способность, положение равнодействующей давлений, коэффициент трения, моменты трения и расходы.

Показывается, что для часто встречаемого в практике частного случая закона изменения вязкости распределение давлений имеет тот же ход, что и при ламинарном движении. Вообще говоря, значения давлений, равно как и несущая способность, увеличиваются с ростом числа Рейнольдса. Для круглых цилиндрических поверхностей закон изменения вязкости оказывает меньшее влияние на траекторию центра цапфы, чем при ламинарном режиме. Сопоставление теории с экспериментальными данными указывает на хорошее согласование между ними.

THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF INCOMPRESSIBLE TURBULENT LUBRICATION IN CASE OF VARIABLE VISCOSITY

ABSTRACT

Proceeding from the equation of pressures mediated with respect to time and from a very general law of viscosity variation, this paper gives solutions of the problem (pressure distribution) for plane or cir-

cular cylindrical surfaces. The global characteristics, the load carrying capacity, the pressure resultant position, the friction coefficient, the friction moments and the rate of flows are deduced for both cases.

It is shown that for a particular case of the law of viscosity variation, currently met with in practice, the pressure distribution curve has the same shape as that of the laminar flow. Generally, the pressure value and the load carrying capacity increase with the Reynolds number. For circular cylindrical surfaces, the trajectory of the shaft centre is less influenced by the viscosity variation than in laminar flow.

Theoretical results show a good agreement with experimental data.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei*. Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1957.
2. V. N. CONSTANTINESCU, *Calculul lagărelor compuse din suprafeţe plane, lubrificate în regim turbulent*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3*, 755—770 (1959).
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Studiul lubrificaţiei bidimensionale în regim turbulent*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *1*, 139—162 (1958).

STUDII

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

ASUPRA COMPORTĂRII DINAMICE A LAGĂRELOR CU AER

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Asigurarea funcţionării în bune condiţii a lagărelor cu aer necesită, pe lîngă determinarea cît mai judicioasă prin calcul a capacităţii lor portante şi a frecărilor în vederea unei corecte proiectări, şi o cunoaştere cît mai profundă a comportării lor din punct de vedere dinamic. Aceasta, deoarece punerea în valoare a calităţilor lagărelor cu aer: frecări foarte reduse, durabilitate foarte mare, se poate face numai în cazul cînd se asigură o funcţionare liniştită, stabilă şi fără vibraţii.

În cele ce urmează vom examina unele aspecte ale comportării dinamice a lagărelor circulare cu aer şi în special cauzele care pot provoca vibraţii în funcţionarea lor.

Dacă regimul de funcţionare al lagărului este nepermanent pe lîngă viteza de rotaţie a fusului Ω_1 şi eventual a cuzinetului Ω_2 (fig. 1), mai există o mişcare a fusului în raport cu cuzinetul care influenţează distribuţia presiunilor. Această mişcare poate fi descompusă într-o mişcare pe direcţia liniei centrelor cu viteza $\dot{e}$ (e — excentricitatea) şi una perpendiculară pe aceasta, cu viteza $e\dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi}$ — viteza de rotaţie a liniei centrelor). În plus, cuzinetul nu este în general perfect rigid, iar prinderea lui de masa maşinii este într-o oarecare măsură elastică. În aceste condiţii presiunile, variabile în timp din interiorul stratului de lubrifiant vor provoca deplasări ale cuzinetului — o parte din aceste deplasări pot fi

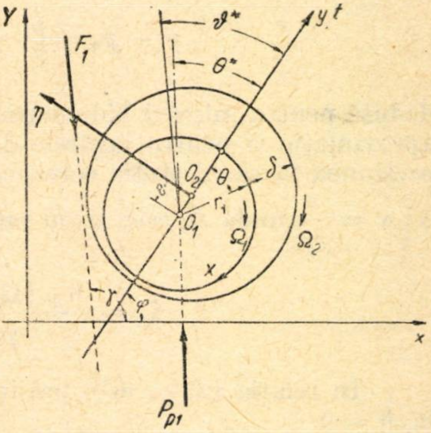


Fig. 1

incluse în vitezele $\dot{e}$ și $e\dot{\varphi}$ restul reprezentînd o viteză $V_0(t)$, viteză care la rîndul ei va influența distribuția presiunilor.

Acest fapt se poate constata imediat, deoarece ecuația presiunilor ia forma [1]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial\theta}\right)+r\frac{2\,\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right)=6\,r_1^2\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\left\{(\Omega_1+\Omega_2)\,\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta\right)}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\,2\dot{\varphi}\,p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\frac{\partial\delta}{\partial\theta}+2\delta\,\frac{V_{0x}}{r_1}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\partial\theta}+2\,\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta\right)}{\partial t}\right\}, \tag{1}$$

unde θ este unghiul măsurat față de linia centrelor, z coordonata în lungul lărgimii lagărului, μ viscozitatea, r_1 raza fusului, t timpul, $\varkappa$ coeficientul politropic al evoluției gazului lubrifiant, iar V_{0x} proiecția vitezei V_0 pe direcția x (fig. 1).

Problema este mult mai complexă decît în cazul lubrificației cu lichide [2], [3], [4] unde ecuația diferențială a presiunilor rezultă liniară, fapt care permite descompunerea efectelor.

Într-o primă aproximație, dacă se consideră cuzinetul ca fiind imobil ($V_0 = 0$) și se neglijează efectul apropierii sau depărtării suprafețelor $\left(\text{termenul } \dfrac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}{\partial t}\right)$, aproximație acoperitoare, valabilă în cazul vibrațiilor cu amplitudine foarte redusă, sau cu frecvență scăzută, atunci presiunea rezultă sub forma [1]

$$p - p_0 = \left(1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1+\Omega_2}\right)(\bar{p} - p_0), \tag{2}$$

dedusă pentru mișcări bidimensionale, dar care se poate aplica în primă aproximație și pentru lagărele de dimensiuni finite în relația (2) $\bar{p}$ este presiunea în cazul static corespunzător, la aceeași excentricitate relativă $\alpha\left(\alpha = \dfrac{e}{\triangle}\text{ unde } \triangle \text{ este jocul radial}\right)$ și același parametru $\xi_\triangle$

$$\xi_\triangle = \frac{6\,\mu\,(\Omega_1+\Omega_2)}{p_0\psi^2},\ \left(\psi = \frac{\triangle}{r_1}\right). \tag{3}$$

În relația (2) p_0 este presiunea de referință, de exemplu presiunea la $\theta = 0$.

Rezultanta presiunilor rezultă apoi sub forma

$$P = p_0 r_1 b\zeta;\ \zeta = \left(1 + \frac{2\dot{p}}{\Omega_1+\Omega_2}\right)\bar{\zeta}, \tag{4}$$

iar componentele P_t, P_n după direcția liniei centrelor și normala la aceasta

$$P_{t,n} = p_0 r_1 b \, C_{t,n}\,, \quad C_{t,n} = \left(1 + \frac{2\dot\varphi}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)\bar C_{t,n}\,. \tag{5}$$

În sfîrșit, unghiul $\theta^\star$ dintre rezultanta presiunilor și linia centrelor va fi egal cu

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{C_n}{C_t} = \operatorname{tg}(\bar\theta^\star + k\pi) = \frac{\bar C_n}{\bar C_t}, \tag{6}$$

unde $k = 0$ sau 1 după cum paranteza $\left(1 + \frac{2\dot\varphi}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)$ este pozitivă sau negativă. În relațiile de mai sus s-a folosit notația supraliniată pentru a desemna valorile în cazul static corespunzător.

Aceste relații împreună cu formulele sau diagramele care dau coeficienții ζ, $\bar C_t$, $\bar C_n$ etc. din cazul regimului permanent [5] permit în primă aproximație calculul lagărelor circulare supuse la forțe și viteze variabile. Astfel întocmai ca și pentru lubrificația cu lichide [2] dacă se cunoaște $\alpha(t)$, $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$, $\varphi(t)$, formulele (4) (5) (6) permit calculul rezultantei presiunilor $P(t)$ și al unghiului $\theta^\star(t)$, respectiv al unghiului $\gamma^\star$ făcut de rezultanta presiunilor față de direcția fixă de la care se măsoară unghiul φ

$$\gamma^\star = \varphi + \theta^\star. \tag{7}$$

Invers, dacă se dă sarcina $P(t)$ și unghiul $\gamma^\star(t)$, sistemul format din ecuațiile (5) (6) (7), se reduce prin eliminarea lui $\theta^\star = \theta^\star(\alpha)$ la un sistem de două ecuații diferențiale care permit deducerea necunoscutelor $\alpha(t)$ și $\varphi(t)$. Mai corect, trebuie să se țină seama de faptul că în general nu se dă rezultanta presiunilor ci o forță exterioară $\bar F(t)$ care face unghiul $\gamma(t)$ cu direcția fixă OX și unghiul $\vartheta^\star$ cu linia centrelor.

$$\gamma = \varphi + \vartheta^\star. \tag{8}$$

În acest caz notînd cu R rezultanta dintre forța F și rezultanta presiunilor P

$$\bar R = \bar F - \bar P, \tag{9}$$

relațiile scrise anterior trebuie completate cu ecuațiile de mișcare ale rotorului de masă m (putînd fi eventual masa redusă, aferentă lagărului respectiv), care se scriu sub forma dedusă de N. Tipei [2]

$$\begin{aligned} \ddot\alpha - \alpha\dot\varphi^2 &= \frac{R_t}{m\triangle} = \frac{F_t - P_t}{m\triangle} \\ 2\ddot\varphi + \ddot\rho\,\alpha &= \frac{R_n}{m\triangle} = \frac{F_n - P_n}{m\triangle} \end{aligned} \tag{10}$$

și care permit de asemenea necunoscutelor $\alpha(t)$ și $\varphi(t)$.

De exemplu se poate verifica uşor că în cazul unei sarcini centrifugale,

$$F = \text{const.},\ \gamma = \gamma_0 - \Omega_1 t,\ \Omega_2 = 0, \tag{11}$$

rezultă

$$\alpha = \text{const.},\ \dot{\alpha} = 0,\ \dot{\varphi} = -\Omega_1 \tag{12}$$

iar

$$C_t = -\overline{C}_t,\ C_n = -\overline{C}_n,\ \theta^* = \overline{\theta}^* + \pi. \tag{13}$$

În particular, excentricitatea α rezultă aceeaşi ca în cazul cînd lagărul ar suporta o sarcină constantă egală cu P. Diferenţa $p - p_0$ este egală cu $-(\overline{p} - p_0)$, ceea ce arată că în locul depresiunilor apar suprapresiuni şi invers. Concluziile de mai sus sînt integral valabile în cazul excentricităţilor reduse. La excentricităţi mai mari trebuie să se verifice dacă din calcul nu apar zone pe care $p < 0$, iar în acest ultim caz trebuie să se pună în intervalul respectiv $p = 0$ deoarece în realitate nu se pot produce presiuni negative.

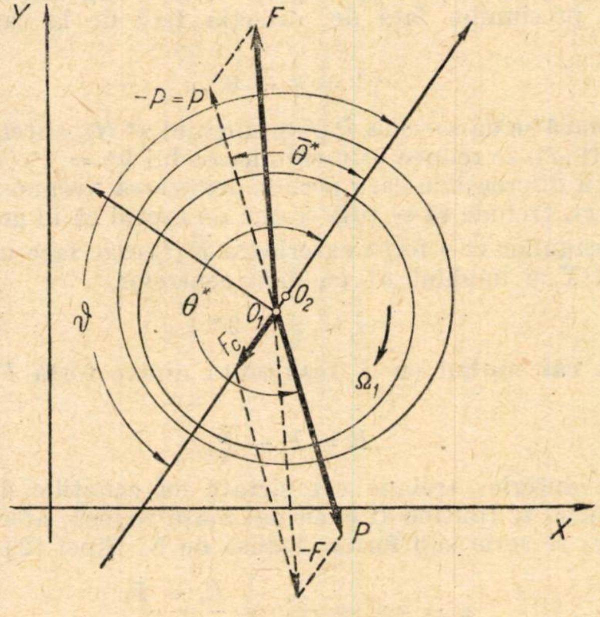


Fig. 2.

În primă aproximaţie se poate lua $\overline{P} = -P = F$ şi $\vartheta^* = \overline{\theta}^* + \pi$. Pentru un calcul mai precis, trebuie să se ţină seama şi de forţa centrifugă $F_c = m\Delta\alpha\dot{\varphi}^2$ (fig. 2). Calculul forţei P şi a unghiului ϑ^* se poate face atunci prin încercări, ţinînd seama de poligonul de forţe reprezentat în figura 2, de unde se deduce de exemplu că

$$\left.\begin{aligned}\overline{P} &= -F_c \cos \overline{\theta}^* - F \cos (\overline{\theta}^* - \vartheta^*),\\ \overline{P} \sin \overline{\theta}^* &= -F \sin \theta^*.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Rezultanta presiunilor P rezultă mai mică decît F astfel încît aproximaţia $P = F$ este acoperitoare. Astfel dacă $\xi \to 0$

$$\overline{P} = -F \sin \vartheta^*, \tag{15}$$

iar dacă $\xi \to \infty$

$$\overline{P} = F - F_c. \tag{16}$$

Prin urmare, dacă se cunosc forţele exterioare se poate determina funcţionarea lagărelor cu aer în regim nepermanent, devenind posibilă proiectarea lor astfel încît nici un moment grosimea minimă δ_2 a stratului de lubrifiant să nu coboare sub o limită care să poată da naştere pericolului producerii unui contact direct între suprafeţele lubrificate.

Calculul efectuat în acest mod este acoperitor, deoarece s-a neglijat efectul termenului $\dfrac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)}{\partial t}$ asupra presiunilor. Din aceleaşi motive rezultă că vibraţiile uneia din suprafeţe se vor transmite celeilalte în proporţia dată de constanta elastică a stratului de lubrifiant. De altfel acest efect, constatat şi experimental poate fi întrebuinţat în scopuri utile, de exemplu în unele maşini electronice de calcul [6].

★

Funcţionarea în bune condiţii a lagărelor cu aer impune ca pe lîngă un studiu al comportării lor în regim nepermanent, să se examineze dacă însăşi mişcarea din stratul de lubrifiant nu generează vibraţii neamortizate sau slab amortizate, deoarece în această situaţie proiectarea lagărelor trebuie să se facă astfel încît siguranţa în funcţionare să fie totuşi asigurată.

Studiul comportării dinamice a unui lagăr sub acţiunea unor perturbaţii oarecare, reprezintă în fond studiul stabilităţii dinamice a funcţionării lagărului. Acest studiu a fost efectuat în linii generale pentru mişcări plane într-o lucrare anterioară [1], urmînd metoda perturbaţiilor mici, aplicată la cazul lagărelor de N. Tipei [2]. Considerînd perturbaţiile excentricităţii α şi a unghiului φ respectiv ϑ^* sub forma

$$\delta\alpha = \alpha^* e^{\nu t}, \quad \delta\vartheta^* = \vartheta^{**} e^{\nu t}, \tag{17}$$

din condiția de compatibilitate a sistemului de ecuații care dă necunoscutele $\alpha^\star$ și $\vartheta^\star$, rezultă o ecuație de gradul 4 în ν, care pentru cazul unui regim de bază neperturbat cu sarcină constantă are forma

$$\begin{aligned}\nu^4 &- \frac{1}{m\triangle\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\nu^3 + \frac{1}{m\triangle}\Bigl(\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} + \frac{F}{\alpha}\cos\vartheta^\star\Bigr)\nu^2 + \\ &+ \frac{1}{m^2\triangle^2\alpha}\Bigl(\frac{\partial P_t}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\frac{\partial P_n}{\vartheta\alpha} - \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\Bigr)\nu + \frac{F}{m^2\triangle^2\alpha}\Bigl(\frac{\partial P_n}{\partial\alpha}\sin\vartheta^\star + \\ &+ \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\cos\vartheta^\star\Bigr) = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

iar în cazul unei sarcini centrifugale

$$\begin{aligned}\nu^4 &- \frac{1}{m\triangle\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\nu^3 + \Bigl[3\,\Omega_1^2 + \frac{1}{m\triangle}\Bigl(\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} + \frac{F}{\alpha}\cos\vartheta^\star - \frac{2\Omega_1}{\alpha}\frac{\partial P_t}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\Bigr)\Bigr]\nu^2 - \\ &- \frac{1}{\alpha}\Bigl[\Bigl(\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} - \Omega_1^2\Bigr)\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_n}{\partial\dot{\vartheta}^\star} - \Bigl(\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_t}{\partial\dot{\vartheta}^\star} - 2\alpha\Omega_1\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_n}{\partial\alpha} + \\ &+ \frac{2\Omega F}{m\triangle}\sin\vartheta^\star\Bigr]\nu + \frac{1}{m\triangle\alpha}\Bigl[-\Omega_1^2 F\cos\vartheta^\star + \frac{F}{m\triangle\alpha}\Bigl(\frac{\partial P_n}{\partial\alpha}\sin\vartheta^\star + \\ &+ \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\cos\vartheta^\star\Bigr)\Bigr] = 0,\end{aligned} \tag{19}$$

identice cu cele obținute pentru lichide [2] în care

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{t,n}}{\partial\alpha} &= p_0 r_1\Bigl(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\Bigr)\frac{\partial\overline{C}_{t,n}}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial P_{t,n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star} &= -\frac{2p_0 r_1}{\Omega_1 + \Omega_2}\,\overline{C}_{t,n}\end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

dacă se consideră aproximativ $p_0 = \text{constant}$ și

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{t,n}}{\partial\alpha} &\cong p_0 r_1\Bigl(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\Bigr)\Bigl(\frac{\partial\overline{C}_{t,n}}{\partial\alpha} - \frac{\overline{C}_{t,n}}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\Bigr) \\ \frac{\partial P_{t,n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star} &\cong -\frac{2\,p_0 r_1}{\Omega_1 + \Omega_2}\,\xi_\Delta\frac{\partial\overline{C}_{t,n}}{\partial\xi_\Delta}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

în care

$$\chi(a_1\xi_\Delta) = \frac{1}{1 + \dfrac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}}\int_0^{2\pi}\frac{p}{p_n}(1 + \alpha\cos\theta)\,d\theta \cong 2\pi\Bigl(1 + \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1 + \xi_\Delta^2}\Bigr), \tag{22}$$

în cazul cînd se consideră că masa de gaz conţinută între cele două suprafeţe rămîne constantă, ipoteze ce mărginesc în general variaţia reală a presiunii p_0 în timp.

Analiza semnului rădăcinilor ecuaţiilor (18), (19) conduce la concluzia că mişcarea este în general instabilă [1] atît în cazul $p_0 = \text{const.}$, cît şi dacă p_0 este variabil şi în orice caz, dacă $\xi_\Delta \gg 1$, valoare pentru care

$$\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial \xi_\Delta} \leqslant 0, \tag{23}$$

adică pentru o turaţie n a lagărului

$$n > k\,\frac{p_0 \psi^2}{\mu} \tag{24}$$

unde în cazul lagărelor de alungire infinită $k = 1{,}6 - 2{,}8$ în funcţie de excentricitate.

Cauza principală a instabilităţii mişcării o constituie faptul că unghiul θ^*

$$\operatorname{tg}\,\theta^* \cong \frac{1}{\xi_\Delta} \tag{25}$$

este independent de excentricitate. De exemplu la viteze reduse ($\xi_\Delta \to 0$) cînd $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, mişcarea este static instabilă atît în ceea ce priveşte excentricitatea α cît şi unghiul ϑ^* (o perturbaţie pe direcţia liniei centrelor generează o mişcare pe o direcţie perpendiculară pe aceasta şi invers). Această situaţie a fost de altfel semnalată şi în cazul lubrificaţiei cu lichide la excentricităţi foarte mici, cînd distribuţia presiunilor are acelaşi caracter [7]. La alte regimuri, mişcarea poate fi static stabilă în raport cu excentricitatea, nu însă şi în raport cu unghiul θ^*, ceea ce conduce în cele din urmă la instabilitatea mişcării.

Rezultă deci că trebuie luate în general măsuri constructive speciale, analizate anterior [1] pentru a asigura totuşi amortizarea perturbaţiilor. Cu toate acestea gradul de amortizare a perturbaţiilor respective va fi mai redus, şi de aceea este foarte probabil ca în funcţionarea lagărelor cu aer să putem depista vibraţii corespunzătoare celor rezultate prin calculul de mai sus ca fiind neamortizate însă cu o amplitudine cu atît mai mică cu cît mijloacele de stabilizare utilizate sînt mai eficiente.

De aceea în cele ce urmează, vom analiza mai îndeaproape ecuaţiile (18) şi (19) pe baza cărora se pot calcula caracteristicile acestor vibraţii şi în special frecvenţa lor.

Dacă se consideră că excentricitatea α este redusă, atunci derivatele care intervin în ecuaţiile de mai sus pot fi calculate analitic în mod simplu, utilizînd rezultatele deduse anterior [1].

Astfel, ecuaţia (18) se scrie pentru unitatea de lăţime a lagărului, dacă $p_0 = \text{const.}$

$$\nu^4 + \frac{2\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi\Omega_1(1+\xi_\Delta^2)}\nu^3 + \frac{2\pi\xi_\Delta^2 p_0}{m\psi(1+\xi_\Delta^2)}\nu^2 + \left(\frac{\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi}\right)^2\frac{1}{1+\xi_\Delta^2} = 0 \tag{26}$$

coeficientul termenului în ν fiind nul datorită faptului că $\dfrac{\partial\theta^*}{\partial\alpha} = 0.$

Dacă se pune

$$\nu = \Omega_1\varepsilon, \tag{27}$$

atunci ε va fi de ordinul de mărime 1, deoarece ν este de ordinul de mărime Ω_1. În acest caz se deduce

$$\varepsilon^4 + \frac{2\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi\Omega_1^2(1+\xi_\Delta^2)}\varepsilon^3 + \frac{2\pi\xi_\Delta p_0}{m\,\psi\,\Omega_1^2(1+\xi_\Delta^2)}\varepsilon^2 + \left(\frac{\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi\Omega_1^2}\right)^2\frac{1}{1+\xi_\Delta^2} = 0, \tag{28}$$

sau

$$\varepsilon^4 + \frac{2a}{\xi_\Delta(1+\xi_\Delta^2)}\varepsilon^3 + \frac{2a}{1+\xi_\Delta^2}\varepsilon^2 + \frac{a^2}{\xi_\Delta^2(1+\xi_\Delta^2)} = 0, \tag{29}$$

în care

$$a = \frac{36\,\pi\,\mu^2}{m\,\psi^5 p_0}. \tag{30}$$

În mod asemănător, dacă p_0 este variabil se obţine

$$\varepsilon^4 + \frac{2a}{\xi_\Delta}\frac{1-\xi_\Delta^2}{(1+\xi_\Delta^2)^2}\varepsilon^3 + \frac{2a}{1+\xi_\Delta^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right)\varepsilon^2 - \frac{2a^2}{\xi_\Delta^2(1+\xi_\Delta^2)}\left(1 - \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right)\varepsilon + \frac{a^2}{\xi_\Delta^2(1+\xi_\Delta)^2}\left(1 - \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right) = 0. \tag{31}$$

În cazul sarcinii centrifugale, ecuația (19) se scrie în aceleași condiții, dacă $p_0 = \text{const.}$, sub forma

$$\begin{gathered}\nu^4 + \frac{2\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi\Omega_1(1+\xi_\Delta^2)}\nu^3 + \left[3\Omega_1^2 + \frac{2\pi\xi_\Delta^2 p_0}{m\psi(1+\xi_\Delta^2)}\right]\nu^2 + \\ + \frac{2\,\Omega_1\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi(1+\xi_\Delta^2)}\nu + \frac{\Omega_1^2\pi\xi_\Delta^2 p_0}{m\psi(1+\xi_\Delta^2)} + \left(\frac{\pi\xi_\Delta p_0}{m\psi}\right)^2\frac{1}{1+\xi_\Delta^2} = 0,\end{gathered} \tag{32}$$

sau

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 + \frac{2a}{\xi_\Delta(1+\xi_\Delta^2)}\varepsilon^3 + \left[3 + \frac{2a}{1+\xi_\Delta^2}\right]\varepsilon^2 + \frac{2a}{\xi_\Delta(1+\xi_\Delta^2)}\varepsilon + \\ + \frac{a}{1+\xi_\Delta^2} + \frac{a^2}{\xi_\Delta^2(1+\xi_\Delta^2)} = 0,\end{gathered} \tag{33}$$

în care ε şi a au aceleaşi semnificaţii (27) (30).

De asemenea, dacă p_0 este variabil rezultă

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 + \frac{2a(1-\xi_\Delta^2)}{\xi_\Delta(1+\xi_\Delta^2)^2}\varepsilon^3 + \left[3 - \frac{2a}{1+\xi_\Delta^2}\left(\frac{3-\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right)\right]\varepsilon^2 + \frac{2a}{\xi_\Delta(1+\xi_\Delta^2)}\left[\frac{a+2\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2}\left(1 - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right) + 1\right]\varepsilon + \frac{a}{1+\xi_\Delta^2} + \frac{a^2}{\xi_\Delta^2(1+\xi_\Delta^2)}\left(1 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2+\alpha\xi_\Delta^2}\right) = 0.\end{gathered} \tag{34}$$

Pentru un calcul mai riguros, ecuațiile de mai sus ar trebui corectate cu influența apropierii sau depărtării suprafețelor. Notînd rezultanta presiunilor corespunzătoare acestui efect cu P_r, avem

$$P_{rt} = P_r, \; P_{rn} = 0, \tag{35}$$

deoarece din motive de simetrie, această forță va fi întotdeauna orientată după direcția liniei centrelor. Vom avea astfel de adăugat în ecuația de mişcare după direcția liniei centrelor un termen de forma

$$\frac{1}{m\Delta}\,\frac{\partial P_r}{\partial\dot{\alpha}}. \tag{36}$$

Ecuațiile (18) și (19) se scriu astfel corectat

$$\begin{aligned}\nu^4 &+ \frac{1}{m\triangle}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\dot\alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\vartheta^\star}\right)\nu^3 + \frac{1}{m\triangle}\left[\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star} + \frac{1}{m\triangle}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\dot\vartheta^\star}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha} - \right.\right.\\ &\left.\left. - \frac{\partial P_t}{\partial\dot\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\vartheta^\star}\right)\right]\nu^3 + \frac{1}{m^2\triangle^2\alpha}\left(\frac{\partial P_n}{\partial\alpha}\frac{\partial P_t}{\partial\dot\vartheta^\star} - \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\vartheta^\star} + \frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha}\frac{\partial P_t}{\partial\vartheta^\star} - \right. \qquad (37)\\ &\left. - \frac{\partial P_t}{\partial\dot\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star}\right)\nu + \frac{1}{m^2\triangle^2\alpha}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\vartheta^\star}\frac{\partial P_n}{\partial\alpha} - \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star}\right) = 0,\end{aligned}$$

pentru sarcină constantă și

$$\begin{aligned}\nu^4 &+ \frac{1}{m\triangle}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\dot\alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\vartheta^\star}\right)\nu^3 + \left\{3\,\Omega_1^2 + \frac{1}{m\triangle}\left[\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star} + \right.\right.\\ &+ \frac{1}{m\triangle}\left(\frac{\partial P_t}{m\dot\vartheta^\star}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha} - \frac{\partial P_i}{\partial\dot\alpha}\frac{\partial P_u}{\partial\dot\vartheta^\star}\right) - \left(\frac{2}{\alpha}\,\Omega_1 - \frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha}\right)\frac{\partial P_t}{\partial\dot\vartheta^\star} + \\ &\left.\left. + \Omega_1\frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha}\right]\right\}\nu^2 + \frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_t}{\partial\alpha} - \Omega_1^2\right)\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\vartheta^\star} - \left(\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_t}{\partial\dot\vartheta^\star} - \right.\right. \qquad (38)\\ &\left.\left. - 2\alpha\,\Omega_1\right)\frac{1}{m\triangle}\frac{\partial P_n}{\partial\alpha} + \frac{2\Omega_1}{m\,\Delta}\frac{\partial P_t}{\partial\vartheta^\star} - \frac{1}{m^2\triangle^2}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\dot\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star} - \frac{\partial P_t}{\partial\vartheta^\star}\frac{\partial P_n}{\partial\dot\alpha}\right)\right\}\nu + \\ &+ \frac{1}{m\triangle\alpha}\left[\Omega_1^2\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star} + \frac{1}{m\triangle\alpha}\left(\frac{\partial P_t}{\partial\vartheta^\star}\frac{\partial P_n}{\partial\alpha} - \frac{\partial P_t}{\partial\alpha}\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta^\star}\right)\right] = 0.\end{aligned}$$

pentru cazul sarcinii centrifugale.

Dat fiind forma și gradul ridicat al ecuațiilor de mai sus, rădăcinile lor nu pot fi experimentate direct analitic. În general aceste rădăcini se împart în două grupuri distincte. Un prim grup cuprinde două rădăcini ε sau ν ale căror valori în modul sînt comparativ mai mari decît pentru cel de-al doilea grup și au partea reală a lor negativă. Acestea sînt componentele stabile ale vibrațiilor provocate de perturbații, componente care se amortizează repede în timp și care deci nu au nici un efect asupra mișcării. Aceste componente pot fi mai ușor evaluate aproximativ, fiind apropiate ca valoare de cele care se obțin neglijînd termenul liber și termenul în ν din ecuațiile de mai sus. La valori ξ_Δ mici ambele rădăcini sînt reale și negative și au valori în modul mari față de Ω_1. Factorul de amortizare scade în valoare absolută cu creșterea lui ξ_Δ și $\mathcal{R}e\,(\varepsilon) \to 0$ cînd $\xi_\Delta \to \infty$. Mai mult la o anumită turație n'_c proporțională în primă aproximație

$$n'_c \sim k\sqrt{\frac{\mu}{m\psi^3}}\,;\; k \cong 50 \qquad (39)$$

rădăcinile devin egale, dar dacă $n < n'_c$, rădăcinile devin imaginare, avînd tot timpul $\mathcal{R}e\,(\varepsilon) < 0$. Frecvența acestor vibrații crește cu turația tinzînd la turații mai mari către o limită apropiată de frecvența corespunzătoare dublului turației lagărului. De exemplu în cazul ecuației (33), dacă $\xi_\Delta \to \infty$ putem scrie

$$\varepsilon^4 + 3\varepsilon^2 \cong 0 \qquad \varepsilon \cong \pm i\sqrt{3} \tag{40}$$

sau

$$\nu \cong \pm 1{,}73\, \Omega i. \tag{41}$$

Cel de-al doilea grup de rădăcini, sînt tot timpul imaginare, avînd $\mathcal{Re}(\varepsilon) > 0$ și reprezintă vibrația neamortizată în timp. Partea reală a acestora scade cu turația și tinde către zero cînd $\xi_\Delta \to \infty$ în timp ce partea imaginară a lor pare să fie puțin influențată de turație (în ceea ce privește ε) respectiv $\mathcal{Im}(\nu)$ are o variație oarecum proporțională cu Ω și anume avînd valori apropiate de $\frac{\Omega}{2}$ (la turații mari $\sim \frac{\Omega}{\sqrt{2}} = 0{,}7\ \Omega$).

VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

Verificările efectuate au constat din măsurarea frecvenței vibrațiilor unui rotor antrenat pneumatic, plasat pe lagăre cu aer, a cărui descriere este redată în [8]. Lagărele radiale ale rotorului au dimensiunile : diametrul $d = 14$ mm, lățimea $b = 28$ mm și au avut practicate pe cuzinet pentru stabilizare, 6 orificii radiale, în secțiunea mediană, cu un diametru de 1 mm lagărele nu au fost alimentate sub presiune, iar jocul radial a variat între $\psi = 1{,}2 \div 3^0/_{00}$. Greutatea rotorului a fost egală cu 0,5 kg.

Funcționarea lagărului este sensibil mai bună în cazul jocurilor mai reduse, iar turația maximă atinsă a scăzut o dată cu creșterea jocului relativ. Astfel în timp ce pentru un joc $\psi = 1{,}2^0/_{00}$ turația maximă atinsă a fost de 56 000 rot/min, cu un joc $\psi = 3^0/_{00}$ turația maximă obținută în aceleași condiții de alimentare a turbinei rotorului a fost de aproximativ $n = 35\,000$ rot/min. Această scădere a turației se datorește în parte micșorării sensibile a capacității portante a lagărelor, și deci a creșterii la aceeași turație a excentricității necesare suportării sarcinilor centrifugale și deci și a frecărilor. Scăderea turației s-a mai datorit și înrăutățirii comportării lagărelor din punctul de vedere al stabilității dinamice. Într-adevăr vibrațiile constatate deși s-au păstrat tot timpul în limite scăzute în ceea ce privește amplitudinea lor, au fost comparativ mai puternice la jocuri mari, în timp ce la jocuri reduse, ele erau practic imperceptibile. De altfel scăderea stabilității o dată cu creșterea jocului poate fi constatată și din examinarea ecuațiilor în ν unde toți coeficienții sînt proporționali cu $1/\psi$.

Vibrațiile constatate au avut o frecvență fundamentală o frecvență apropiată ca valoare de aceea corespunzătoare jumătății turației lagărului. Ele puteau fi ușor percepute cu un stetoscop, sub forma unui sunet continuu de frecvență joasă, de ordinul sutelor de Hz, iar înălțimea sunetului era funcție de turație. Această frecvență era net deosebită de frecvența sunetelor provocate de evacuarea aerului comprimat prin paletele turbinei, sunet mult mai înalt (cu o frecvență de ordinul miilor de Hz) care era ușor de perceput, dar care nu putea fi detectat la ascultarea cu stetoscopul.

Măsurarea frecvențelor s-a făcut cu ajutorul unui captor pentru vibrații seismice, ale cărui indicații au fost urmărite pe ecranul unui osci-

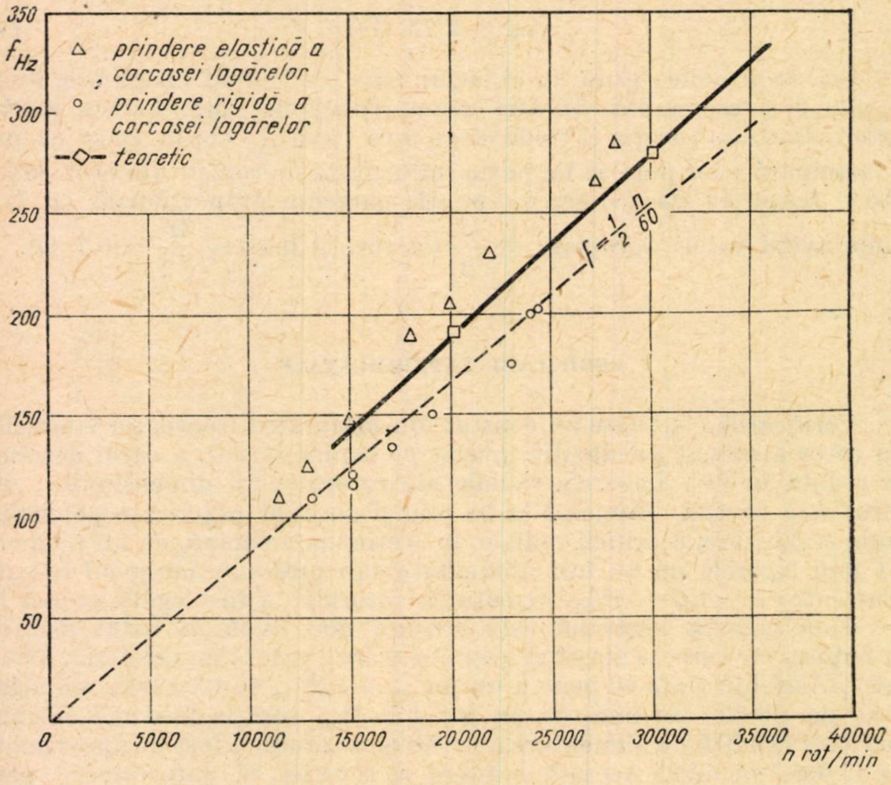


Fig. 3

lograf catodic, indicațiile respective fiind comparate cu acelea date de un generator de frecvență *RC*. Instalațiile utilizate pentru aceste măsurători sînt prezentate în fotografia din figura 3.

Nu s-au constatat vibrații la pornire, pînă la o turație de circa 15 000 rot/min. De la această turație a apărut o vibrație de frecvență apropiată valorii jumătății turației rotorului. Această frecvență nu era influențată de masele în contact, și relativ puțin influențată de sistemul de prindere a carcasei rotorului. În regimuri tranzitorii s-a constatat că vibrațiile sînt mai mari în cazul regimurilor accelerate decît în cazul celor încetinite.

Pentru funcționarea în poziție verticală a rotorului, în afara frecvenței fundamentale, s-a mai constatat existența armonicii a doua.

Uneori peste aceste vibrații s-a suprapus o vibrație de joasă frecvență (aproximativ 40 Hz), care era independentă de turație și în schimb era influențată sensibil de masele în contact (amplitudinea acestei vibrații a fost de circa 5 ori mai mare decît a vibrațiilor semnalate mai sus). Cauza probabilă este independentă de funcționarea lagărelor radiale studiate și provine dintr-o instabilitate a funcționării lagărelor axiale. Asemenea vibrații au mai fost observate și de alți autori iar condițiile de producere au fost analizate de L. Licht, D. D. Fuller și B. Sternlicht [9]. Ele puteau fi complet suprimate de altfel prin modificarea presiunii de admisie a aerului la turbină (care joacă și rol de lagăr axial).

Rezultatele măsurătorilor efectuate sînt prezentate în diagrama din figura 3. Se constată într-adevăr că frecvențele observate variază aproximativ liniar cu turația avînd valori apropiate de acelea corespunzătoare jumătății turației lagărului.

Pe aceeași diagramă s-au trecut valorile obținute teoretic prin calculul rădăcinilor ecuației (19) respectiv (32) sau (33). Se constată că deși teoria cuprinde o serie de ipoteze aproximative (considerarea mișcării bidimensionale, neglijarea termenului $\frac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)}{\partial t}$ în ecuația presiunilor etc.), concordanța obținută este foarte bună.

De exemplu la $n = 30\ 000$ rot/min, ecuația (32) se scrie

$$\nu^4 + 4{,}63\cdot 10^3\nu^3 + 18{,}3\cdot 10^6\nu^2 + 42{,}7\cdot 10^9\nu + 26.6\cdot 10^{12} = 0 \tag{42}$$

ale cărei rădăcini sînt

$$\begin{aligned} \nu &= -\ 2\ 350 \pm 3\ 160\ i, \\ \nu &= +\ 30 \quad \pm 1\ 780\ i. \end{aligned} \tag{43}$$

Prima grupă de rădăcini conduce la o frecvență

$$f = 505 \text{ Hz}, \tag{44}$$

aproximativ egală cu turația, iar a doua grupă la o frecvență

$$f = 284 \text{ Hz}, \tag{45}$$

egală cu 0,57 din turația rotorului.

CONCLUZII

Din considerațiile de mai sus se deduc rezultatele teoretice obținute care dau posibilitatea să se aprecieze o serie de aspecte ale comportării dinamice a lagărelor circulare cu aer și în special funcționarea lor sub sarcini și viteze variabile și stabilitatea dinamică a mișcării.

În legătură cu această ultimă problemă este de relevat faptul că mișcarea este în general instabilă. Chiar în cazul cînd se asigură într-un mod oarecare un grad suficient de stabilitate, este foarte probabil că se vor menține, cu o amplitudine redusă, vibrațiile inițial neamortizate, care au o frecvență apropiată ca valoare de frecvența corespunzătoare jumătății turației lagărului.

Rezultatele de mai sus au fost confirmate de experiențele efectuate, care au arătat în plus că creşterea jocului pare să aibă o influență defavorabilă stabilității (contrar cazului lubrificației cu lichide [2] unde creşterea jocului are în cele din urmă un efect stabilizator, prin creşterea excentricității). De altfel vibrații cu frecvență apropiată de jumătatea turației au fost observate şi de alți cercetători ca de exemplu G. F. Boeker şi B. Sternlicht [10], în cadrul unor experiențe comparative a unor lagăre lubrificate cu apă şi aer.

Concluzia care se deduce deci pentru proiectarea lagărelor cu aer este deci că turațiile din jurul dublului turației critice ale rotorului respectiv vor fi periculoase din cauza perturbațiilor continue provocate de vibrațiile lagărului, care vor avea deci o frecvență egală cu frecvența critică a rotorului. Aceste regimuri de funcționare vor trebui deci evitate.

Primită la redacție la 12 martie 1960.

О ДИНАМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВОЗДУШНЫХ ПОДШИПНИКОВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается поведение воздушных подшипников при переменных силах и скоростях, а также причины, которые могут вызывать вибрации в их работе. Из анализа корней уравнений устойчивости движения приходят к выводу, что существует незатухающая составляющая, способная привести к вибрациям подшипника с частотой, близкой к той, которая соответствует половине числа оборотов подшипника. Далее, приводятся некоторые экспериментальные данные, подтверждающие найденный нами результат.

SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PALIERS À AIR

RÉSUMÉ

L'auteur examine le comportement des paliers à air, soumis à des forces et des vitesses variables, ainsi que les causes capables de provoquer des vibrations. L'analyse des racines des équations de stabilité du mouvement permet de déduire l'existence d'une composante non amortie, qui peut engendrer, dans le palier, des vibrations ayant une fréquence voisine

de celle correspondant à la moitié de la vitesse de rotation du palier. L'auteur présente, en outre, quelques résultats expérimentaux, confirmant les résultats mentionnés ci-dessus.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra stabilităţii mişcării lagărelor circulare lubrificate cu gaze.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*, 117–140 (1959).
2. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
3. M. B. Коровчинский, *Элементарная теория устойчивости движения шипа на смазочном слое.* Трение и износ в машинах, **VII** (1953).
4. — *Устойчивость равновесного положения шипа на смазочном слое.* Трение и износ в машинах, **IX**, 264—323 (1956).
5. V. N. Constantinescu, *Calculul lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3–4* (1955) ; *1* (1956).
6. W. A. Gross, *Film Lubrification.* part I, I B M Scientific Publication, 1957.
7. H. Poritsky, *Contribution to the theory of oil Whip.* Transactions of the ASME, **75**, *6* (1953).
8. V. N. Constantinescu, Gh. Marin, *Motor pneumatic cu lagăre cu aer.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *1* (1960).
9. L. Licht, D. D. Fuller, B. Sternlicht, *Self Excited vibration of an Air Lubricated. Thrust Bearing* ASLE Paper, *57* L. C. 12.
10. G. F. Booker, B. Sternlicht, *Investigation of Translatory Fluid Whirl in Vertical Machines*, Transactions of the ASME, **78**, *1*, 13–19 (1956).

STUDII

ELASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

PROBLEME LA LIMITĂ MIXTE PENTRU PLĂCILE ANIZOTROPE

DE

J. BRILLA *)

1. INTRODUCERE

În decursul ultimilor ani s-a dat o deosebită atenție problemelor la limită mixte ale plăcilor subțiri. Doar cîteva articole tratează soluția problemelor la limită mixte ale plăcilor anizotrope. Dintre acestea pot fi citate articolele lui G. M. L. Gladwell [1], H. Zorski [2] și ale autorului [3]. G.M.L. Gladwell analizează o placă anizotropă semi-infinită, încastrată de-a lungul unei părți a conturului ei $y = 0$ și liberă sau solicitată de un moment de încovoiere și forfecare pe restul conturului. H. Zorski își limitează studiile la plăci ortotrope.

Articolul de față își propune să examineze soluția generală a unei plăci anizotrope semi-infinite, alternativ încastrată și liberă de-a lungul conturului, avînd n porțiuni libere. Se presupune că materialul are o simetrie elastică numai în raport cu planul median al plăcii. Rezolvarea problemei conduce la două ecuații integrale singulare, a căror soluție poate fi redusă la o problemă Hilbert—Riemann.

2. ECUAȚII FUNDAMENTALE

Să considerăm o placă elastică anizotropă alcătuită dintr-un material care are un plan de simetrie elastică paralel cu planul median al plăcii. Relațiile tensiune — deformație specifică conțin 13 constante elastice [4]. Soluția în interiorul plăcii, raportată la un sistem de axe carteziene

---

*) Ustav stavebnictva a architektury SAV — Bratislava.

rectangulare avînd originea în planul median, trebuie să satisfacă ecuația plăcii anizotrope

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p, \tag{2.1}$$

unde w este săgeata planului median al plăcii, $D_{11}\ldots D_{22}$ reprezintă rigiditățile de încovoiere [4] ale plăcii anizotrope, iar p este sarcina care acționează pe fața superioară a plăcii. În cazul plăcilor ortotrope $D_{16}=D_{26}=0$.

Soluția generală a ecuației plăcilor anizotrope este cunoscută. Ea depinde de rădăcinile ecuației algebrice

$$D_{22}\mu^4+4D_{26}\mu^3+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\mu^2+4D_{16}\mu+D_{11}=0. \tag{2.2}$$

Această ecuație nu poate avea rădăcini reale pentru un material elastic omogen oarecare. Rădăcinile corespunzătoare sînt întotdeauna complex conjugate două cîte două. Rădăcinile complexe sau pur imaginare $\mu_1=\alpha_1+i\beta_1$, $\mu_2=\alpha_2+i\beta_2$ sînt numite parametrii complecși ai plăcii; μ_1 și μ_2 se aleg astfel ca $\beta_1>0$, $\beta_2>0$ ceea ce este întotdeauna posibil.

Soluția generală a ecuației de încovoiere a plăcii este

$$w=w_0+2\,\mathcal{Re}\left[w_1(z_1)+w_2(z_2)\right], \tag{2.3}$$

dacă rădăcinile ecuației (2.2) sînt complexe și distincte și

$$w=w_0+2\,\mathcal{Re}\left[w_1(z_1)+z_1\,w_1'(z_1)\right], \tag{2.4}$$

dacă aceste rădăcini sînt confundate ($\mu_1=\mu_2$).

Deplasarea w_0 este o soluție particulară oarecare a ecuației neomogene a plăcii, a cărei formă depinde de sarcina p, iar $w_1(z_1)$, $w_2(z_2)$, sînt funcții analitice arbitrare de variabilele complexe $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$.

Vom considera doar soluția (2.3) corespunzătoare unor rădăcini distincte. Soluția pentru rădăcinile confundate în cazuri speciale de plăci se poate obține relativ ușor, folosind transformarea afină pentru soluția plăcilor izotrope sau printr-o simplă modificare a metodelor folosite în cazul izotrop.

Dacă notăm

$$\Phi(z_1)=w_1'(z_1)=\frac{dw_1(z_1)}{dz_1},\ \Psi(z_2)=w_2'(z_2)=\frac{dw_2(z_2)}{dz_2}, \tag{2.5}$$

obținem

$$\begin{aligned} m_x &= m_x^0 - 2\,\mathcal{Re}\,[p_1\Phi'(z_1) + p_2\Psi'(z_2)],\\ m_y &= m_y^0 - 2\,\mathcal{Re}\,[q_1\Phi'(z_1) + q_2\Psi'(z_2)],\\ m_{xy} &= m_{xy}^0 - 2\,\mathcal{Re}\,[r_1\Phi'(z_1) + r_2\Psi'(z_2)],\\ q_x &= q_x^0 - 2\,\mathcal{Re}\,[\mu_1 s_1\Phi''(z_1) + \mu_2 s_2\Psi''(z_2)],\\ q_y &= q_y^0 + 2\,\mathcal{Re}\,[s_1\Phi''(z_1) + s\Psi''(z_2)], \end{aligned} \tag{2.6}$$

unde m_x^0, m_y^0, ..., q_y^0 sînt respectiv momentele încovoietoare și de răsucire și forțele tăietoare, corespunzînd soluției particulare w_0, iar

$$\begin{aligned} p_i &= D_{11} + D_{12}\mu_i^2 + 2D_{16}\mu_i,\\ q_i &= D_{12} + D_{22}\mu_i^2 + 2D_{26}\mu_i,\\ r_i &= D_{16} + D_{26}\mu_i^2 + 2D_{66}\mu_i,\\ s_i &= \frac{D_{11}}{\mu_i} + 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_i + D_{26}\mu_i^2,\\ s_i - r_i &= \frac{p_i}{\mu_i},\ s_i + r_i = -q_i\mu_i,\quad (i = 1,\ 2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dacă placa este solicitată numai de-a lungul conturului ei prin momente și forțe pe contur, adică dacă $p = 0$, atunci $w_0 = m_x^0 = \ldots$ $\ldots = q_y^0 = 0$.

3. PLACA SEMI-INFINITĂ

Să studiem o placă semi-infinită anizotropă $y > 0$ pentru care se dau primele derivate ale săgeții w de-a lungul conturului. Notăm

$$w_s(x) = \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}\right]_{y=0},\quad w_n(x) = \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0}. \tag{3.1}$$

Folosind relația (2.3), putem scrie condițiile la limită pe $y = 0$ sub forma

$$\begin{aligned} 2\,\mathcal{Re}\,[\Phi(x) + \Psi(x)] &= w_s(x),\\ 2\,\mathcal{Re}\,[\mu_1\Phi(x) + \mu_2\Psi(x)] &= w_n(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dacă $w_s(x)$ și $w_n(x)$ satisfac condiția lui Hölder $H(\gamma)$ și dacă $w_s(-\infty) = w_s(\infty)$, $w_n(-\infty) = w_n(\infty)$ sînt valorile finite corespunzătoare, obținem

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_2 - \mu_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_2 w_s(\xi) - w_n(\xi)}{\xi - z_1}\,d\xi,\\ \Psi(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_2 - \mu_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_1 w_s(\xi) - w_n(\xi)}{\xi - z_2}\,d\xi, \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ sînt funcții olomorfe în planele z_1, z_2. Presupunem că pentru un $|x|$ suficient de mare avem

$$|f_i(x) - f_i(\infty)| < \frac{\text{const.}}{|x|^{\rho}} \quad (\rho > 0), \tag{3.4}$$

unde $f_i(x) = \mu_i w_s(x) - w_n(x)$, $(i = 1, 2)$ se verifică. Integralele (3.3) au atunci un sens definit dacă sînt considerate ca fiind limitele integralelor luate pe segmentul $a\,b$, unde a și b sînt puncte care tind către infinit în fiecare parte și la o egală distanță de un punct fix oarecare. Atunci

$$\Phi(z_1) \to \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} f_2(\infty), \quad \Psi(z_2) = -\frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} f_1(\infty), \tag{3.5}$$

pentru $|z_i| \to \infty$, rămînînd în $y > 0$. Dacă $f_i(\infty) = 0$, atunci $\Phi(z_1) = \Psi(z_2) = 0$ pentru $|z_i| \to \infty$.

4. PROBLEMA LA LIMITĂ MIXTĂ

Să considerăm o placă anizotropă semi-infinită $y > 0$ cu condiții la limită mixte, avînd conturul alternativ încastrat și liber. Porțiunile libere ale conturului $y = 0$ vor fi notate cu $L_j = (a_j b_j)$ iar suma lor $L = \sum_{j=1}^{n} L_j$ (fig. 1); în mod similar, restul conturului care este încastrat se notează cu K.

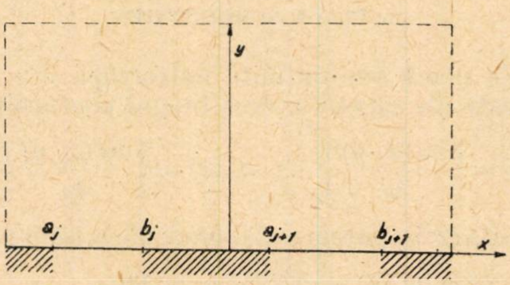


Fig. 1

De-a lungul conturului liber K ne putem da $m_y = m(x)$ și

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q(x).$$

Atunci, condițiile la limită pot fi scrise

$$\begin{aligned} &w_n(x) = 0, \quad w_s(x) = 0, && \text{pe } K, \\ &m_y = m(x), \quad \bar{q}_y = q(x), && \text{pe } L. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pentru a obține o soluție a problemei folosind formulele (3.3) este necesar să găsim necunoscutele $w_s(x)$ și $w_n(x)$ pe L. Exprimînd valorile la limită pentru

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\int m(x)\,dx - c_j^{(1)}, \\ f_2(x) &= -\iint q(x)\,dx\,dx - c_j^{(2)}x - c_j^{(3)}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

folosind relațiile (3.3) și formulele lui Plemelj, obținem un sistem de ecuații integrale singulare

$$\begin{aligned} B_1 w_s(x) + \frac{A_1}{\pi}\int_L \frac{w_s(\xi)}{\xi - x}\,d\xi + \frac{A_2}{\pi}\int_L \frac{w_n(\xi)}{\xi - x}\,d\xi &= f_1(x), \\ -B_1 w_n(x) + \frac{A_3}{\pi}\int_L \frac{w_s(\xi)}{\xi - x}\,d\xi + \frac{A_1}{\pi}\int \frac{w_n(\xi)}{\xi - x}\,d\xi &= f_2(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

unde s-au folosit notațiile

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathcal{I}m\,\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = -D_{22}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \\ A_2 &= -\mathcal{I}m\,\frac{q_1 - q_2}{\mu_2 - \mu_1} = D_{22}(\beta_1 + \beta_2), \\ A_3 &= -\mathcal{I}m\,\frac{p_1\mu_2^2 - p_2\mu_1^2}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} = D_{22}[\beta_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \beta_2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)], \\ A_4 &= \mathcal{I}m\,\frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} = -D_{22}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = A_1, \\ B_1 &= \mathcal{R}e\,\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = D_{22}(\nu_1 - \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2), \\ B_4 &= \mathcal{R}e\,\frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} = -D_{22}(\nu_1 - \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = -B_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

și următoarele relații

$$\mathcal{R}e\,\frac{q_1 - q_2}{\mu_2 - \mu_1} = 0, \quad \mathcal{R}e\,\frac{p_1\mu_2^2 - p_2\mu_1^2}{\mu_1\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} = 0. \tag{4.5}$$

Ecuațiile integrale singulare (4.3) sînt necesare pentru a găsi pe $w_n(x)$ și $w_s(x)$ pe L. Constantele $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$, $c_j^{(3)}$ sînt diferite pentru fiecare interval L_j.

După multiplicarea celei de-a doua ecuații (4.3) cu N și după adunarea acesteia cu prima ecuație, ecuația integrală singulară devine

$$B_1 [w_s(x) - Nw_n(x)] + \frac{A_1 + NA_3}{\pi} \int_L \frac{w_s(\xi)}{\xi - x} d\xi + \\ + \frac{A_2 + NA_1}{\pi} \int_L \frac{w_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = f_1(x) + Nf_2(x). \quad (4.6)$$

Se alege N astfel încît să obținem

$$\frac{A_1 + NA_3}{A_2 + NA_1} = - \frac{B_1}{NB_1} = - \frac{1}{N}.$$

Rezolvînd această ecuație se găsește

$$N_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2A_3}}{A_3}. \quad (4.7)$$

Vom cerceta mai departe discriminantul ecuației. După simplificări putem scrie

$$A_1^2 - A_1A_2 = - D^2 = - D_{22} [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2] \beta_1\beta_2. \quad (4.8)$$

Dacă β_1, β_2 au valori pozitive, discriminantul este negativ iar N_1, N_2 sînt complex conjugate. Vom folosi notația $N_1 = N$, $N_2 = \bar{N}$.

După substituirea acesteia în ecuația (4.6), obținem

$$B_1 [w_s(x) - Nw_n(x)] - \frac{D}{\pi i} \int_L \frac{w_s(\xi) - Nw_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = f_1(x) + Nf_2(x). \quad (4.9)$$

Cu ajutorul ecuației (4.9) problema tratată în acest articol se reduce la soluționarea unei ecuații integrale singulare de speța a doua, unde integrarea se face de-a lungul unei curbe netede pe porțiuni, alcătuită din mai multe arce distincte. Pentru a putea rezolva această ecuație, introducem o funcție olomorfă pe porțiuni

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_s(\xi) - Nw_n(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (4.10)$$

care este olomorfă în fiecare domeniu finit, fără a conține puncte ale curbei netede pe porțiuni L, adică puncte ale intervalelor $(a_j b_j)$ pe axa x.

Pentru valorile la limită ale funcției $F(z)$ pe curba discontinuă L, conform formulelor lui Plemelj [5], putem scrie

$$w_s(x) - Nw_n(x) = F^+(x) - F^-(x), \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{w_s(\xi) - Nw_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = F^+(x) + F^-(x). \quad (4.11)$$

Substituind aceste relații în ecuația (4.9) obținem

$$(B_1 - D)\, F^+(x) - (B_1 + D)\, F^-(x) = f_1(x) + N f_2(x). \qquad (4.12)$$

În felul acesta am ajuns la o problemă Hilbert-Riemann. După cum este evident din punct de vedere fizic, săgeata w, inclusiv derivatele sale de primul ordin, trebuie să fie continuă. Soluția trebuie să aibă valori finite (în acest caz egale cu zero) la extremitățile lui $L_j(a_j, b_j)$.

Obținem astfel

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i\,(B_1 - D)} \int \frac{f_1(\xi) + N f_2(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + P(z)\, X(z), \qquad (4.13)$$

unde

$$X(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{1-\varkappa} (z - b_j)^{\varkappa}, \qquad (4.14)$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{B_1 + D}{B_1 - D}, \qquad (4.15)$$

iar $P(z)$ este un polinom arbitrar de z.

Argumentul $\ln \dfrac{B_1 + D}{B_1 - D}$ este ales între 0 și 2 π.

Valoarea limită la stînga a lui $X(z)$ pe L, pentru $y > 0$ se notează prin

$$X^+(x) = X(x),$$

astfel încît

$$X^-(x) = X(x)\, e^{-2\pi i \varkappa}.$$

În mod similar se obține pentru $N_2 = \overline{N}$

$$B_1 [w_s(x) - \overline{N} w_n(x)] + \frac{D}{\pi i} \int_L \frac{w_s(\xi) - \overline{N} w_n(\xi)}{\xi - x} = f_1(x) + \overline{N} f_2(x), \qquad (4.16)$$

care este o ecuație integrală singulară complex conjugată cu (4.9).

Să introducem mai departe o funcție olomorfă pe porțiuni

$$\overline{F}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_s(\xi) - \overline{N} w_n(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad (4.17)$$

unde $\overline{F}(z)$ are coeficienți și exponenți complex conjugați față de cei ai lui $F(z)$. După substituire în ecuația (4.16) se găsește

$$(B_1 + D)\, \overline{F}^+(x) - (B_1 - D)\, \overline{F}^-(x) = -f_1(x) - \overline{N} f_2(x). \qquad (4.18)$$

Cu ajutorul soluției acestei ecuații obținem

$$\overline{F}(z) = -\frac{\overline{X}(z)}{2\pi i\,(B_1 + D)} \int_L \frac{f_1(\xi) + \overline{N} f_2(\xi)}{\overline{X}^+(\xi)\,(\xi - z)}\, d\xi + \overline{P}(z)\, \overline{X}(z), \qquad (4.19)$$

unde

$$\overline{X}(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{1-\overline{\varkappa}} (z - b_j)^{\overline{\varkappa}} \tag{4.20}$$

și

$$\overline{\varkappa} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{B_1 - D}{B_1 + D},$$

ceea ce înseamnează că $\overline{\varkappa}$ este complex conjugat cu $\varkappa$.

Vom considera acum ramura olomorfă în planul tăiat de-a lungul lui L și care este astfel încît

$$\overline{X}^{+}(x) = \overline{X}(x)\, e^{2\pi i \overline{\varkappa}}$$

și

$$\overline{X}^{-}(x) = \overline{X}(x).$$

Ne putem asigura apoi că, în conformitate cu (4.19), soluția $\overline{F}(z)$ are față de $F(z)$, ținînd seama de (4.13), coeficienți și exponenți complex conjugați așa cum s-a presupus.

În funcțiile $F(z)$ și $\overline{F}(z)$, z poate fi înlocuit cu z_1 și z_2, valorile la limită rămînînd neschimbate. Comparînd (4.10) și (4.17) cu formulele (3.3) obținem

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)(N - \overline{N})} [(1 - \mu_2 \overline{N}) F(z_1) + (1 - \mu_2 N) \overline{F}(z_1)], \\ \Psi(z_2) &= \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)(N - \overline{N})} [(1 - \mu_1 \overline{N}) F(z_2) + (1 - \mu_1 N) \overline{F}(z_2)]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Este necesar apoi să calculăm constantele $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ și $c_j^{(3)}$ care sînt în număr de $3p$. Deoarece $w_n(x)$ și $w_s(x)$ satisfac în general condițiile (3.4) cu $w_n(\infty) = w_s(\infty) = 0$, funcțiile $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ sînt nule la infinit și în consecință funcțiile $F(z)$ și $\overline{F}(z)$ trebuie să fie olomorfe pe porțiuni în interiorul planului complex, incluzînd punctul de la infinit. Pentru ca aceste funcții să se anuleze la infinit, este necesar ca $P(z) = \overline{P}(z) = 0$ și ca următoarele relații să fie satisfăcute :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\xi^{k-1}[f_1(\xi) + N f_2(\xi)]}{X^{+}(\xi)}\, d\xi = 0, \\ &\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\xi^{k-1}[f_1(\xi) + \overline{N} f_2(\xi)]}{\overline{X}^{+}(\xi)}\, d\xi = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots p), \end{aligned} \tag{4.22}$$

care dau $2p$ condiții pentru determinarea constantelor. Condiții suplimentare se pot obține din condițiile de continuitate ale săgeții w în punctele a_j, b_j.

Din ecuațiile (4.11) și (4.12) obținem pe contur

$$w_s(x) - Nw_n(x) = \frac{1}{B_1 + D}\left[f_1(x) + Nf_2(x) + 2DF^+(x)\right] \tag{4.23}$$

sau

$$w_s(x) - Nw_n(x) = \frac{1}{B_1^2 - D^2}\left\{ B_1\left[f_1(x) + Nf_2(x)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{DX^+(x)}{\pi i}\int_L \frac{f_1(\xi) + Nf_2(\xi)}{X^+(\xi)(\xi - x)}\, d\xi \right\}.$$

Rezultă

$$w_n(x) = 2\mathcal{Re}\left\{\frac{1}{(B_1 + D)(\overline{N} - N)}\left[f_1(x) + Nf_2(x) + 2DF^+(x)\right]\right\}, \tag{4.24}$$

$$w_s(x) = 2\mathcal{Re}\left\{\frac{\overline{N}}{(B_1 + D)(\overline{N} - N)}\left[f_1(x) + Nf_2(x) + 2DF^+(x)\right]\right\},$$

din care obținem prin integrarea celei de-a doua ecuații în raport cu x

$$w(x) = 2\mathcal{Re}\left\{\frac{\overline{N}}{(B_1 + D)(\overline{N} - N)}\int\left[f_1(x) + Nf_2(x) + 2DF^+(x)\right]dx\right\} + c_j^{(4)}. \tag{4.25}$$

Condițiile de continuitate a săgeții în punctele a_j, b_j vor fi

$$w(a_j - 0) = w(a_j + 0),$$

$$w(b_j - 0) = w(b_j + 0).$$

Rezultă

$$w(b_j) - w(a_j) = 2\mathcal{Re}\left\{\frac{\overline{N}}{(B_1 + D)(\overline{N} - N)}\int_{a_j}^{b_j}\left[f_1(x) + Nf_2(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2DF^+(x)\right]dx\right\}, \tag{4.26}$$

care dă p condiții suplimentare, necesare pentru determinarea constantelor. Ecuațiile (4.22) și (4.26) dau un număr satisfăcător de ecuații pentru determinarea celor 3 p parametri de integrare.

5. PLACĂ SEMI-INFINITĂ ÎNCASTRATĂ, CU O PORȚIUNE LIBERĂ

Vom considera acum o placă semi-infinită solicitată pe conturul ei liber $L = (a_1 b_1)$ de un moment de încovoiere constant m și de o forță constantă q. Restul conturului K este încastrat. Originea coordonatelor

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

se ia în mijlocul porțiunii libere a conturului (a_1, b_1) și notăm $a_1 = -a$ și $b_1 = a$ (fig. 2). Condițiile pe contur devin astfel

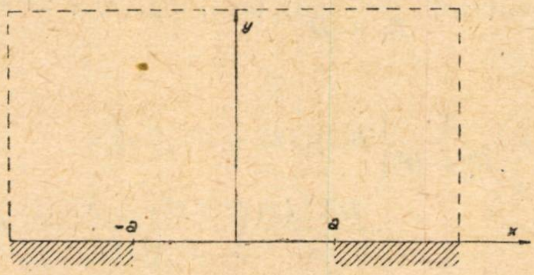


Fig. 2

$$\begin{aligned} &w_n(x) = 0, \; w_s(x) = 0 && \text{pe } K, \\ &m_y = m, \; \bar{q}_y = q && \text{pe } L. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Rezultă

$$f_1(x) + Nf_2(x) = -\frac{1}{2}Nqx^2 - (m + Nc_2)x - c_1 - Nc_3. \tag{5.2}$$

În conformitate cu relația (4.14) obținem

$$F(z) = -\frac{(z+a)^{1-\varkappa}(z-a)^{\varkappa}}{4\pi i(B_1 - D)}\int_{-a}^{a}\frac{Nq\xi^2 + 2(m+Nc_2)\xi + 2(c_1+Nc_3)}{(\xi+a)^{1-\varkappa}(\xi-a)^{\varkappa}(\xi-z)}d\xi. \tag{5.3}$$

Această funcție va fi determinată prin integrare pe contur de-a lungul unei curbe închise, cu o tăietură ($-a$, a) în interior. După simplificări se obține

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{1}{4D}\Big(&Nqz^2 + 2(m + Nc_2)z + 2(c_1 + Nc_3) - \\ &-\{Nq[z + (2\varkappa - 1)a] + 2(m + Nc_2)\}(z+a)^{1-\varkappa}(z-a)^{\varkappa}\Big). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Folosind relația (4.25) obținem de-a lungul conturului

$$\begin{aligned} w_s(x) - Nw_n(x) = -\frac{1}{2(B_1 + D)}\{&Nq[x + (2\varkappa - 1)a] + \\ &+ 2(m + Nc_2)\}(x+a)^{1-\varkappa}(x-a)^{\varkappa}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Condiția de continuitate a derivatelor de primul ordin ale săgeții este implicit satisfăcută. Constantele c_1 și c_3 pot fi determinate folosind condiția de olomorfie a funcțiilor $F(z)$ și $\overline{F}(z)$ la infinit. Acestea nu influențează totuși distribuția momentelor de încovoiere și răsucire sau pe aceea a forțelor de forfecare și nici rotirile $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$; după cum se poate constata uşor, ele pot fi astfel neglijate în calcul. După separarea lui $w_n(x)$ și $w_s(y)$, obținem

$$
\begin{aligned}
w_n(x) = -\frac{1}{B_1+D}\,\mathcal{R}e\Bigg(\frac{1}{\overline{N}-N}\{Nq[\overline{x}+(2\varkappa-1)\,a]+ \\
+2\,(m+Nc_2)\}\,(x+a)^{1-\varkappa}(x-a)^{\varkappa}\Bigg), \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_s(x) = -\frac{1}{B_1+D}\,\mathcal{R}e\Bigg(\frac{1}{\overline{N}-N}\{Nq\,[x+(2\varkappa-1)\,a]+ \\
+2\,(m+Nc_2)\}\,(x+a)^{1-\varkappa}\,(x-a)^{\varkappa}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Constanta necunoscută c_2 poate fi obținută folosind condiția

$$\int_{-a}^{a} w_s(x)\,dx = 0. \qquad (5.7)$$

După evaluare obținem

$$c_2 = -m\,\frac{\mathcal{R}e\,[\overline{N}\varkappa\,(1-\varkappa)]}{N\overline{N}\,\mathcal{R}e\,[\varkappa\,(1-\varkappa)]} + \frac{qa}{3}\,\frac{\mathcal{R}e\,[\varkappa\,(1-\varkappa)\,(1-2\varkappa)]}{\mathcal{R}e\,[\varkappa\,(1-\varkappa)]}. \qquad (5.8)$$

Relațiile de mai sus pot fi mult simplificate, dacă admitem ca în cazul izotrop, că are loc inegalitatea $B_1 < D$. Vom obține

$$\varkappa = \frac{1}{2} - i\gamma, \qquad (5.9)$$

unde

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{D+B_1}{D-B_1}. \qquad (5.10)$$

Apoi

$$c_2 = \frac{mA_1}{A_2}. \qquad (5.11)$$

Înlocuind în (5.4) rezultă că

$$
\begin{aligned}
F(z) = \frac{1}{4D}\Bigg\{Nqz^2 - 2\,m\,i\,\frac{DN}{A_2}\,z - \\
-\left[Nq\,(z-2i\gamma a) - 2mi\,\frac{DN}{A_2}\right](z+a)^{\frac{1}{2}+i\gamma}\,(z-a)^{\frac{1}{2}-i\gamma}\Bigg\}. \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Funcţiile $\Phi(z_1)$ şi $\Psi(z_2)$ care dau soluţia pentru întreaga placă semi-infinită, pot fi obţinute din (4.21).

După simplificarea relaţiilor (5.6), se obţin următoarele relaţii pe latura $(-a, a)$:

$$w_n(x) = -\frac{e^{\pi\gamma}\sqrt{a^2-x^2}}{2D(B_1+D)}\left\{\left[q(A_1x - 2a\gamma D) - 2m\frac{D^2}{A^2}\right]\cos\left(\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[q(Dx + 2a\gamma A_1) + 2m\frac{A_1D}{A_2}\right]\sin\left(\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right\}, \tag{5.13}$$

$$w_s(x) = \frac{e^{\pi\gamma}\sqrt{a^2-x^2}}{2D(B_1+D)}\left[q\,A_2\,x\cos\left(\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(qa\gamma A_2 + mD)\sin\left(\gamma\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right].$$

Aşa cum se constată din aceste formule, $w_n(x)$ şi $w_s(x)$ au un caracter oscilator în vecinătatea punctelor $-a$, a. Oscilaţiile acestor funcţii trebuie luate în considerare doar într-o vecinătate limitată a punctelor de capăt $-a$, a. Pentru o placă semi-infinită solicitată numai cu un moment de încovoiere m, adică dacă punem $q = 0$, cu excepţia punctului $x = 0$, $w_s(x)$ se va anula, pentru prima oară într-un punct în care avem

$$\gamma\ln\frac{a+x}{a-x} = \pm\pi,$$

adică într-un punct

$$x = \pm a\,\mathrm{th}\frac{\pi}{2\gamma}.$$

Pentru simplificare, vom determina această valoare x pentru o placă izotropă pentru care

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{3+\gamma}{1-\nu}.$$

Valoarea minimă a lui x se obţine pentru valoarea maximă a lui γ, adică pentru $\nu = 0{,}5$. Astfel

$$x = \pm\,0{,}99992\,a.$$

Momentele de încovoiere și răsucire, precum și forțele de forfecare vor fi determinate folosind formulele (2.6). Prin diferențierea lui $F(z)$ obținem

$$F'(z) = \frac{1}{2D}\left\{ Nqz + m + Nc_2 - \frac{Nq\,[z^2 + (2\varkappa - 1)\,az - 2\varkappa\,(1-\varkappa)\,a^2]}{(z+a)^{\varkappa}\,(z-a)^{1-\varkappa}} - \right.$$
$$\left. - \frac{(m + Nc_2)\,[z + (2\varkappa - 1)\,a]}{(z+a)^{\varkappa}\,(z-a)^{1-\varkappa}} \right\}, \tag{5.14}$$

iar după înlocuirea lui c_2 și $\varkappa$, cu (5.9) și (5.11), obținem

$$F'(z) = \frac{N}{2D}\left\{ qz - mi\frac{D}{A_2} - \frac{q\,[2z^2 - 4i\gamma az - (1+4\gamma^2)\,a^2]}{2\,(z+a)^{\frac{1}{2}-i\gamma}\,(z-a)^{\frac{1}{2}+i\gamma}} + \right.$$
$$\left. + \frac{miD\,(z - 2\,i\gamma a)}{A_2\,(z+a)^{\frac{1}{2}-i\gamma}\,(z-a)^{\frac{1}{2}+i\gamma}} \right\}. \tag{5.15}$$

Funcțiile $\Phi'(z_1)$ și $\Psi'(z_2)$ se vor obține prin derivări corespunzătoare.

De-a lungul laturei încastrate, adică pentru $|x| > a$ și ținînd seama de (2.6) avem

$$m_y = \pm \frac{q}{2\sqrt{x^2 - a^2}}\,\frac{A^2}{D}\left\{ 4\,\gamma ax \cos\left(\gamma \ln \frac{x+a}{x-a}\right) - \right.$$
$$\left. - \,[2x^2 - (1 + 4\gamma^2)\,a^2] \sin\left(\gamma \ln \frac{x+a}{x-a}\right)\right\} +$$
$$+ \,m\left\{1 \mp \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\left[x \cos\left(\gamma \ln \frac{x+a}{x-a}\right) + \right.\right. \tag{5.16}$$
$$\left.\left. + \,2\gamma a \sin\left(\gamma \ln \frac{x+a}{x-a}\right)\right]\right\},$$

unde semnele de deasupra se referă la $x > a$, iar semnele de dedesubt corespund la $x < -a$. În imediata vecinătate a punctelor singulare $-a$, a, funcția care exprimă momentul de încovoiere m_y de-a lungul laturei încastrate are un caracter oscilator, similar aceluia pe care îl au tensiunile într-un semiplan, cu condiții mixte pe contur corespunzătoare [6]. Dacă numai o singură condiție pe contur se schimbă, de exemplu în cazul unei plăci alternativ încastrată și simplu rezemată [3] singularitatea nu mai are caracter oscilator. Soluția de mai sus este valabilă pentru întreaga placă semi-infinită $y > 0$, cu excepția vecinătății imediate a punctelor neregulate $-a$, a.

După cum am putut constata în calculul lui m_y, constanta c_2 nu influențează numai săgeata plăcii semi-infinite, ci și distribuția de momente. Din această cauză, constanta de mai sus nu poate fi neglijată în calcul.

Forțele tăietoare se pot obține din (2.6) folosind și (4.21).

Primită la redacție la 10 ianuarie 1960.

СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются смешанные граничные условия полубесконечной пластинки $y > 0$. Контур пластинки является попеременно защемленным и свободным.

Выводятся сингулярные интегральные уравнения для определения неизвестных первых производных прогиба полубесконечной пластинки на свободном контуре. После приведения задачи к типу Гильберта-Римана дается общее решение при помощи двух кусочно-голоморфных функций $F(z)$, $\overline{F}(z)$. Окончательное решение, справедливое для всей полубесконечной пластинки, является линейной комбинацией функций $F(z_1)$, $\overline{F}(z_1)$, $F(z_2)$, $\overline{F}(z_2)$, где комплексная переменная z заменяется комплексными переменными z_1 и z_2.

В качестве частного случая дается решение для полубесконечной пластинки, у которой на определенную свободную часть контура действует постоянный изгибающий момент m и постоянная сила на контуре q.

EINIGE GEMISCHTE RANDBEDINGUNGEN ANISOTROPER PLATTEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden hier die gemischten Randbedingungen einer anisotropen Halbplatte $y > 0$ untersucht. Der Rand der Halbplatte ist abwechselnd eingespannt oder frei.

Singulare Integralgleichungen werden abgeleitet, um die unbekannten ersten Ableitungen der Durchbiegung der Halbplatte am freien Rand zu bestimmen. Nach der Zurückführung des Problems auf die unhomogene Hilbert-Riemannsche Aufgabe ist die allgemeine Lösung mittels zweier teilweise holomorpher Funktionen $F(z)$, $\overline{F}(z)$ gegeben. Die endgültige Lösung, die für die ganze Halbplatte gültig ist, ist eine lineare Kombination der Funktionen $F(z_1)$, $\overline{F}(z_1)$, $F(z_2)$, $\overline{F}(z_2)$, wo die komplexe Veränderliche z durch die affinen komplexen Veränderlichen z_1 und z_2 ersetzt wird.

Als ein besonderer Fall wird die Halbplatte gelöst, bei der ein freier Abschnitt des Randes durch ein konstantes Biegemoment m und eine konstante Randkraft q belastet wird.

BIBLIOGRAFIE

1. G. M. L. GLADWELL, *Some Mixed Boundary-value Problems of Aeolotropic Thin Plate Theory.* Quart. J. Mech. Appl. Math., **XII**, *1* (1959).
2. H. ZORSKI, *Some Cases of Bending of Anisotropic Plates.* Arch. Mech. Stos., **XI**, *1* (1959).
3. J. BRILLA, *Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten.* ZAMM (sub tipar).
4. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки.* Гостехиздат, Москва, 1957.
5. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Сингулярные интегральные уравнения.* Гостехиздат, Москва 1946.
6. J. BRILLA, *Anizotropické steny,* Vydavatelstvo SAV, Bratislava, 1958.

ASUPRA UNOR SISTEME INFINITE DE ECUAŢII LINIARE CARE INTERVIN ÎN PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂŢII PENTRU UN DOMENIU DREPTUNGHIULAR

DE

P. P. TEODORESCU [1]

1. Într-o lucrare anterioară [6], [7] am arătat că rezolvarea primei probleme fundamentale a teoriei elasticităţii (condiţii pe contur în tensiuni), pentru un domeniu dreptunghiular, se reduce la soluţionarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute, pentru fiecare caz de încărcare în parte (după proprietăţile de simetrie sau de antisimetrie ale încărcării). În cele ce urmează ne propunem să studiem regularitatea acestor sisteme infinite de ecuaţii liniare, pentru a vedea dacă soluţia dată este corectă din punct de vedere matematic şi dacă sarcina exterioară nu trebuie să verifice eventual anumite condiţii.

Fie $2a$ şi $2b$ cele două dimensiuni ale domeniului dreptunghiular; considerăm de asemenea şi rapoartele

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Vom considera numai cazul unei încărcări normale, simetrică în raport cu axele de simetrie geometrică (care s-au ales ca axe de coordonate) (fig. 1). Pe laturile $y = \pm b$ presupunem că acţionează o sarcină de forma

$$\overline{p}(x) = p(x) = b_0 + \sum_n b_n \cos \gamma_n x, \tag{2}$$

unde

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

---

[1] Universitatea „C. I. Parhon" – Facultatea de matematică şi fizică.

Am arătat că starea de tensiune este dată de [1])

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_n (-1)^n \bar{B}_n \Phi_9 (\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \bar{D}_m \Phi'_7 (\delta_m x) \cos \delta_m y, \\
\sigma_y &= b_0 + \sum_n (-1)^n \bar{B}_n \Phi_7 (\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \bar{D}_m \Phi'_9 (\delta_m x) \cos \delta_m y, \qquad (4) \\
\tau_{xy} &= \sum_n (-1)^n \bar{B}_n \Phi_8 (\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \bar{D}_m \Phi'_8 (\delta_m y) \sin \delta_m y,
\end{aligned}$$

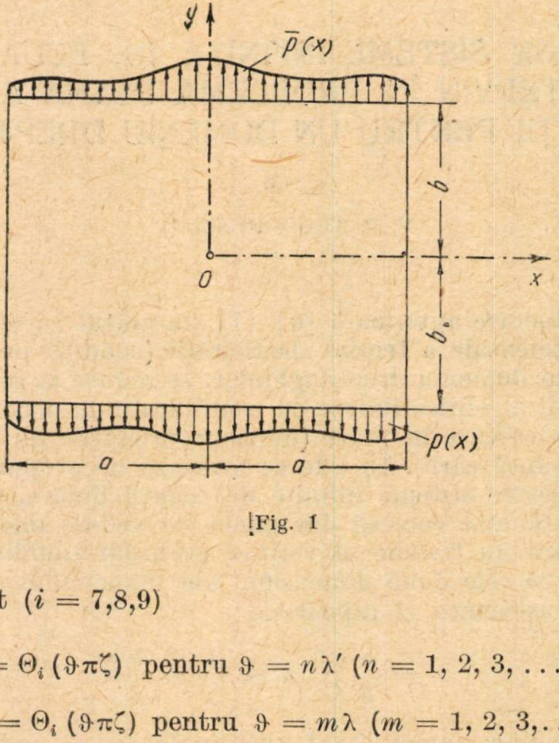


Fig. 1

unde s-a notat ($i = 7,8,9$)

$$\begin{aligned}
\Phi_i (\gamma_n y) &= \Theta_i (\vartheta \pi \zeta) \text{ pentru } \vartheta = n\lambda' \; (n = 1, 2, 3, \ldots), \; \zeta = \eta, \\
\Phi'_i (\delta_m x) &= \Theta_i (\vartheta \pi \zeta) \text{ pentru } \vartheta = m\lambda \; (m = 1, 2, 3, \ldots), \; \zeta = \xi,
\end{aligned} \qquad (5)$$

cu

$$\delta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (3')$$

coordonatele reduse fiind

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}. \qquad (6)$$

---

[1] Folosim notaţiile din lucrarea [6].

Funcţiile $\Theta_i(\vartheta\pi\zeta)$ sînt definite prin relaţiile

$$\begin{aligned}
\Theta_7(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}[(1+\vartheta\pi\operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta-\vartheta\pi\zeta\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta],\\
\Theta_8(\vartheta\pi\zeta) &= -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}(\vartheta\pi\operatorname{cth}\vartheta\pi\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta-\vartheta\pi\zeta\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta), \qquad (7)\\
\Theta_9(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}[(1-\vartheta\pi\operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta+\vartheta\pi\zeta\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta].
\end{aligned}$$

Şirurile de coeficienţi $\overline{B}_n$, $\overline{D}_m$ sînt date de sistemul de ecuaţii cu o dublă infinitate de necunoscute

$$\begin{aligned}
&\sum_i \mu_{mi}^2\overline{B}_i+\chi_2(m\lambda)\overline{D}_m=0 \qquad (m,\ i=1,2,3,\ldots),\\
&\chi_2'(n\lambda')\overline{B}_n+\sum_l \mu_{ln}^2\overline{D}_l=(-1)^n \mathrm{b}_n \qquad (n,\ l=1,2,3,\ldots),
\end{aligned} \qquad (8)$$

unde am introdus funcţia raţională

$$\mu_{mn}=\frac{2\gamma_n\delta_m}{\gamma_n^2+\delta_m^2} \qquad (n,\ m=1,2,3,\ldots) \qquad (9)$$

şi funcţiile iperbolice

$$\begin{aligned}
\chi_2(m\lambda)&=\Phi_7'(\delta_m a)=\left(\operatorname{cth}\delta_m a+\frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}^2\delta_m a}\right)\delta_m a \qquad (m=1,2,3,\ldots),\\
\chi_2'(n\lambda')&=\Phi_7(\gamma_n b)=\left(\operatorname{cth}\gamma_n b+\frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}^2\gamma_n b}\right)\gamma_n b \qquad (n=1,2,3,\ldots).
\end{aligned} \qquad (10)$$

2. Pentru a putea rezolva sistemul de ecuaţii (8) prin metode aproximative de calcul, trebuie demonstrată existenţa şi unicitatea soluţiei precum şi mărginirea ei; în acest caz vom căuta să vedem dacă acest sistem infinit este regulat sau nu.

Sistemul (8) este complet regulat dacă se verifică condiţiile

$$\sum_i \mu_{mi}^2<\chi_2(m\lambda), \qquad (11)$$

$$\sum_l \mu_{ln}^2<\chi_2'(n\lambda'). \qquad (11')$$

Considerăm dezvoltările în serie Fourier

$$\begin{aligned}
\Phi_9(\gamma_n y)&=\sum_m(-1)^m\mu_{mn}^2\cos\delta_m y,\\
\Phi_9'(\delta_m x)&=\sum_n(-1)^n\mu_{mn}^2\cos\gamma_n x.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Prin particularizare obţinem

$$\begin{aligned}\varkappa_2(m\lambda) &= \Phi_9'(\delta_m a) = \left(\operatorname{cth}\delta_m a - \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}^2\delta_m a}\right)\delta_m a \quad (m = 1,2,3,\dots),\\ \varkappa_2'(n\lambda') &= \Phi_9(\gamma_n b) = \left(\operatorname{cth}\gamma_n b - \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}^2\gamma_n b}\right)\gamma_n b \quad (n = 1,2,3,\dots).\end{aligned} \tag{13}$$

Relaţiile (12) şi (13) ne permit să scriem

$$\sum_i \mu_{mi}^2 = \varkappa_2(m\lambda) = \chi_2(m\lambda) - 2\left(\frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right)^2, \tag{14}$$

$$\sum_l \mu_{ln}^2 = \varkappa_2'(n\lambda') = \chi_2'(n\lambda') - 2\left(\frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}\gamma_n b}\right)^2. \tag{14'}$$

În felul acesta condiţiile (11), (11') devin

$$2\left(\frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right)^2 > 0, \tag{15}$$

$$2\left(\frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}\gamma_n b}\right)^2 > 0. \tag{15'}$$

Observăm că aceste mărimi tind către zero pentru $m \to \infty$ sau $n \to \infty$. Deci sistemul de ecuaţii (8) este regulat (nu şi complet regulat). Vom calcula

$$\rho_m = 1 - \frac{\sum_i \mu_{mi}^2}{\chi_2(m\lambda)} = \frac{2\left(\frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right)^2}{\chi_2(m\lambda)} = \frac{4\,\delta_m a}{\operatorname{sh}2\,\delta_m a + 2\,\delta_m a}, \tag{16}$$

$$\rho_n' = \frac{4\,\gamma_n b}{\operatorname{sh}2\,\gamma_n b + 2\,\gamma_n b}. \tag{16'}$$

Pentru ca soluţia sistemului infinit de ecuaţii, a cărei existenţă este asigurată pentru un sistem regulat, să fie mărginită şi să se poată obţine prin aproximaţii succesive trebuie ca termenii liberi, deci coeficienţii Fourier b_n să îndeplinească condiţia

$$\bar{b}_n = \frac{b_n}{\chi_2'(n\lambda')} \leqq K\rho_n' \tag{17}$$

unde K este o constantă pozitivă, deci ca $\bar{b}_n$ să fie de acelaşi ordin de mărime cu ρ_n'. Aceasta restrînge însă foarte mult tipurile de sarcini exterioare care pot fi luate în considerare.

3. Dar soluţia unui sistem regulat nu este neapărat unică. Pentru a putea studia şi această problemă vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{aligned}B_n' &= \gamma_n^2\,\bar{B}_n,\\ D_m' &= \delta_m^2\,\bar{D}_m.\end{aligned} \tag{18}$$

În acest caz sistemul (8) devine

$$\begin{aligned} &\sum_i \omega^2\mu_{mi}^2 B_i' + \chi_2(m\lambda) D_m' = 0, \\ &\chi_2'(n\lambda') B_n' + \sum_l \omega'^2 \mu_{ln}^2 D_l' = \gamma_n^2(-1)^n b_n, \end{aligned} \tag{19}$$

unde am notat

$$\omega = \frac{m}{n}\lambda, \qquad \omega' = \frac{1}{\omega} = \frac{n}{m}\lambda', \tag{20}$$

putînd lua eventual $n = i$ sau $m = l$.

Considerăm dezvoltările în serie Fourier

$$\begin{aligned} &\Phi_7(\gamma_n y) = 2 + \sum_m (-1)^m \omega'^2 \mu_{mn}^2 \cos \delta_m y, \\ &\Phi_7'(\delta_m x) = 2 + \sum_n (-1)^n \omega^2 \mu_{mn}^2 \cos \gamma_n x. \end{aligned} \tag{21}$$

Relaţiile (10) şi (21) ne permit să scriem

$$\sum_i \omega^2\mu_{mi}^2 = \chi_2(m\lambda) - 2, \tag{22}$$

$$\sum_l \omega'^2\mu_{ln}^2 = \chi_2'(n\lambda') - 2. \tag{22'}$$

În felul acesta obţinem

$$\rho_m = 1 - \frac{\sum_i \omega^2\mu_{mi}^2}{\chi_2(m\lambda)} = \frac{2}{\chi_2(m\lambda)} = \frac{2}{\delta_m a\left(\operatorname{cth}\delta_m a + \dfrac{\delta_m a}{\operatorname{sh}^2\delta_m a}\right)}, \tag{23}$$

$$\rho_n' = \frac{2}{\chi_2'(n\lambda')} = \frac{2}{\gamma_n b\left(\operatorname{cth}\gamma_n b + \dfrac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}^2\gamma_n b}\right)}. \tag{23'}$$

Prin urmare sistemul de ecuaţii (19) este de asemenea regulat (nu complet regulat), coeficienţii Fourier b_n trebuind să fie de ordinul de mărime $1/n^2$ (ρ_m şi ρ_n' tind către zero pentru $m \to \infty$ şi pentru $n \to \infty$).

Deoarece, printr-o schimbare de variabilă de forma (18), unde $\gamma_n \to \infty$ şi $\delta_m \to \infty$ o dată cu $n \to \infty$ şi $m \to \infty$, am obţinut tot un sistem regulat cu termenii liberi mărginiţi, în baza unei teoreme a lui P. S. Bondarenko [4] putem afirma că soluţia ambelor sisteme este unică.

De asemenea, este suficient şi pentru sistemul (8) ca coeficienţii Fourier b_n să fie de ordinul de mărime $1/n^2$. Prin urmare putem considera orice caz de încărcare cu o sarcină distribuită (nu putem face un calcul pentru o sarcină concentrată, decît dacă o echivalăm cu o sarcină distribuită pe o porţiune oarecare).

4. Pentru a micşora restricţia impusă sarcinilor exterioare, vom încerca o nouă schimbare de variabilă. Fie astfel

$$\begin{aligned} \overline{B}'_n &= \gamma_n \overline{B}_n, \\ \overline{D}'_m &= \delta_m \overline{D}_m. \end{aligned} \tag{24}$$

În acest caz sistemul (8) devine

$$\begin{aligned} &\sum_i \omega\mu^2{}_{mi} \overline{B}'_i + \chi_2(m\lambda)\overline{D}'_m = 0, \\ &\chi'_2(n\lambda')\overline{B}'_n + \sum_l \omega'\mu^2_{ln}\overline{D}'_l = \gamma_n(-1)^n b_n. \end{aligned} \tag{25}$$

Ţinînd seama de

$$\begin{aligned} &\sum_i \omega\mu^2_{mi} = \sum_i \mu_{mi}(\omega\mu_{mi}) \leqq \sqrt{\sum_i \mu^2_{mi} \sum_i \omega^2\mu^2_{mi}} = \\ &= \sqrt{\varkappa_2(m\lambda)\left[\chi_2(m\lambda) - 2\right]} < \chi_2(m\lambda) \end{aligned} \tag{26}$$

şi de

$$\sum_l \omega'\mu^2_{ln} \leqq \sqrt{\varkappa'_2(n\lambda')\left[\chi'_2(n\lambda') - 2\right]} < \chi'_2(n\lambda'), \tag{26'}$$

putem afirma de asemenea că sistemul (25) este regulat, trăgînd aceleaşi concluzii ca mai sus.

Evaluările făcute mai sus nu sînt însă stricte; vom căuta deci să aducem anumite îmbunătăţiri.

Observăm astfel că putem scrie

$$\sum_i \omega\mu^2_{mi} = 4(m\lambda)^3 \sum_i \frac{i}{[i^2 + (m\lambda)^2]^2}. \tag{27}$$

În baza unor evaluări făcute de P. S. Bondarenko [1]), considerînd că dezvoltarea în serie (27) aproximează o anumită integrală definită, evaluări reluate [2]) de B. L. Abramian [2], putem scrie

$$\sum_i \frac{i}{[i^2 + (m\lambda)^2]^2} \leqq \begin{cases} f_1(m\lambda) & (m\lambda \leqq 3), \\ f_2(m\lambda) & (3 < m\lambda \leqq 4), \\ f_3(m\lambda) & (m\lambda > 4), \end{cases} \tag{28}$$

---

[1]) Se poate vedea [4], p. 81.

[2]) Cu această ocazie menţionăm următoarele : în 1955, B. L. Abramian [1] a indicat o metodă generală de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii pentru un domeniu dreptunghiular, studiind un caz particular de încărcare (sarcină normală, simetrică în raport cu axele de simetrie ale dreptunghiului), fără a pune şi condiţii în deplasări pe contur. În acelaşi an, în mod independent, noi am publicat [5] o lucrare asemănătoare, cuprinzînd o metodă generală de rezolvare a problemei pentru grinzile pereţi cu o singură deschidere şi cu o rezemare oarecare (simplă rezemare, încastrare etc.) (condiţii pe contur în tensiuni şi în deplasări), studiind toate cazurile de încărcare posibile, după proprietăţile de simetrie sau de antisimetrie în raport cu axele de simetrie ale grinzii perete (contur dreptunghiular). În 1957, B. L. Abramian [2]

unde am notat

$$
\begin{aligned}
f_1(m\lambda) &= \frac{1}{[1+(m\lambda)^2]^2} + \frac{2}{[4+(m\lambda)^2]^2} + \frac{21+(m\lambda)^2}{4[9+(m\lambda)^2]^2} + \frac{32+(m\lambda)^2}{4[16+(m\lambda)^2]^2},\\
f_2(m\lambda) &= \frac{1}{8(m\lambda)^3} + \frac{3+(m\lambda)^2}{4[1+(m\lambda)^2]^2} + \frac{2}{[4+(m\lambda)^2]^2} + \frac{32+(m\lambda)^2}{4[16+(m\lambda)^2]^2}, \qquad (28')\\
f_3(m\lambda) &= \frac{1}{4(m\lambda)^3} + \frac{3+(m\lambda)^2}{4[1+(m\lambda)^2]^2} + \frac{8+(m\lambda)^2}{4[4+(m\lambda)^2]^2}.
\end{aligned}
$$

Rezultă că

$$
\begin{aligned}
\rho_m &= 1 - \frac{\sum\limits_i \omega\mu_{mi}^2}{\chi_2(m\lambda)} \geqq 1 - \frac{4(m\lambda)^3 f_k(m\lambda)}{\chi_2(m\lambda)} = \\
&= 1 - \frac{4}{\pi}\,\frac{(m\lambda)^2 f_k(m\lambda)}{\operatorname{cth}\pi m\lambda + \dfrac{\pi m\lambda}{\operatorname{sh}^2\pi m\lambda}}, \qquad (29)
\end{aligned}
$$

pentru $k = 1, 2, 3$. Numitorul ultimei fracţii este supraunitar, fiind egal cu unitatea numai pentru $m \to \infty$. Putem deci scrie

$$\rho_m \geqq 1 - \frac{4}{\pi}(m\lambda)^2 f_k(m\lambda). \qquad (29')$$

Maximum funcţiunii $(m\lambda)^2 f_k(m\lambda)$ este mai mic sau cel mult egal cu suma valorilor maxime ale fiecărei fracţii componente în parte, pentru fiecare interval de variaţie a argumentului $m\lambda$. În acest caz putem scrie

$$
\begin{aligned}
\max\,[(m\lambda)^2 f_1(m\lambda)] &\leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{5}{24} + \frac{369}{2\,500} < 0{,}250 + 0{,}112 + \\
&+ 0{,}210 + 0{,}148 = 0{,}720,\\
\max\,[(m\lambda)^2 f_2(m\lambda)] &\leqq \frac{1}{24} + \frac{27}{100} + \frac{18}{169} + \frac{1}{4} < 0{,}042 + 0{,}270 + \\
&+ 0{,}108 + 0{,}250 = 0{,}670, \qquad (30)\\
\max\,[(m\lambda)^2 f_3(m\lambda)] &\leqq \frac{1}{16} + \frac{76}{289} + \frac{1}{4} < 0{,}065 + 0{,}265 + \\
&+ 0{,}250 = 0{,}580.
\end{aligned}
$$

---

a reluat problema pentru o încărcare oarecare, studiind şi sistemele infinite de ecuaţii liniare la care se ajunge; alegînd ca axe de coordonate două laturi ale dreptunghiului, B. L. Abramian nu ţine seama de proprietăţi de simetrie sau de antisimetrie. Noi am reluat de asemenea problema [6], [7], tot în 1957, alegînd ca axe de coordonate axele de simetrie geometrică şi ţinînd seama de proprietăţi de simetrie sau de antisimetrie ale încărcării; în felul acesta obţinem rezultate mai simple pentru fiecare caz de încărcare în parte. Din această cauză şi sistemele infinite de ecuaţii liniare obţinute de B. L. Abramian şi de noi sînt puţin diferite. B. L. Abramian şi M. M. Manukian [3] au studiat de asemenea şi cazul în care se pun condiţii în deplasări pe tot conturul (a doua problemă fundamentală a teoriei elasticităţii) pe o cale analoagă, pornind de la ecuaţiile lui Lamé.

Alte date bibliografice în legătură cu această problemă se dau în [6].

Rezultă că

$$\rho_m > 1 - \frac{4}{\pi} 0{,}720 > 1 - 0{,}920 = 0{,}080 > 0, \qquad (29'')$$

oricare ar fi m (și pentru $m \to \infty$).

Putem arăta analog că

$$\rho'_n = 1 - \frac{\sum\limits_{l} \omega' \mu_{ln}^2}{\chi'_2 (n\lambda')} \geqq 1 - \frac{4 (n\lambda')^3 f_k (n\lambda')}{\chi'_2 (n\lambda')} > 0{,}080 > 0, \qquad (29''')$$

pentru orice n (și pentru $n \to \infty$).

Prin urmare sistemul infinit (25) este complet regulat. Termenii săi liberi, deci coeficienții Fourier b_n, trebuie să fie mărginiți în totalitatea lor; aceeași concluzie o putem trage și pentru sistemul infinit (8).

În concluzie, putem considera și cazuri de încărcare cu forțe concentrate; nu putem considera însă cazuri de încărcare cu momente concentrate (în acest caz coeficienții Fourier b_n sînt de ordinul de mărime n și nu pot fi mărginiți în totalitatea lor).

5. În mod analog se pot studia sistemele infinite de ecuații liniare corespunzătoare celorlalte cazuri de încărcare, sisteme date în [7]. Unele din aceste sisteme de ecuații nu sînt regulate, dar prin schimbări de variabilă de forma (18) sau (24) se ajunge la sisteme regulate sau complet regulate, putînd trage astfel aceleași concluzii ca mai sus. În felul acesta rezultatele obținute în [6] și [7] sînt complet justificate din punct de vedere matematic.

6. Cu această ocazie vom arăta cum se simplifică problema în cazul grinzilor pereți patrate (domeniul plan este un patrat de laturi $b = a$). Pentru precizarea ideilor ne mărginim tot la cazul unei sarcini normale, simetrică în raport cu axele de coordonate.

Putem considera încărcarea din figura 2 *a* ca obținută, prin suprapunerea efectelor, din două cazuri de încărcare cu sarcini normale pe toate cele patru fețe ale patratului. Încărcarea pe fețele $x = \pm a$ trebuie să fie aceeași cu cea de pe fețele $y = \pm b = \pm a$, obținînd o dată un caz de încărcare simetrică față de diagonalele patratului (fig. 2 *b*) și o dată un caz de încărcare antisimetrică (fig. 2 *c*), față de aceleași diagonale.

Reprezentăm această nouă încărcare sub forma

$$\overline{p}' (y) = p' (y) = b_0 + \sum_m b_m \cos \delta_m y, \qquad (2')$$

astfel încît cele două șiruri de coeficienți sînt identice ($b_n = b_m$ pentru $n = m$).

Urmînd metoda de calcul indicată în [6], se obține starea de tensiune (4) (rezultatele fiind afectate cu coeficientul 1/2), la care se adaugă tensiunea normală

$$\sigma_x = \pm \frac{b_0}{2}. \qquad (4')$$

Șirurile de coeficienți $\overline{B}_n$ și $\overline{D}_m$ sînt date de sistemul de ecuații liniare cu o dublă infinitate de necunoscute

$$\begin{aligned} &\sum_i \mu_{mi}^2 \overline{B}_i + \chi_2(m\lambda)\overline{D}_m = \pm(-1)^m \frac{b_m}{2}, \\ &\chi_2'(n\lambda')\overline{B}_n + \sum_l{}' \mu_{ln}^2 \overline{D}_l = (-1)^n \frac{b_n}{2}. \end{aligned} \tag{31}$$

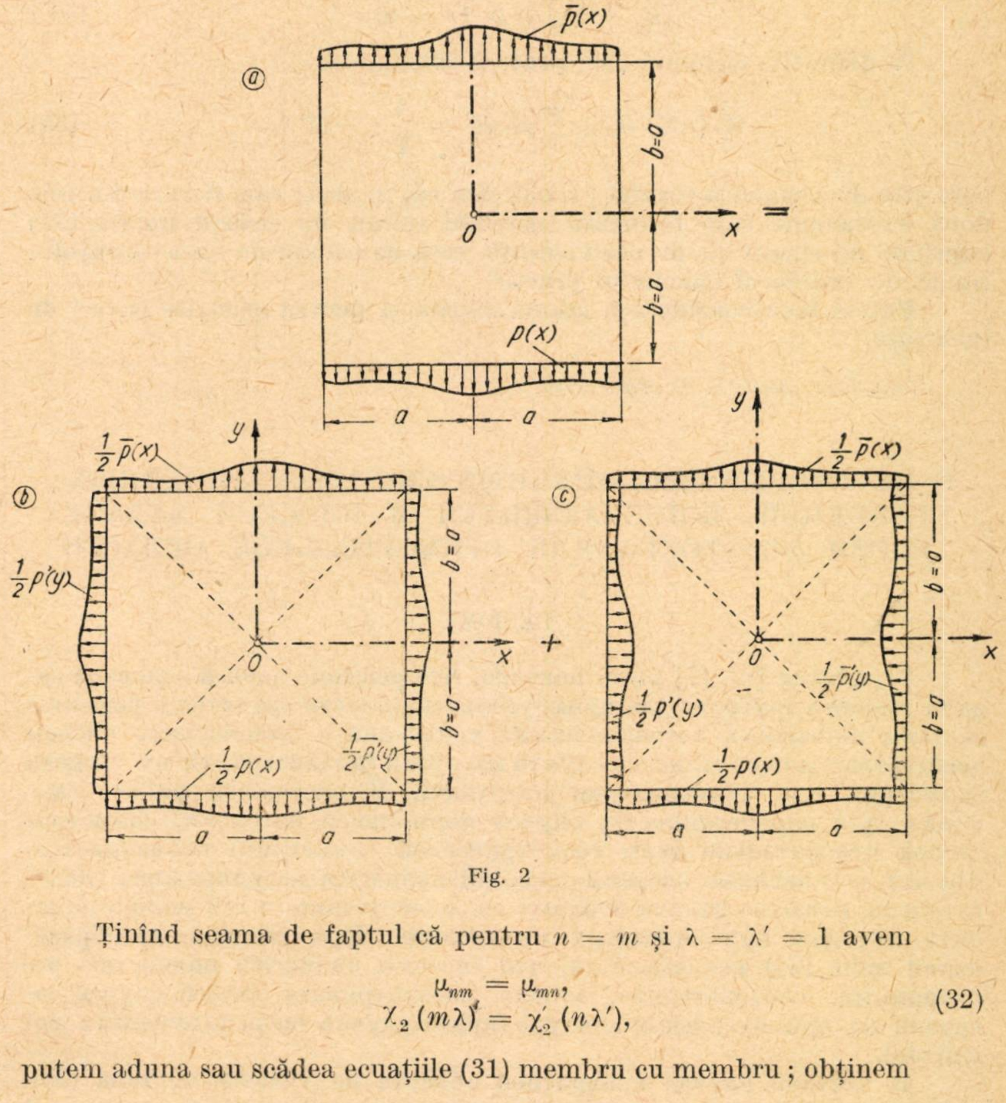

$\bar{p}(x)$
ⓐ
b=a
b=a
0
x
=
p(x)
a
a
y
$\frac{1}{2}\bar{p}(x)$
ⓑ
$\frac{1}{2}p'(y)$
y
0
x
+
b=a
b=a
$\frac{1}{2}\bar{p}'(y)$
$\frac{1}{2}p(x)$
a
a
ⓒ
$\frac{1}{2}\bar{p}(x)$
0
x
$\frac{1}{2}\bar{p}'(y)$
$\frac{1}{2}p'(y)$
b=a
b=a
$\frac{1}{2}p(x)$
a
a

Fig. 2

Ținînd seama de faptul că pentru $n = m$ și $\lambda = \lambda' = 1$ avem

$$\begin{aligned} \mu_{nm} &= \mu_{mn}, \\ \chi_2(m\lambda) &= \chi_2'(n\lambda'), \end{aligned} \tag{32}$$

putem aduna sau scădea ecuațiile (31) membru cu membru ; obținem

$$\sum_i \mu_{mi}^2 (\overline{B}_i \mp \overline{D}_i) + \chi_2(m\lambda)(\overline{D}_m \mp \overline{B}_m) = 0. \tag{33}$$

După cum am văzut, sistemul (8) face parte din clasa sistemelor regulate şi are o soluţie unică; deci şi sistemul (33) are o soluţie unică.

Pentru cazul de încărcare simetric în raport cu cele două diagonale (fig. 2 *b*) vom obţine

$$\bar{B}_n = \bar{D}_m \quad (n = m) \tag{34}$$

iar pentru cazul de încărcare antisimetric în raport cu cele două diagonale (fig. 2 *c*) putem scrie

$$\bar{B}_n + \bar{D}_m = 0 \quad (n = m). \tag{34'}$$

În definitiv, sistemul (31) poate fi înlocuit cu

$$\chi_2'(n\lambda')\,\bar{B}_n \pm \sum_l \mu_{ln}^2\,\bar{B}_l = \frac{1}{2}(-1)^n\,b_n, \tag{35}$$

care este de asemenea regulat; remarcăm că, în acest caz, fiecare din cele două subsisteme care formează sistemul infinit de ecuaţii liniare (35) cuprinde un singur şir de necunoscute, ceea ce constituie un avantaj din punct de vedere al calculului practic.

Putem face consideraţii asemănătoare şi pentru celelalte cazuri de încărcare.

Primită la redacţie la 23 martie 1960.

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

РЕЗЮМЕ

В работах [6], [7] было показно, что решение первой основной задачи теории упругости для прямоугольной области сводится к решению системы линейнных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных для отдельного случая нагрузки (в зависимости от свойств симметрии или антисимметрии нагрузки). В настоящей работе (выбирая, для определенности, случай нормальной нагрузки, симметрической относительно осям геометрической симметрии) показывается, что эти бесконечные системы вида (8) являются регулярными; следовательно, решение задачи ограничено, единственно, и его можно получить методом приближенных вычислений. При помощи преобразования вида (24) показывается, что системы являются полностью регулярными, следовательно, можно рассматривать любой случай нагрузки на прямоугольном контуре (кроме случая сосредоточениых моментов).

В частном случае квадратной области получается система (35), состоящая из двух подсистем, каждая из которых содержит по одной последовательности неизвестных.

SUR QUELQUES SYSTÈMES INFINIS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES QUI INTERVIENNENT DANS LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ POUR UN DOMAINE RECTANGULAIRE

RÉSUMÉ

Dans les travaux [6] et [7], il a été montré que l'étude du premier problème fondamental de la théorie de l'élasticité, pour un domaine rectangulaire, se réduit à la solution d'un système d'équations algébriques linéaires ayant une infinité d'inconnues, pour chacun des cas de chargement (selon les propriétés de symétrie ou d'antisymétrie de la charge considérée).

Dans le présent travail (en choisissant, pour fixer les idées, le cas d'une charge normale, symétrique par rapport aux axes de symétrie géométrique), l'auteur démontre que ces systèmes infinis, de la forme (8), sont réguliers et que, par une transformation de la forme (18), on aboutit également à des systèmes réguliers. Il s'ensuit, donc, que la solution du problème est bornée, unique et peut être obtenue par des méthodes de calcul approximatives. On démontre, en outre, par une transformation de la forme (24), que ces systèmes sont même complètement réguliers et que, par conséquent, tout cas de chargement sur le contour du rectangle peut être pris en considération (sauf les moments concentrés).

Dans le cas particulier d'un domaine carré, on obtiendra donc le système (35), constitué par deux sous-systèmes comprenant chacun une seule suite d'inconnues.

BIBLIOGRAFIE

1. АБРАМЯН Б. Л., *Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника.* Докл. Акад. Наук Арм. ССР, **21**, *5*, 193 (1955).
2. — *К плоской задачи теории упругости для прямоугольника.* Прикл. мат. и мех., **21**, *1*, 89 (1957).
3. АБРАМЯН Б. Л., МАНУКЯН М.М., *Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях.* Докл. Акад. Наук Арм. ССР, **25**, *4*, 177 (1957).
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., КРЫЛОВ В.И., *Приближенные методы высшего анализа.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
5. TEODORESCU P. P., *Calculul grinzilor pereţi cu o singură deschidere în caz general de rezemare şi încărcare.* Ed. Min. Inv., Bucureşti, 1955.
6. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere. Partea I.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 115 (1957).
7. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere. Partea a II-a.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 451 (1957).

STUDII

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA TEORIEI STRUCTURILOR SUBȚIRI CONSTRUITE DIN STRATURI ELASTICE

DE

LIVIU LIBRESCU

Vom prezenta o generalizare a rezultatelor obținute de noi în lucrările [1], [2], [3], generalizare care constă în abordarea teoriei structurilor subțiri obținute prin suprapunerea arbitrară a m straturi elastice, omogene, izotrope. Vom adopta pentru aceste structuri ipotezele formulate de S. A. Ambarțumian [4] și E. I. Giorgoliuc [5] și utilizate de noi în lucrările mai sus citate. Aceste ipoteze se reduc la a admite că :

a) Toate straturile care alcătuiesc structura sînt împreunate rigid astfel încît aceasta se deformează ca un tot.

b) Pentru structura în ansamblu rămîne valabilă ipoteza Love-Kirchoff.

În cele ce urmează vom nota cu j un strat oarecare din cele m considerate, iar mărimile statice fizice și geometrice ce caracterizează stratul j le vom afecta cu indicele j.

1.1. *Legile fizice.* În teoria structurilor construite din straturi dispuse arbitrar pe grosime, dependența eforturilor și momentelor de deformații nu mai este atît de simplă ca în cazul structurilor subțiri formate prin suprapunerea simetrică de straturi elastice [1], [2], [3], [4], la care drept suprafață de referință s-a considerat suprafața mediană a structurii (în viitor suprafața de referință o vom numi inițială).

În cadrul acestor structuri independent de suprafața inițială considerată, eforturile cît și momentele depind atît de deformațiile tangențiale, cît și de cele de încovoiere. Pentru aceste structuri suprafața inițială a fost aleasă diferit [5], [6], [7], [8]. În cele ce urmează vom considera ca inițială, suprafața inferioară a celui de-al n-lea strat luat de la suprafața de mărginire exterioară a structurii. Această suprafață inițială o vom referi la un sistem ortogonal de coordonate (α, β) în general vorbind neconjugat. Luînd în considerare stratul j, acesta se găsește depărtat de suprafața inițială prin cotele ξ_j și ξ_{j-1}, măsurate pe normala la suprafața inițială.

Eforturile unitare corespunzînd acestui strat, exprimate prin legea lui Hoocke sînt date de relațiile

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^j(z) &= \frac{E_j}{1-\mu_j^2}\left[(\varepsilon_1+\mu_j\,\varepsilon_2)+z\,(\varkappa_1+\mu_j\varkappa_2)\right],\\
\sigma_\beta^j(z) &= \frac{E_j}{1-\mu_j^2}\left[(\varepsilon_2+\mu_j\varepsilon_1)+z\,(\varkappa_2+\mu_j\varkappa_1)\right],\\
\tau_{\alpha\beta}^j(z) &= \frac{E_j}{2\,(1+\mu_j)}(\omega+2z\tau),
\end{aligned} \tag{1}$$

σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ — reprezintă eforturile unitare din mediul tridimensional,
E — modulul de elasticitate al materialului,
μ — coeficientul Poisson al materialului,
ε_1, ε_2, ω — deformațiile tangențiale ale suprafeței inițiale,
$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ — deformațiile de încovoiere ale suprafeței inițiale.

Eforturile și momentele sînt reduse la suprafața inițială prin formulele

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz+\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,\\
T_\beta &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz+\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz,\\
T_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\tau_{\beta\alpha}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz+\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\tau_{\beta\alpha}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,\\
T_{\beta\alpha} &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j-1}^{\xi_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz+\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz,\\
M_\alpha &= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz-\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\tau_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz,\\
M_\beta &= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz-\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz,\\
M_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-i}}^{\xi_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz+\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_4}^{-\xi_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz,\\
M_{\beta\alpha} &= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz-\sum_{j=n+1}^{m}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz,
\end{aligned} \tag{2}$$

în care dacă ţinem seama de relaţiile (1) şi de eroarea pe care o introduc ipotezele enunţate iniţial, se obţine legea eforturi-deformaţii sub forma

$$T_\alpha = F\,(\varepsilon^{(1)} + \overset{1}{\mu}\,\varepsilon^{(2)}) - K\,(\varkappa^{(1)} + \overset{2}{\mu}\,\varkappa^{(2)}), \tag{3 a}$$

$$T_\beta = F\,(\varepsilon^{(2)} + \overset{1}{\mu}\,\varepsilon^{(1)}) - K\,(\varkappa^{(2)} + \overset{2}{\mu}\,\varkappa^{(1)}), \tag{3 b}$$

$$T_{\alpha\beta} = F\,(\omega^{(1)} + \overset{1}{\mu}\,\omega^{(2)}) + K\,(\tau^{(1)} + \overset{2}{\mu}\,\tau^{(2)}), \tag{3 c}$$

$$T_{\beta\alpha} = F\,(\omega^{(2)} + \overset{1}{\mu}\,\omega^{(1)}) + K\,(\tau^{(2)} + \overset{2}{\mu}\,\tau^{(1)}), \tag{3 d}$$

$$M_\alpha = G\,(\varkappa^{(1)} + \overset{3}{\mu}\,\varkappa^{(2)}) - K\,(\varepsilon^{(1)} + \overset{2}{\mu}\,\varepsilon^{(2)}), \tag{3 e}$$

$$M_\beta = G\,(\varkappa^{(2)} + \overset{3}{\mu}\,\varkappa^{(1)}) - K\,(\varepsilon^{(2)} + \overset{2}{\mu}\,\varepsilon^{(1)}), \tag{3 f}$$

$$M_{\alpha\beta} = G\,(\tau^{(1)} + \overset{3}{\mu}\,\tau^{(2)}) + K\,(\omega^{(1)} + \overset{2}{\mu}\,\omega^{(2)}), \tag{3 g}$$

$$M_{\beta\alpha} = G\,(\tau^{(2)} + \overset{3}{\mu}\,\tau^{(1)}) + K\,(\omega^{(2)} + \overset{2}{\mu}\,\omega^{(1)}). \tag{3 h}$$

Din aceste relaţii se deduce reciproc legea deformaţii-eforturi.

$$\varepsilon^{(1)} = N\,(T_\alpha - \overset{3}{\bar{\mu}}\,T_\beta) + S\,(M_\alpha - \overset{2}{\bar{\mu}}\,M_\beta), \tag{4 a}$$

$$\varepsilon^{(2)} = N\,(T_\beta - \overset{3}{\bar{\mu}}\,T_\alpha) + S\,(M_\beta - \overset{2}{\bar{\mu}}\,M_\alpha), \tag{4 b}$$

$$\omega^{(1)} = N\,(T_{\alpha\beta} - \overset{3}{\bar{\mu}}\,T_{\beta\alpha}) - S\,(M_{\alpha\beta} - \overset{2}{\bar{\mu}}\,M_{\beta\alpha}), \tag{4 c}$$

$$\omega^{(2)} = N\,(T_{\beta\alpha} - \overset{3}{\bar{\mu}}\,T_{\alpha\beta}) - S\,(M_{\beta\alpha} - \overset{2}{\bar{\mu}}\,M_{\alpha\beta}), \tag{4 d}$$

$$\varkappa^{(1)} = D\,(M_\alpha - \overset{1}{\bar{\mu}}\,M_\beta) + S\,(T_\alpha - \overset{2}{\bar{\mu}}\,T_\beta), \tag{4 e}$$

$$\varkappa^{(2)} = D\,(M_\beta - \overset{1}{\bar{\mu}}\,M_\alpha) + S\,(T_\beta - \overset{2}{\bar{\mu}}\,T_\alpha), \tag{4 f}$$

$$\tau^{(1)} = D\,(M_{\alpha\beta} - \overset{1}{\bar{\mu}}\,M_{\beta\alpha}) - S\,(T_{\alpha\beta} - \overset{2}{\bar{\mu}}\,T_{\beta\alpha}), \tag{4 g}$$

$$\tau^{(2)} = D\,(M_{\beta\alpha} - \overset{1}{\bar{\mu}}\,M_{\alpha\beta}) - S\,(T_{\beta\alpha} - \overset{2}{\bar{\mu}}\,T_{\alpha\beta})\,^{1}). \tag{4 h}$$

---

¹) În aceste relaţii $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$ reprezintă componentele energetice ale deformaţiei legate de componentele deformaţiei prin relaţiile [9]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{(1)},\ \varkappa_2 = -\varkappa^{(2)},\ \varkappa_1 = -\varkappa^{(1)},\ \varepsilon_2 = \varepsilon^{(2)}$$

$$\omega^{(1)} = \frac{\omega}{2},\ \tau^{(2)} = -\tau,\ \tau^{(1)} = \tau,\ \omega^{(2)} = -\frac{\omega}{2}.$$

Expresiile rigidităților și a coeficienților Poisson reduși ce intervin în relațiile (3) și (4) sînt date în relațiile

$$F=\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_j^2},\qquad G=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_j^2};$$

$$K=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)}{1-\mu_j^2}-\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)}{1-\mu_j^2}\right],$$

$$\overset{1}{\mu}=\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_jE_j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_j^2}},\ \overset{2}{\mu}=\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_jE_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)}{1-\mu_j^2}-\sum_{j=n+1}^{m}\frac{\mu_jE_j(\xi_j^2-\xi_j^2)}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)}{1-\mu_j^2}-\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)}{1-\mu_j^2}},\quad(4\,\mathrm{i})$$

$$\overset{3}{\mu}=\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_jE_j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_j^2}}$$

$$N=\frac{FG^2(1-(\overset{3}{\mu})^2)-K^2G\,(1+(\overset{2}{\mu})^2)+2\,K^2G\,\overset{2}{\mu}\overset{3}{\mu})}{\Delta},$$

$$D=\frac{F^2G\,(1-(\overset{1}{\mu})^2)-K^2F\,(1-2\,\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}+(\overset{2}{\mu})^2)}{\Delta},$$

$$S=\frac{KGF\,(1+\overset{1}{\mu}\overset{3}{\mu}-\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}-\overset{2}{\mu}\overset{3}{\mu})+K^3\,((\overset{2}{\mu})^2-1)}{\Delta},$$

$$\overset{1}{\bar{\mu}}=\frac{FG\overset{3}{\mu}(1-(\overset{1}{\mu})^2)+K^2\,(\overset{1}{\mu}-2\overset{2}{\mu}+\overset{1}{\mu}(\overset{2}{\mu})^2)}{FG\,(1-(\overset{1}{\mu})^2)-K^2(1-2\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}+(\overset{2}{\mu})^2)},$$

$$\overset{2}{\bar{\mu}}=\frac{FG(\overset{1}{\mu}-\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}\overset{3}{\mu}+\overset{3}{\mu}-\overset{2}{\mu})+K^2\overset{2}{\mu}\,((\overset{2}{\mu})^2-1)}{FG(1+\overset{1}{\mu}\overset{3}{\mu}-\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}-\overset{2}{\mu}\overset{3}{\mu})+K^2((\overset{2}{\mu})^2-1)},$$

$$\overset{3}{\bar{\mu}}=\frac{GF\overset{1}{\mu}(1-(\overset{3}{\mu})^2)+K^2(\overset{3}{\mu}-2\overset{2}{\mu}+\overset{3}{\mu}(\overset{2}{\mu})^2)}{GF\,(1-(\overset{3}{\mu})^2)-K^2(1-2\overset{2}{\mu}\overset{3}{\mu}+(\overset{2}{\mu})^2)};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}F & F\overset{1}{\mu} & -K & -K\overset{2}{\mu}\\ F\overset{1}{\mu} & F & -K\overset{2}{\mu} & -K\\ -K & -K\overset{2}{\mu} & G & G\overset{3}{\mu}\\ -K\overset{2}{\mu} & -K & G\overset{3}{\mu} & G\end{vmatrix}$$

Din relațiile fizice obținute (3) se vede ușor că eforturile și momentele T_α, T_β, M_α, M_β, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\beta\alpha}$, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$ se obțin din componentele energetice de deformație $\varepsilon^{1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varkappa^{1)}$, $\varkappa^{2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{2)}$, $\tau^{1)}$, $\tau^{2)}$ printr-o transformare liniară cu matrice simetrică. Este evident, și acest lucru se vede imediat din relația (4), că tot o transformare liniară cu matrice simetrică realizează trecerea de la componentele energetice de deformație $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{2)}$, $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{2)}$, $\tau^{1)}$, τ^{2} la eforturile T_α, T_β, M_α, M_β, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\beta\alpha}$, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$. Tot din analiza relațiilor fizice se vede că ele verifică identic ecuația a șasea de echilibru scrisă sub forma $T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} = 0$.

Aceste fapte asigură în teoria structurilor pe care le avem în vedere, aplicabilitatea principiului de reciprocitate a lui Betti [9], [10].

1.2. *Analogia statico-geometrică.* În teoria acestor structuri ecuațiile de echilibru în eforturi și momente și ecuațiile de compatibilitate în deformații își mențin aceeași formă ca și în cazul învelitorilor izotrope. Structura diferențială a celor două sisteme este identică și mai precis un sistem se transformă în celălalt, dacă între mărimile statice și geometrice se stabilesc corespondențe date în tabela I

$$\begin{gathered} T_\alpha \leftrightarrow -\varkappa^{(2)},\ T_\beta \leftrightarrow -\varkappa^{(1)},\ T_{\alpha\beta} \leftrightarrow \tau^{(2)},\ T_{\beta\alpha} \leftrightarrow \tau^{(1)}, \\ M_\beta \leftrightarrow \varepsilon^{(1)},\ M_\alpha \leftrightarrow \varepsilon^{(2)},\ M_{\beta\alpha} \leftrightarrow -\omega^{(1)},\ M_{\alpha\beta} \leftrightarrow -\omega^{(2)}, \\ Q_\beta \leftrightarrow \zeta_1,\ Q_\alpha \leftrightarrow -\zeta_2. \end{gathered} \tag{I}$$

De asemenea, se mențin la fel ca în cazul învelitorilor izotrope relațiile dintre eforturi și funcții de efort și relațiile dintre deformații și deplasări.

Structura acestor relații este de asemenea identică, un grup de relații trecînd în celălalt dacă se stabilesc corespondențele date în tabela II

$$a \leftrightarrow u,\ b \leftrightarrow v,\ c \leftrightarrow w,\ \nu \leftrightarrow \delta, \tag{II}$$

unde Q_α, Q_β reprezintă forțele tăietoare,
ζ_1, ζ_2 — deformațiile transversale,
a, b, c, ν — funcțiile de efort [10],
$\mu, v, -w$ — componentele vectorului deplasare,
δ — componenta pe normala a rotirii elastice.

Relațiile fizice (3) și (4) pot trece unele în altele, plecînd de la corespondențele date în (I), la care trebuie să se mai adauge și corespondențele între constantele mecanice ale structurii. Aceste corespondențe sînt date în tabela III

$$\begin{gathered} D \leftrightarrow -F,\quad K \leftrightarrow -S,\quad N \leftrightarrow -G, \\ \overset{1}{\mu} \leftrightarrow -\overset{1}{\overline{\mu}},\quad \overset{2}{\mu} \leftrightarrow -\overset{2}{\overline{\mu}},\quad \overset{3}{\mu} \leftrightarrow -\overset{3}{\overline{\mu}}. \end{gathered} \tag{III}$$

2. *Structuri de mică curbură*

Vom aplica analogia stratico-geometrică stabilită la studiul stării de tensiune a structurilor de mică curbură în condițiile existenței unei sarcini superficiale de componente X', Y', $-Z'$ și a cîmpului de temperatură neuniform $T(\alpha, \beta, z)$, Vom porni de la ecuațiile de echilibru și de compatibilitate, ecuații care în condițiile existenței unui cîmp de temperatură neuniform își mențin aceeași formă ca și în cazul elastic.

În cadrul ipotezelor proprii învelitorilor de mică curbură1) [9] aceste ecuații se pot scrie sub forma

$$\frac{\partial T'_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + X' = 0, \quad \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial T'_\beta}{\partial\beta} + Y' = 0, \tag{5}$$

$$\frac{T'_\alpha}{R_1} - 2\,\frac{T'_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{T_\beta}{R_2} + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q'_\beta}{\partial\beta} + Z' = 0;$$

$$\frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} - \frac{\partial M'_\beta}{\alpha\beta} + Q'_\beta = 0; \quad \frac{\partial M'_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - Q'_\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \overset{(2)}{\varkappa_\star}}{\partial\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{\tau_\star}}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial \overset{(2)}{\tau_\star}}{\partial\alpha} - \frac{\partial \overset{(1)}{\varkappa_\star}}{\partial\beta} = 0,$$

$$-\frac{\overset{(2)}{\varkappa_\star}}{R_1} - \frac{\overset{(1)}{\varkappa_\star}}{R_2} - 2\,\frac{\overset{(2)}{\tau_\star}}{R_{12}} - \frac{\partial \zeta^\star_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial \zeta^\star_1}{\partial\beta} = 0, \tag{6}$$

$$-\frac{\partial \overset{(2)}{\omega_\star}}{\partial\alpha} - \frac{\partial \overset{(1)}{\varepsilon_\star}}{\partial\beta} + \zeta^\star_1 = 0; \quad \frac{\partial \overset{(2)}{\varepsilon_\star}}{\partial\alpha} + \frac{\partial \overset{(2)}{\omega_\star}}{\partial\beta} + \zeta^\star_2 = 0.$$

Urmărind a aplica analogia stratico-geometrică formulată anterior vom reduce formal ecuațiile de echilibru (5) și de compatibilitate (6) la cazul elastic. În acest scop, reluînd ideea din lucrările [11] și [12] vom porni de la expresiile eforturilor unitare în cazul existenței cîmpului de temperatură neuniform $T(\alpha, \beta, z)$ și admiterii ipotezei Love-Kirchhoff, expresii ce pot fi transcrise sub următoarea formă

$$\sigma'^j_\alpha = \sigma^j_\alpha - \frac{E_j}{1-\mu_j}\,\beta_j\,T,$$

$$\sigma'^j_\beta = \sigma^j_\beta - \frac{E_j}{1-\mu_j}\,\beta_j\,T, \tag{7}$$

$$\tau'^j_{\alpha\beta} = \tau^j_{\alpha\beta},$$

unde σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ reprezintă eforturile unitare ce ar apare în mediul tridimensional al structurii în absența cîmpului de temperatură neuniform, β — coeficientul de dilatare liniară.

---

1) Aceste ipoteze sînt :

a) Se renunță la eforturile tăietoare Q'_α, Q'_β în primele două ecuații de echilibru ;

b) Se renunță la deformațiile transversale $\zeta^\star_1$, $\zeta^\star_2$ în primele două ecuații de compatibilitate ;

c) Metrica suprafeței mediane este identică cu cea a planului. Pentru simplificare vom lua $A = B = 1$.

Prin utilizarea relațiilor (2) și (7) rezultă pentru eforturi și momente relațiile

$$T'_\alpha = T_\alpha - t_\alpha,\quad T'_\beta = T_\beta - t_\beta,\quad T'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta},$$
$$M'_\alpha = M_\alpha + m_\alpha,\quad M'_\beta = M_\beta + m_\beta,\quad M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

unde s-au introdus notațiile

$$t_\alpha = t_\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{1-\mu_j} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \beta_j T dz + \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_j}{1-\mu_j} \int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}} \beta_j T dz,$$
$$m_\alpha = m_\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{1-\mu_j} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \beta_j Tzdz + \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_j}{1-\mu_j} \int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}} \beta_j Tzdz, \tag{9}$$

T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$, reprezentînd eforturile ce ar rezulta în absența cîmpului de temperatură neuniform.

Din aceste relații se obțin expresiile deformațiilor sub următoarea formă :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\star^{(1)} = \varepsilon^{(1)} + N\,(t_\alpha - \overset{3}{\bar{\mu}}\, t_\beta) - S\,(m_\alpha - \overset{2}{\bar{\mu}}\, m_\beta)\,,\\
&\varepsilon_\star^{(2)} = \varepsilon^{(2)} + N\,(t_\beta - \overset{3}{\bar{\mu}}\, t_\alpha) - S\,(m_\beta - \overset{2}{\bar{\mu}}\, m_\beta)\,,\\
&\omega_\star^{(1)} = \omega^{(1)},\ \omega_\star^{(2)} = \omega^{(2)}\,,\\
&\varkappa_\star^{(1)} = \varkappa^{(1)} - D\,(m_\alpha - \overset{1}{\bar{\mu}}\, m_\beta) + S\,(t_\alpha - \overset{2}{\bar{\mu}}\, t_\beta)\,,\\
&\varkappa_\star^{(2)} = \varkappa^{(2)} - D\,(m_\beta - \overset{1}{\bar{\mu}}\, m_\alpha) + S\,(t_\beta - \overset{2}{\bar{\mu}}\, t_\alpha)\,,\\
&\tau_\star^{(1)} = \tau^{(1)},\ \tau_\star^{(2)} = \tau^{(2)},
\end{aligned} \tag{10}$$

$\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \varkappa,^{(1)} \varkappa^{(2)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}$, reprezintă deformațiile energetice corespunzînd cazului cînd cîmpul de temperatură neuniform ar fi nul. Ținînd seama de relațiile (8) și (10) în ecuațiile (5) de echilibru respectiv de compatibilitate (6), se obțin aceste ecuații reduse formal la cazul elastic

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + X = 0,\qquad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} + Y = 0,$$
$$\frac{T_\alpha}{R_1} - 2\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{T_\beta}{R_2} + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q'_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \tag{11}$$
$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + Q'_\beta = \Phi_1,\qquad \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - Q'_\alpha = -\Phi_2,$$

unde

$$
\begin{aligned}
X &= X' - \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\beta_j\,Tdz - \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tdz,\\
Y &= Y' - \frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\beta_j\,Tdz - \frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tdz,\\
Z &= Z' - \frac{1}{R_1}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\beta_j\,Tdz + \sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tdz\right] -\\
&\quad - \frac{1}{R_2}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\beta_j\,Tdz + \sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tdz\right], \qquad (12)\\
\Phi_1 &= \frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{j-1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{j-1}^{\xi_j}\beta_j\,Tzdz + \frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tzdz,\\
\Phi_2 &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}\beta_j\,Tzdz + \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{E_j}{1-\mu_j}\int_{-\xi_j}^{-\xi_{j-1}}\beta_j\,Tzdz,
\end{aligned}
$$

şi respectiv.

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\varkappa^{(2)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tau^{(1)}}{\partial\beta} = \Gamma_1, \qquad \frac{\partial\tau^{(2)}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varkappa^{(1)}}{\partial\beta} = \Gamma_2,\\
-\frac{\varkappa^{(2)}}{R_1} - \frac{\varkappa^{(1)}}{R_2} - 2\frac{\tau^{(2)}}{R_{12}} - \frac{\partial\zeta_2^{*}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\zeta_1^{*}}{\partial\beta} = \Gamma_3, \qquad (13)\\
-\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varepsilon^{(1)}}{\partial\beta} + \zeta_1^{*} = \Lambda_1, \qquad \frac{\partial\varepsilon^{(2)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\beta} + \zeta_2^{*} = -\Lambda_2,
\end{gathered}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= D\frac{\partial}{\partial\alpha}(m_\beta - \overset{1}{\mu}\,m_\alpha) - S\frac{\partial}{\partial\alpha}(t_\beta - \overset{2}{\mu}\,t_\alpha),\\
\Gamma_2 &= -D\frac{\partial}{\partial\beta}(m_\alpha - \overset{1}{\mu}\,m_\beta) + S\frac{\partial}{\partial\beta}(t_\alpha - \overset{2}{\mu}\,t_\beta),\\
\Gamma_3 &= -\frac{D}{R_1}(m_\beta - \overset{1}{\mu}\,m_\alpha) + \frac{S}{R_1}(t_\beta - \overset{2}{\mu}\,t_\alpha) - \frac{D}{R_2}(m_\alpha - \overset{1}{\mu}\,m_\beta) +\\
&\quad + \frac{S}{R_2}(t_\alpha - \overset{2}{\mu}\,t_\beta), \qquad (14)\\
\Lambda_1 &= N\frac{\partial}{\partial\beta}(t_\alpha - \overset{3}{\mu}\,t_\beta) - S\frac{\partial}{\partial\beta}(m_\alpha - \overset{2}{\mu}\,m_\beta),\\
\Lambda_2 &= -N\frac{\partial}{\partial\alpha}(t_\beta - \overset{3}{\mu}\,t_\alpha) + S\frac{\partial}{\partial\alpha}(m_\beta - \overset{2}{\mu}\,m_\alpha).
\end{aligned}
$$

Dat fiind că ecuaţiile omogene de compatibilitate sub forma (13) pe de-o parte şi ecuaţiile omogene de echilibru (11) pe de altă parte au aceeaşi structură (analogia statico-geometrică), ele pot fi reunite într-un singur sistem complex, fiecare ecuaţie a sistemului fiind un semiinvariant al analogiei statico-geometrice[1]). Pentru aceasta vom înmulţi ecuaţiile de compatibilitate cu factorul $i\zeta$ şi le vom aduna cu ecuaţiile duale de echilibru[2]). În felul acesta se obţin ecuaţiile teoriei structurilor de mică curbură sub formă complexă.

$$\frac{\partial \widetilde{T}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \widetilde{X} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Y} = 0,$$

$$\frac{\widetilde{T}_\alpha}{R_1} - 2\frac{\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{\widetilde{T}_\beta}{R_2} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Z} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Q}_\beta = \widetilde{\Phi}_1, \quad \frac{\partial \widetilde{M}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \widetilde{Q}_\alpha = -\widetilde{\Phi}_2,$$

unde

$$\widetilde{T}_\alpha = T_\alpha - i\zeta\varkappa^{(2)}, \ \widetilde{T}_\beta = T_\beta - i\zeta\varkappa^{(1)}, \ \widetilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + i\zeta\tau^{(2)}, \ \widetilde{T}_{\beta\alpha} = T_{\beta\alpha} + i\zeta\tau^{(1)} \tag{16 a}$$

$$\widetilde{M}_\alpha = M_\alpha + i\zeta\varepsilon^{(2)}, \ \widetilde{M}_\beta = M_\beta + i\zeta\varepsilon^{(1)}, \ \widetilde{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - i\zeta\omega^{(2)}, \ \widetilde{M}_{\beta\alpha} = M_{\beta\alpha} - i\zeta\omega^{(1)} \tag{16 b}$$

$$\widetilde{Q}_\alpha = Q'_\alpha - i\zeta\zeta^*_2, \quad \widetilde{Q}_\beta = Q'_\beta + i\zeta\zeta^*_1 \tag{16 c}$$

sînt eforturi complexe
iar

$$\widetilde{X} = X + i\zeta\Gamma_1, \quad \widetilde{Y} = Y + i\zeta\Gamma_2, \quad \widetilde{Z} = Z + i\zeta\Gamma_3,$$

$$\widetilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + i\zeta\Lambda_1, \quad \widetilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + i\zeta\Lambda_2.$$

Rămîne de determinat factorul ζ. Expresia acestuia se deduce din condiţia ca eforturile complexe (16) să fie omogene dimensional şi pe de altă parte ca aceste eforturi transpuse prin analogia statico-geometrică să se reproducă înmulţite cu o constantă (condiţia de semiinvarianţă).

Expresia lui ζ este dată de

$$\zeta = \left(\frac{F}{D}\right)^{1/2}.$$

---

[1]) Noţiunea de semiinvariant a fost introdusă în lucrarea [13].

[2]) ζ este un factor deocamdată nedeterminat.

Se observă pe de altă parte că eforturile complexe (16 b) nu sînt independente, fiind legate de eforturile (16 a) prin relațiile[1])

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M}_\alpha &= i(\lambda_1 \widetilde{T}_\alpha + \lambda_2 \widetilde{T}_\beta + \lambda_3 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\alpha + \lambda_4 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\beta) + \lambda_5 \widetilde{T}_\alpha + \lambda_6 \widetilde{T}_\beta + \lambda_7 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\alpha + \lambda_8 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\beta\,, \\
& \hspace{20em} (17) \\
\widetilde{M}_\beta &= i(\rho_1 \widetilde{T}_\alpha + \rho_2 \widetilde{T}_\beta + \rho_3 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\alpha + \rho_4 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\beta) + \rho_5 \widetilde{T}_\alpha + \rho_6 \widetilde{T}_\beta + \rho_7 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\alpha + \rho_8 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_\beta) \\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= i(\gamma_1 \widetilde{T}_{\alpha\beta} + \gamma_2 \widetilde{\overline{\overline{T}}}_{\alpha\beta}) + \gamma_3 \widetilde{T}_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned}
$$

unde expresiile constantelor λ_i, ρ_i $(i = 1, 2 \ldots 8)$ și ale lui γ_k $(k = 1, 2, 3)$ sînt date în tabela 1.

Tabela 1

$$\lambda_1 = \rho_2 = \frac{1}{2(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}\left[\frac{\overset{1}{\bar\mu}}{\zeta D} - \zeta \overset{3}{\bar\mu} N(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2) + \frac{\zeta S^2 \overset{2}{\bar\mu}(1-\overset{2}{\bar\mu}\overset{1}{\bar\mu})}{D} + \frac{\zeta S^2(\overset{2}{\bar\mu}-\overset{1}{\bar\mu})}{D}\right],$$

$$\lambda_2 = \rho_1 = \frac{1}{2(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}\left[\frac{1}{\zeta D} + \zeta N(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2) - \frac{\zeta S^2(1-\overset{1}{\bar\mu}\overset{2}{\bar\mu})}{D} - \frac{\zeta S^2 \overset{2}{\bar\mu}(\overset{2}{\bar\mu}-\overset{1}{\bar\mu})}{D}\right],$$

$$\lambda_3 = \rho_4 = \frac{1}{2(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}\left[-\frac{\overset{1}{\bar\mu}}{D\zeta} - \zeta \overset{3}{\bar\mu} N(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2) + \frac{\zeta S^2 \overset{2}{\bar\mu}(1-\overset{1}{\bar\mu}\overset{2}{\bar\mu})}{D} + \frac{\zeta S^2(\overset{2}{\bar\mu}-\overset{1}{\bar\mu})}{D}\right],$$

$$\lambda_4 = \rho_3 = \frac{1}{2(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}\left[-\frac{1}{\zeta D} + \zeta N(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2) - \frac{\zeta S^2(1-\overset{1}{\bar\mu}\overset{2}{\bar\mu})}{D} - \frac{\zeta S^2 \overset{2}{\bar\mu}(\overset{2}{\bar\mu}-\overset{1}{\bar\mu})}{D}\right],$$

$$\lambda_5 = \rho_6 = \frac{S}{D(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}(\overset{1}{\bar\mu}\overset{2}{\bar\mu}-1)\,,\quad \lambda_6 = \rho_5 = \frac{S}{D(1-(\overset{1}{\bar\mu})^2)}(\overset{2}{\bar\mu}-\overset{1}{\bar\mu}),$$

$$\lambda_7 = \lambda_8 = \rho_7 = \rho_8 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\zeta D(1+\overset{1}{\bar\mu})} + \zeta N(1+\overset{3}{\bar\mu}) - \frac{\zeta S^2(1+\overset{2}{\bar\mu})^2}{D(1+\overset{1}{\bar\mu})}\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\zeta D(1+\overset{1}{\bar\mu})} + \zeta N(1+\overset{3}{\bar\mu}) - \frac{\zeta S^2(1+\overset{2}{\bar\mu})^2}{D(1+\overset{1}{\bar\mu})^2}\right],$$

$$\gamma_3 = \frac{S(1+\overset{2}{\bar\mu})}{D(1+\overset{1}{\bar\mu})}\,,$$

---

[1]) $\widetilde{\overline{\overline{T}}}_\alpha$ este conjugatul lui $\widetilde{T}_\alpha$ etc.

2.1. *Funcția de efort. Expresia eforturilor.* Se observă că primele două ecuații din sistemul de ecuații complexe (15) sînt identic satisfăcute prin introducerea funcției complexe $C = c + i\zeta w$

$$\widetilde{T}_\alpha = \frac{\partial^2 C}{\partial \beta^2} - \int \widetilde{X}\, d\alpha, \qquad \widetilde{T}_\beta = \frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2} - \int \widetilde{Y} d\beta, \tag{18}$$

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,.$$

Din ultimele două ecuații ale sistemului (15) ținîndu-se seama de relațiile (17) și (18) rezultă $\widetilde{Q}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\beta$, exprimate prin funcția C

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_\alpha = {} & (\gamma_3+\lambda_5)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \lambda_6\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^3} + \lambda_7\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \lambda_8\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\alpha^3} + \widetilde{\Phi}_2 - \\ & - \lambda_5\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \widetilde{X} d\alpha - \lambda_6\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \widetilde{Y} d\beta - \lambda_7\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \tilde{\bar{\bar{X}}} d\alpha - \lambda_8\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \tilde{\bar{\bar{Y}}} d\beta + \\ & + i\Big[(\gamma_1+\lambda_1)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \lambda_2\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^3} + (\lambda_3+\gamma_2)\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \lambda_4\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\alpha^3} - \\ & - \lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \widetilde{X} d\alpha - \lambda_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \widetilde{Y} d\beta - \lambda_3\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \tilde{\bar{\bar{X}}} d\alpha - \\ & - \lambda_4\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \tilde{\bar{\bar{Y}}} d\beta\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_\beta = {} & \rho_5\frac{\partial^3 C}{\partial\beta^3} + (\rho_6+\gamma_3)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} + \rho_7\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\beta^3} + \rho_8\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} - \rho_5\frac{\partial}{\partial\beta}\int \widetilde{X} d\alpha - \\ & - \rho_7\frac{\partial}{\partial\beta}\int \tilde{\tilde{\bar{X}}} d\alpha - \rho_6\frac{\partial}{\partial\beta}\int \widetilde{Y} d\beta - \rho_8\frac{\partial}{\partial\beta}\int \tilde{\bar{\bar{Y}}} d\beta + \widetilde{\Phi}_1 + i\Big[\rho_1\frac{\partial^3 C}{\partial\beta^3} + \\ & + (\rho_2+\gamma_1)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} + \rho_3\frac{\partial^3 \bar{C}}{\partial\beta^3} + (\gamma_2+\rho_4)\frac{\partial^3 \widetilde{C}}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} - \rho_1\frac{\partial}{\partial\beta}\int \widetilde{X} d\alpha - \\ & - \rho_2\frac{\partial}{\partial\beta}\int \widetilde{Y} d\beta - \rho_3\frac{\partial}{\partial\beta}\int \tilde{\bar{\bar{X}}} d\alpha - \rho_4\frac{\partial}{\partial\beta}\int \tilde{\bar{\bar{Y}}} d\beta\Big].\end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația a treia a sistemului de ecuații (15) eforturile complexe exprimate prin relațiile (18) și (19), se obține ecuația la care trebuie să satisfacă funcția complexă C

$$\begin{aligned}
&(2\gamma_3+\lambda_5+\rho_6)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\lambda_6\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4}+\rho_5\frac{\partial^4 C}{\partial\beta^4}+\lambda_8\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\alpha^4}+\rho_7\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\beta^4}+\\
&+(\lambda_9+\rho_8)\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2}+\frac{2}{R_{12}}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}+\\
&+i\Bigg[(\lambda_1+2\gamma_1+\rho_2)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\lambda_2\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4}+\rho_1\frac{\partial^4 C}{\partial\beta^4}+(2\gamma_2+\lambda_3+\rho_4)\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\\
&+\lambda_4\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\alpha^4}+\rho_3\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\beta^4}\Bigg]=-\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}_1}{\partial\beta}-\widetilde{Z}+\lambda_5\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{X}d\alpha+\\
&+\lambda_6\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{Y}d\beta+\lambda_7\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{X}d\alpha+\lambda_8\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\tilde{\tilde{Y}}d\beta+\frac{1}{R_1}\int\widetilde{X}d\alpha+\qquad(20)\\
&+\frac{1}{R_2}\int\widetilde{Y}d\beta+\rho_5\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{X}d\alpha+\rho_7\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\tilde{\tilde{X}}d\alpha+\rho_6\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{Y}d\beta+\\
&+\rho_8\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\tilde{\tilde{Y}}d\beta+i\Bigg[\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{X}d\alpha+\lambda_3\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\tilde{\tilde{X}}d\alpha+\\
&+\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{Y}d\beta+\lambda_4\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\tilde{\tilde{Y}}d\beta+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{X}d\alpha+\rho_2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{Y}d\beta+\\
&+\rho_3\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\tilde{\tilde{X}}d\alpha+\rho_4\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\tilde{\tilde{Y}}d\beta\Bigg].
\end{aligned}$$

Determinarea funcției potențiale C (α, β) din ecuația de mai sus ne permite calculul eforturilor și momentelor. Din relațiile (15 a), (4) și (18) se obțin expresiile lui T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ în funcție de

$c = \mathcal{R}e\, C$ și $w = \frac{1}{\zeta}\,\mathcal{I}m\, C.$

$$\begin{aligned}
&T_\alpha=\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}-\int Xd\alpha,\quad T_\beta=\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\int Yd\beta,\qquad T_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta},\\
&M_\alpha=-\frac{1}{D(1-(\overset{1}{\mu})^2)}\Bigg[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\overset{1}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+S\left(1-\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+\\
&+S(\overset{1}{\mu}-\overset{2}{\mu})\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\int\Gamma_2 d\beta-\overset{1}{\mu}\int\Gamma_1 d\beta+S\left(\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}-1\right)\int Xd\alpha+\qquad(21)\\
&+S(\overset{2}{\mu}-\overset{1}{\mu})\int Yd\beta\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$M_\beta = -\frac{1}{D\,(1-(\overset{1}{\bar{\mu}})^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \overset{1}{\bar{\mu}}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + S\,(1-\overset{1}{\bar{\mu}}\,\overset{2}{\bar{\mu}})\,\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} + \right.$$

$$+ S\,(\overset{1}{\bar{\mu}} - \overset{2}{\bar{\mu}})\,\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} - \int \Gamma_1 d\alpha - \overset{1}{\bar{\mu}}\int \Gamma_2 d\beta + S\,(\overset{1}{\bar{\mu}}\,\overset{2}{\bar{\mu}} - 1)\int Y d\beta + \qquad (22)$$

$$\left. + S\,(\overset{2}{\bar{\mu}} - \overset{1}{\bar{\mu}})\int X d\alpha\right],$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{D\,(1+\overset{1}{\bar{\mu}})}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - S\,(1+\overset{2}{\bar{\mu}})\,\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right].$$

Cunoașterea acestor eforturi și momente ne permite în baza relațiilor (4), determinarea deformațiilor $\varepsilon^{1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, ω, $\varkappa^{(1(}$, $\varkappa^{(2)}$, τ și în baza relațiilor (1) și (7) a eforturilor unitare din mediul tridimensional al structurii.

Această metodă de determinare a stării de tensiune a structurilor nesimetrice de mică curbură prin reducerea problemei la determinarea funcției complexe C a fost utilizată de noi în lucrările [1], [2], [3] prin extinderea metodei dată în lucrarea [14].

În continuare, rezultatele obținute anterior vor fi aplicate la calculul stării de tensiune a panourilor cilindrice de mică curbură rezemate radial

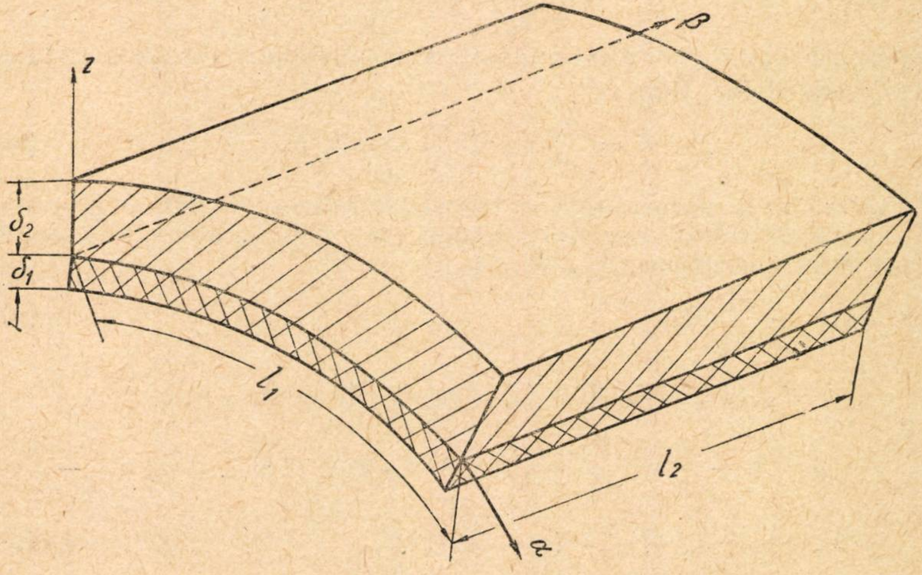


Fig. 1

pe contur, în condițiile existenței numai a sarcinii normale $Z = Z\ (\alpha, \beta)$ $[X\ (\alpha,\ \beta) = Y\ (\alpha_1\ \beta) = T\ (\alpha,\ \beta, z) = 0]$.

Ținînd seama de faptul că raza secțiunii transversale este $R_1 = R$ $(R_2 = R_{12} = \infty)$ ecuația rezolventă (21) capătă forma

$$\begin{gathered}(2\gamma_3 + \lambda_5 + \rho_6)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda_6\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4} + \rho_5\frac{\partial^4 C}{\partial\beta^4} + \lambda_8\frac{\partial^4 \bar{C}}{\partial\alpha^4} + \rho_7\frac{\partial^4 \bar{C}}{\partial\beta^4} + \\ + (\lambda_7 + \rho_8)\frac{\partial^4 \bar{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} + i\left[(\lambda_1 + 2\gamma_1 + \rho_2)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \right. \\ \left. + \lambda_2\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4} + \rho_1\frac{\partial^4 C}{\partial\beta^4} + (2\gamma_2 + \lambda_3 + \rho_4)\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda_4\frac{\partial^4 \bar{C}}{\partial\alpha^4} + \rho_3\frac{\partial^4 \bar{C}}{\partial\beta^4}\right] = -Z.\end{gathered} \tag{23}$$

Rezemarea radială presupune darea pe contur a următoarelor condiții la limită :

$$\begin{aligned} v = w = M_\alpha = T_\alpha = 0, &\quad \text{pentru}\ \ \alpha = 0,\ \alpha = l_1, \\ u = w = M_\beta = T_\beta = 0, &\quad \text{,,}\qquad \beta = 0,\ \beta = l_2, \end{aligned} \tag{24}$$

condiții ce le putem interpreta ca rezultînd din rezemarea marginilor pe diafragme absolut rigide în planul lor, ele fiind flexibile transversal.

Toate aceste condiții la limită vor fi satisfăcute dacă se va alege funcția complexă C sub forma [15],

$$C = c + i\zeta w = \sum_{i,k=1}^{\infty} (A_{ik} + i\,\zeta\, B_{ik}) \sin\theta_i\,\alpha \sin\mu_k\,\beta, \tag{25}$$

unde

$$\theta_i = \frac{\pi i}{l_1}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l_2}.$$

Coeficienții A_{ik}, B_{ik} vor fi determinați, descompunînd și funcția $Z = Z(\alpha, \beta)$ într-o serie dublă Fourier [1])

$$Z = \sum_{i,k=1}^{\infty} C_{ik} \sin\theta_i\,\alpha \sin\mu_k\,\beta. \tag{26}$$

Ținînd seama în partea reală și imaginară a ecuației (23) de expresiile lui c, w, Z dezvoltate conform relațiilor (25), (26), se obțin următoarele relații între coeficienții A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} :

$$A_{ik} = -\frac{F_{ik}}{G_{ik}} B_{ik} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} C_{ik} = B_{ik}\left\{\left[(\lambda_6 + \lambda_8)\,\theta_i^4 + (\rho_5 + \rho_7)\,\mu_k^4 + (2\,\gamma_3 + \lambda_5 + \lambda_7 + \rho_6 + \right.\right. \\ \left. + \rho_8)\,\mu_k^2\,\theta_i^2 - \frac{1}{R}\,\mu_k^2\right]\frac{F_{ik}}{G_{ik}} + \zeta\,[(\lambda_2 - \lambda_4)\,\theta_i^4 + (2\,\gamma_1 - 2\,\gamma_2 + \lambda_1 - \\ \left. - \lambda_3 + \rho_2 - \rho_4)\,\theta_i^2\,\mu_k^2 + (\rho_1 - \rho_3)\,\mu_k^4]\right\}, \end{gathered} \tag{28}$$

---

[1]) Dezvoltarea lui Z în serie Fourier este posibilă în cazul cînd aceasta satisface condițiile Dirichlet. Practic orice sarcină continuă sau concentrată poate fi dezvoltată.

unde

$$\begin{aligned} F_{ik} = \zeta \Big[& (2\,\gamma_3 + \lambda_5 - \lambda_7 + \rho_6 - \rho_8)\,\theta_i^2\,\mu_k^2 + (\lambda_6 - \lambda_8)\,\theta_i^4 + \\ & + (\rho_5 - \rho_7)\,\mu_k^4 - \frac{1}{R}\,\mu_k^2 \Big] \end{aligned} \tag{29}$$

$$G_{ik} = (2\,\gamma_1 + 2\,\gamma_2 + \lambda_1 + \lambda_3 + \rho_2 + \rho_4)\,\theta_i^2\mu_k^2 + (\lambda_2 + \lambda_4)\theta_i^4 + (\rho_1 + \rho_3)\,\mu_k^4$$

De aici rezultă imediat expresiile funcției potențiale c și a deplasării w

$$c = -\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{C_{ik}\sin\theta_i\,\alpha\sin\mu_k\,\beta}{\begin{aligned} & (\lambda_6 + \lambda_8)\,\theta_i^4 + (\rho_5 + \rho_7)\,\mu_k^4 + (2\,\gamma_3 + \lambda_5 + \lambda_7 + \\ & + \rho_6 + \rho_8)\,\mu_k^2\,\theta_i^2 - \frac{1}{R}\,\mu_k^2 + \zeta\frac{G_{ik}}{F_{ik}}[(2\,\gamma_1 - 2\,\gamma_2 + \lambda_1 - \\ & - \lambda_3 + \rho_2 - \rho_4)\,\theta_i^2\,\mu_k^2 + (\rho_1 - \rho_3)\,\mu_k^4 + (\lambda_2 - \lambda_4)\,\theta_i^4] \end{aligned}} \tag{30}$$

$$w = \sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{C_{ik}\sin\theta_i\,\alpha\sin\mu_k\,\beta}{\begin{aligned} & [(\lambda_6 + \lambda_8)\,\theta_i^4 + (\rho_5 + \rho_7)\,\mu_k^4 + (2\,\gamma_3 + \lambda_5 + \lambda_7 + \\ & + \rho_6 + \rho_8)\,\mu_k^2\,\theta_i^2 - \frac{1}{R}\,\mu_k^2\Big]\frac{F_{ik}}{G_{ik}} + \zeta\,[(2\,\gamma_1 - 2\,\gamma_2 + \lambda_1 - \\ & - \lambda_3 + \rho_2 - \rho_4)\,\theta_i^2\,\mu_k^2 + (\rho_1 - \rho_3)\,\mu_k^4 + (\lambda_2 - \lambda_4)\,\theta_i^4] \end{aligned}} \,. \tag{31}$$

În aceste relații C_{ik} — coeficienții Fourier ai dezvoltării (26) sînt dați de

$$C_{ik} = \frac{4}{l_1\,l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} Z(\alpha,\,\beta)\sin\theta_i\,\alpha\sin\mu_k\,\beta d\alpha d\beta \tag{32}$$

În cazul existenței unei sarcini q uniform distribuite pe suprafață, coeficienții C_{ik} sînt dați de

$$\begin{aligned} & C_{ik} = \frac{16\,q}{\pi^2 ik}, && \text{pentru } i,\ k = 1,\ 3,\ 5\ldots, \\ & C_{ik} = 0, && \text{pentru ceilalți } i,\ k, \end{aligned} \tag{33}$$

iar în cazul unei sarcini concentrate P în punctul arbitrar (α_0, β_0) de expresia

$$C_{ik} = \frac{4\,P}{l_1\,l_2}\sin\theta_i\,\alpha_0\sin\mu_k\,\beta_0. \tag{34}$$

În felul acesta funcțiile c și w fiind determinate, se pot obține conform celor arătate anterior, eforturile unitare din mediul tridimensional al structurii.

Vom considera în particular un panou cilindric de mică curbură în aceleași condiții la limită construit din două straturi, stratul superior avînd 4 mm grosime, iar cel inferior 2 mm grosime, încărcat cu o sarcină uniform distribuită q (fig. 1).

Modulul de elasticitate al stratului superior este $E_1 = E$ și a stratului inferior $E_2 = mE$, coeficienții Poisson $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Alegînd ca suprafață inițială suprafața de sudură a celor două straturi rezultă

$$F = 2E(m+2),\quad K = 2E(4-m),\quad G = \frac{8}{3}E(m+8),$$

$$N = \frac{2(m+8)}{E(m^2+64m+16)},\quad S = \frac{3(m-4)}{E(m^2+64m+16)},\quad D = \frac{3(m+2)}{2E(m^2+64m+16)},$$

$$\rho_1 = \lambda_2 = \gamma_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\zeta D} + \zeta N - \frac{\zeta S^2}{D}\right],\quad \rho_3 = \lambda_4 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\zeta D} + \zeta N - \frac{\zeta S^2}{D}\right],$$

$$\rho_6 = \lambda_5 = -\gamma_3 = -\frac{S}{D}, \tag{35}$$

ceilalți parametri ai structurii fiind nuli.

Din relațiile (30) (31) rezultă

$$w = \frac{8q}{\pi^2 E(m+2)} \sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{(\theta_i^2+\mu_k^2)\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{\mu_k^4}{R^2} + \frac{m^2+64m+16}{3(m+2)^2}(\theta_i^2+\mu_k^2)^4\right]},$$

$$c = -\frac{16q}{\pi^2} \sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{1}{R}\mu_k^2 + \frac{m^2+64m+16}{3(m+2)^2}\frac{R(\theta_i^2+\mu_k^2)^4}{\mu_k^2}\right]}, \tag{36}$$

iar în baza relațiilor (21), (22), (4), (1) expresiile eforturilor unitare

$$\sigma_\alpha^j = \frac{8q}{\pi^2}\frac{E_j}{E(m+2)}\left[\sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{\mu_k^2\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{1}{R}\mu_k^2 + \frac{(\theta_i^2+\mu_k^2)^4}{\mu_k^2}\frac{R(m^2+64m+16)}{3(m+2)^2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4-m}{m+2} - z\right)\sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{\theta_i^2(\theta_i^2+\mu_k^2)^2\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{\mu_k^4}{R^2} + \frac{(\theta_i^2+\mu_k^2)^4}{3}\frac{m^2+64m+16}{(m+2)^2}\right]}\right], \tag{37 a}$$

$$\sigma_\beta^j = \frac{8q}{\pi^2}\frac{E_j}{E(m+2)}\left[\sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{\theta_i^2\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{1}{R}\mu_k^2 + \frac{(\theta_i^2+\mu_k^2)^4}{3\mu_k^2}\frac{R(m^2+16m+16)}{(m+2)^2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4-m}{m+2} - z\right)\sum_{i,k=1,3,5\ldots} \frac{\mu_k^2(\theta_i^2+\mu_k^2)\sin\theta_i\alpha\sin\mu_k\beta}{ik\left[-\frac{\mu_k^4}{R^2} + \frac{(\theta_i^2+\mu_{k_2})^4}{3}\frac{m^2+64m+16}{(m+2)^2}\right]}\right], \tag{37 b}$$

După cum se vede problema determinării eforturilor unitare și a deplasării w se reduce la calcularea unor serii duble care sînt destul de rapid convergente.

Făcînd în expresiile (36) și (37) $R \to \infty$ adică considerînd cazul unei structuri plane, rezultatele obținute coincid cu cele date S.A. Ambarțumian în lucrarea [6].

Considerînd cazul cînd $l_1 = l_2 = l$ valorile maxime ale tensiunilor normale și a deplasării w se obțin pentru $\alpha = \beta = \frac{l}{2}$.

Expresia lor este dată prin relațiile

$$w = \frac{8q}{\pi^2 E(m+2)} \sum_{i,k=1,3,5\dots} \frac{(i^2+k^2)^2 (-1)^{\frac{i+k}{2}-1}}{ik\left[-\frac{k^4}{R^2} + \frac{\pi^4}{l^4}(i^2+k^2)^4 \frac{m^2+64\,m+16}{3(m+2)^2]}\right]},$$

$$\sigma_\alpha^j = \frac{8E_j q}{E\pi^2(m+2)}\left[\sum_{i,k=1,3,5\dots} \frac{k(-1)^{\frac{i+k}{2}-1}}{i\left[-\frac{k^2}{R} + \frac{\pi^4}{l^4}\frac{(i^2+k^2)^4}{k^2}\frac{R(m^2+64\,m+16)}{3(m+2)^2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4-m}{m+2} - z\right)\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i,k=1,3,5\dots} \frac{i(i^2+k^2)^2(-1)^{\frac{i+k}{2}-1}}{k\left[-\frac{k^4}{R^2} + \frac{\pi^4(i^2+k^2)^4}{l^4}\frac{(m^2+64\,m+16)}{3(m+2)^2}\right]}\right], \tag{38}$$

$$\sigma_\beta^j = \frac{8E_j q}{\pi^2 E(m+2)}\left[\sum_{i,k=1,3,5\dots} \frac{i(-1)^{\frac{i+k}{2}-1}}{k\left[-\frac{k^2}{R} + \frac{\pi^4}{l^4}\frac{(i^2+k^2)^4}{k^2}\frac{R(m^2+64\,m+16)}{3(m+2)^2}\right]} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4-m}{m+2} - z\right)\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i,k=1,3,5\dots} \frac{k(i^2+k^2)^2(-1)^{\frac{i+k}{1}-1}}{i\left[-\frac{k^4}{R^2} + \frac{\pi^4}{3l^4}(i^2+k^2)^4\frac{m^2+64\,m+16}{(m+2)^2}\right]}\right].$$

Primită la redacție la 4 ianuarie 1960.

К ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ УПРУГИХ СЛОЕВ

РЕЗЮМЕ

Основываясь на результатах, полученных автором в ряде работ, в настоящей статье рассматриваются тонкие упругие слоистые оболочки, составленные путем произвольного наложения m упругих изотропных слоев.

После вывода физических соотношений и механических параметров слоистых оболочек автор устанавливает статико-геометрическую аналогию, оказывающуюся действенным средством исследования в теории оболочек.

Затем применяется статико-геометрическая аналогия для определения напряженного состояния пологих слоистых оболочек при условии наличия произвольного неравномерного температурного поля и произвольной поверхностной нагрузки.

Теоретические результаты иллюстрированы численными примерами.

SUR LA THÉORIE DES STRUCTURES MINCES, CONSTRUITES PAR DES COUCHES ÉLASTIQUES

RÉSUMÉ

Basé sur des résultats que l'auteur avait obtenus auparavant, on étudie les structures élastiques minces, formées par la superposition arbitraire de m couches élastiques, isotropes.

Après avoir déduit les relations physiques et les paramètres mécaniques de la structure, on établit l'analogie statique-géométrique, qui constitue un fort instrument de recherche dans la théorie des structures.

On emploie, ensuite, cette analogie statique-géométrique pour déterminer l'état de contrainte des structures de faible courbure, soumises à un champ de température non uniforme, arbitraire, et à une charge superficielle arbitraire.

Les résultats théoriques sont illustrés par un exemple.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. ЛИБРЕСКУ, *Задачи теории тонких упругих оболочек, составленных из упругих изотропных слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности.* Revue de mécanique appliquée, **4**, *2* (1959).
2. L. LIBRESCU, *În legătură cu teoria structurilor elastice subţiri construite din straturi ortotrope simetric dispuse faţă de suprafaţa mediană.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *3* (1959).
3. L. LIBRESCU, *Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice, subţiri, neomogene.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1* (1959).
4. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев.* Изв. Акад. Наук Армянской ССР, **IV**, 5 (1951).
5. Э. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек.* Инж. сборник, *16* (1953).
6. С. А. АМБАРЦУМЯН, *К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек.* Изв. Акад. Наук Армянской ССР, **VI**, *3* (1953).
7. Э. И. ГРИГОЛЮК, *О выборе исходной поверхности в теории неоднородных оболочек.* Известия Акад. Наук ССР, ОТН, *8* (1956).

8. Э. Л. АКСЕЛЬРАД, *К теории неоднородных изотропных оболочек.* Известия Акад. Наук СССР, ОТН, *6* (1958).
9. А. Л. ГОЛДЕНВЕЙЗЕР, *О применимости общих теорем упругости к тонким оболочкам.* Приклад. Матем. и Мех., **VIII**, *1* (1944).
10. — *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.
11. L. LIBRESCU, *Asupra problemei termo-elastice a învelitorilor subţiri de formă arbitrară,* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *8* (1958).
12. — *Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termo-elastică a învelitorilor subţiri.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).
13. V. VISARION, C. STĂNESCU, *Etudes des semi-invariants de l'analogie statico-géométrique pour les enveloppes élastiques minces à matériaux isotropes et orthotropes.* Acta Technicae Hungaricae, **XXVIII**, *1—2* (1960).
14. — *Calculul învelitorilor elastice subţiri cu ortotropie de material.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *12* (1957).
15. О. Д. ОНИАШВИЛИ, *Некоторые динамические задачи теории оболочек.* Издательство Акад. Наук СССР, Москва, 1957.

S T U D I I

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

ECUAȚIILE BARELOR SUBȚIRI ELASTICE. II

DE

HOREA SANDI *)

Articolul reprezintă o continuare a părții I a lucrării, publicată sub același titlu în numărul *2*, 1960, al revistei.

Notațiile utilizate sînt aceleași, iar numerotarea formulelor este făcută în continuare.

IV. DINAMICĂ LINIARĂ

11. Formula (5.1) este echivalentă cu

$$\begin{aligned}\overline{w} &= \Delta\overline{\rho} + x^i \Delta\overline{m}_i = \overline{u} + \overline{\vartheta}\times(\overline{r}-\overline{\rho}) = \overline{u} + \overline{\vartheta}\times\overline{m}_i x^i = \\ &= (u - \varphi_i x^i)\,\overline{\tau} + (v_i - \psi c_{ij} x^j)\,\overline{m}^i.\end{aligned} \tag{11.1}$$

În calculul mărimilor cinematice trebuie observat faptul că, deplasările fiind mici, derivata substanțială diferă prin mărimi neglijabile de derivata locală în raport cu timpul, astfel că nu se va face nici o distincție între ele.

Vitezele și, respectiv, accelerațiile, vor avea expresiile deduse din (11.1)

$$\begin{aligned}\dot{\overline{w}} &= \dot{\overline{u}} + \dot{\overline{\vartheta}}\times(\overline{r}-\overline{\rho}) = \dot{\overline{u}} + \dot{\overline{\vartheta}}\times\overline{m}_i x^i = (\dot{u} - \dot{\varphi}_i x^i)\,\overline{\tau} + (\dot{v}_i - \dot{\psi}\, c_{ij} x^j)\,\overline{m}^i, \\ \ddot{\overline{w}} &= \ddot{\overline{u}} + \ddot{\overline{\vartheta}}\times(\overline{r}-\overline{\rho}) = \ddot{\overline{u}} + \ddot{\overline{\vartheta}}\times\overline{m}_i x^i = (\ddot{u} - \ddot{\varphi}_i x^i)\,\overline{\tau} + (\ddot{v}_i - \ddot{\psi}\, c_{ij} x^j)\,\overline{m}^i.\end{aligned} \tag{11.2}$$

Torsorul cinetic în raport cu originea, $(\overline{H}, \overline{K}_0)$ și energia cinetică E, pentru o bară avînd extremitățile axei în punctele P_1 și P_2, vor fi respectiv

$$\begin{aligned}\overline{H}_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\overline{H}}{\partial z}\,dz = \int_\Omega \dot{\overline{w}}\,dm = \int_{P_1}^{P_2}\left[\int_{\mathcal{A}}(1 - b_i x^i)\,\dot{\overline{w}}\,dA\right]\rho a_z\,dz, \\ \overline{K}_{0P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\overline{K}_0}{\partial z}\,dz = \int_\Omega \overline{r}\times\dot{\overline{w}}\,dm = \int_{P_1}^{P_2}\left[\int_{\mathcal{A}}(1 - b_i x^i)\,\overline{r}\times\dot{\overline{w}}\,dA\right]\rho a_z\,dz, \\ E_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial E}{\partial z}\,dz = \int_\Omega \frac{\dot{\overline{w}}^2}{2}\,dm = \int_{P_1}^{P_2}\left[\int_{\mathcal{A}}(1 - b_i x^i)\,\frac{\dot{\overline{w}}^2}{2}\,dA\right]\rho a_z\,dz.\end{aligned} \tag{11.3}$$

---

*) Institutul de cercetări în construcție și economia construcțiilor (INCERC)

Pentru torsorul cinetic specific și energia cinetică specifică din (11.3) rezultă expresiile

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial z} = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\dot{\overline{w}}\, dA = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,(\dot{\overline{u}} + \dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j x^j)\, d\,A =$$

$$= \rho a_z A\,(\dot{\overline{u}} - a^{ij} b_i \dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j) =$$

$$= \rho a_z \mathrm{A}\,[(\dot{u} + b_i a^{ij} \dot{\varphi}_j)\,\overline{\tau} + (\dot{v}_i - b_k a^{kj} c_{ji} \dot{\psi})\,\overline{m}^i],$$

$$\frac{\partial \overline{K}_0}{\partial z} = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,\overline{r} \times \dot{\overline{w}}\, dA = \rho a_z \overline{\rho} \times \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,\dot{\overline{w}}\, dA +$$

$$+ \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,(\overline{r} - \overline{\rho}) \times \dot{\overline{w}}\, dA = \overline{\rho} \times \frac{\partial \overline{H}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{K}_c}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{K}_c}{\partial z} = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,(\overline{r} - \overline{\rho}) \times \dot{\overline{w}}\, dA =$$

$$= \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,\overline{m}_j x^j \times (\dot{\overline{u}} + \dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_k x^k)\, dA \approx \tag{11.4}$$

$$\approx \rho a_z A a^{ij}\,[- b_i \overline{m}_j \times \dot{\overline{u}} + \overline{m}_i \times (\dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j)] =$$

$$= \rho a_z A\,[a^{ij}\,(b_i c_{kj} \dot{v}^k + p_{ij} \dot{\psi})\,\overline{\tau} + a^{ij}\,(b_i \dot{u} + \dot{\varphi}_i)\, c_{jk} \overline{m}^k],$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,\frac{\dot{\overline{w}}^2}{2}\, dA = \frac{1}{2} \rho a_z \int_{\mathcal{A}} (1 - b_i x^i)\,[\dot{\overline{u}}^2 + 2\,(\dot{\overline{u}}\,\dot{\overline{\vartheta}}\,\overline{m}_j) x^j +$$

$$+ (\dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j)\,(\dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_k)\, x^j x^k]\, dA \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \rho a_z A\,[\dot{\overline{u}}^2 - 2a^{ij} b_i\,(\dot{\overline{u}}\,\dot{\overline{\vartheta}}\,\overline{m}_j) + a^{ij}\,(\dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_i)\,(\dot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j)] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho a_z A\,[\dot{u}\dot{u} + p_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j + 2b_i a^{ij}\,(\dot{u}\,\dot{\varphi}_j + c_{kj} \dot{v}^k \dot{\psi}) + a^{ij}(\dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j + p_{ij} \dot{\psi}\,\dot{\psi})].$$

Din expresiile (11.4) rezultă relațiile

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\dot{\overline{u}}\,\frac{\partial \overline{H}}{\partial z} + \dot{\overline{\vartheta}}\,\frac{\partial \overline{K}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial(\dot{\overline{u}})}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) = \frac{\partial \overline{H}}{\partial z}, \tag{11.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\dot{\overline{\vartheta}})}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) = \frac{\partial \overline{K}}{\partial z}.$$

Lagrangeanul barei este definit de relaţiile (v. (11.4), (9.15))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{P_1P_2} &= E_{P_1P_2} + U_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\, dz, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

După cum se vede din (11.5) şi (11.6), componentele torsorului cinetic sînt în acelaşi timp impulsuri generalizate dacă se iau drept coordonate generalizate componentele torsorului deplasărilor.

Torsorul vitezelor se poate defini în funcţie de torsorul cinetic dacă se consideră drept ecuaţii de definiţie expresiile lui $\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}$ şi $\frac{\partial \overline{K}}{\partial z}$ din (11.4). Rezolvîndu-le, se obţine soluţia

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (\bar{\tau}\bar{h}) - b_i(\bar{\tau}\,\overline{m}^i\bar{k}), \\ \dot{v}_i &= (\overline{m}_i\bar{h}) + \frac{b_l a^{lj}}{a_k^k}(\overline{m}_j\overline{m}_i\bar{k}), & \bar{h} &= \frac{1}{\rho a_z A}\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{a_k^k}[(\bar{\tau}\bar{k}) - a^{ij}b_i(\overline{m}_j\bar{\tau}\bar{h})], & \bar{k} &= \frac{1}{\rho a_z A}\frac{\partial \overline{K}}{\partial z}. \\ \dot{\varphi}_i &= b_{ij}(\bar{\tau}\,\overline{m}^j\bar{k}) - b_i(\bar{\tau}\bar{h}), \end{aligned} \tag{11.7}$$

Rezultă expresia hamiltonianului barei (calculînd energia cinetică după prima formulă (11.5) cu ajutorul relaţiilor (11.7) şi ţinînd seama de (9.15))

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{P_1P_2} &= \mathrm{E}_{P_1P_2} - \mathrm{U}_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\, dz, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} &= \frac{1}{2}\rho a_z A\Big[\bar{h}^2 - 2b_i(\bar{h}\bar{\tau})(\bar{k}\bar{\tau}\,\overline{m}^i) + \frac{2}{a_l^l}b_k a^{kj}(\bar{h}\bar{\tau}\,\overline{m}_j)(\bar{k}\bar{\tau}) + \\ &\quad + \frac{1}{a_l^l}(\bar{k}\bar{\tau})^2 + b_{ij}(\bar{k}\bar{\tau}\,\overline{m}^i)(\bar{k}\bar{\tau}\,\overline{m}^j)\Big] - \int_0^{(\bar{u},\bar{\vartheta})}\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z}\,\delta\bar{u} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\,\delta\bar{\vartheta}\right). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Dacă se dă o semnificaţie dinamică torsorului $\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial z}, \frac{\partial \overline{M}}{\partial z}\right)$ din (9.21), ecuaţia lui Lagrange (9.21) este înlocuită prin

$$\begin{aligned} \delta F_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2}\left[\left(-\frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\right)\delta\bar{u} + \left(-\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\right)\delta\bar{\vartheta}\right] dz = \\ &= -\,\delta U_{P_1P_2} + \int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\,\delta\bar{u} + \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\,\delta\bar{\vartheta}\right) dz = 0. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Ecuația (11.9) este însă condiția necesară de extremum a integralei lui Hamilton $I_{P_1 P_2}^{t_1 t_2}$ (considerînd variații sincrone)

$$\begin{aligned}\delta I_{P_1 P_2}^{t_1 t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} (-\delta F_{P_1 P_2})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U_{P_1 P_2}\, dt - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\, \delta \bar{u} + \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\, \delta \bar{\vartheta} \right) dz = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta U_{P_1 P_2}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}\, \delta \dot{\bar{u}} + \frac{\partial \overline{K}}{\partial z}\, \delta \dot{\bar{\vartheta}} \right) dz = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{P_1 P_2} + \delta E_{P_1 P_2})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}_{P_1 P_2}\, dt = 0, \end{aligned} \qquad (11.10)$$

$$(\text{cu } \delta \bar{u}(t_1) = \delta \bar{u}(t_2) = \delta \bar{\vartheta}(t_1) = \delta \bar{\vartheta}(t_2) = 0),$$

$$I_{P_1 P_2}^{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{P_1 P_2}\, dt = \text{extr.}$$

În cazul echilibrului, lagrangeanul este o constantă, iar principiul lui Hamilton (11.10) revine la ecuația variațională a lui Lagrange sub forma (9.21).

În timpul mişcării unui corp deformabil are loc, în general, o deplasare a energiei mecanice între punctele materiale. Densitatea de curent de energie este dată de expresia

$$S^a = -\sigma^{ab}\, \dot{u}_b, \qquad (11.11)$$

unde vectorul S^a este vectorul lui Umov (analog vectorului radiație electromagnetică al lui Poynting).

În cazul barelor, fluxul de energie mecanică în lungul axei, S, se va calcula ușor (v. (6.2), (8.5))

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\mathcal{A}} \dot{\bar{w}}\, d_A \overline{\mathcal{R}} = -\int_{\mathcal{A}} [\dot{\bar{u}} + \dot{\bar{\vartheta}} \times (\bar{r} - \bar{\rho})]\, d_A \overline{\mathcal{R}} = \\ &= -\dot{\bar{u}} \int_{\mathcal{A}} d_A \overline{\mathcal{R}} - \dot{\bar{\vartheta}} \int_{\mathcal{A}} (\bar{r} - \bar{\rho}) \times d_A \overline{\mathcal{R}} = -(\dot{\bar{u}}\, \overline{\mathcal{R}} + \dot{\bar{\vartheta}}\, \overline{\mathcal{M}}) = \\ &= -(\dot{u}\, N + \dot{v}_i\, \mathbf{Q}^i + \dot{\psi}\, T - \dot{\varphi}_i\, M^i) \end{aligned} \qquad (11.12)$$

Cu ajutorul expresiilor (11.12) se poate determina ușor bilanțul energetic în cazul mişcărilor executate la bară.

12. Ecuațiile de mişcare ale barei elastice se pot deduce pe mai multe căi. În cele de mai jos, aceste ecuații vor fi deduse aplicînd teorema torsorului, ecuațiile lui Lagrange și ecuațiile lui Hamilton.

Teorema torsorului aplicată barei are forma (v. (7.2), (11.3), (11.4)).

$$\begin{aligned} \dot{\overline{H}}_{P_1P_2} &= \overline{\mathfrak{R}}_{P_1P_2}, \\ \dot{\overline{K}}_{0P_1P_2} &= \overline{\mathfrak{M}}_{0P_1P_2}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Dacă se consideră drept coordonate generalizate componentele torsorului $(\overline{u}, \overline{\vartheta})$, ecuaţiile lui Lagrange au forma (v. (9.15), (11.5), (11.6))

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}}{\partial \dot{\overline{u}}}\right) - \frac{\partial \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}}{\partial \overline{u}} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}}{\partial \dot{\overline{\vartheta}}}\right) - \frac{\partial \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}}{\partial \overline{\vartheta}} = 0. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Evident, sistemul (12.2) constituie ecuaţiile Euler-Lagrange ale integralei extremale a lui Hamilton din (11.10).

Dacă se consideră integranzii mărimilor din (12.1) sau se calculează mărimile (12.2), rezultă ecuaţiile de mişcare sub formă vectorială

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{R}}}{\partial z}\ ;\ \rho a_z A\,(\ddot{\overline{u}} - a^{ij} b_i\, \ddot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j) = \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial z} + \overline{\mathfrak{r}}_z \\ &\qquad\quad \rightarrow \\ &\frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\ ;\ \rho a_z A a^{ij}\,[- b_i \overline{m}_j \times \ddot{\overline{u}} + \overline{m}_i \times (\ddot{\overline{\vartheta}} \times \overline{m}_j)] = \frac{\partial \overline{\mathcal{M}}}{\partial z} + \overline{\rho}_z \times \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathfrak{m}}_z \end{aligned} \tag{12.3}$$

sau, reprezentînd în reperul $(\overline{\tau}, \overline{m}_i)$, sub forma (v. (7.1), (7.2), (11.4))

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial z} - a_z b_i Q^i + n_z = \rho a_z A\,(\ddot{u} + a^{ij} b_i \ddot{\varphi}_j), \\ &\frac{\partial Q^i}{\partial z} + S^i_{jz} Q^j + a_z b^i N + q^i_z = \rho a_z A\,(\ddot{v}^i + a_{kj} b^k c^{ij} \ddot{\psi}), \\ &\frac{\partial T}{\partial z} - a_z b^j c_{ji} M^i + t_z = \rho a_z A\, a^{ij}\,(b_i c_{kj} \ddot{v}^k + p_{ij} \ddot{\psi}), \\ &\frac{\partial M^i}{\partial z} + S^i_{jz} M^j + a_z b_j c^{ji}\, T - a_z Q^i + m^j_z = - \rho a_z A\, a^{ij}\,(b_j \ddot{u} + \ddot{\varphi}_j). \end{aligned} \tag{12.4}$$

Ecuațiile lui Hamilton au expresia vectorială

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial H}{\partial z}\right)} = \bar{h} - b_i\, c^{ij}\,(\bar{m}_j\,\bar{k})\,\bar{\tau} + \frac{b_l\, a^{lj}}{a_k^k}\, c_{ji}\,(\bar{\tau}\,\bar{k})\,\bar{m}^i,$$

$$\dot{\bar{\vartheta}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial \bar{K}}{\partial z}\right)} = \frac{1}{a_k^k}\,[(\bar{\tau}\,\bar{k}) - a^{ij}\, b_i\, c_{kj}\,(\bar{m}^k\,\bar{h})]\,\bar{\tau} + c^{ik}\,[b_{ij}\, c^{jl}\,(\bar{m}_l\,\bar{k}) - b_i\,(\bar{\tau}\,\bar{h})]\,\bar{m}_k,$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{H}}}{\partial z} = \rho a_z\, A\, \dot{\bar{h}} = -\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}}{\partial z}, \tag{12.5}$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{K}}}{\partial z} = \rho a_z\, A\, \dot{\bar{k}} = -\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)}{\partial \bar{\vartheta}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{M}}}{\partial z},$$

care, dacă se trece la componentele în sistemul $(\bar{\tau},\, \bar{m}_i)$, conduce la

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= (\bar{\tau}\,\bar{h}) - b_i\, c^{ij}\,(\bar{m}_j\,\bar{k}),\\
\dot{v}_i &= (\bar{m}_i\,\bar{h}) + \frac{b_l\, a^{lj}\, c_{ji}}{a_k^k}\,(\bar{\tau}\,\bar{k}),\\
\dot{\psi} &= \frac{1}{a_k^k}\,[(\bar{\tau}\,\bar{k}) - a^{ij}\, b_i\, c_{kj}\,(\bar{m}^k\,\bar{h})],\\
\dot{\varphi}_i &= b_{ij}\, c^{jk}\,(\bar{m}_k\,\bar{k}) - b_i\,(\bar{\tau}\,\bar{h}),\\
(\bar{\tau}\,\dot{\bar{h}}) &= \frac{1}{\rho a_z A}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - a_z\, b_i\, Q^i + n_z\right),\\
(\bar{m}^i\,\dot{\bar{h}}) &= \frac{1}{\rho a_z A}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial z} + S^i_{jz}\, Q^j + a_z\, b^i\, N + q^i_z\right),\\
(\bar{\tau}\,\dot{\bar{k}}) &= \frac{1}{\rho a_z A}\left(\frac{\partial T}{\partial z} - a_z\, b^j\, c_{ji}\, M^i + t_z\right),\\
(\bar{m}_j\,\dot{\bar{k}}) &= \frac{1}{\rho a_z A}\, c_{ij}\left(\frac{\partial M^i}{\partial z} + S^i_{kz}\, M^k + a_z\, b_k\, c^{ki}\, T - a_z\, Q^i + m^i_z\right).
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Sistemul ecuaţiilor de mişcare se poate scrie sub forma echivalentă cu (12.3) (v. (7.2))

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\overline{\mathcal{R}}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}=0, & & \frac{\partial\bar{R}}{\partial z}=\bar{\mathfrak{r}}_z-\frac{\partial\bar{\mathfrak{R}}}{\partial z}=\bar{\mathfrak{r}}_z-\frac{\partial\dot{\bar{H}}}{\partial z},\\ & & \text{unde} & \\ &\frac{\partial\overline{\mathcal{M}}}{\partial z}+\bar{\rho}_z\times\bar{R}+\frac{\partial\bar{M}}{\partial z}=0, & & \frac{\partial\bar{M}}{\partial z}=\bar{\mathfrak{m}}_z-\frac{\partial\bar{\mathfrak{M}}}{\partial z}=\bar{\mathfrak{m}}_z-\frac{\partial\dot{\bar{K}}}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (12.7)$$

Sistemul (12.7) se poate transforma, înmulţind scalar cu $\bar{\tau}$, sub forma echivalentă cu (12.4)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial z}-\overline{\mathcal{R}}\frac{d\bar{\tau}}{dz}+\bar{\tau}\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial(\overline{\mathcal{R}}-N\bar{\tau})}{\partial z}+N\frac{d\bar{\tau}}{dz}+\left(\overline{\mathcal{R}}\frac{d\bar{\tau}}{dz}\right)\bar{\tau}+\left(\bar{\tau}\times\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}\right)\times\bar{\tau}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial z}-\overline{\mathcal{M}}\frac{d\bar{\tau}}{dz}+\bar{\tau}\frac{\partial\bar{M}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}-T\bar{\tau})}{\partial z}+T\frac{d\bar{\tau}}{dz}+\left(\overline{\mathcal{M}}\frac{d\bar{\tau}}{dz}\right)\bar{\tau}+\bar{\rho}_z\times\overline{\mathcal{R}}+\left(\bar{\tau}\times\frac{\partial\bar{M}}{\partial z}\right)\times\bar{\tau}=0. \end{aligned} \qquad (12.8)$$

Înmulţind vectorial în a doua relaţie (12.7) cu $\bar{\tau}$ şi substituind în prima ecuaţie (12.7) rezultă reprezentarea

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{R}}=N\bar{\tau}+\bar{\rho}^{z}\times\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z},\\ &\frac{\partial}{\partial z}\left[N\bar{\tau}+a^{z}\bar{\tau}\times\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z}\right]+\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}=0. \end{aligned} \qquad (12.9)$$

Substituind rezultatele din (12.9) în (12.7) şi proiectînd pe axe, rezultă sistemul de ecuaţii în care s-au eliminat forţele tăietoare,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial z}+a^{z}\left[\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{dz}\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z}\right]+\bar{\tau}\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}=0,\\ &N\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial z}+a^{z}\left\{\frac{d\bar{\tau}}{dz}\times\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z}-\left[\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{dz}\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z}\right]\bar{\tau}\right\}+\\ &+\bar{\tau}\times\frac{\partial}{\partial z}\left[a^{z}\frac{\partial(\overline{\mathcal{M}}+\bar{M})}{\partial z}\right]+\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}-\left(\bar{\tau}\frac{\partial\bar{R}}{\partial z}\right)\bar{\tau}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial z}-\overline{\mathcal{M}}\frac{d\bar{\tau}}{dz}+\bar{\tau}\frac{\partial\bar{M}}{\partial z}=0. \end{aligned} \qquad (12.10)$$

Eliminarea forțelor tăietoare se poate efectua și plecînd de la sistemul (12.4). Într-adevăr, din ultima ecuație (12.4) rezultă expresia echivalentă cu prima expresie (12.9)

$$Q^i = a^z \left[\frac{\partial M^i}{\partial z} + S^i_{jz} M^j + a_z b_j c^{ji} T + m^i_z + \rho a_z A a^{ij} (b_j \ddot{u} + \ddot{\varphi}_j) \right], \qquad (12.11)$$

care, substituită în primele două ecuații (12.4), conduce la sistemul de ecuații echivalent cu (12.4)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial z} - b_i \left(\frac{\partial M^i}{\partial z} + S^i_{jz} M^j + a_z b_j c^{ji} T + m^i_z \right) + n_z = \rho a_z A (\ddot{u} + 2a^{ij} b_j \ddot{\varphi}_i), \\
&\frac{\partial}{\partial z} \left(a^z \frac{\partial M^i}{\partial z} + a^z S^i_{jz} M^j + b_j c^{ji} T + a^z m^i_z \right) + S^i_{jz} \left(a^z \frac{\partial M^j}{\partial z} + a^z S^j_{kz} M^k + \right. \\
&\left. + b_k c^{kj} T + a^z m^j_z \right) + a_z b^i N + q^i_z = \rho a_z A [\ddot{v}^i + a_{kj} b^k c^{ij} \ddot{\psi} - \qquad (12.12) \\
&- a^z S^i_{jz} a^{jk} (b_k \ddot{u} + \ddot{\varphi}_k)] - \frac{\partial}{\partial z} [a^z \rho a_z A a^{ij} (b_j \ddot{u} + \ddot{\varphi}_j)], \\
&\frac{\partial T}{\partial z} - a_z b^j c_{ji} M^i + t_z = \rho a_z A a^{ij} (b_i c_{kj} \ddot{v}^k + p_{ij} \ddot{\psi}).
\end{aligned}$$

Dacă se substituie în (12.12) N, M^i, T, conform relațiilor (6.4), se ajunge la un sistem formulat în deformațiile α, β_i, γ. De la acest sistem se poate trece la un sistem în deplasări, exprimînd mărimile α, β_i, γ prin componentele torsorului $(\bar{u}, \bar{\vartheta})$ conform relațiilor (2.2), (2.8), (2.9), (2.10). Aceste substituții conduc la sisteme greoaie în cazul general. Este preferabil ca ele să fie efectuate, cînd este necesar, în fiecare caz particular în parte.

Relațiile dinamice generale (12.4) sau (12.12) se pot particulariza cu ușurință, fie pentru cazul echilibrului, $(\dot{u} = \dot{\bar{\vartheta}} = 0)$, fie pentru cazul vibrațiilor proprii $(\bar{r}_z = \bar{m}_z = 0)$.

Sistemul (12.4), raportat la triedrul principal și elementul de arc, ia forma particulară

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial s} - bQ_1 + n = \rho A (\ddot{u} + a_{11} b \ddot{\varphi}_1 + a_{12} b \ddot{\varphi}_2), \\
&\frac{\partial Q_1}{\partial s} - cQ_2 + bN + q_1 = \rho A (\ddot{v}_1 + a_{12} b \ddot{\psi}), \\
&\frac{\partial Q_2}{\partial s} + cQ_1 + q_2 = \rho A (\ddot{v}_2 - a_{11} b \ddot{\psi}), \\
&\frac{\partial T}{\partial s} - bM_2 + t = \rho A (- a_{11} b \ddot{v}_2 + a_{12} b \ddot{v}_1 + i_0^2 \ddot{\psi}), \qquad (12.13) \\
&\frac{\partial M_1}{\partial s} - cM_2 - Q_1 + m_1 = - \rho A (a_{11} b \ddot{u} + a_{11} \ddot{\varphi}_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2), \\
&\frac{\partial M_2}{\partial s} + cM_1 + bT - Q_2 + m_2 = - \rho A (a_{12} b \ddot{u} + a_{21} \ddot{\varphi}_1 + a_{22} \ddot{\varphi}_2).
\end{aligned}$$

Dacă se elimină forţele tăietoare în (12.13), sau se particularizează sistemul (12.12) pentru cazul raportării la triedrul principal şi elementul de arc, se obţine sistemul

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial s} - b\left(\frac{\partial M_1}{\partial s} - cM_2 + m_1\right) + n = \rho A\,(\ddot{u} + 2a_{11}b\ddot{\varphi}_1 + 2a_{12}b\ddot{\varphi}_2),\\
&\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s}(cM_2) + \frac{\partial m_1}{\partial s} - c\frac{\partial M_2}{\partial s} - c^2M_1 - bcT - cm_2 + bN + q_1 =\\
&\qquad = \rho A\,[\ddot{v}_1 + a_{12}b\ddot{\psi} + c(a_{21}b\ddot{u} + a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2)] -\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial s}\,[\rho A\,(a_{11}b\ddot{u} + a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2)],\\
&\frac{\partial^2 M_2}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(cM_1) + \frac{\partial}{\partial s}(bT) + \frac{\partial m_2}{\partial s} + c\,\frac{\partial M_1}{\partial s} - c^2M_2 + cm_1 + q_2 =\\
&\qquad = \rho A\,[\ddot{v}_2 - a_{11}b\ddot{\psi} - c\,(a_{11}b\ddot{u} + a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2)] -\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial s}\,[\rho A\,(a_{21}b\ddot{u} + a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2)],\\
&\frac{\partial T}{\partial s} - bM_2 + t = \rho A\,(-\,a_{11}b\ddot{v}_2 + a_{12}b\ddot{v}_1 + i_0^2\ddot{\psi}).
\end{aligned}
\tag{12.14}
$$

Dacă se exprimă torsorul $(\overline{R}, \overline{M})$ în funcţie de torsorul forţelor exterioare $(\overline{\mathfrak{r}}_z, \overline{\mathfrak{m}}_z)$ şi de torsorul cinetic $\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}, \frac{\partial \overline{K}}{\partial z}\right)$ (v. (12.7)), expresiile funcţionale ale torsorului deplasărilor $(\overline{u}, \overline{\vartheta})$, (10.4) şi (10.7), iau sensul de ecuaţii integrale ale dinamicii liniare ale barei.

Sistemul (10.4) conduce la

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_P &= \int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{R}_Q}\left(\overline{\mathfrak{r}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\right)_Q + \frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{M}_Q}\left(\overline{\mathfrak{m}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\right)_Q\right] dz_Q,\\
\overline{\vartheta}_P &= \int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{R}_Q}\left(\overline{\mathfrak{r}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\right)_Q + \frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{M}_Q}\left(\overline{\mathfrak{m}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\right)_Q\right] dz_Q,
\end{aligned}
\tag{12.15}
$$

în timp ce sistemul (10.7) conduce la sistemul echivalent cu (12.15)

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_P &= \int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{R}_P}\left(\overline{\mathfrak{r}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\right)_Q + \frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{R}_P}\left(\overline{\mathfrak{m}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\right)_Q\right] dz_Q,\\
\overline{\vartheta}_P &= \int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{M}_P}\left(\overline{\mathfrak{r}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{H}}}{\partial z}\right)_Q + \frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{M}_P}\left(\overline{\mathfrak{m}}_z - \frac{\partial \dot{\overline{K}}}{\partial z}\right)_Q\right] dz_Q.
\end{aligned}
\tag{12.16}
$$

Dacă se presupune nul torsorul cinetic $\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}, \frac{\partial \overline{K}}{\partial z}\right)$, sistemele (12.15) şi (12.16) devin formule de calcul al deplasărilor sub forțe statice date.

Dacă se prespune nul torsorul forțelor exterioare $(\overline{\mathrm{r}}_z, \overline{\mathrm{m}}_z)$, sistemele (12.15) şi (12.16) conduc la sisteme integrale omogene, care determină funcțiile şi valorile proprii ale barei date. Din sistemul (12.15) rezultă (v. (11.4))

$$\begin{aligned} \overline{U}_P &= \omega^2 \int_{P_1}^{P_2} \left\{ \frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{\overline{R}}_Q} [\overline{U} - a^{ij} b_i \overline{\Theta} \times \overline{m}_j]_Q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{\overline{M}}_Q} [a^{ij} (-b_i \overline{m}_j \times \overline{U} + \overline{m}_i \times \{\overline{\Theta} \times \overline{m}_j\})]_Q \right\} (\varrho a_z A dz)_Q, \\ \overline{\Theta}_P &= \omega^2 \int_{P_1}^{P_2} \left\{ \frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{\overline{R}}_Q} [\overline{U} - a^{ij} b_i \overline{\Theta} \times \overline{m}_j]_Q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{\overline{M}}_Q} [a^{ij} (-b_i \overline{m}_j \times \overline{U} + \overline{m}_i \times \{\overline{\Theta} \times \overline{m}_j\})]_Q \right\} (\varrho a_z A dz)_Q, \end{aligned} \tag{12.17}$$

iar din sistemul (12.16) rezultă sistemul echivalent cu (12.17),

$$\begin{aligned} \overline{U}_P &= \omega^2 \int_{P_1}^{P_2} \left\{ \frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{\overline{R}}_P} [\overline{U} - a^{ij} b_i \overline{\Theta} \times \overline{m}_j]_Q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{\overline{R}}_P} [a^{ij} (-b_i \overline{m}_j \times \overline{U} + \overline{m}_i \times \{\overline{\Theta} \times \overline{m}_j\})]_Q \right\} (\varrho a_z A dz)_Q, \\ \overline{\Theta}_P &= \omega^2 \int_{P_1}^{P_2} \left\{ \frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{\overline{M}}_P} [\overline{U} - a^{ij} b_i \overline{\Theta} \times \overline{m}_j]_Q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{\overline{M}}_P} [a^{ij} (-b_i \overline{m}_j \times \overline{U} + \overline{m}_i \times \{\overline{\Theta} \times \overline{m}_j\})]_Q \right\} (\varrho a_z A dz)_Q. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Se observă uşor simetria integranzilor din (12.18) pe de o parte în $\left(\frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{\overline{R}}_P}, \frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{\overline{R}}_P}\right)$ şi $(\overline{U}_Q, \overline{\Theta}_Q)$, iar pe de altă parte în $\left(\frac{\partial \overline{u}_Q}{\partial \overline{\overline{M}}_P}\right)$, $\left(\frac{\partial \overline{\vartheta}_Q}{\partial \overline{\overline{M}}_P}\right)$ şi $(\overline{U}_Q, \overline{\Theta}_Q)$.

Sistemele de ecuații ale dinamicii se pot simplifica, reducînd numărul componentelor torsorului de la 6 la cele 4 esențiale, întrucît rotațiile φ_i depind de deplasarea $\overline{u}$ prin (2.2). Este preferabil să se efectueze această simplificare pentru fiecare caz particular în parte, o dată cu scrierea dezvoltată a ecuațiilor de mişcare.

Pe baza dezvoltărilor de mai sus se poate stabili o relație de simetrie care să generalizeze, pentru cazul dinamic, relația (10.3) care prezintă importanță practică în special pentru cazul static.

În acest scop se vor considera imaginile operaţionale prin transformarea lui Laplace ale deplasărilor, deformaţiilor şi forţelor, care sînt funcţii de variabilă reală z şi de parametrul complex p, ce înlocuieşte variabila reală t. Relaţiile stabilite în paragrafele anterioare îşi vor conserva forma şi în acest caz.

Corespondenţa operaţională

$$\begin{gathered} f(z, p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(z, t)\, dt, \\ f(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\frac{f(z, p)}{p}\, dp, \end{gathered} \tag{12.19}$$

unde se presupune că $\mathcal{R}e\, p$ aparţine intervalului de convergenţă al integralei, se va nota prescurtat prin

$$\begin{gathered} f(z, t) \risingdotseq f(z, p), \\ f(z, p) \fallingdotseq f(z, t). \end{gathered} \tag{12.20}$$

Simetria relaţiei (9.5) conduce, dacă se ţine seama de (9.16) şi (9.17), la

$$\begin{aligned} &\int_{P_1}^{P_2} [\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z (z, p)\, \overset{(2)}{\overline{u}} (z, p) + \overset{(1)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z (z, p)\, \overset{(2)}{\overline{\vartheta}} (z, p)]\, dz + \\ &\qquad + \Big[\overset{(1)}{\overline{\mathcal{R}}} (z, p)\, \overset{(2)}{\overline{u}} (z, p) + \overset{(1)}{\overline{\mathcal{M}}} (z, p)\, \overset{(2)}{\overline{\vartheta}} (z, p)]_{P_1}^{P_2} - \\ &- \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{\mathfrak{R}}} (z, p)}{\partial z}\, \overset{(2)}{\overline{u}} (z, p) + \frac{\partial \overset{(1)}{\overline{\mathfrak{M}}} (z, p)}{\partial z}\, \overset{(2)}{\overline{\vartheta}} (z, p)\right] dz = \\ &\qquad = \int_{P_1}^{P_2} [\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z (z, p)\, \overset{(1)}{\overline{u}} (z, p) + \overset{(2)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z (z, p)\, \overset{(1)}{\overline{\vartheta}} (z, p)]\, dz + \\ &+ [\overset{(2)}{\overline{\mathcal{R}}} (z, p)\, \overset{(1)}{\overline{u}} (z, p) + \overset{(2)}{\overline{\mathcal{M}}} (z, p)\, \overset{(1)}{\overline{\vartheta}} (z, p)]_{P_1}^{P_2} - \\ &\qquad - \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{\mathfrak{R}}} (z, p)}{\partial z}\, \overset{(1)}{\overline{u}} (z, p) + \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{\mathfrak{M}}} (z, p)}{\partial z}\, \overset{(1)}{\overline{\vartheta}} (z, p)\right] dz. \end{aligned} \tag{12.21}$$

Se va presupune că la momentul $t = 0$ torsorii deplasărilor şi vitezelor sînt nuli. Ţinînd seama de faptul că în aceste condiţii există relaţiile

$$\begin{gathered} \dot{f} (z, t) \risingdotseq p\, f (z, p), \\ \ddot{f} (z, t) \risingdotseq p^2 f (z, p), \end{gathered} \tag{12.22}$$

şi înlocuind în (12.21) torsorul $\left(\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}(z, p)}{\partial z}, \frac{\partial \overline{\mathcal{M}}(z, p)}{\partial z}\right)$ prin intermediul relaţiilor (12.3) şi (11.4), se ajunge la

$$\begin{gathered}\frac{1}{p}\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, p)\overset{(2)}{\overline{u}}(z, p)+\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, p)\overset{(2)}{\overline{\vartheta}}(z, p)]\,dz+\\ +\frac{1}{p}[\overset{(1)}{\overline{\mathcal{R}}}(z, p)\overset{(2)}{\overline{u}}(z, p)+\overset{(1)}{\overline{\mathcal{M}}}(z, p)\overset{(2)}{\overline{\vartheta}}(z, p)]_{P_1}^{P_2}=\\ =\frac{1}{p}\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, p)\overset{(1)}{\overline{u}}(z, p)+\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, p)\overset{(1)}{\overline{\vartheta}}(z, p)]\,dz+\\ +\frac{1}{p}[\overset{(2)}{\overline{\mathcal{R}}}(z, p)\overset{(1)}{\overline{u}}(z, p)+\overset{(2)}{\overline{\mathcal{M}}}(z, p)\overset{(1)}{\overline{\vartheta}}(z, p)]_{P_1}^{P_2}.\end{gathered}\tag{12.23}$$

Relaţia (12.23) este imaginea operaţională a relaţiei

$$\begin{gathered}\int_0^t\left\{\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]\,dz\right\}d\tau+\\ +\int_0^t[\overset{(1)}{\overline{\mathcal{R}}}(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(1)}{\overline{\mathcal{M}}}(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]_{P_1}^{P_2}\,d\tau=\\ =\int_0^t\left\{\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]\,dz\right\}d\tau+\\ +\int_0^t[\overset{(2)}{\overline{\mathcal{R}}}(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(2)}{\overline{\mathcal{M}}}(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]_{P_1}^{P_2}\,d\tau,\end{gathered}\tag{12.24}$$

a cărei valabilitate este generală în cazul deplasărilor şi vitezelor iniţiale nule. Relaţia (12.24) constituie generalizarea dinamică a relaţiei (10.3) şi ea reprezintă o particularizare pentru cazul barelor a unei relaţii de simetrie din mecanica solidului deformabil. Ea a fost stabilită aici fără a se utiliza proprietăţile vibraţiilor proprii, care ar fi oferit o altă cale, mai particulară, de calcul.

Satisfacerea unor condiţii la limită de forma (8.4) omogene face ca relaţia (12.24) să ia forma mai simplă

$$\begin{gathered}\int_0^t\left\{\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(1)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, \tau)\overset{(2)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]\,dz\right\}d\tau=\\ =\int_0^t\left\{\int_{P_1}^{P_2}[\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{r}}}_z(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{u}}(z, t-\tau)+\overset{(2)}{\overline{\mathfrak{m}}}_z(z, \tau)\overset{(1)}{\overline{\vartheta}}(z, t-\tau)]\,dz\right\}d\tau.\end{gathered}\tag{12.25}$$

Dacă evoluţia caracterizată în relaţia (12.25) prin indicele (2) corespunde unui torsor de percusiune unitar $(\bar{H}_P, \bar{K}_P)$ aplicat în punctul P, atunci evoluţia (1) va fi exprimată prin formulele

$$\begin{aligned} \bar{u}_P(t) &= \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{H}_P}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{r}}_{zQ}(\tau) + \frac{\partial \bar{\vartheta}_Q}{\partial \bar{H}_P}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{m}}_{zQ}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau, \\ \bar{\vartheta}_P(t) &= \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{K}_P}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{r}}_{zQ}(\tau) + \frac{\partial \bar{\vartheta}_Q}{\partial \bar{K}_P}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{m}}_{zQ}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau, \end{aligned} \tag{12.26}$$

unde prin $\frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{H}_P}(t), \ldots$ s-a notat evoluţia ce corespunde torsorului de percusiune unitar aplicat la momentul $t = 0$, iar indicele (1), corespunzător celeilalte evoluţii, a fost omis.

Dacă se particularizează torsorul forţelor exterioare $(\bar{\mathfrak{r}}_{zQ}(t), \bar{\mathfrak{m}}_{zQ}(t))$ din (12.26) sub forma unui torsor de percusiune unitar $(\bar{H}_Q, \bar{K}_Q)$ aplicat în punctul Q, rezultă din (12.26) relaţiile de simetrie

$$\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{H}_Q}(t) = \frac{\partial \bar{u}_Q}{\partial \bar{H}_P}(t); \quad \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{K}_Q}(t) = \frac{\partial \bar{\vartheta}_Q}{\partial \bar{H}_P}(t); \quad \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{K}_Q}(t) = \frac{\partial \bar{\vartheta}_Q}{\partial \bar{K}_P}(t), \tag{12.27}$$

care extind pentru cazul dinamic relaţiile (10.6).

Înlocuind în (12.26) nucleul tensorial dinamic conform relaţiilor de simetrie (12.27), se obţin expresiile echivalente cu (12.26),

$$\begin{aligned} \bar{u}_P(t) &= \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{H}_Q}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{r}}_{zQ}(\tau) + \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{K}_Q}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{m}}_{zQ}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau, \\ \bar{\vartheta}_P(t) &= \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{H}_Q}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{r}}_{zQ}(\tau) + \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{K}_Q}(t-\tau)\,\bar{\mathfrak{m}}_{zQ}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau. \end{aligned} \tag{12.28}$$

Expresiile (12.26) şi (12.28) ale torsorului deplasărilor dinamice produse de un torsor dat al forţelor exterioare dinamice, generalizează pentru cazul dinamic expresiile funcţionale (10.7) şi, respectiv, (10.4) utile practic în cazul static. Efectuînd integrări prin părţi în raport cu z în (12.26) se pot obţine expresii omologe expresiilor (10.8).

Fie un sistem de bare. Dacă se utilizează expresii funcţionale ca (10.7) sau (10.8), se poate studia prin metoda eforturilor comportarea statică a sistemului (considerînd deformata statică sau deformata proprie de vibraţie) secţionînd legăturile dintre bare, introducînd forţe de legătură şi obţinînd un sistem algebric liniar rezultat din impunerea condiţiilor de continuitate a torsorului deplasărilor în vecinătatea legăturilor. Dacă se utilizează omologele dinamice, ca (12.26), ale expresiilor (10.7) şi (10.8) se poate aplica în acelaşi mod metoda eforturilor pentru studiul dinamic al sistemului, fără a face apel la noţiunile de vibraţii proprii şi întreţinute ale sistemului de bare, ajungîndu-se la un sistem liniar de ecuaţii integrale

Volterra, care generalizează sistemul algebric liniar al metodei eforturilor aplicată static.

Între nucleii $\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}, \ldots$ din (10.6) și $\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{H}}_Q}(t), \ldots$ din (12.27) există o relație,

$$\left\{\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}, \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{M}}_Q}, \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\delta \bar{\bar{M}}_Q}\right\} = \lim_{\nu \to 0} \int_0^\infty e^{-\nu t} \left\{\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{H}}_Q}(t), \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{K}}_Q}(t), \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{\bar{K}}_Q}(t)\right\} dt, \qquad (12.29)$$

care poate fi pusă în evidență pe baza studiului vibrațiilor libere ale barei cu amortizare vîscoasă, cînd amortizarea, exprimată prin coeficientul ν, tinde către zero. Expresia (12.29) are sens numai atunci cînd toate frecvențele proprii ale barei sînt nenule, deci cînd funcționala $V_{P_1 P_2}$ este pozitiv definită și deci, cînd nucleul $\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}, \ldots$ există.

Expresia (12.29) poate fi înlocuită, ținînd seama de (12.20), prin expresia ce poate fi uneori utilă

$$\left\{\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{R}}_Q}, \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{M}}_Q}, \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{\bar{M}}_Q}\right\} \underset{p \to 0}{\doteqdot} \int_0^t \left\{\frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{H}}_Q}(\tau), \frac{\partial \bar{u}_P}{\partial \bar{\bar{K}}_Q}(\tau), \frac{\partial \bar{\vartheta}_P}{\partial \bar{\bar{K}}_Q}(\tau)\right\} d\tau \qquad (12.30)$$

Problema liniară a echilibrului barei admite întotdeauna o soluție și numai una în condițiile în care este asigurată existența unei relații de forma (9.14) cu h^2 diferit de zero. Această problemă este, în condițiile respective, o problemă la limită autoadjunctă pentru o ecuație diferențială liniară, cu operator pozitiv definit, pentru necunoscuta $(\bar{u}, \bar{\vartheta})$.

Problema liniară a mișcării barei este o problemă mixtă pentru o ecuație cu derivate parțiale, de tip hiperbolic, în două variabile, pentru aceeași necunoscută, $(\bar{u}, \bar{\vartheta})$. Dacă este satisfăcută condiția (9.14) care face operatorul problemei statice pozitiv definit, problema se poate rezolva prin metoda Fourier, deci trecînd la studiul vibrațiilor întreținute ale barei, prin intermediul rezolvării problemei de valori proprii cu o singură variabilă, z, a vibrațiilor proprii ale barei.

Studiul dinamic al sistemelor de bare conduce la o problemă dinamică de contact care, în cazul unui număr oarecare, finit, de condiții de contact, se formulează matematic sub forma unui sistem linear finit de ecuații integrale Volterra. În cazul cînd operatorul problemei statice corespunzătoare este pozitiv-definit, problema dinamică a sistemului de bare este reductibilă la o problemă de vibrații întreținute, care se rezolvă pe baza unei probleme de valori proprii ce apar ca soluții ale unei ecuații caracteristice transcendente. Pentru cazul sistemelor de bare drepte inextensibile, calculul vibrațiilor proprii este bine sistematizat în tratatele de specialitate. Sistemul algebric liniar și omogen care conduce la ecuația determinantă se poate obține prin metoda eforturilor sau metoda deplasărilor.

În rezumat, în dinamica liniară a barei apar patru tipuri echivalente de ecuații: ecuațiile lui Newton-Lagrange (12.3) sau (12.4), ecuațiile lui Hamilton (12.5) sau (12.6), ecuațiile integrale simple (12.15) sau (12.16) și expresiile integrale multiple (12.28) sau (12.26).

V. EFECTE NELINIARE

13. Expresiile și ecuațiile dinamicii liniare a barei, stabilite în cele de mai sus, au la bază ipoteza implicită că deformările barei au efecte neglijabile, deci că se pot adopta în calcul caracteristicele a_z, b_i, S_{ijz}, A, a^{ij}, ρ, ale barei nedeformate. Admiterea acestei ipoteze are drept rezultat o simplificare esențială a calculelor, dar evaluarea erorilor astfel introduse nu poate fi făcută decît pe baza unui calcul mai exact. Un calcul consecvent, neliniar, al comportării barei, constituie o problemă extrem de dificilă, rezolvabilă practic într-un număr extrem de restrîns de cazuri. Neglijările admise în cursul prezentei lucrări fac imposibil un calcul exact pe baza relațiilor stabilite în primele paragrafe.

Date fiind dificultățile unui calcul riguros și insuficienta exactitate a relațiilor stabilite în lucrare, se vor prezenta aspecte care constituie rezultate ale unui studiu în primă aproximație al mișcării descrise de ecuații neliniare. Modul acesta de studiu este adoptat aproape întotdeauna în mecanica solidului elastic și el este satisfăcător din punct de vedere practic, punînd în evidență o serie de efecte neliniare, permițînd să se aprecieze corect domeniul de valabilitate al mecanicii liniare și fenomenele cele mai importante care nu pot fi descrise cu ajutorul mecanicii liniare.

În scopul efectuării unui calcul neliniar ar trebui reconsiderate, în principiu, toate relațiile stabilite în cele de mai sus. Dat fiind că va fi efectuat numai un calcul neliniar aproximativ, se vor admite pentru $\overline{\tau}^\star$, $\overline{m}_i^\star$, $a_z^\star$, $b_i^\star$ și $S_{ijz}^\star$ relațiile stabilite la punctul 2 (partea I), introducîndu-se aceste mărimi în formulele de derivare (1.16) și (1.16′). Ipoteza conservării secțiunii transversale conduce la invarianța prin deformare a ariei sale A și a tensorului de girație a^{ij}. Conservarea masei elementului de volum prin deformare conduce, datorită invarianței lui A și a_{ij}, la invarianța produselor ρa_z și $\rho a_z\, b_i$. Relațiile elastice (6.4) se vor conserva. În reprezentarea mărimilor asociate barei deformate (mai precis, a mărimilor calculate neliniar), vor fi adoptate notațiile (3.6). În relațiile de definiție ale funcționalelor $\overline{H}$, $\overline{K}$, și E de la punctul 11 vor fi adoptate mărimile $\overline{m}_i$ și b_i, de aici rezultînd definițiile lui $\mathscr{L}$ și $\mathscr{H}$.

Ca și în dinamica liniară, mișcarea barei se poate studia cu ajutorul a patru sisteme echivalente de ecuații corespunzînd respectiv sistemelor amintite la sfîrșitul punctului 12.

Schema de studiu a efectelor neliniare este în principiu următoarea : fie o expresie a unei mărimi mecanice Y, calculată liniar (adică adoptînd drept coeficienți caracteristicile geometrice X ale barei nedeformate). Considerarea deformării barei, adică adoptarea în calculul expresiei mărimii mecanice respective a caracteristicelor $X^\star$ ale barei deformate, înlocuiește expresia calculată liniar, Y, printr-o expresie calculată neliniar, mai exactă, $Y^\star$. Dacă expresia Y era liniară, expresia $Y^\star$ este neliniară, mai precis de gradul al II-lea în raport cu termenii expresiei Y și derivatele acestora în raport cu z. Acest fapt rezultă din introducerea în expresia Y a corecțiilor X^0 ($X^0 = X^\star - X$) ale caracteristicelor geometrice ale barei, care sînt la rîndul lor, în primă aproximație, forme liniare în raport cu termenii expresiei Y. Calculul neliniar al expresiei $Y^\star$ poate fi simplificat în sensul că termenii acesteia care au drept coeficienți mărimile X^0 se pot înlocui prin termenii omologi ai expresiei Y, eroarea astfel introdusă fiind de ordin superior în raport cu corecția Y^0 $(Y^0 = Y^* - Y)$.

În legătură cu considerarea efectelor neliniare apare frecvent necesitatea studiului unor mărimi ce depind de mai mulți parametri. În acest scop trebuie introdusă o reprezentare a ansamblului acestor parametri. Fie un spațiu vectorial $\{\lambda^\nu\}$ și o aplicație a sa, $(\lambda^\nu \overline{\mathfrak{r}}_{z\nu}(t), \lambda^\nu \overline{\mathfrak{m}}_{z\nu}(t)$, în mulțimea torsorilor exteriori $(\overline{\mathfrak{r}}_{z\nu}(t), \overline{\mathfrak{m}}_{z\nu}(t))$. Soluția calculată liniar, corespunzătoare acestui torsor exterior $Y(t) = \lambda^\nu \; Y_\nu(t)$ este o aplicație a aceluiași spațiu $\{\lambda^\nu\}$ în mulțimea soluțiilor calculate liniar, $Y^\nu(t)$, corespunzătoare mulțimii ortsorilor $(\mathfrak{r}_{z\nu}(t), \overline{\mathfrak{m}}_{z\nu}(t))$.

Problemele care se pun în legătură cu considerarea efectelor neliniare sînt în principal două. Problema I are un caracter calitativ și se referă la determinarea domeniului de stabilitate, în spațiul reprezentativ al forțelor exterioare, $\{\lambda^\nu\}$, al comportării caracterizate prin mărimea Y. Problema a II-a are un caracter cantitativ și se referă la determinarea, în domeniul de stabilitate al fenomenului, a expresiei Y^* a mărimii mecanice caracteristice. (Ea nu este abordată în literatura consultată, decît pentru cazul forțelor exterioare statice).

În cele de mai jos se va acorda atenție în special primei probleme, aceleia a determinării domeniului de stabilitate în spațiul $\{\lambda^\nu\}$, al comportării barei.

Se va spune că echilibrul elastic al barei sub acțiunea unor forțe exterioare statice date este local-stabil dacă în vecinătatea (considerată în spațiul de configurație, cu metrica dată de funcționala V), a poziției nedeformate, există o singură poziție de echilibru sub acțiunea acestor forțe. Se va spune că echilibrul elastic al barei sub acțiunea forțelor exterioare date este stabil dacă există o singură poziție posibilă de echilibru sub acțiunea acestor forțe, iar această poziție se găsește în vecinătatea poziției nedeformate. Orice bară în echilibru stabil este și în echilibru local-stabil. În multe cazuri cele două proprietăți de stabilitate de mai sus sînt echivalente. Sînt însă citate în literatură cazuri cînd cele două proprietăți nu coincid [8], chiar pentru bare (acesta fiind mult mai frecvent cazul pentru alte sisteme elastice ca, spre exemplu, pînzele subțiri). Ipotezele admise în prezenta lucrare permit numai studiul stabilității locale a echilibrului, care este practic satisfăcătoare în majoritatea cazurilor.

Se va spune (după Leapunov) că mișcarea unei bare este local-stabilă dacă există o sferă de rază foarte mică, $\eta(\varepsilon)$, (considerată în spațiul fazelor, cu metrica dată de funcționala $E + V$), cu proprietatea că, dacă la un moment considerat inițial se dă mișcării o perturbație aparținînd sferei de rază $\eta(\varepsilon)$, la orice moment ulterior mișcarea astfel perturbată va diferi de cea neperturbată printr-o perturbație aparținînd sferei de rază foarte mică, ε. Se va spune că mișcarea este asimptotic local stabilă dacă, pentru o perturbație inițială aparținînd unei sfere de rază foarte mică, η, perturbația mișcării va aparține la orice moment ulterior unei sfere de rază $\varepsilon(t)$, unde $\varepsilon(t)$ tinde asimptotic spre zero.

Se vede ușor că stabilitatea echilibrului elastic este un caz particular al stabilității mișcării.

Din punct de vedere practic interesează în primul rînd stabilitatea locală a mişcărilor periodice ale barei, iar în cadrul acestei probleme interesează domeniul de stabilitate locală asimptotică în spaţiul $\{\lambda^\nu\}$.

Pornind de la definiţiile de mai sus ale stabilităţii locale a comportării barei, rezultă modul practic de rezolvare a problemei determinării domeniului de stabilitate în spaţiul $\{\lambda^\nu\}$.

În cazul echilibrului barei se consideră drept expresie caracteristică Y^* expresia torsorului $\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial z}, \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\right)$, care trebuie să fie egal cu zero. Pentru ca echilibrul să fie local indiferent, trebuie ca să existe cel puţin două poziţii vecine pentru care torsorii calculaţi neliniar $\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}^*}{\partial z^*}, \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial z^*}\right)_m$ $(m = 1{,}2)$ să se anuleze. Dar pentru aceasta este necesar ca şi diferenţa celor doi torsori calculaţi neliniar să se anuleze. Deoarece cele două poziţii amintite sînt vecine, este suficient să se considere prima variaţie a torsorului $\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}^*}{\partial z^*}, \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial z^*}\right)$, iar deoarece se studiază stabilitatea locală, această variaţie se poate considera în jurul poziţiei nedeformate a barei. Condiţia de anulare a primei variaţii a torsorului $\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}^*}{\partial z^*}, \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial z^*}\right)$ în jurul poziţiei nedeformate conduce la un sistem diferenţial liniar şi omogen, a cărui rezolvare constituie o problemă de varietăţi proprii în spaţiul $\{\lambda^\nu\}$, în particular o problemă de valori proprii dacă se consideră o direcţie fixă în spaţiul $\{\lambda^\nu\}$ (valorile proprii reprezentînd intersecţia acestei direcţii cu varietăţile proprii amintite).

În cazul mişcării barei se consideră drept expresie caracteristică Y^* unul din cele patru sisteme de ecuaţii (Newton-Lagrange, Hamilton, integral simplu şi integral multiplu). Repetînd raţionamentul din cazul echilibrului, problema revine la determinarea domeniului din spaţiul $\{\lambda^\nu\}$ în care soluţia sistemului omogen constituit de prima variaţie a unuia din cele patru sisteme amintite tinde asimptotic către zero pentru orice condiţii iniţiale date (mai precis, adoptînd orice punct iniţial pe frontiera sferei unitate din spaţiul fazelor asociat problemei).

14. Sistemul omogen de ecuaţii de echilibru rezultat din anularea primei variaţii a torsorului $\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial z}, \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\right)$ are forma

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\widetilde{N}^0}{\partial z} - a_z b_i \widetilde{Q}^{0i} - a_z(\beta_i^0 + \alpha^0 b_i)\lambda Q^i + \lambda\Delta\widetilde{n}_z = 0 \\
\frac{\partial\widetilde{Q}^{0i}}{\partial z} + S^i_{jz}\widetilde{Q}^{0j} + a_z b^i \widetilde{N}^0 + a_z p^{ik} c_{jk}\gamma^0\lambda Q^j + a_z(\beta^{0i} + \alpha^0 b^i)\lambda N + \lambda\Delta\widetilde{q}^i_z = 0 \\
\frac{\partial\widetilde{T}^0}{\partial z} - a_z b^j c_{ji}\widetilde{M}^{0i} - a_z(\beta^{0j} + \alpha^0 b^j) c_{ji}\lambda M^i + \lambda\Delta\widetilde{t}_z = 0 \qquad (14.1) \\
\frac{\partial\widetilde{M}^{0i}}{\partial z} + S^i_{jz}\widetilde{M}^{0j} + a_z b_j c^{ji}\widetilde{T}^\circ - a_z\widetilde{Q}^{0i} + a_z p^{ik} c_{jk}\gamma^0\lambda M^j + \\
+ a_z(\beta_j^0 + \alpha^0 b_j)c^{ji}\lambda T - a_z\alpha^0\lambda Q^i + \lambda\Delta\widetilde{m}^i_z = 0
\end{gathered}$$

În sistemul (14.1) s-a omis indicele ν, presupunîndu-se direcția fixată în spațiul $\{\lambda^\nu\}$ și luîndu-se λ ca abscisă pe direcția respectivă, s-a considerat că în torsorul $(\Delta\bar{\mathfrak{r}}_z, \Delta\bar{\mathfrak{m}}_z)$, calculat conform unor relații de tipul (7.8) pe baza torsorului $(\bar{u}^0, \bar{\vartheta}^0)$, intervine ca factor parametrul λ (deci acest torsor este o caracteristică a stării de eforturi, nu numai a barei) și s-au calculat componentele după triedrul asociat barei deformate.

În locul sistemului (14.1) se poate obține un sistem echivalent eliminînd mărimile $\widetilde{Q}^{0i}$, ca în trecerea de la (12.4) la (12.12). Un astfel de sistem permite formularea problemei (ținînd seama de (6.4)) în raport cu necunoscutele α^0, β^{0i}, γ^0.

Se vede că în sistemul omogen (14.1) apar pe de o parte termenii obișnuiți, rezultați din derivarea în lungul axei nedeformate a torsorului $(\bar{\mathcal{R}}^0, \bar{\mathcal{M}}^0)$, iar pe de altă parte apare un torsor exterior fictiv $(\bar{\mathfrak{r}}_z^{0st}, \bar{\mathfrak{m}}_z^{0st.})$, cu componentele

$$
\begin{aligned}
\widetilde{n}_z^{0\,st.} &= \lambda\Delta\widetilde{n}_z - a_z(\beta_i^0 + \alpha^0 b_i)\lambda Q^i \\
\widetilde{q}_z^{0\,st.i} &= \lambda\Delta\widetilde{q}_z^i + a_z p^{ik} c_{jk}\gamma^0\lambda Q^j + a_z(\beta^{0i} + \alpha^0 b^i)\lambda N \\
\widetilde{t}_z^{0\,st.} &= \lambda\Delta\widetilde{t}_z - a_z(\beta^{0j} + \alpha^0 b^j)c_{ji}\lambda M_i \qquad (14.2) \\
m_z^{0\,st.i} &= \lambda\Delta\widetilde{m}_z^i + a_z p^{ik} c_{jk}\gamma^0\lambda M^j + a_z(\beta_j^0 + \alpha^0 b_j)c^{ji}\lambda T - a_z\alpha^0\lambda Q^i
\end{aligned}
$$

sau, cu expresia, echivalentă cu (14.2),

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,st.} &= \lambda\Delta\bar{\mathfrak{r}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\lambda\bar{\mathcal{R}} \\
\bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,st.} &= \lambda\Delta\bar{\mathfrak{m}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\lambda\bar{\mathcal{M}} + \left(\frac{\partial\bar{u}^0}{\partial z} - \bar{\vartheta}^0\times\bar{\rho}_z\right)\times\bar{\mathcal{R}} \qquad (14.3)
\end{aligned}
$$

Introducerea torsorului $(\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,st.}, \bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,st.})$ dat de (14.3) în relația (10.4) de calcul al deplasărilor conduce la sistemul integrodiferențial echivalent cu sistemul (14.1) (care constituie prima variație a sistemului (12.15)

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_P^0 &= \lambda\int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial\bar{u}_P}{\partial\bar{R}_Q}\left(\Delta\bar{\mathfrak{r}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\bar{\mathcal{R}}\right)_Q + \frac{\partial\bar{u}_P}{\partial\bar{M}_Q}\left(\Delta\bar{\mathfrak{m}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\bar{\mathcal{M}} + \alpha^0\bar{\rho}_z\times\bar{\mathcal{R}}\right)_Q\right]dz_Q \\
&\qquad (14.4) \\
\mathring{\vartheta}_P &= \lambda\int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial\bar{\vartheta}_P}{\partial\bar{R}_Q}\left(\Delta\bar{\mathfrak{r}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\bar{\mathcal{R}}\right)_Q + \frac{\partial\bar{\vartheta}_P}{\partial\bar{M}_Q}\left(\Delta\bar{\mathfrak{m}}_z + \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z}\times\bar{\mathcal{M}} + \alpha^0\bar{\rho}_z\times\bar{\mathcal{R}}\right)_Q\right]dz_Q .
\end{aligned}
$$

Sistemul (14.4) este reductibil la un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute scalare, dacă se ține seama de (2.6). În locul lui s-ar putea adopta un sistem echivalent, corespunzător relațiilor (10.7) sau (10.8).

A doua problemă de considerare a efectelor neliniare, formulată la punctul 13, revine în cazul echilibrului elastic al barei la înlocuirea soluției Y calculată liniar (soluția Y reprezentînd acum torsorii $(\bar{u}, \bar{\vartheta})$ și $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}})$)

care are, în sistemul de referinţă al soluţiilor proprii $(\bar{u}_n^0, \bar{\vartheta}_n^0)$ ale unuia din sistemele echivalente (14.1) sau (14.4), expresia

$$Y = Y_0 + \sum_n^{1,\infty} a_n Y_n \tag{14.5}$$

prin soluţia calculată neliniar, $Y^\star$, cu expresia

$$Y^\star = Y_0 + \sum_n^{1,\infty} \frac{a_n}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_n}} Y_n . \tag{14.6}$$

Satisfacerea sistemului (14.1) implică satisfacerea relaţiei

$$\delta F^0_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \left[\left(-\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}^0}{\partial z} - \bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,st.}\right) \delta\bar{u}^0 + \left(-\frac{\partial \overline{\mathcal{M}}^0}{\partial z} - \bar{\rho}_z \times \overline{\mathcal{R}}^0 - \overline{\mathfrak{m}}_z^{0\,st.}\right)\delta\bar{\vartheta}^0\right] dz = 0 \tag{14.7}$$

Vor fi utilizate notaţiile

$$\delta V^0_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \left[\left(-\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}^0}{\partial z}\right) \partial\bar{u}^0 + \left(-\frac{\partial \overline{\mathcal{M}}^0}{\partial z} - \bar{\rho}_z \times \overline{\mathcal{R}}^0\right)\delta\bar{\vartheta}^0\right] dz$$

$$\begin{aligned}\delta L^{v0}_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} (\Delta\bar{\mathfrak{r}}_z \delta\bar{u}^0 + \Delta\overline{\mathfrak{m}}_z \delta\bar{\vartheta}^0)\, dz = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{2}\left[\bar{u}^0 \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_z}{\partial \bar{u}} \bar{u}^0 + \bar{u}^0 \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_z}{\partial \bar{\vartheta}} + \right.\right.\\ &\left.\left. + \frac{\partial \overline{\mathfrak{m}}_z}{\partial \bar{u}}\right) \bar{\vartheta}^0 + \bar{\vartheta}^0 \frac{\partial \overline{\mathfrak{m}}_z}{\partial \bar{\vartheta}} \bar{\vartheta}^0\right] dz\end{aligned} \tag{14.8}$$

$$\begin{aligned}\delta\Lambda^0_{P_1P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\delta\bar{u}^0 \frac{\partial\bar{\vartheta}^0}{\partial z} \overline{\mathcal{R}} + \alpha^0 \delta\bar{\vartheta}^0 \bar{\rho}_z \overline{\mathcal{R}} + \delta\bar{\vartheta}^0 \frac{\partial \bar{\vartheta}^0}{\partial z} \overline{\mathcal{M}}\right) dz = \int_{P_1}^{P_2} \{ N(\beta_i^0 + \\ &+ \alpha^0 b_i)\, \delta v^{0i} + Q^i [c_{ij} \gamma^0 \delta v^{0j} - (\beta_i^0 + \alpha^0 b_i)\, \delta u^0 + \alpha^0 \delta\varphi_i^0] + T c^{ij} (\beta_j^0 + \\ &+ \alpha^0 b_j) \delta\varphi_i^0 + M_i c^{ij} [(\beta_j^0 + \alpha^0 b_j)\, \delta\psi^0 - \gamma^0 \delta\varphi_j^0] \} a_z\, dz.\end{aligned}$$

Se observă faptul că δV^0, δL^{v0} şi $\delta\Lambda^0$ sînt variaţiile totale exacte ale unor funcţionale. Pentru δV^0 şi δL^{v0} acest lucru este evident, iar pentru $\delta\Lambda^0$ se poate arăta această proprietate dacă se înlocuieşte $\alpha_0 \bar{\rho}_z$ prin $\left(\dfrac{\partial \bar{u}^0}{\partial z} - \bar{\vartheta}^0 \times \bar{\rho}_z\right)$. Se poate scrie deci, pe baza relaţiilor (14.8),

$$\begin{aligned} V^0_{P_1P_2} &= \int_{(\bar{u},\,\bar{\vartheta})}^{(\bar{u}+\bar{u}^0,\,\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}^0)} \delta V^0_{P_1P_2} \\ L^{v0}_{P_1P_2} &= \int_{(\bar{u},\,\bar{\vartheta})}^{(\bar{u}+\bar{u}^0,\,\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}^0)} \delta L^{v0}_{P_1P_2} \\ \Lambda^0_{P_1P_2} &= \int_{(\bar{u},\,\bar{\vartheta})}^{(\bar{u}+\bar{u}^0,\,\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}^0)} \delta \Lambda^0_{P_1P_2} \end{aligned} \tag{14.9}$$

Problema de valori proprii a sistemelor (14.1) sau (14.4) este echivalentă cu studiul ecuației

$$F^0_{P_1P_2} = V^0_{P_1P_2} - \lambda\,(L^{v0}_{P_1P_2} + \Lambda^0_{P_1P_2}) = 0. \tag{14.10}$$

Funcționala $V^0_{P_1P_2}$ este pozitiv definită, iar valorile proprii λ_n ale ecuației (14.10) au proprietăți extremale cunoscute (valori extremale ale sumei $L^{v'}_{P_1P_2} + \Lambda^0_{P_1P_2}$ pe sfera $V^0_{P_1P_2} = 1$). Proprietățile de ortogonalitate reciprocă ale soluțiilor proprii ale acestei ecuații, cît și proprietățile de ortogonalitate ale acestor soluții cu starea de eforturi calculată liniar, sînt cunoscute din teoria generală a stabilității echilibrului elastic. În literatură se întîlnesc de asemenea, teoreme referitoare la proprietățile varietăților critice în spațiul $\{\lambda^\nu\}$ [7].

Prima variație a sistemului (12.3) va fi (introducînd multiplicatorul λ pentru soluția calculată liniar)

$$\rho a_z A\left\{\ddot{\bar u}^0 - a^{ij} b_i \ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j - \lambda a^{ij} b_i \frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\bar\vartheta} \times (\bar\vartheta^0 \times \bar m_j)\right]\right\} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}^0}{\partial z} \tag{14.11}$$

$$\begin{aligned}\rho a_z A a^{ij}\Big\{ &- b_i \bar m_j \times \ddot{\bar u}^0 + \bar m_i \times (\ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j) - \lambda b_i \frac{\partial}{\partial t}\left[(\bar\vartheta^0 \times \bar m_j) \times \dot{\bar u}\right] + \\ &+ \lambda \frac{\partial}{\partial t}\left[(\bar\vartheta^0 \times \bar m_j) \times (\dot{\bar\vartheta} \times \bar m_i)\right] + \lambda \bar m_i \times \frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\bar\vartheta} \times (\bar\vartheta^0 \times \bar m_j)\right]\Big\} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{M}}^0}{\partial z}\,.\end{aligned}$$

Se vede de aici că apare un sistem omogen asemănător cu (12.3) sau (12.4) în care torsorul exterior $(\bar{\mathfrak{r}}_z, \bar{\mathfrak{m}}_z)$ este înlocuit prin torsorul dinamic fictiv (vezi (14.3))

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,din.} &= \bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,st.} + \lambda\rho a_z A a^{ij} b_i \frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\bar\vartheta} \times (\bar\vartheta^0 \times \bar m_j)\right] \\ \bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,din.} &= \bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,st.} + \lambda\rho a_z A a^{ij} \frac{\partial}{\partial t}\Big\{b_i(\bar\vartheta^0 \times \bar m_j) \times \dot{\bar u} - (\dot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j) \times (\dot{\bar\vartheta} \times \bar m_i) - \\ &\quad - \bar m_i \times \left[\dot{\bar\vartheta} \times (\bar\vartheta^0 \times \bar m_j)\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{14.12}$$

După cum sistemului (12.3) îi corespunde sistemul (14.11), sistemului (12.5) îi va corespunde ca primă variație sistemul

$$\begin{aligned}\bar u_P^0 &= \int_{P_1}^{P_2} \Big\{ \frac{\partial \bar u_P}{\partial \bar R_Q}\left[\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,din.} - \rho a_z A\,(\ddot{\bar u}^0 - a^{ij} b_i \ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j)\right]_Q + \frac{\partial \bar u_P}{\partial \bar M_Q}\,\bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,din.} - \\ &\qquad - \rho a_z A a^{ij}\{-b_i \bar m_j \times \ddot{\bar u}^0 + \bar m_i \times (\ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j)\}]_Q \Big\}\, dz_Q \\ \bar\vartheta_P^0 &= \int_{P_1}^{P_2} \Big\{ \frac{\partial \bar\vartheta_P}{\partial \bar R_Q}\,\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,din.} - \rho a_z A\,(\ddot{\bar u}^0 - a^{ij} b_i \ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j)]_Q + \frac{\partial \bar\vartheta_P}{\partial \bar M_Q}\,[\bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,din.} - \\ &\qquad - \rho a_z A\, a^{ij}\{-b_i \bar m_j \times \ddot{\bar u}^0 + \bar m_i \times (\ddot{\bar\vartheta}^0 \times \bar m_j)\}]_Q \Big\}\, dz_Q\end{aligned} \tag{14.13}$$

unde torsorul $(\bar{\mathfrak{r}}_z^{0\,din.}, \bar{\mathfrak{m}}_z^{0\,din.})$ este exprimat prin (14.12)

Dacă se exprimă torsorul dinamic $(\overline{u}^0(t), \overline{\vartheta}^0(t))$ ca serie în raport cu un șir fundamental de torsori statici $(\overline{u}_n, \overline{\vartheta}_n)$, sub forma

$$\{\overline{u}^0(t), \overline{\vartheta}^0(t)\} = \sum_n^{1,\infty} f_n(t) \{\overline{u}_n, \overline{\vartheta}_n\} \tag{14.14}$$

și se introduce expresia (14.14) în unul din sistemele echivalente (14.11) sau (14.13) iar apoi se efectuează produsul scalar cu torsorul $(\overline{u}_m, \overline{\vartheta}_m)$ pentru (14.11) sau, respectiv, cu $\left(\frac{\partial \overline{R}_m}{\partial z}, \frac{\partial \overline{M}_m}{\partial z}\right)$ (vezi (7.2)) pentru (14.13), rezultă un sistem diferențial liniar de tip Hill în raport cu necunoscutele $f_n(t)$,

$$\sum_n^{1,\infty} [A_{mn} \ddot{f}_n(t) + B_{mn}(t) \dot{f}_n(t) + C_{mn}(t) f_n(t)] = 0. \tag{14.15}$$

Periodicitatea soluției calculate liniar implică periodicitatea coeficienților $B_{mn}(t)$ și $C_{mn}(t)$. Dacă soluția calculată liniar are forma particulară $Y = \lambda_0 Y_0 + \lambda_t Y_t \cos \mu t$ (vectorul λ nemaiavînd decît două componente), sistemul (14.15) se particularizează sub forma unui sistem Mathieu,

$$\sum_n^{1,\infty} [a_{mn} \frac{d^2}{dt^2} + b_{mn} + \lambda_0 c_{mn} + \lambda_t d_{mn} \sin \mu t \frac{d}{dt} + \lambda_t e_{mn} \cos \mu t] f_n = 0. \tag{14.16}$$

Dacă se adoptă drept sistem fundamental $(\overline{u}_m, \overline{\vartheta}_m)$ sistemul de funcții proprii de vibrație, matricea a_{mn} se reduce la matricea unitate, iar matricea b_{mn} se reduce la matricea diagonală a patratelor pulsațiilor proprii. Dacă se adoptă drept sistem fundamental $(\overline{u}_m, \overline{\vartheta}_m)$ sistemul de funcții proprii de pierdere a stabilității sub acțiunea stării Y_0, atunci matricea c_{mn} se reduce la rîndul ei la matricea unitate.

Studiul stabilității mișcării cu ajutorul unuia din sistemele (14.11) sau (14.13) revine deci la studiul sistemului Hill (14.15) sau al sistemului Mathieu (14.16), urmînd ca să se determine pentru (14.15) domeniul din spațiul $\{\lambda\}$, în particular pentru (14.16) domeniul din planul (λ_0, λ_t) care asigură condiția ca pentru orice condiții inițiale $f_m(0), \dot{f}_m(0)$, care asigură convergența lui (14.14), soluția $f_m(t)$ să tindă asimptotic spre zero în timp.

Sistemului (12.28) (în care se consideră și mișcarea liberă datorită condițiilor inițiale) îi corespunde variația

$$\overline{u}_P^0(t) = \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{\overline{H}}_Q}(t-\tau)\, \overline{\mathfrak{r}}_{zQ}^{0\, din.}(\tau) + \frac{\partial \overline{u}_P}{\partial \overline{\overline{K}}_Q}(t-\tau)\, \overline{\mathfrak{m}}_{zQ}^{0\, din.}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau + U_P^0(t)$$

(14.17)

$$\overline{\vartheta}_P^0(t) = \int_0^t \left\{ \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{\overline{H}}_Q}(t-\tau)\, \overline{\mathfrak{r}}_{zQ}^{0\, din.}(\tau) + \frac{\partial \overline{\vartheta}_P}{\partial \overline{\overline{K}}_Q}(t-\tau)\, \overline{\mathfrak{m}}_{zQ}^{0\, din.}(\tau) \right] dz_Q \right\} d\tau + \Theta_P^0(t)$$

unde torsorul $(\bar{\mathrm{r}}_z^{0\,din.}(t),\ \bar{\mathrm{m}}_z^{0\,din}(t))$ este exprimat prin (14.12) iar $(\bar{U}_P^0(t),\ \bar{\Theta}_P^0(t))$ reprezintă mişcarea liberă a barei, descrisă de ecuaţiile liniare, corespunzătoare perturbaţiei iniţiale.

Dezvoltarea după relaţia (14.14), înlocuieşte sistemul (14.17) prin sistemul

$$\sum_n^{1,\infty}\left[\mathcal{A}_{mn}\,f_n(t)-\int_0^t\mathcal{B}_{mn}\,(t,\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right]=\sum_n^{1,\infty}\mathcal{A}_{mn}\,F_n\,(t) \tag{14.18}$$

unde termenul liber $F_n(t)$ corespunde mişcării libere $(\bar{U}_P^0\,(t),\ \bar{\Theta}_P^0\,(t))$.

Se vede că sistemele diferenţiale (14.15) şi (14.16) sînt înlocuite de data aceasta prin sistemul liniar de ecuaţii integrale Volterra (14.18), care oferă un instrument nou de cercetare a domeniului de stabilitate a mişcării.

Sistemului (12.5) îi corespunde variaţia

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{u}}^0 &= \bar{h}^0 - b_i c^{ij}(\bar{m}_j\bar{k}^0)\,\bar{\tau} + \frac{b_l a^{lj} c_{ji}}{\overset{k}{a}_k}(\bar{\tau}\bar{k}^0)\bar{m}^i - b_i c^{ij}(\bar{\vartheta}^0\bar{m}_j\bar{k})\,\bar{\tau} - \\
&- b_i c^{ij}(\bar{m}_j\bar{k})\bar{\vartheta}^0\times\bar{\tau} + \frac{b_l a^{lj} c_{ji}}{\overset{k}{a}_k}(\bar{\vartheta}^0\bar{\tau}\bar{k})\,\bar{m}^i + \frac{b_l a^{lj} c_{ji}}{\overset{k}{a}_k}(\bar{\tau}\bar{k})\bar{\vartheta}^0\times\bar{m}^i \\
\dot{\bar{\vartheta}}^0 &= \frac{1}{\overset{k}{a}_k}\left[(\bar{\tau}\bar{k}^0) - a^{ij}b_i c_{kj}(\bar{m}^k\bar{h}^0)\right]\bar{\tau} + c^{ik}\left[b_{ij}c^{jl}(\bar{m}_l\bar{k}^0) - \right. \\
&\left. - b_i(\bar{\tau}\bar{h}^0)\right]\bar{m}_k + \frac{1}{\overset{k}{a}_k}\left[(\bar{\vartheta}^0\bar{\tau}\bar{k}) - a^{ij}b_i c_{kj}(\bar{\vartheta}^0\bar{m}^k\bar{h})\right]\bar{\tau} + \\
&+ \frac{1}{\overset{k}{a}_k}\left[(\bar{\tau}\bar{k}) - a^{ij}b_i c_{kj}(\bar{m}^k\bar{h})\right]\bar{\vartheta}^0\times\bar{\tau} + c^{ik}\left[b_{ij}c^{jl}(\bar{\vartheta}^0\bar{m}_l\bar{k}) - \right. \\
&\left. - b_i(\bar{\vartheta}^0\bar{\tau}\bar{h})\right]\bar{m}_k + c^{ik}\left[b_{ij}c^{jl}(\bar{m}_l\bar{k}) - b_i(\bar{\tau}\bar{h})\right]\bar{\vartheta}^0\times\bar{m}_k \\
\rho a_z\,A\dot{\bar{h}}^0 &= \frac{\partial\bar{\mathfrak{R}}^0}{\partial z} \\
\rho a_z\,A\dot{\bar{k}}^0 &= \frac{\partial\bar{\mathfrak{M}}^0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{14.19}$$

unde torsorul $\left(\dfrac{\partial\bar{\mathfrak{R}}^0}{\partial z},\ \dfrac{\partial\bar{\mathfrak{M}}^0}{\partial z}\right)$ are drept componente primii membri ai sistemului (14.1).

Sistemul (14.19) permite studiul direct prin metodele generale ale teoriei stabilităţii mişcării, al domeniului de stabilitate a mişcării. Adoptînd o dezvoltare de forma (14.14), sistemul (14.19) revine la un sistem diferenţial liniar de ordinul I,

$$\sum_n^{1.\infty}\alpha_{mn}\dot{f}_n + \beta_{mn}(t)f_n(t) = 0 \tag{14.20}$$

cu coeficienţii α_{mn} constanţi, iar coeficienţii $\beta_{mn}(t)$ periodici.

Primită la redacţie la 22 ianuarie 1960.

УРАВНЕНИЯ УПРУГИХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ (II)

РЕЗЮМЕ

На основании соотношений, полученных в первой части работы, выводятся уравнения линейной динамики и устойчивости стержней.

Приводятся выражения для динамических функционалов стержня (количества движения, кинетического момента, кинетической энергии, функции Лагранжа и функции Гамильтона) и для потока энергии вдоль стержня.

Движение стержня описывается с помощью как дифференциальных, так и интегральных соотношений. Дифференциальные соотношения (представлены в векторном и скалярном виде) вытекают из применения теоремы торзора (оператора, характеризующего скользящий вектор), уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона. На основании функциональных выражений торзора статических перемещений получаются простые интегральные уравнения динамики, а на основании динамической теоремы взаимности получаются функциональные выражения торзора перемещений в виде двойного интеграла. Выявляется связь между статическим и динамическим торзорами влияния. Представляются способы формулирования линейной задачи движения стержня.

Эффекты нелинейности уравнений стержня выявляются на основании исследования в первом приближении. Для изучения эффектов нелинейности формулируются две задачи:

— определение области устойчивости равновесия или движения стержня, и

— расчет, корректируемый с учетом нелинейных эффектов внутри области устойчивости. Исходя из определения местной устойчивости равновесия и движения, даются методы вывода уравнений устойчивости в качестве первых вариаций нелинейных уравнений вокруг недеформированного положения стержня.

Уравнения устойчивости равновесия представлены как в дифференциальном, так и в интегральном видах. Вычисляются статические функционалы, позволяющие определить собственные значения при помощи задачи обусловленного экстремума. С целью определения области устойчивости движения приводятся несколько эквивалентных систем уравнений. Эти системы являются первыми вариациями уравнений движения и ведут, соответственно, к обыкновенной дифференциальной линейной системе второго порядка, интегральной линейной системе типа Вольтерра и обыкновенной дифференциальной линейной системе первого порядка.

ÉQUATIONS DES BARRES MINCES ÉLASTIQUES. II

RÉSUMÉ

Les relations établies dans la première partie du travail permettent de déduire les équations de la dynamique linéaire et de la stabilité des barres.

L'auteur présente des relations exprimant les fonctionnelles dynamiques d'une barre (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique, lagrangien et hamiltonien) ainsi que le flux d'énergie le long d'une barre.

Il décrit le mouvement de la barre aussi bien au moyen des relations différentielles que des relations intégrales. Les relations différentielles (vectorielles et scalaires) sont déduites de l'application du théorème du torseur, des équations de Lagrange et des équations de Hamilton. On obtient, en vertu des expressions fonctionnelles du torseur des déplacements statiques, les équations intégrales simples de la dynamique. En vertu du théorème dynamique de réciprocité, l'auteur obtient les expressions fonctionnelles du torseur des déplacements sous la forme d'une intégrale double. Il fait ressortir la liaison entre les torseurs d'influence, statique et dynamique. En outre, il présente les modes de formuler le problème linéaire du mouvement de la barre.

Les effets de la non-linéarité des équations de la barre sont mis en évidence en vertu d'une étude en première approximation. L'étude des effets de la non-linéarité soulève deux problèmes :

— la détermination du domaine de stabilité de l'évolution de la barre, et ;

— le calcul, corrigé par des effets non linéaires, à l'intérieur du domaine de stabilité. En partant des définitions de la stabilité locale, de l'équilibre et du mouvement, l'auteur présente des méthodes permettant de déduire les équations de stabilité en tant que premières variations des équations non linéaires autour de la position non déformée de la barre.

Les équations de la stabilité de l'équilibre sont données aussi bien sous la forme différentielle que sous la forme intégrale. L'auteur a calculé les fonctionnelles statiques qui permettent de déterminer les valeurs propres au moyen d'un problème d'« extremum lié ». Afin de déterminer le domaine de stabilité du mouvement, il donne quelques systèmes équivalents d'équations. Ces systèmes qui représentent les premières variations des équations du mouvement, conduisent, respectivement : à un système linéaire différentiel ordinaire du IIe ordre, à un système linéaire intégral du type Volterra et à unsystème linéaire différentiel ordinaire du Ier ordre.

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. БАБАКОВ, *Теория колебаний*. ГИТТЛ, Москва, 1958.
2. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*. ГИТТЛ, Москва, 1956.
3. Х. ГОЛЬДШТЕЙН, *Классическая механика*. ГИТТЛ, Москва, 1957.
4. А. И. ЛУРЬЕ, *Общая теория упругих тонких оболочек*. ПММ, IV, 2, Москва, 1940.
5. С. Г. МИХЛИН, *Прямые методы в математической физике*. ГИТТЛ, Москва, 1950.
6. И. Л. НУДЕЛЬМАН, *Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем*. Гостехиздат, Москва, 1949.
7. П. Ф. ПАПКОВИЧ, *Строительная механика корабля*. Судпромгиз, Ленинград, 1941.
8. S. D. PONOMAREV şi colab., *Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini*. **II.** Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
9. А.Р.РЖАНИЦЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем*. ГИТТЛ., Москва, 1955.
10. С. ТИМОШЕНКО, *Устойчивость упругих систем*. ГИТТЛ. Москва, 1955.

REZISTENȚA LA UZURĂ A SCULEI ÎN FUNCȚIE DE PARAMETRII GEOMETRICI AI ACESTEIA

DE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU

Partea activă a unei scule așchietoare are o formă geometrică dictată de două condiții mai importante și anume :

a) forma geometrică a piesei ce trebuie executată și metoda aleasă pentru prelucrarea ei,

b) fenomenele ce rezultă din procesul așchierii metalelor.

Prima condiție are un caracter tehnologic și se rezolvă de la caz la caz direct în uzine sau de către unitățile de proiectare tehnologică.

A doua condiție a format și formează obiectul de studiu al multor oameni de știință, ingineri și muncitori de la noi din țară și din străinătate. Această problemă, în afară de importanța științifică pe care o are pentru elucidarea fenomenelor ce se produc în timpul așchierii metalelor, are și o importantă latură economică. Creșterea productivității muncii și micșorarea consumului de scule așchietoare sînt influențate direct de geometria pe care o are scula. Acest lucru este dovedit cu prisosință de către oamenii de știință cît și muncitorii înaintați din industria prelucrătoare.

Trebuie menționat că în cercetarea geometriei sculelor rezultate deosebite s-au obținut în U.R.S.S. unde oamenii de știință ca M. N. Larin [1], A. M. Rozenberg, A. N. Eremin [2], N. N. Zorev [3] au fundamentat teoretic cîteva aspecte ale acestei probleme. De asemenea, o serie de muncitori fruntași ca Bîkov, Borkevici și Kolesov au reușit pe baza experienței lor, să găsească geometrii de sculă, care le-au permis să creeze metoda de așchiere rapidă și cea de așchiere intensivă, cunoscute ca metode de înaltă productivitate.

Practica cît și necesitatea de a cunoaște fenomenul fizic al așchierii metalelor în toată plenitudinea lui, au impus cercetarea geometriei părții active a sculelor așchietoare. Cunoașterea calitativă și cantitativă a legilor după care se conduce fenomenul fizic al așchierii metalelor nu a putut fi complet rezolvată. În momentul de față se cunoaște, cu caracter de generalizare, numai latura calitativă a fenomenului. Aceasta datorită faptului că din multitudinea de parametri ce influenţează mai mult sau mai puţin evoluţia fenomenului fizic al aşchierii metalelor, nu s-au putut încă separa acei parametri care au ponderea cea mai mare şi ar putea permite generalizarea rezultatelor teoretice şi experimentale.

În lucrarea de faţă se dă o rezolvare pentru problema geometriei cuţitului de strung în cazul prelucrărilor ce se fac pe piese din oţel-carbon obişnuit, prelucrat la cald (STAS 500-49). Au fost alese pentru cercetările experimentale oţelurile carbon obişnuite deoarece ele au o largă utilizare în industria constructoare de maşini.

Este cunoscut că pentru determinarea prelucrabilităţii o importanţă deosebită o are compoziţia chimică a oţelului. Din această cauză s-a făcut analiza epruvetelor din cele cinci oţeluri experimentate, rezultatele fiind prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Oţelul experimentat	σ_r kgf/mm^2	Compoziţia chimică %			Impurităţi %	
		C	Mn	Si	S	P
OL 38	39,2	0,12	0,44	0,01	0,022	0,015
OL 42	46,5	0,23	0,57	0,18	0,022	0,017
OL 50	56,0	0,28	0,80	0,35	0,028	0,030
OL 60	66,6	0,45	0,71	0,24	0,053	0,040
OL 70	83,4	0,63	0,70	0,26	0,031	0,046

Determinarea geometriei optime este strîns legată de fenomenele de frecare ce au loc în timpul procesului de aşchiere. Astfel frecarea apare pe planurile de alunecare ale aşchiei, deci este vorba de o frecare internă şi ea se mai manifestă şi pe suprafeţele de contact dintre piesă, aşchie şi sculă. Pentru a vedea care este ponderea frecării de pe suprafeţele de contact, la determinarea geometriei optime s-au utilizat cuţite de strung din diferite materiale. Pentru ca cercetarea acestui aspect al problemei să dea posibilitatea unor interpretări corecte s-au folosit două grupe de materiale de scule şi anume : plăcuţe mineralo-ceramice ENC produse de Institutul INCERC, plăcuţe din carburi, metalice sovietice de tipul TK şi germane de tipul S.

Pentru ca rezultatele experimentale să poată fi comparabile, s-a ales acelaşi criteriu de uzură şi anume uzura de pe faţa de aşezare secundară, admiţîndu-se ca valoare plafon $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm [4], [5], [6].

Cercetarea parametrilor geometrici a fost concentrată asupra principalelor unghiuri ale părţilor active ale cuţitului de strung şi anume : unghiul de degajare γ, unghiurile de aşezare principal α şi secundar α_1, unghiurile de atac principal $\varkappa$ şi secundar $\varkappa_1$, precum şi unghiul de înclinaţie al muchiei principale tăietoare λ (fig. 1).

Aceste unghiuri au fost studiate ţinîndu-se seama de evoluţia uzurii în timp, iar pentru a simplifica interpretarea datelor experimentale s-a introdus numărul adimensional τ_i. Valoarea lui este dată de raportul dintre durabilitatea T_i a cuțitului pentru o mărime oarecare a unghiului studiat și $T_{i\,\mathrm{opt.}}$ cea corespunzătoare mărimii optime a aceluiași unghi.

$$\tau_i = \frac{T_i}{T_{i\,\mathrm{opt.}}} \qquad (i = \gamma,\ \alpha,\ \alpha_1 \text{ etc.}). \qquad (1)$$

Unghiul de degajare γ este cel mai mult influențat de caracteristicile mecanice ale materialului prelucrat. El este cel care influențează prin valoarea sa asupra gradului de deformare al zonei de așchiere, făcînd să se schimbe unghiul planului de alunecare al elementului de așchiere în raport cu direcția de așchiere. Aceste lucruri sînt ilustrate în figura 2, unde este dată variația valorii coeficientului adimensional τ_γ în funcție de valoarea unghiului de degajare pentru cele cinci oțeluri studiate.

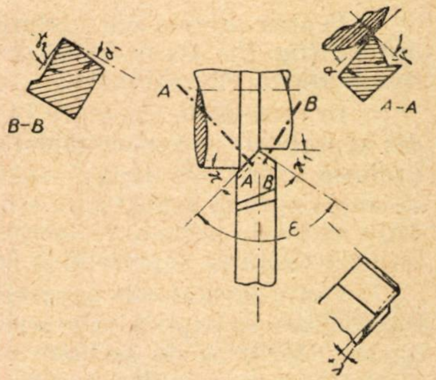


Fig. 1. — Unghiurile cuțitului de strung.

Apare evident din această figură că valoarea optimă a unghiului γ este funcție de caracteristicile mecanice ale oțelului prelucrat. Alegînd drept criteriu rezistența de rupere la tracțiune a oțelului prelucrat, se poate afirma că scăderea acestei rezistențe atrage după sine o creștere a valorii unghiului de degajare.

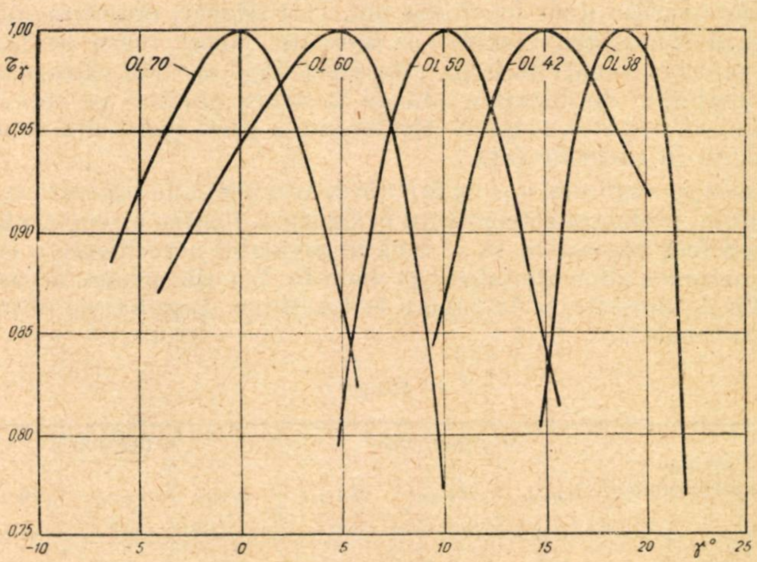


Fig. 2. — Variația coeficientului τ_γ funcție de unghiul γ la oțelurile OL 38, OL 42, OL 50, OL 60 și OL 70.

Înainte de a analiza variația unghiului γ în funcție de rezistența de rupere la tracțiune este necesar să se examineze fenomenele ce iau naștere cînd unghiul de degajare își schimbă valoarea, iar rezistența oțelului este constantă.

Pentru oricare din oțelurile studiate unghiul γ prezintă o valoare optimă (fig. 2). Această valoare dă evoluția cea mai lentă a uzurii, deci durabilitatea cea mai mare.

În cercetările efectuate [4], [5] s-a constatat că este indiferent care din suprafețele active ale sculei sînt ținute sub observație pentru a urmări evoluția uzurii, ele ducînd toate la aceeași concluzie în ceea ce privește valoarea optimă a unghiului studiat. În aceste condiții s-a ales drept criteriu uzura de pe fața de așezare secundară, deoarece ea influențează nemijlocit calitatea suprafeței și precizia prelucrării.

Panta crescătoare a curbei de variație a unghiului γ în funcție de durabilitate se explică prin aceea că o dată cu creșterea unghiului de degajare, eforturile de așchiere scad. Această scădere atrage după sine o micșorare a presiunilor ce iau naștere pe fețele de contact dintre sculă, piesă și așchie, scăzînd astfel și forțele de frecare. Se poate deci afirma că o dată cu creșterea unghiului γ evoluția uzurii în timp se face mai lent. Această concluzie este valabilă pînă la valoarea optimă a unghiului de degajare, deoarece o creștere mai departe a valorii acestui unghi atrage după sine apariția unor fenomene noi. Într-adevăr, creșterea unghiului γ micșorează robustețea muchiei așchietoare. Acest lucru se face simțit pentru valori mai mari decît $\gamma_{opt.}$, deoarece după această valoare orice creștere a unghiului de degajare adaugă la uzura produsă pe suprafețele de contact și distrugerea muchiei așchietoare a cărei rezistență se dovedește insuficientă în cazul de față.

Variația unghiului $\gamma_{opt.}$ ca funcție de rezistență de rupere la tracțiune a materialului prelucrat este arătată în figura 3. Pentru a reprezenta această variație a fost necesar ca să se facă în prealabil o verificare a caracteristicilor mecanice ale materialelor prelucrate. S-a ales pentru aceasta caracteristicile de duritate și de rupere la tracțiune. Rezultatele obținute sînt redate în tabela 2.

Tabela 2

Oțelul experimentat	H_B (kgf/mm^2)			σ_r (kgf/mm^2)		
	$H_{B\,min}$	$H_{B\,med}$	$H_{B\,max}$	$\sigma_{r\,min}$	$\sigma_{r\,med}$	$\sigma_{r\,max}$
OL 38	108	110	111	37,3	39,2	40,5
OL 42	117	123	131	44,6	46,5	47,5
OL 50	146	153	160	55	56	57
OL 60	167	175	183	63	66,6	68,5
OL 70	230	238	245	79	83,4	87

Toate considerațiile ce se vor face mai departe vor avea la bază valorile medii ale durității Brinell sau ale rezistenței de rupere la tracțiune.

Valorile experimentale obţinute duc la următoarea formulă de legătură între duritate şi rezistenţa de rupere la tracţiune :

$$\sigma_{r\,\text{med}} = 0{,}34\ H_{B\,\text{med}} + 3{,}81. \tag{2}$$

Formula (2) poate folosi pentru a înlocui în diagrama din figura 3 sau în alte diagrame prezentate în această lucrare rezistenţa de rupere la tracţiune cu duritatea Brinell. Aceeaşi operaţie se poate face şi în formulele de calcul al valorii optime a unghiului de degajare.

După cum se poate uşor constata din figura 3, în scară semilogaritmică dependenţa dintre rezistenţa de rupere la tracţiune şi unghiul $\gamma_{\text{opt.}}$ are o variaţie liniară, care poate fi exprimată în una din următoarele forme matematice :

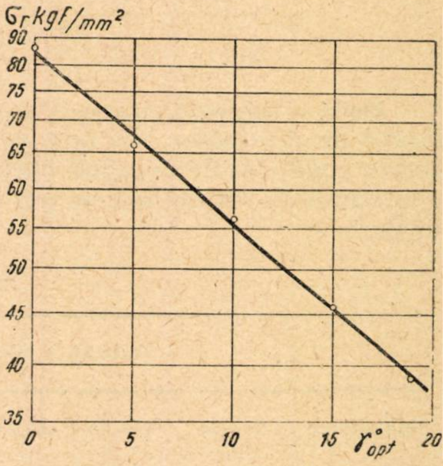


Fig. 3. — Variaţia valorii optime a unghiului γ în funcţie la rezistenţa de rupere la tracţiune.

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{82{,}22}{\sigma_{r\,\text{med}}}, \tag{3}$$

sau

$$e^{\gamma} = \left(\frac{82{,}22}{\sigma_{r\,\text{med}}}\right)^{25{,}54}, \tag{4}$$

unde s-a notat :

γ — unghiul de degajare în grade,

$\sigma_{r\,\text{med}}$ — rezistenţa medie de rupere la tracţiune a materialului de prelucrat în kgf/mm².

Ţinînd seama de relaţia (2), expresiile (3) şi (4) devin

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{21{,}6}{1 + 0{,}0894\ H_{B\,\text{med}}}, \tag{5}$$

$$e^{\gamma} = \left(\frac{21{,}6}{1 + 0{,}0894\ H_{B\,\text{med}}}\right)^{25{,}54}, \tag{6}$$

unde s-au utilizat notaţiile :

γ — unghiul de degajare în grade

$H_{B\,\text{med}}$ — duritatea medie a materialului prelucrat în kgf/mm².

Formulele de calcul (3)...(6) dau posibilitatea de a determina cu precizie valoarea unghiului de degajare în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune sau de duritatea Brinell. Desigur că aplicarea în industrie sub această formă ar fi greoaie, de aceea pentru oţelul carbon obişnuit (STAS 500-49) se propun mai multe variante tabelare care pot fi alese în funcţie de eroarea pe care condiţiile locale o permit.

O primă variantă apare din indicaţiile pe care le dă STAS 500-49 pentru limitele rezistenţei de rupere la tracţiune în cazul fiecărui oţel în parte şi care este prezentată în tabela 3.

Tabela 3

Oțelul	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
σ_r (kgf/mm²)	38—47	42—52	50—60	60—70	70—85
γ	17°	15°	10°	6°	1°

Dacă se lucrează cu aceste valori pentru γ se admite o cădere a durabilității de maximum 5 % față de valoarea durabilității sculei corespunzătoare unghiului de degajare optim. Lărgind la 6 % abaterea maximă de la durabilitatea optimă, se pot prezenta încă două variante ce se dau în tabela 4.

Tabela 4

	Varianta a II-a				Varianta a III-a		
σ_r (kgf/mm	35—45	45—55	55—65	65—85	38—50	50—63	63—85
γ	18°	13°	8°	2°	16°÷17°	9°÷10°	2°÷3°

În toate aceste trei variante valoarea maximă a durabilității se obține pentru valoarea medie a intervalului de variație al lui σ_r indicată pentru un anumit unghi de degajare, astfel că la marginile intervalului va avea loc maximum de abatere de la durabilitatea corespunzătoare unghiului γ indicat ca optim. Examinînd aceste trei variante se poate spune că cea mai comodă pentru industrie este cea de-a treia, deoarece în acest caz ascuțitoria nu trebuie să aibă o gamă prea variată de scule, dar se ajunge în același timp și la un consum mai mare de scule datorită creșterii prezenței reascuțirii.

Rezultate deosebite în analiza valorilor optime ale unghiului de degajare se pot obține și din interpretarea dependenței care există între acest unghi și conținutul de carbon. Analiza conținutului chimic al oțelurilor experimentate a permis să se găsească legătura dintre rezistența medie de rupere la tracțiune și conținutul de carbon. În figura 4 este arătată legea de variație a rezistenței medii de rupere la tracțiune cu conținutul de carbon al oțelului exprimat în procente.

Se poate remarca cu ușurință că între aceste două valori există o dependență liniară care se exprimă prin expresia

$$\sigma_r = 85{,}8 \cdot C + 29{,}4, \tag{7}$$

unde este notat σ_r — rezistența medie de rupere la tracțiune în kgf/mm²;
C — conținutul de carbon al oțelului în procente.

Această legătură simplă între σ_r și C permite să se treacă cu ușurință la înlocuirea rezistenței medii de rupere la tracțiune din formula (3) cu valoarea sa din formula (7) în funcție de conținutul de carbon și rezultă

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{82{,}22}{85{,}8\ (C + 0{,}34)} \cdot \qquad (8)$$

Rezultatele cercetării exprimate în formula (8) scot în evidență legătura ce există între unghiul de degajare și conținutul de carbon al oțelului.

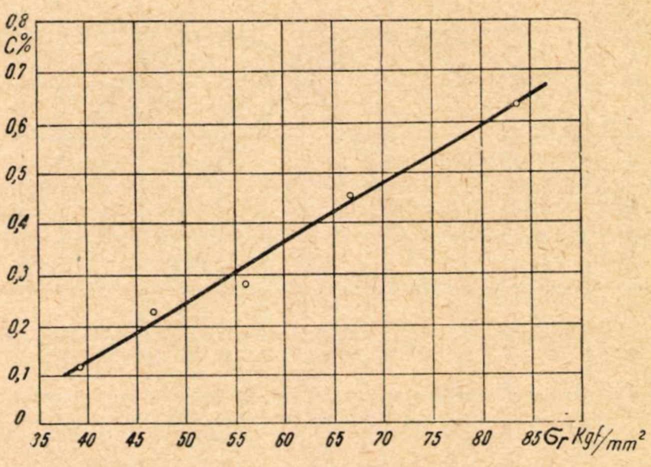


Fig. 4. — Variația rezistenței de rupere la tracțiune în funcție de conținutul de carbon al oțelurilor experimentate.

Se poate constata că o dată cu creșterea conținutului de carbon, pentru a realiza o îndepărtare a așchiei în condiții optime este necesară o scădere a valorii unghiului de degajare.

Toate considerațiile făcute pînă acum ca și cele ce vor urma au la bază experiențele efectuate pe oțelurile din STAS 500-49 care au fost laminate la cald și nu au suferit nici un fel de tratament termic ulterior laminării.

Unghiurile de așezare principal și secundar și unghiul de atac secundar au în procesul așchierii roluri similare. Datorită deformațiilor plastice ce au loc în zona desprinderii așchiilor între suprafața de așezare principală și cea de așchiere a piesei se creează o suprafață de contact. Pe această suprafață de contact lucrează forțele de frecare, de mărimea cărora depinde evoluția uzurii în timp. Unghiul α are rolul de a îndepărta fața de așezare principală a sculei de cea de așchiere a piesei. Este evident că o dată cu creșterea acestui unghi va scădea suprafața de contact. În cazul unui regim de așchiere constant și al unui unghi de degajare de asemenea constant, se poate considera că deformațiile ce iau naștere în piesă și sculă sînt constante. Admițînd această ipoteză putem spune că variația unghiului de așezare principal va face ca suprafața de contact să crească sau să scadă ceea ce atrage o scădere sau o creștere a presiunilor ce se exercită pe această suprafață.

Pentru valorile mici ale unghiului α vom avea o suprafață de contact mare, care face ca uzura să se manifeste inițial pe o suprafață mare și din această cauză, pentru a atinge uzura plafon este necesar un timp scurt. Pe măsură ce unghiul de așezare principal crește în valoare vor crește și presiunile pe suprafața de contact din cauză că ea se micșorează.

Evoluția uzurii va fi mai lentă pe măsură ce suprafața de contact se micșorează pînă cînd creșterea presiunilor pe această suprafață ajunge

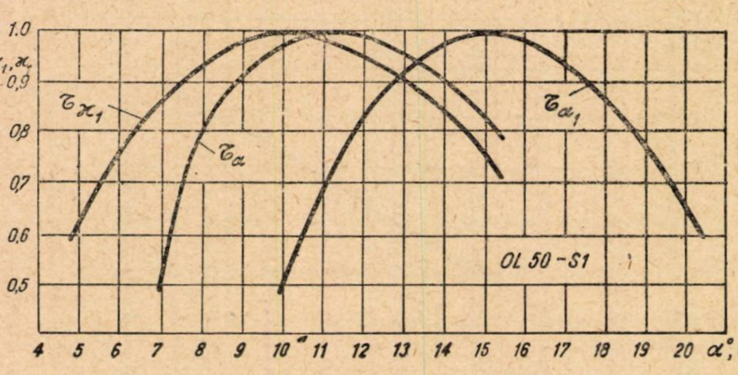


Fig. 5. — Variația coeficienților τ_α, τ_{α_1} și $\tau_{\varkappa_1}$ în funcție de unghiurile α, α_1 și $\varkappa_1$, în cazul așchierii oțelului OL 50.

suficient de mare ca să accelereze uzura pe suprafața de contact. Din acest moment evoluția uzurii în timp va fi mai rapidă pe măsură ce unghiul de așezare principal crește. Pentru a ilustra cele spuse mai sus se prezintă în figura 5 pentru oțelul OL 50 felul în care coeficientul τ_α își schimbă valoarea în funcție de unghiul α. Tot în această figură este arătată și variația lui τ_{α_1} și $\tau_{\varkappa_1}$ cu unghiurile de așezare secundar, și cel de atac secundar.

Unghiul de așezare secundar are același rol ca și cel de așezare principal și anume de valoarea lui depind mărimile suprafeței de contact creată între fața de așezare secundară și cea de așchiere secundară și a presiunilor pe această suprafață. Din această cauză analiza făcută mai sus pentru unghiul α este valabilă și în cazul de față. Se observă că și valorile optime ale acestor două unghiuri sînt diferite în cazul aceluiași oțel (fig. 5) și anume $\alpha = 11°$ și $\alpha_1 = 15°$. Acest lucru se explică prin aceea că pe fața de așchiere principală deformațiile ce au loc în procesul de așchiere sînt mai mari decît pe fața de așchiere secundară. Ca urmare a acestui fapt presiunile sînt mai mari și prin micșorarea suprafeței de contact o dată cu creșterea unghiului α presiunile ajung mai repede la acele valori care duc la accelerarea uzurii.

Unghiul de atac secundar are o importanță deosebită, deoarece de valoarea sa depinde mărimea suprafeței de așchiere rămasă pe piesă, deci gradul de netezire al suprafeței prelucrate. Valoarea acestui unghi poate deci să fie aleasă din considerente tehnologice, dar cum asupra suprafeței de așchiere rămase pe piesă influențează și alți parametri cum ar fi de exemplu avansul, este necesar să se cunoască valoarea optimă a acestui unghi din punct de vedere al durabilității. Din figura 5 se poate observa cu ușurință că legea de variație a coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$, funcție de unghiul de atac secundar este similară cu aceea constatată în cazul unghiurilor de așezare.

Această asemănare reiese și din analiza fenomenului fizic. Vom avea două cazuri extreme distincte și anume:

a) Pentru unghiuri de atac principal care au valoarea în jurul a 45°, creșterea unghiului $\varkappa_1$ atrage după sine o micșorare a suprafeței de contact dintre fața de așezare secundară și cea de așchiere secundară. Această situație intervine pentru valorile uzuale ale unghiului $\varkappa_1$. Fenomenele care se petrec pe suprafața de contact în acest caz sînt analizate pentru unghiurile de așezare și deoarece își mențin același caracter nu se revine asupra lor.

Este cunoscut că valorile cele mai uzuale ale unghiului de atac secundar sînt $\varkappa_1 = 5° \ldots 20°$. Studierea acestui unghi se face cu menținerea constantă a unghiului de atac principal, deci orice creștere a valorii lui $\varkappa_1$ atrage după sine o micșorare a unghiului ε de vîrf a cuțitului. Cazul *a* este valabil numai pentru valori ale lui ε mai mari ca 90°, fiindcă numai în acest caz, prin creșterea unghiului de atac secundar se obține o scădere a suprafeței de contact dintre fața de așezare secundară și cea de așchiere secundară.

b) Al doilea caz îl formează situația creată de valorile $\varepsilon < 90°$, cînd pentru orice creștere a unghiului $\varkappa_1$ se obține o creștere a suprafeței de contact. Legea de variație a coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$ cu unghiul de atac secundar are aceeași alură ca și în primul caz, numai că interpretarea fenomenelor se face ca și cînd în primul caz am analiza ce se întîmplă dacă unghiul $\varkappa_1$ scade în valoare.

Experiențele efectuate pe cele cinci oțeluri au dat aceleași valori optime pentru unghiurile de așezare principal și secundar și pentru cel de atac secundar și anume:

$$\alpha = 11°, \qquad \alpha_1 = 15° \text{ și } \varkappa_1 = 10°. \tag{9}$$

Aceste rezultate dau posibilitatea să se afirme că în cazul oțelurilor din STAS 500-49, caracteristicele mecanice ale materialului de prelucrat au o influență practic neglijabilă asupra valorii optime a acestor trei unghiuri, cu toate că suprafețele de contact dintre piesă și fețele de așezare ale sculei au valori diferite de la oțel la oțel și la fel presiunile ce iau naștere pe ele. Aceste schimbări, așa cum s-a dovedit experimental nu influențează asupra valorii optime a unghiurilor sus-amintite și numai asupra valorii durabilității sculei, care pentru un regim constant de așchiere scade pe măsură ce rezistența medie de rupere la tracțiune crește.

Unghiul de atac principal prezintă de asemenea aspecte comune pentru toate oțelurile experimentate. Creșterea unghiului atrage după sine o scădere a suprafeței de contact dintre fața de așezare principală a sculei și cea de așchiere a piesei. Rezultă de aici că și presiunile ce lucrează pe această față vor crește o dată cu mărirea unghiului de atac principal, ceea ce va duce la scăderea durabilității sculei. Într-adevăr în toate cazurile experimentate pentru valori ale lui $\varkappa = 30° \div 90°$, deci la valorile uzual întrebuințate în industrie, se remarcă o scădere a durabilității de $20 \div 65\%$, fapt ce poate fi constatat în figura 6 pentru cîteva oțeluri.

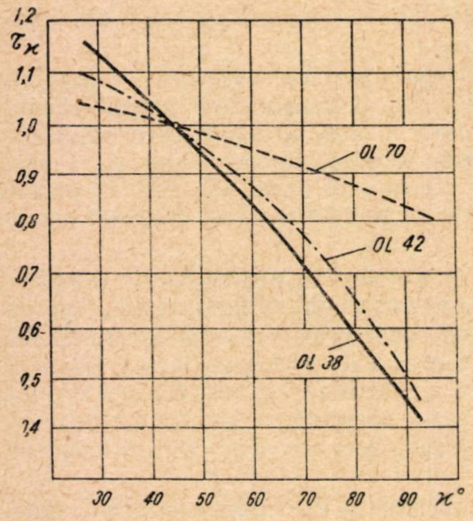


Fig. 6. — Variația coeficientului $\tau_\varkappa$ în funcție de unghiul $\varkappa$ în cazul așchierii unora dintre oțeluri.

În domeniul de valori ale unghiului de atac principal pentru care s-au făcut experiențele, curba de variație a lui $\tau_\varkappa$ funcție de $\varkappa$ nu prezintă un maxim. În aceste condiții s-a ales drept mărime de comparație durabilitatea corespunzătoare unghiului $\varkappa = 45°$, pentru care urmează $\tau_\varkappa = 1$.

Deoarece durabilitatea cea mai mare o are scula pentru valori $\varkappa = 30°$ este recomandabil să se lucreze cu această valoare. Practic în industrie această valoare rar poate fi utilizată fie din cauză că piesa sau mașina-unealtă nu are o rigiditate suficientă, fie din motive tehnologice specifice fiecărei forme de piese, care cer o anumită valoare pentru unghiul de atac principal. Aceste cauze fac ca alegerea unghiului $\varkappa$ să se facă de cele mai multe ori după alte criterii decît cel al valorii optime din punct de vedere al durabilității sculei. Cu toate acestea, în atenția tehnologului și a constructorului de mașini trebuie să se afle și acest criteriu de alegere a unghiului de atac principal, deoarece așa cum s-a arătat pentru valori mai mari ale lui $\varkappa$ vom avea un consum neeconomic de scule.

Unghiul de înclinație al muchiei așchietoare principale are deobicei în industrie valorile $\lambda = -5° \ldots +5°$. Toate experiențele efectuate în acest domeniu de variație a unghiului au dus la concluzia că valoarea lui optimă este $\lambda \approx 0$. Influența lui asupra durabilității este foarte mică și nu depășește 5% pentru domeniul amintit, deoarece variația unghiului de înclinație al muchiei așchietoare principale produce schimbări mici în dimensiunile suprafeței de contact. Aceste rezultate permit a se afirma că în domeniul $\lambda = -5° \ldots +5°$ se poate alege orice valoare după considerente specifice locului de muncă, fără ca prin aceasta să se dăuneze durabilității sculei.

Studiul efectuat permite să se facă și unele aprecieri care privesc în general problema geometriei optime a unei scule. Schimbarea valorii oricărui unghi produce în zona de așchiere deformații asupra piesei, diferite de cele care au loc pentru valoarea sa optimă. Aceste deformații sînt defavorabile durabilităţii sculei deoarece ele duc la o accelerare a uzurii pe toate feţele active ale acesteia.

Pentru a cunoaşte influenţa pe care o poate avea materialul, din care este confecţionată scula, asupra geometriei s-au făcut experienţe, aşa după cum s-a arătat, cu scule armate cu plăcuţe din carburi metalice şi mineralo-ceramice. Rezultatul lor dovedeşte că pentru materialele de scule care au durităţi apropiate nu se poate vorbi de o diferenţiere a geometriei optime privite prin prisma durabilităţii sculei. Acest lucru se explică prin aceea că deformaţiile pe care le suportă suprafeţele active ale sculei sînt mici şi ele se schimbă foarte puţin în funcţie de materialul din care este confecţionată scula. Aceste mici schimbări nu duc la variaţii importante ale mărimii suprafeţelor de contact dintre piesă şi sculă şi de aceea ele nu sînt perceptibile, permiţînd să se afirme că practic geometria optimă prezentată pentru oţelurile STAS 500-49 nu depinde de materialul din care este confecţionată scula, dacă aceste materiale au durităţi apropiate. Desigur că în procesul de aşchiere materialul sculei şi al piesei joacă un rol important şi el apare în special la unghiul de degajare, dar şi în cazul celorlalte unghiuri se face simţit. Curbele de variaţie ale coeficientului τ_i funcţie de oricare dintre unghiuri sînt influenţate de materialul din care este confecţionată scula. Această influenţă nu se reflectă asupra valorilor optime ci asupra pantelor curbelor care în funcţie de coeficientul dinamic al frecării, specific fiecărei perechi de materiale sînt mai mici sau mai mari.

Practic acest lucru nu interesează industria decît în ceea ce priveşte posibilităţile de abatere de la valorile optime, care dacă vor fi îngrădite la $\pm 1°$, nu vor produce variaţii asupra durabilităţii sculei, de interes economic.

Analizînd rezultatele obţinute în această problemă a geometriei optime în U.R.S.S. şi R.D.G. se poate spune că pentru materiale similare cu cele din STAS 500-49, în aceste ţări se recomandă alte valori de unghiuri. Astfel în U.R.S.S. pentru oţel cu $\sigma_r < 80$ kgf/mm^2, $\gamma = 16°-10°$, $\alpha = \alpha_1 = 8°-12°$, iar în R.D.G. $\gamma = 12°-6°$, $\alpha = 5°$ pentru carburi metalice şi $\gamma = 26°-12°$, $\alpha = 4°-8°$ pentru oţel rapid. Technik Hochschule Dresden recomandă pentru plăcuţe din carburi metalice $\gamma = 12°-4°$. Din aceste cîteva valori reprezentate din literatura străină de specialitate rezultă o contradicţie asupra mărimii valorilor optime a unghiurilor sculei. Dacă pe oţelurile carbon obişnuite, laminate la cald, fabricate în R.P.R. s-ar utiliza aceste valori, se obţine o durabilitate a sculei scăzută ce poate atinge valori cu 30—40% mai mici decît în cazul utilizării geometriei indicate în acest studiu. Explicaţia se poate da cu ajutorul compoziţiei chimice a oţelurilor şi a structurii acestora.

Concluziile cele mai importante ce trebuie scoase în evidenţă sînt următoarele :

a) geometria optimă a sculei nu este influenţată de materialul din care este confecţionată, dacă acesta are durităţi apropiate ;

b) unghiul de degajare optim depinde de rezistenţa de rupere la tracţiune a materialului de prelucrat. În cazul oţelului el depinde şi de conţinutul de carbon al acestuia ;

c) cunoaşterea geometriei optime permite să se facă mari economii de scule care pot să meargă pînă la valori de $30 \div 50\%$;

d) este absolut necesar ca în industrie sculele să fie special ascuţite în ateliere amenajate în acest scop, de către muncitori specializaţi în această direcţie.

Primită la redacţie la 26 februarie, 1960.

ИЗНОСОУСТОЙЧИВОСТЬ ИНСТРУМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

РЕЗЮМЕ

На основании наблюдений за развитием износа токарного резца исследуются и определяются оптимальные геометрические параметры при резании обычных углеродистых сталей (STAS 500—49), прошедших горячую обработку.

Полученные соотношения дают связь между величиной геометрических параметров и механическими характеристиками или содержанием углерода в экспериментальных сталях. Наблюдается также влияние отклонений от оптимальной геометрии на стойкость резца.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Углы токарного резца.

Рис. 2. — Изменение коэффициента τ_γ в зависимости от угла γ для сталей OL 38, OL 42, OL 50, OL 60 и OL 70.

Рис. 3. — Изменение оптимальных величин угла γ зависимости от сопротивления разрыву.

Рис. 4. — Измецение сопротивления разрыву в зависимости от содержания углерода в экспериментальных сталях.

Рис. 5. — Изменение коэффициентов τ_α, τ_{α_1}, и $\tau_{\varkappa_1}$ в зависимости от углов α, α_1 и $\varkappa_1$ при резании стали OL 50.

Рдис. 6. — Изменение коэффициента $\tau_\varkappa$ в зависимости от угла $\varkappa$ при резании некоторых сталей.

LA RÉSISTANCE À L'USURE D'UN OUTIL EN FONCTION DE SES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ l'évolution de l'usure d'un outil de tour, les auteurs étudient et déterminent les paramètres géométriques optimums dans le cas du tournage des aciers au carbone ordinaire, travaillés à chaud (STAS 500-59).

Les relations obtenues fournissent la liaison entre les valeurs des paramètres géométriques et les caractéristiques mécaniques, ou bien la teneur en carbone des aciers soumis aux essais. En outre, les auteurs étudient l'influence des écarts de la géométrie optimum sur la durabilité de l'outil.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Les angles de coupe d'un outil de tour.

Fig. 2. — Variation du coefficient τ_γ, en fonction de l'angle γ, dans le cas des aciers OL 38, OL 42, OL 50, OL 60 et OL 70.

Fig. 3. — Variation de la valeur optimum de l'angle γ en fonction de la résistance à la rupture par traction.

Fig. 4. — Variation de la résistance à la rupture par traction en fonction de la teneur en carbone des aciers soumis aux essais.

Fig. 5. — Variation des coefficients τ_α, τ_{α_1} et $\tau_{\varkappa_1}$ en fonction des angles α, α_1 et $\varkappa_\iota$, dans le cas du tournage de l'acier OL 50.

Fig. 6. — Variation du coefficient $\tau_\varkappa$ en fonction de l'angle $\varkappa$, dans le cas du tournage de certains aciers.

BIBLIOGRAFIE

1. M. H. ЛАРИН, *Оптимальные геометрические параметры режущей части инструментов.* Оборонгиз, Москва, 1953.
2. А. М. РОЗЕНБЕРГ, А. Н. ЕРЕМИН, *Элементы теории процесса резания металлов.* Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
3. Н. Н. ЗОРЕВ, *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, Москва, 1956.
4. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Cu privire la parametrii geometrici optimi ai cuţitului armat cu plăcuţe de carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 423 (1957).
5. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuţitelor de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1077 (1958).
6. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studii asupra parametrilor aşchierii cu cuţite de strung din oţel rapid romînesc.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *2*, 539 (1959).

STUDII

VIBRAȚII

DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII CORESPUNZĂTOARE VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE A ARBORILOR COTIȚI

DE

ANDREI RIPIANU

Metodele analitice pentru determinarea pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a arborilor cotiți de la motoarele cu ardere internă, ca de exemplu metoda Holzer-Tolle, comportă calcule laborioase din cauza numărului mare de încercări ce trebuie efectuate.

Metoda grafică Otto Kraemer [1] permite deducerea directă, fără tatonări, a pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a arborilor cotiți aparținînd motoarelor omogene în linie, încărcați cu piese plasate la extremități, atunci cînd numărul acestor piese nu depășește cifra 4, de-o parte a motorului putîndu-se găsi una sau două piese.

În cele ce urmează vom generaliza această metodă grafică dîndu-i un aspect grafo-analitic și arătînd că ea poate fi aplicată oricare ar fi numărul de piese cu care este încărcat la extremități arborele cotit al motorului omogen în linie.

Prin motor omogen se înțelege acel motor pentru care după reducerea maselor și lungimilor se obține un sistem redus omogen format din mase reduse identice și un arbore redus prezentînd același coeficient de rigiditate pentru toate porțiunile limitate de două mase reduse consecutive.

I. Se consideră un motor omogen în linie cu z cilindri al cărui arbore cotit este încărcat la una din extremități cu trei piese avînd masele M_1, M_2, M_3 iar la cealaltă extremitate cu două piese avînd masele M' și M''.

Se efectuează reducerea maselor și lungimilor obținînd sistemul dinamic redus reprezentat în figura 1.

Se adoptă notațiile :

r_0,	raza cercului de reducere a maselor în cm care se alege arbitrar. Se poate lua ca rază de reducere r_0 raza manetoanelor.
m	masa redusă a maselor în mișcare de rotație și de translație în raport cu raza de reducere r_0 corespunzînd unui cilindru al motorului omogen în linie în kgf cm^{-1} s^2.

m_1; m_2; m_3, masele reduse în raport cu raza de reducere r_0 a maselor M_1, M_2, M_3 în kgf cm^{-1} s^2.

m', m'', masele reduse în raport cu raza de reducere r_0 a maselor M', M'' în kgf cm^{-1} s^2.

m_e, masa redusă dinamic echivalentă cu sistemul de trei mase reduse m_1, m_2, m_3 în kgf cm^{-1} s^2 (fig. 2).

$$c = \frac{C}{r_0^2}\,;\quad c_1 = \frac{C_1}{r_0^2}\,;\quad c_2 = \frac{C_2}{r_0^2}\,;\quad c_3 = \frac{C_3}{r_0^2}\,;\quad c' = \frac{C'}{r_0^2}\,;\quad c'' = \frac{C''}{r_0^2}\,,$$

rapoartele dintre coeficienții de rigiditate la torsiune a porțiunilor din arbore limitate de două mase consecutive și patratul razei de reducere în kgf cm^{-1}.

a; a_1; a_2; a_3; a'; a''; a_e, elongațiile liniare ale vibrațiilor de torsiune executate de către masele reduse m; m_1; m_2; m_3; m'; m''; m_e măsurate pe cercul de reducere de rază r_0 în cm.

A; A_1; A_2; A_3; A'; A''; A_e, amplitudinile liniare ale vibrațiilor de torsiune executate de către masele reduse m; m_1; m_2; m_3; m'; m''; m_e măsurate pe cercul de reducere de rază r_0 în cm.

ω, pulsația proprie a sistemului vibrant de $z + 5$ mase reduse.

Înlocuind masele reduse m_1; m_2; m_3 prin masa redusă dinamic echivalentă m_e se obține sistemul dinamic redus reprezentat în figura 2.

Masa redusă dinamic echivalentă m_e a unui sistem de h mase reduse m_1; m_2; . . . ; m_h plasată în locul masei m_h rezultă din egalarea rezultantei forțelor de inerție corespunzătoare maselor reduse inelare m_1, m_2, . . ., m_h și a forței de inerție corespunzătoare masei reduse inelare dinamic echivalente m_e

$$\sum_{i=1}^{h} m_i a_i \omega^2 = m_e a_h \omega^2,$$

deci

$$m_e = \sum_{i=1}^{h} m_i \frac{a_i}{a_h}\,. \tag{a}$$

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere de torsiune a sistemului de mase reduse m_3; m_2; m_1; m_e scrise pe baza metodei cinetostatice (principiul lui D'Alambert) sau pe baza ecuațiilor lui Lagrange de al doilea gen sînt

$$m_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2} + c_3 (a_3 - a_2) = 0,$$

$$m_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + c_3 (a_2 - a_3) + c_2 (a_2 - a_1) = 0,$$

$$m_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + c_2 (a_1 - a_2) + c_1 (a_1 - a) = 0,$$

$$m_e \frac{d^2 a_e}{dt^2} + c (a_e - a) = 0.$$

Introducînd soluțiile

$$a_3 = A_3 \cos(\omega t - \varepsilon)\,;\quad a_2 = A_2 \cos(\omega t - \varepsilon)\,;\quad a_1 = A_1 \cos(\omega t - \varepsilon)\,;$$

$$a = A \cos(\omega t - \varepsilon)\,;\; a_e = A_e \cos(\omega t - \varepsilon),$$

se obţine sistemul :

$$-m_3A_3\omega^2 + c_3(A_3 - A_2) = 0, \tag{1}$$

$$-m_3A_3\omega^2 - m_2A_2\omega^2 + c_2(A_2 - A_1) = 0, \tag{2}$$

$$-m_3A_3\omega^2 - m_2A_2\omega^2 - m_1A_1\omega^2 + c_1(A_1 - A) = 0, \tag{3}$$

$$-m_eA_e\omega^2 + c(A_e - A) = 0. \tag{4}$$

Pentru vibrațiile masei echivalente m_e se introduce condiția de echivalență :

$$c_1(A_1 - A) - c(A_e - A) = 0, \tag{5}$$

care exprimă identitatea forței tangențiale produsă de deformațiile elastice la torsiune ale arborelui și aplicată la periferia cercului de reducere de rază r_0 pe care este plasată prima masă redusă inelară m a motorului omogen în linie în cele două cazuri : în cazul existenţei maselor reduse m_1 ; m_2 ; m_3 (fig. 1) şi în cazul înlocuirii lor prin masa redusă dinamic echivalentă m_e (fig. 2).

Se notează :

$$B_e = \frac{m}{m_e}. \tag{6}$$

Funcţiunea $B_e\left[\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right]$ permite înlocuirea masei reduse echivalente m_e printr-un sistem dinamic echivalent omogen format dintr-un număr de h mase reduse identice m (fig. 3).

Se notează cu :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

pulsaţia proprie a vibrațiilor de torsiune a unei singure mase m care se determină ca pentru un sistem posedînd un singur grad de libertate.

Se introduc notațiile :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = x\,;\; 1 - \frac{c}{c_1} = D\,;\; \frac{m}{m_1} = E\,;\; \frac{m^2m_2m_3}{m_1}\frac{c_2}{c} = F\,;$$

$$\frac{m^3(m_2 + m_3)}{m_1}\frac{c_2c_3}{c^2} = G\,; m_1m_2m_3 = H\,;\; \frac{m}{c}\,[m_1m_3(c_2 + c_3) +$$

$$+ m_2(m_1c_3 + m_3c_2)] = I\,;\;\; \frac{m^2}{c^2}c_2c_3(m_1 + m_2 + m_3) = K.$$

Se elimină între ecuațiile (1)—(6) amplitudinile liniare A ; A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_e și se obține ecuația

$$B_e = B_e(x) = Dx + E + \frac{Fx - G}{Hx^2 - Ix + K}, \tag{7}$$

B_e este o funcție de x adică de $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$ care poate fi reprezentată grafic printr-o curbă.

Se construiesc în planul xOB_z curbele $B_z = B_z(x)$ definite prin relația

$$B_z = B_z(x) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{z} \frac{A_i'}{A_z'}} = \frac{A_z'}{\sum\limits_{i=1}^{z} A_i'}, \tag{8}$$

unde A_i' ($i = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; z$) reprezintă amplitudinile relative ale vibrațiilor de torsiune a maselor reduse m_1 ; m_2 ; ... ; m_z raportate la amplitudinea vibrațiilor de torsiune a masei reduse m_1.

Amplitudinile relative A_i' fiind funcții de $x = \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$ rezultă că și B_z va fi o funcție de x : $B_z = B_z(x)$.

În cazul motoarelor omogene în linie cu z cilindri amplitudinile relative ale vibrațiilor de torsiune ale maselor reduse raportate la amplitudinea vibrațiilor primei mase, au expresiile

$$\begin{aligned}
A_1' &= 1 \\
A_2' &= 1 - x \\
A_3' &= 1 - 3x + x^2 \\
A_4' &= 1 - 6x + 5x^2 - x^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_i' &= 1 - C_i^2 x + C_{i+1}^4 x^2 - C_{i+2}^6 x^3 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_z' &= 1 - C_z^2 x + C_{z+1}^4 x^2 - C_{z+2}^6 x^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{9}$$

Pentru a demonstra aceste relații se consideră un sistem de z mase reduse m_1 ; m_2 ; ... ; m_z.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere de torsiune executate de către cele z mase sînt :

$$\begin{aligned}
&m_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + c_1(a_1 - a_2) = 0, \\
&m_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + c_1(a_2 - a_1) + c_2(a_2 - a_3) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_z \frac{d^2 a_z}{dt^2} + c_{z-1}(a_z - a_{z-1}) = 0.
\end{aligned}$$

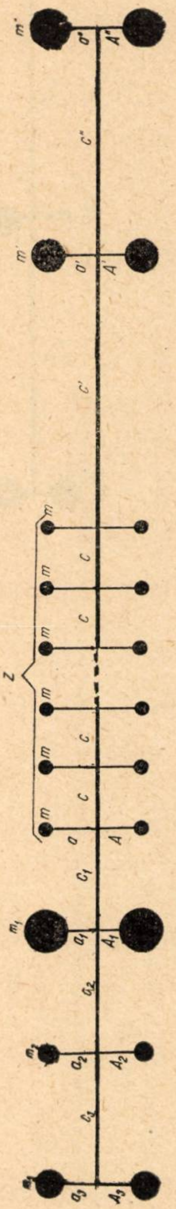

m″
a″
A″
c″
m′
a′
A′
c′
z
m
c
a
A
c₁
m₁
a₁
A₁
c₂
m₂
a₂
A₂
c₃
m₃
a₃
A₃

Fig. 1

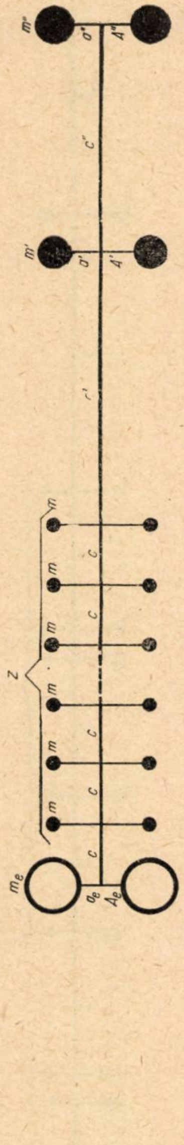

m″
a″
A″
c″
m′
a′
A′
c′
z
m
c
m_e
a_e
A_e

Fig. 2

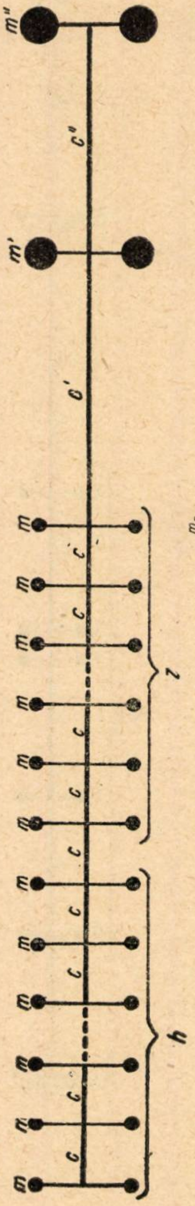


Fig. 3

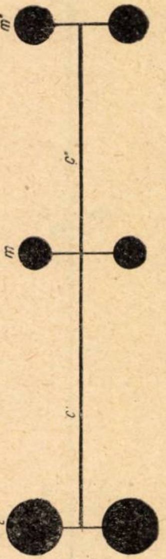


Fig. 4

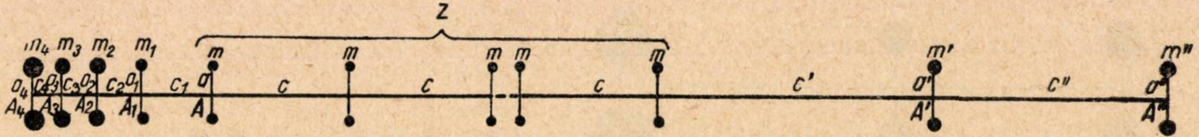

z
m4 m3 m2 m1
m m m m m
m' m''
a4 c4 a3 c3 a2 c2 a1 c1 a
c c c c' c''
a' a''
A4 A3 A2 A1 A A' A''

Fig. 1*a*

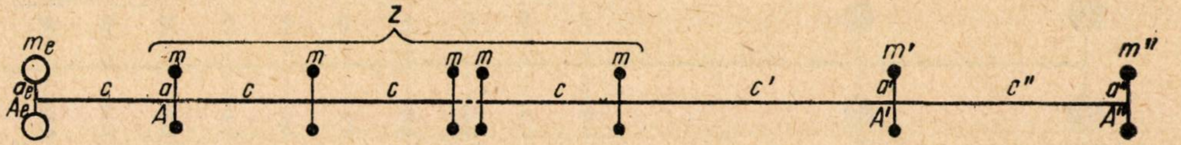

z
me
m m m m m
m' m''
ae Ae
c a c c c c' c''
a' a''
A A' A''

Fig. 2*a*

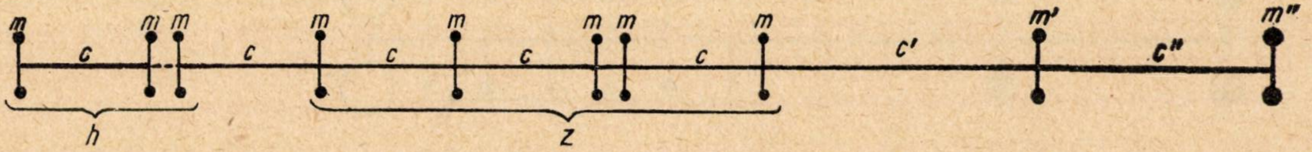

m m m m m m m m
m' m''
c c c c c c' c''
h
z

Fig. 3*a*

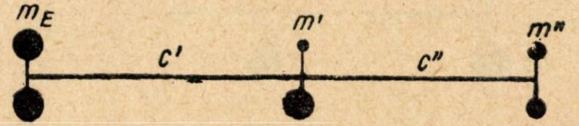


Fig. 4*a*

Se introduc soluţiile :

$$a_1 = A_1 \cos(\omega t - \varepsilon)\,;\quad a_2 = A_2 \cos(\omega t - \varepsilon)\,;\quad \dots\,;\quad a_z = A_z \cos(\omega t - \varepsilon).$$

Împărţind cu A_1 şi notînd amplitudinile relative ale vibraţiilor de torsiune a celor z mase raportate la amplitudinea A_1 a vibraţiilor primei mase, cu :

$$A'_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1\,;\quad A'_2 = \frac{A_2}{A_1}\,;\quad A'_3 = \frac{A_3}{A_1}\,;\quad \dots\,;\quad A'_z = \frac{A_z}{A_1}$$

se obţine sistemul

$$\begin{aligned} &-m_1A'_1\omega^2 + c_1(A'_1 - A'_2) = 0,\\ &-m_2A'_2\omega^2 + c_1(A'_2 - A'_1) + c_2(A'_2 - A'_3) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &-m_zA'_z\omega^2 + c_{z-1}(A'_z - A'_{z-1}) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

În cazul unui motor omogen în linie cu z cilindri

$$m_1 = m_2 = \dots = m_z = m,$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{z-1} = c.$$

Ecuaţiile (10) devin

$$\begin{aligned} &-mA'_1\omega^2 + c(A'_1 - A'_2) = 0,\\ &-mA'_2\omega^2 + c(A'_2 - A'_1) + c(A'_2 - A'_3) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &-mA'_z\omega^2 + c(A'_z - A'_{z-1}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii în raport cu amplitudinile relative A'_1; A'_2; ... ; A'_z şi ţinînd seamă că $A'_1 = 1$; $\frac{c}{m} = \omega_p^2$; $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = x$ se obţin expresiile (9).

Se consideră ecuaţia (8) în care z reprezintă numărul de cilindrii ai motorului omogen în linie.

Pentru x cuprins în intervalul 0, $+\infty$ expresia (8) se reprezintă grafic printr-o curbă $B_z = B_z(x)$ formată din ramuri care taie axa Ox pentru valorile lui x care reprezintă rădăcinile ecuaţiei (fig. 5) :

$$A'_z = 1 - C_z^2 x + C_{z+1}^4 x^2 - C_{z+2}^6 x^3 + C_{z+3}^8 x^4 - \dots + (-1)^{z-1} x^{z-1} = 0$$

şi care tind spre infinit pentru valorile lui x care reprezintă rădăcinile ecuaţiei (fig. 5)

$$\sum_{i=1}^{z} A'_i = 0.$$

Se dau succesiv lui z valori întregi şi pozitive şi se trasează ramurile de curbe, definite prin ecuaţia (8), corespunzînd acestor valori ale lui z (fig. 5).

Primele ramuri sau ramurile de rangul întîi ale curbelor $B_z = B_z(x)$, corespunzînd diferitelor valori date lui z, formează grupuri de ramuri de primul ordin. Ramurile secunde sau ramurile de rangul doi ale curbelor $B_z = B_z(x)$, corespunzînd diferitelor valori date lui z, formează grupul de ramuri de ordinul doi etc. Se obţin în continuare grupuri de ramuri de ordinul trei, patru etc. (fig. 5).

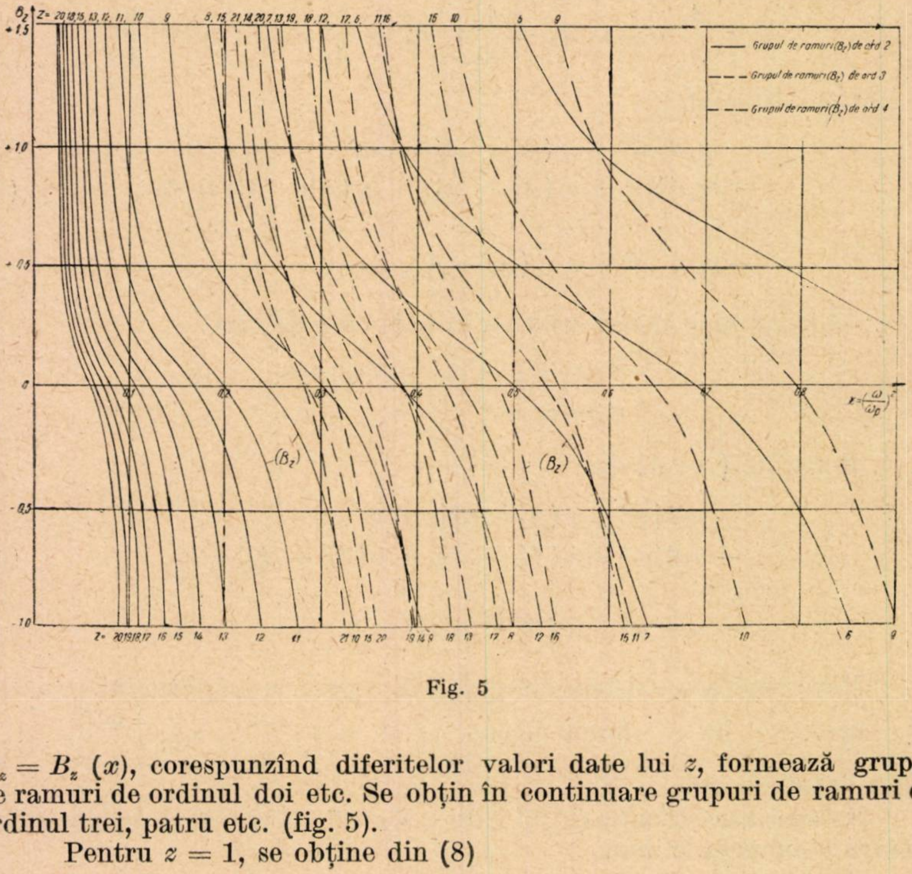


Fig. 5

Pentru $z = 1$, se obţine din (8)

$$B_z(x) = 1,$$

care reprezintă o paralelă la axa Ox plasată la o distanţă egală cu unitatea de această axă.

Pentru $z = 2$ se obţine din (8)

$$B_z(x) = \frac{1 - x}{2 - x}.$$

Se observă că se obţine $B_z(x) = 0$ pentru $x = 1$ şi $B_z(x) \to \infty$ pentru $x = 2$.

Pentru $z = 3$ se obţine din (8):

$$B_z(x) = \frac{1 - 3x + x^2}{3 - 4x + x^2}.$$

Se observă că se obţine $B_z(x) = 0$ pentru $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ şi $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ şi $B_z(x) \to \infty$ pentru $x = 1$ şi $x = 3$.

Pentru $z = 4$ se obţine din (8)

$$B_z(x) = \frac{1 - 6x + 5x^2 - x^3}{4 - 10x + 6x^2 - x^3}.$$

Se observă că se obţine $B_z(x) = 0$ pentru $0 < x_1 < 1$; $1 < x_2 < 2$; $3 < x_3 < 4$ şi $B_z(x) \to \infty$ pentru $x = 2$; $x = 2 + \sqrt{2}$ şi $x = 2 - \sqrt{2}$. La fel se analizează cazurile $z = 5$; $z = 6$; $z = 7$; ...

Cifrele 20; 19; 18; 17; 16; ... afectate curbelor $B_z = B_z(x)$ în figura 5 indică numărul de cilindri z ai motorului omogen în linie sau numărul de mase reduse m formînd sistemul vibrant redus omogen.

Cu ajutorul acestor grupuri de ramuri de diferite ordine se pot determina pulsaţiile proprii de gradul întîi, doi, trei etc., ale sistemului vibrant analizat. Pentru aceasta în planul xOB_z al curbelor $B_z(x)$ se trasează curba $B_e(x)$ dată de ecuaţia (7) şi se construieşte curba $B'_e(x)$ prin metoda indicată în figura 6. În figura 6 cifrele 4; 5; 6; ... ; 14 afectate curbelor $B_h = B_h(x)$, identice cu curbele $B_z = B_z(x)$ din figura 5, indică numărul h de mase reduse omogene al sistemului vibrant. Se intersectează curba $B_e(x)$ cu curbele $B_h(x)$. Prin punctele de intersecţie se construiesc paralele la axa OB_z. Se consideră punctul P_h de intersecţie al curbei $B_e(x)$ şi al curbei $B_h(x)$. Se intersectează paralela la axa OB_z construită prin punctul P_h cu curba $B_{n+z}(x)$ şi se obţine punctul P_{h+z} unde z este numărul de cilindri ai motorului omogen în linie. Se repetă această construcţie pentru diferite valori întregi şi pozitive date lui h obţinînd atîtea puncte P_{h+z} cîte valori s-au considerat pentru h. În figura 6 s-a adoptat $h = 5$; 6; 7; 8; 9; 10 şi $z = 4$. Se unesc punctele P_{h+z} printr-o curbă continuă care este curba $B'_e(x)$

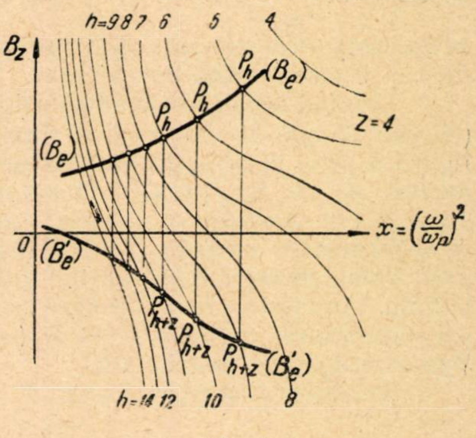


Fig. 6

Se înlocuieşte sistemul omogen redus format de cele $z + h$ mase reduse m, reprezentat în figura 3, prin masa redusă dinamic echivalentă m_E şi se obţine sistemul reprezentat în figura 4. Ecuaţia pulsaţiilor pentru sistemul de trei mase m_E; m'; m'' (fig. 4) este

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{c'}{m_E} + \frac{c'}{m'} + \frac{c''}{m'} + \frac{c''}{m''}\right) + c'c''\left(\frac{1}{m_E m'} + \frac{1}{m_E m''} + \frac{1}{m'm''}\right) = 0. \quad (12)$$

Se notează : $B_i = \frac{m}{m_E}$ deci $B_i = B_i(x)$ deoarece m_E este o funcție de $x = \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$ conform formulei de definiție (a) dată masei reduse dinamic echivalente cu un sistem de mase reduse.

Se introduce expresia lui m_E scoasă din această relație

$$m_E = \frac{m}{B_i},$$

în ecuația pulsațiilor (12) și se rezolvă această ecuație în raport cu B_i.

Notînd

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = x\,;\ \frac{c}{m} = \omega_p^2\,;\ \frac{c}{c'} = D_1\,;\ \frac{m}{m'} = E_1\,;\ \frac{m}{m'}\frac{c''}{m'}\frac{1}{\omega_p^2} = F_1\,;$$

$$c''\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{m''}\right)\frac{1}{\omega_p^2} = G_1,$$

se obține ecuația unei hiperbole

$$B_i = B_i(x) = D_1 x - E_1 - \frac{F_1}{x - G_1}. \tag{13}$$

Se trasează această hiperbolă în planul curbei $B'_e = B'_e(x)$ și se intersectează curbele $B'_e = B'_e(x)$ și $B_i = B_i(x)$. Abscisele punctelor de intersecție $x_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_p}\right)^2$; $x_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_p}\right)^2$; $x_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_p}\right)^2$; ... $x_{z+4} = \left(\frac{\omega_{z+4}}{\omega_p}\right)^2$ permit să se determine valorile pulsațiilor proprii ω_1; ω_2; ω_3; ... ω_{z+4} ale sistemului de $z + 5$ mase inițial considerate.

Urmînd această cale adică utilizînd curbele $B_z = B_z(x)$ avînd ecuația (8), se întîmplă de multe ori că numărul de puncte P_{h+z} obținute în cadrul figurii 6 prin intersecția paralelelor duse prin punctele P_h la axa OB_z cu curbele $B_{h+z} = B_{h+z}(x)$ să fie insuficient pentru trasarea exactă a curbei $B'_e = B'_e(x)$. Aceasta se datorește numărului relativ restrîns de ramuri ce se obțin pentru curbele $B_z = B_z(x)$ datorită faptului că z nu poate lua decît valori întregi, reprezentînd numărul de cilindri ai motorului omogen în linie. Vom arăta, în continuare, că această dificultate poate fi înlăturată prin construirea curbelor $B_y = B_y(x)$ unde y poate lua orice valoare pozitivă întreagă sau fracționară.

Se observă că expresia lui A'_i din (9) mai poate fi scrisă sub forma

$$A'_i = \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s\, C_{i-1+s}^{2s}\, x^s. \tag{14}$$

Se cunoaște relația [2]

$$\frac{\sin nu}{\sin u} = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^\sigma\, C_{n-\sigma-1}^{\sigma}\, (2\cos u)^{n-2\sigma-1},$$

în care luînd : $n = 2i - 1$; $u = \frac{\pi}{2} - f$; $s = i - 1 - \sigma$ se obţine

$$(-1)^{i-1} \frac{\cos(2i-1)f}{\cos f} = (-1)^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s C_{i-1+s}^{i-1-s} (2\sin f)^{2s},$$

sau

$$\frac{\cos(2i-1)f}{\cos f} = \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s C_{i-1+s}^{2s} (2\sin f)^{2s}. \tag{15}$$

Însemnînd în (14) $\sqrt{x} = 2\sin f$, cu ajutorul lui (15) se obţine

$$A_i' = \frac{\cos(2i-1)f}{\cos f}. \tag{16}$$

Se consideră relaţia

$$\cos a + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) + \ldots + \cos[a+(y-1)\varphi] =$$

$$= \frac{\sin\frac{y}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cos\left[a + \frac{y-1}{2}\varphi\right],$$

în care luînd $a = f$; $\varphi = 2f$ se obţine

$$\cos f + \cos 3f + \ldots + \cos(2y-1)f = \sum_{i=1}^{y} \cos(2i-1)f =$$

$$= \frac{\sin yf \cos yf}{\sin f} = \frac{\sin 2yf}{2\sin f}.$$

Ţinînd seamă de această relaţie, cu ajutorul lui (16) se obţine

$$\sum_{i=1}^{y} A_i' = \frac{\sin 2yf}{\sin 2f}. \tag{17}$$

Din (16) rezultă

$$A_y' = \frac{\cos(2y-1)f}{\cos f}. \tag{16'}$$

Transformînd pe z în y din (8) se obţine

$$B_y = B_y(x) = \frac{A_y'}{\sum\limits_{i=1}^{y} A_i'}. \tag{8'}$$

Introducînd (16′) şi (17) în (8′) se obţine

$$B_y = B_y(x) = \frac{2\sin f \cos(2y-1)f}{\sin 2yf} = \frac{\sin(2f)}{\operatorname{tg}(2yf)} + 2\sin^2 f.$$

Dar

$$\sin f = \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right).$$

Se obține

$$B_y = B_y(x) = \frac{\sin(2f)}{\operatorname{tg}(2yf)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{\sin(2f)}{\operatorname{tg}(2yf)} + \frac{1}{2}x \tag{18}$$

unde

$$f = \operatorname{arc}\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_p}\right) = \operatorname{arc}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{1)}.$$

De aici rezultă că

$$y = \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{\sin(2f)}{B_y - \dfrac{1}{2}x}}{2f}.$$

Pentru o valoare dată variabilei x corespunde pentru funcția y o infinitate de valori

$$y_0;\ y_0 + \left(\frac{\pi}{2f}\right);\ y_0 + 2\left(\frac{\pi}{2f}\right);\ y_0 + 3\left(\frac{\pi}{2f}\right);\ \ldots$$

și

$$y_0;\ y_0 - \left(\frac{\pi}{2f}\right);\ y_0 - 2\left(\frac{\pi}{2f}\right);\ y_0 - 3\left(\frac{\pi}{2f}\right);\ \ldots$$

În general

$$y = y_0 + \nu\left(\frac{\pi}{2f}\right), \tag{19}$$

unde ν reprezintă un număr pozitiv sau negativ. Se notează:

$$y_\pi = \frac{\pi}{2f} = \frac{\pi}{2\operatorname{arc}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)} = f(x).$$

După cum rezultă din formula (19) se poate extrage din valoarea de bază y_0 a lui y un număr reprezentînd un multiplu întreg ν de y_π. Se construiesc curbele $B_y = B_y(x)$ definite prin ecuația (18) dînd lui y orice valoare pozitivă întreagă sau fracționară (fig. 7). În planul acestor curbe se construiește curba $B_e = B_e(x)$ definită prin ecuația (7) (fig. 7). Se intersectează

---

[1] Formula (18) a fost dedusă de Berthold Frank în teza sa de doctorat, și este menționată în literatură [1] fără demonstrație.

curba $B_e = B_e(x)$ cu curbele $B_y = B_y(x)$ şi prin punctele de intersecţie se duc paralele la axa OB_y ce se intersectează cu curbele B_{y+z} unde z reprezintă numărul de cilindri ai motorului omogen în linie. Cînd punctele de intersecţie dintre paralelele la axa OB_y şi curbele B_{y+z} nu se plasează în planul figurii (fig. 7) se extrage din suma $y + z$ un număr reprezentînd un multiplu întreg ν, ales în mod convenabil, de y_π şi se intersectează paralelele la axa OB_y cu curbele $B_{y+z-\nu y_\pi}$. Se unesc printr-o curbă continuă punctele de intersecţie astfel obţinute, curba rezultată fiind chiar curba $B'_e = B'_e(x)$ (fig. 7). Se observă că numărul de puncte aparţinînd curbei $B'_e = B'_e(x)$ ce se pot obţine prin metoda curbelor (B_y) este mult mai mare decît numărul de puncte ce se pot obţine prin metoda curbelor (B_z) şi deci curba $B'_e = B'_e(x)$ poate fi trasată mult mai exact.

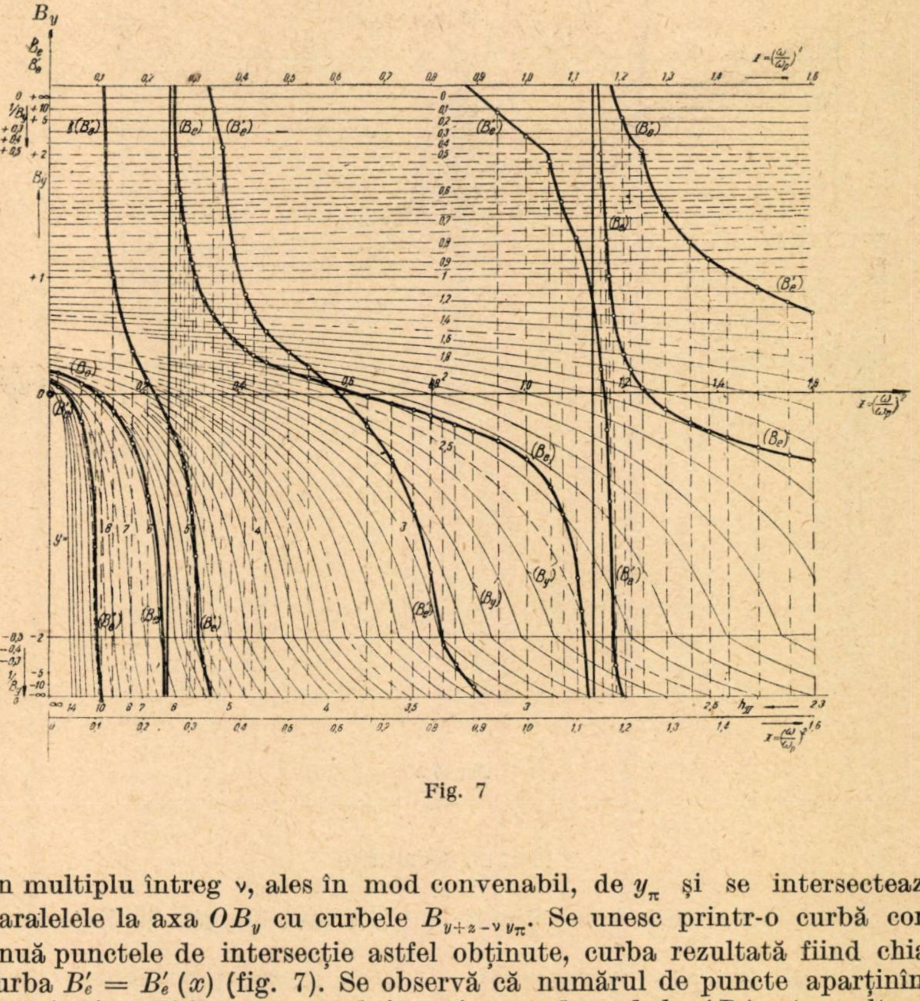


Fig. 7

După trasarea curbei $B'_e = B'_e(x)$ se procedează aşa cum s-a arătat precedent, adică se trasează în planul curbei $B'_e = B'_e(x)$ hiperbola $B_i = B_i(x)$, avînd ecuaţia (13) (fig. 8) şi se intersectează curbele $B'_e = B'_e(x)$ şi $B_i = B_i(x)$ abscisele punctelor de intersecţie permiţînd determinarea valorilor pulsaţiilor proprii ω_1 ; ω_2 ; ω_3 ; . . . ; ω_{z+4} a sistemului de $z + 5$ mase iniţial considerat (fig. 9).

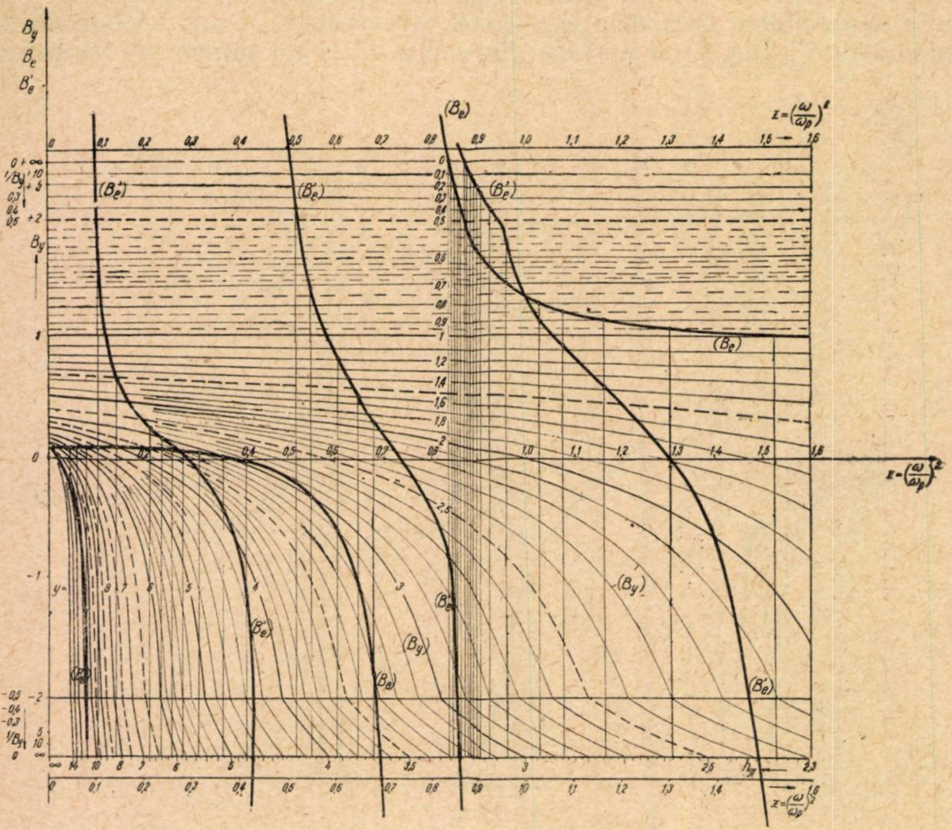


Fig. 7 *a*

EXEMPLU NUMERIC

Fie $z = 4$ numărul de cilindri ai motorului omogen în linie şi fie

$$\begin{array}{llll} m = 0{,}025 & \text{kgf cm}^{-1}\,\text{s}^2 & c = 45\,500 & \text{kgf cm}^{-1} \\ m_1 = 0{,}0585 & ,, & c_1 = 26\,780 & ,, \\ m_2 = 0{,}0265 & ,, & c_2 = 22\,750 & ,, \\ m_3 = 0{,}0394 & ,, & c_3 = 20\,270 & ,, \\ m' = 0{,}050 & ,, & c' = 10\,000 & ,, \\ m'' = 0{,}060 & ,, & c'' = 12\,000 & ,, \end{array} \tag{20}$$

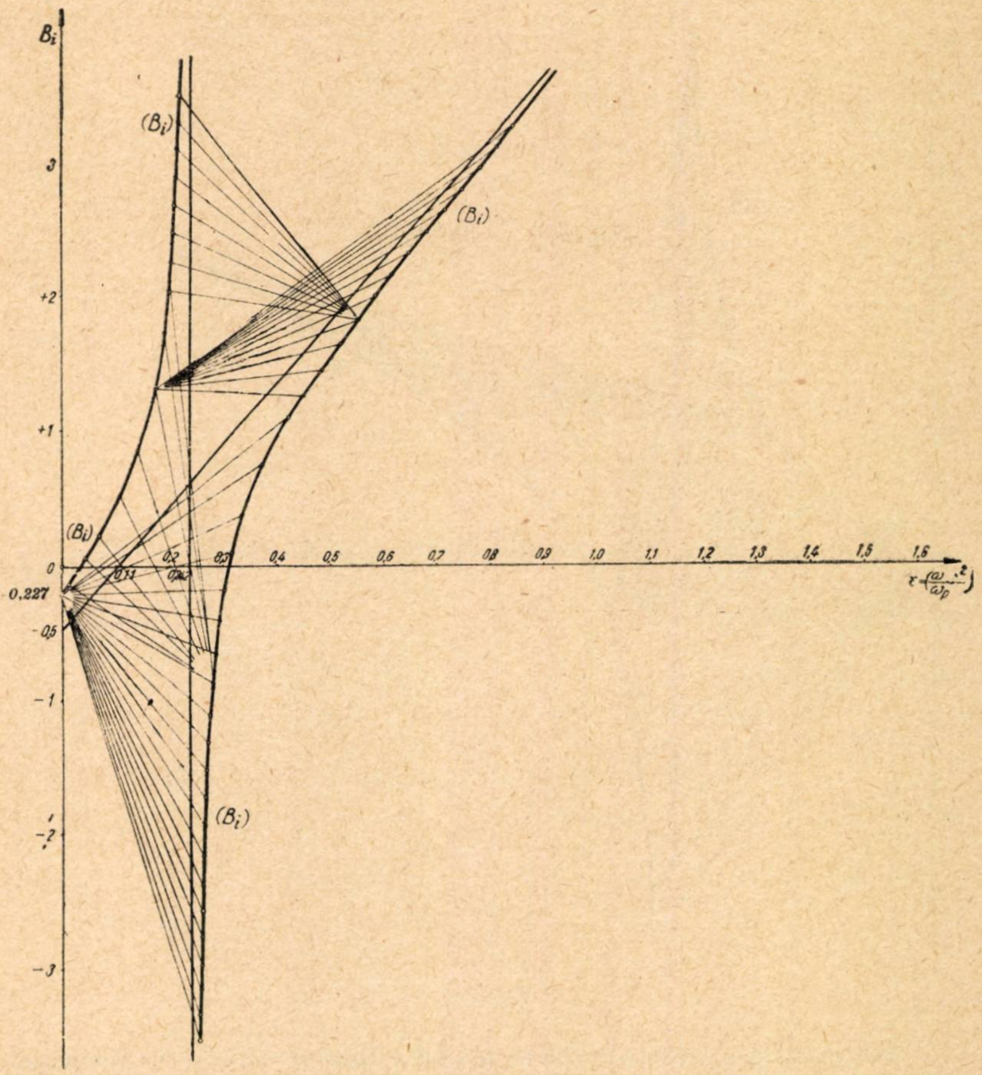


Fig. 8

Rezultă :

$$\omega_p^2 = \frac{45\,500}{0,025} = 182\;10^4\ \mathrm{s}^{-2}$$

Introducînd valorile numerice (20) în relaţia (7) se obţine

$$B_e(x) = -0,7\,x + 0,427 + \frac{558\,x - 392}{6108\,x^2 - 8480\,x + 1732}\,. \tag{21}$$

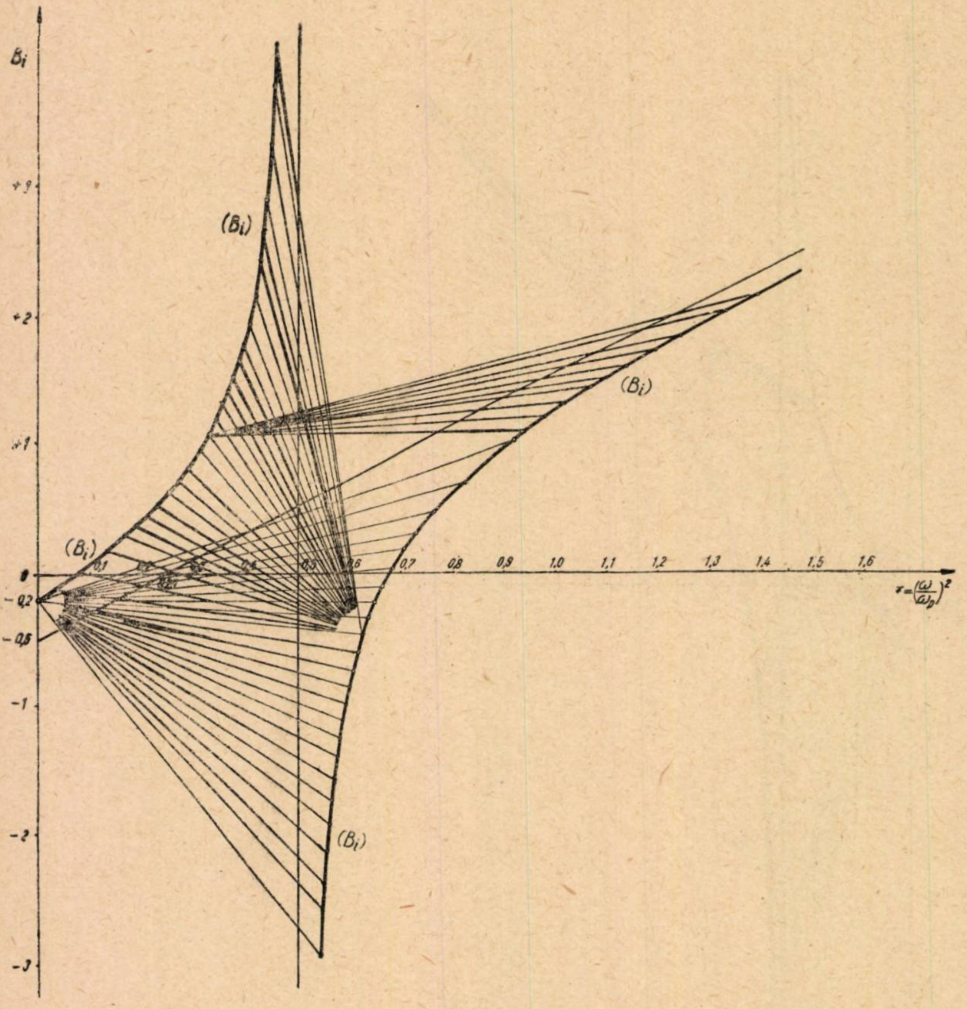

B_i
+3
+2
+1
0
−0,2
−0,5
−1
−2
−3
(B_i)
(B_i)
(B_i)
(B_i)
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
$x=\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

Fig. 8 *a*

Pentru a trasa această curbă se dau lui x diferite valori și se calculează valorile corespunzătoare ale lui $B_e(x)$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$B_e(x)$	+ 0,201	+ 0,001	− 0,713	+ 1,072	+ 0,394	+ 0,192	+ 0,056	− 0,0619	−0,180	−0,319	−0,533	−1,423	+0,377	−0,160	−0,341	−0,461	−0,561

Poziția asimptotelor paralele cu axa ordonatelor este determinată de rădăcinile ecuației

$$6108\ x^2 - 8480\ x + 1732 = 0,$$

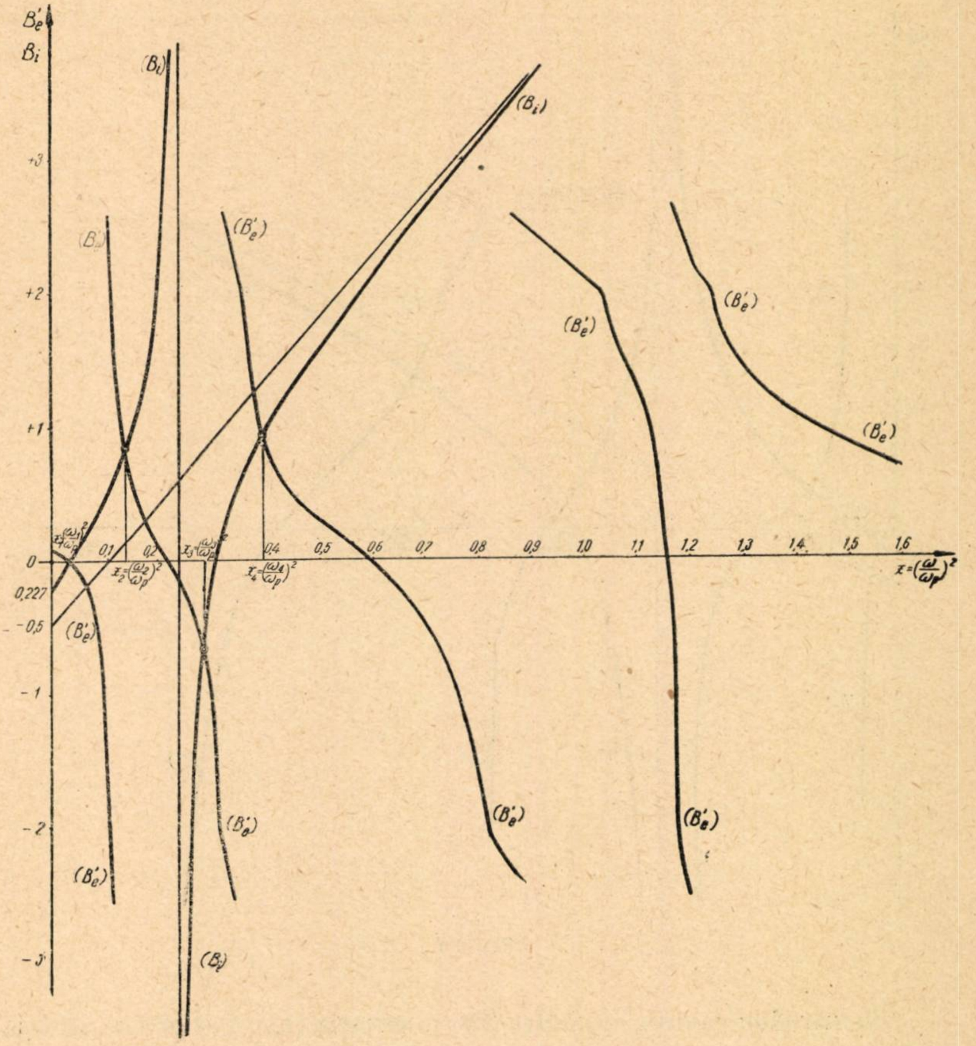


Fig. 9

sau

$$1527\ x^2 - 2120\ x + 433 = 0,$$

care sînt

$$x_1 = 0{,}249 \text{ şi } x_2 = 1{,}139.$$

Pentru aceste două valori ale lui x, $B_e(x) \to \infty$.

Se trasează curba $B_e = B_e(x)$ avînd ecuaţia (21) în planul curbelor $B_y = B_y(x)$ şi se construieşte curba $B'_e = B'_e(x)$ (fig. 7).

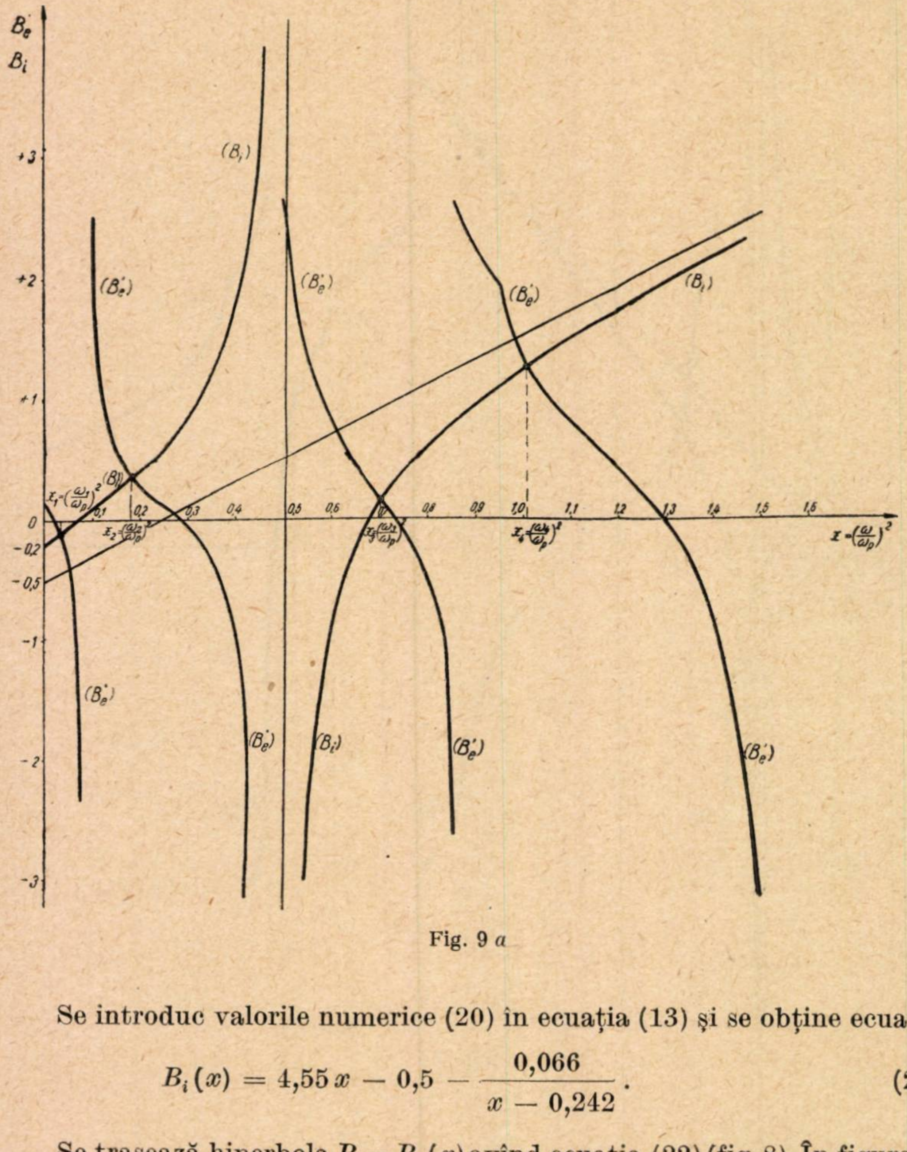


Fig. 9 *a*

Se introduc valorile numerice (20) în ecuaţia (13) şi se obţine ecuaţia

$$B_i(x) = 4{,}55\,x - 0{,}5 - \frac{0{,}066}{x - 0{,}242}. \tag{22}$$

Se trasează hiperbola $B_i = B_i(x)$ avînd ecuaţia (22) (fig. 8). În figura 8, hiperbola a fost construită prin procedeul grafic clasic, deoarece se cunosc ecuaţiile celor două asimptote ale hiperbolei

$$y = 4{,}55\,x - 0{,}5 \text{ şi } x = 0{,}242$$

şi valoarea ordonatei la origine

$$(B_i)_{x=0} = -\,0{,}227.$$

Se intersectează curbele (B'_e) și (B_i) obținînd în planul figurii 9 patru puncte de intersecție ale căror abscise au valorile

$$x_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}0375\,;\quad x_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}1405\,;$$

$$x_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}2890\,;\quad x_4 = \left(\frac{\omega_4}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}4010.$$

Avînd $\omega_p^2 = 182 \cdot 10^4\ \mathrm{s}^{-2}$ se calculează valorile primelor patru pulsații proprii ale sistemului vibrant format din cele 9 mase inițial considerate

$$\omega_1 = 261{,}25\ \mathrm{s}^{-1};\quad \omega_2 = 505{,}68\ \mathrm{s}^{-1};$$

$$\omega_3 = 725{,}25\ \mathrm{s}^{-1};\quad \omega_4 = 854{,}30\ \mathrm{s}^{-1}.$$

II. În mod analog se poate trata cazul cînd arborele cotit al motorului omogen în linie este încărcat la extremități cu 6 piese, patru plasate de o parte a motorului și două de cealaltă parte (fig. 1*a* ; 2*a* ; 3*a* ; 4*a*).

Utilizînd aceleași notații ca și în prima parte a lucrării, sistemul de ecuații (1)—(6) se va transforma într-un sistem de 7 ecuații :

$$-m_4A_4\omega^2 + c_4(A_4 - A_3) = 0, \tag{1 a}$$

$$-m_4A_4\omega^2 - m_3A_3\omega^2 + c_3(A_3 - A_2) = 0, \tag{2 a}$$

$$-m_4A_4\omega^2 - m_3A_3\omega^2 - m_2A_2\omega^2 + c_2(A_2 - A_1) = 0, \tag{3 a}$$

$$-m_4A_4\omega^2 - m_3A_3\omega^2 - m_2A_2\omega^2 - m_1A_1\omega^2 + c_1(A_1 - A) = 0, \tag{4 a}$$

$$-m_eA_e\omega^2 + c(A_e - A) = 0, \tag{5 a}$$

$$c_1(A_1 - A) - c(A_e - A) = 0, \tag{6 a}$$

$$B_e = \frac{m}{m_e}. \tag{6$_1$ a}$$

Se notează : $\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = x\,;\ \dfrac{c}{m} = \omega_p^2\,;\ 1 - \dfrac{c}{c_1} = D_a\,;\ \dfrac{m}{m_1} = E_a\,;$

$$\frac{m}{m_1}\,m_2m_3m_4c_2\,\frac{1}{\omega_p^2} = F_a\,;\ \frac{m}{m_1}\left[m_2m_3c_2c_4 + m_2m_4c_2(c_3 + c_4) + m_3m_4c_2c_3\right]\frac{1}{\omega_p^4} =$$

$$= G_a\,;\ \frac{m}{m_1}(m_2 + m_3 + m_4)\,c_2c_3c_4\,\frac{1}{\omega_p^6} = H_a\,;\ m_1m_2m_3m_4 = I_a\,;\ [m_2m_3m_4c_2 +$$

$$+ m_1m_3m_4(c_2 + c_3) + m_1m_2m_4(c_3 + c_4)]\,\frac{1}{\omega_p^2} = K_a\,;\ [m_1m_2c_3c_4 +$$

$$+ m_1m_3c_4(c_2 + c_3) + m_1m_4(c_2c_3 + c_2c_4 + c_3c_4) + m_2m_3c_2c_4 +$$

$$+ m_2m_4c_2(c_3 + c_4) + m_3m_4c_2c_3]\,\frac{1}{\omega_p^4} = L_a\,;\ (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\,c_2c_3c_4\,\frac{1}{\omega_p^6} = M_a\,.$$

Se elimină amplitudinile liniare A ; A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_e între ecuațiile (1 a) — (6_1 a).

Ecuația (7) se transformă în ecuația

$$B_e = B_e(x) = D_a x + E_a + \frac{F_a x^2 - G_a x + H_a}{I_a x^3 - K_a x^2 + L_a x - M_a}. \tag{7 a}$$

Ecuația (13) rămîne ca formă neschimbată.

Masa redusă m_E dinamic echivalentă cu sistemul omogen de $(z + h)$ mase (fig. *3a* ; *4a*) s-a schimbat față de cazul precedent.

Procedeul de urmat în continuare pentru determinarea pulsațiilor proprii este identic cu cel descris precedent.

EXEMPLU NUMERIC

Fie $z = 6$ numărul de cilindri ai motorului omogen în linie.

Fie :

$$\begin{array}{llll} m = 0{,}01 & \text{kgf cm}^{-1}\,\text{s}^2 & c = 10\,000 & \text{kgf cm}^{-1} \\ m_1 = 0{,}02 & ,, & c_1 = 20\,000 & ,, \\ m_2 = 0{,}03 & ,, & c_2 = 30\,000 & ,, \\ m_3 = 0{,}04 & ,, & c_3 = 40\,000 & ,, \\ m_4 = 0{,}05 & ,, & c_4 = 50\,000 & ,, \\ m' = 0{,}02 & ,, & c' = 5\,000 & ,, \\ m'' = 0{,}03 & ,, & c'' = 6\,000 & ,, \end{array} \tag{20 a}$$

Rezultă că $\omega_p^2 = 10^6\ \text{s}^{-2}$.

Introducînd valorile numerice (20 a) în ecuația (7 a) se obține ecuația

$$B_e(x) = \frac{1}{2}\left[x + 1 + \frac{180\,x^2 - 825\,x + 720}{120\,x^3 - 850\,x^2 + 1695\,x - 840}\right]. \tag{21 a}$$

Pentru a trasa curba $B_e = B_e(x)$ avînd ecuația (21 a) se dau lui x diferite valori și se calculează valorile corespunzătoare ale lui $B_e(x)$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$B_e(x)$	+ 0,0715	+ 0,0795	+ 0,074	+ 0,0465	— 0,021	— 0,1775	— 0,6055

x	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$B_e(x)$	— 3,150	+ 3,518	+ 1,680	+ 1,300	+ 1,147	+ 1,0695	+ 1,0235

x	1,4	1,5	1,6
$B_e(x)$	+ 0,9905	+ 0,9615	+ 0,929

Se trasează curba $B_e = B_e(x)$ avînd ecuația (21a) în planul curbelor $B_y = B_y(x)$ și se construiește curba $B'_e = B'_e(x)$ după metoda indicată precedent (fig. *7a*).

Se introduc valorile numerice (20 a) în ecuaţia (13), care a rămas neschimbată, şi se obţine ecuaţia

$$B_i(x) = 2x - 0{,}5 - \frac{0{,}15}{x - 0{,}5}\,. \qquad (22\ \mathrm{a})$$

Se trasează hiperbola $B_i = B_i(x)$ avînd ecuaţia (22a) (fig. 8 *a*). În figura 8 *a* hiperbola a fost construită prin procedeul clasic deoarece se cunosc ecuaţiile celor două asimptote ale hiperbolei

$$y = 2x - 0{,}5 \text{ şi } x = 0{,}5$$

şi valoarea ordonatei la origine

$$(B_i)_{x=0} = -0{,}2$$

Se intersectează curbele (B_e') şi (B_i) obţinînd în planul figurii 9 *a* patru puncte de intersecţie ale căror abscise au valorile

$$x_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}0335\,;\ x_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}1825\,;\ x_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_p}\right)^2 = 0{,}7035\,;$$

$$x_4 = \left(\frac{\omega_4}{\omega_p}\right)^2 = 1{,}0085.$$

Avînd $\omega_p^2 = 10^6\ \mathrm{s}^{-2}$ se calculează valorile primelor patru pulsaţii proprii ale sistemului vibrant format din cele 12 mase iniţial considerate

$$\omega_1 = 183{,}03\ \mathrm{s}^{-1};\ \omega_2 = 427{,}2\ \mathrm{s}^{-1};\ \omega_3 = 838{,}8\ \mathrm{s}^{-1};\ \omega_4 = 1004{,}2\ \mathrm{s}^{-1}.$$

În acelaşi mod se pot determina pulsaţiile proprii ale sistemelor vibrante formate din arborele cotit al unui motor omogen în linie încărcat la cele două extremităţi cu un număr oarecare de piese.

Primită la redacţie la 3 februarie 1960, o nouă versiune la 14 martie 1960.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ПУЛЬСАЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРУТИЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЯМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается метод определения собственных крутильных пульсаций колебательной системы, составленной из однородного двигателя, включенного между боковыми массами.

Распространяется графический метод Отто Кремера-Бертольда Франка-Роберта Арнольда на сложный случай однородного двигателя с ь цилиндрами, включенного между шестью боковыми массами.

Указанный метод расчета можно применить к случаю любого числа боковых масс, между которыми включен однородный двигатель.

Если тщательно осуществить графическое построение, то полученные значения для собственных пульсаций очень близки к точным значениям.

DETERMINATION OF THE NATURAL FREQUENCY OF TORSIONAL VIBRATIONS OF CRANKSHAFTS

ABSTRACT

This paper presents a method for determining the natural frequency of torsional vibrations of a system consisting of a crankshaft to which lateral weights are attached.

The Otto Kraemer-Berthold Frank-Robert Arnold graphical method is extended to the complex case of the crankshaft of a 6 cylinder engine, to which 6 lateral weights are attached.

The method may be applied to the case of any number of weights attached to the crankshaft.

If the graphical construction is carefully made, the obtained values are very close to the exact ones.

BIBLIOGRAFIE

1. OTTO KRAEMER, *Drehschwingungsrechnung*. Umdruck A. Karlsruhe. Technische Hochschule Fridericiana, 1954.
2. AUBERT, PAPELIER, *Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie*. **I**.
3. В. П. ТЕРСКИХ, *Расчеты крутильных колебаний силовых установок*. **I**, Машгиз, Москва, 1953; **II**, Машгиз, Москва, 1954; **III**, Судпромгиз, Ленинград, 1954.
4. И. В. АНАНИЕВ, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*. Гостехиздат, Москва, 1946.
5. В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем*. Изд. Академии Наук Укр. ССР, Киев, 1952.

MĂSURAREA VIBRAȚIILOR ȘI ȘOCURILOR MECANICE CU TRADUCTORI CAPACITIVI

DE

E. PROCOPOVICI

1. Această lucrare a fost elaborată în legătură cu problemele de măsurare a presiunilor şi forţelor aerodinamice în tubul de şoc al laboratorului de aerodinamică al Institutului de mecanică aplicată. Se punea astfel problema măsurării unor variaţii de presiuni cu caracter tranzitoriu într-un interval de timp scurt de circa 10—15 ms. Condiţii severe asupra gabaritului traductorilor precum şi asupra inerţiei mecanice a acestora au determinat alegerea tipului de traductor capacitiv. Dintre circuitele de măsură specifice traductoarelor capacitive [1], [2], [3] a fost ales circuitul parametric arătat în figura 1. În cele ce urmează se studiază circuitul şi se propune o schemă nouă care permite, pe de o parte, o substanţială îmbunătăţire a performanţelor, iar pe de altă parte, o simplificare a sa.

2. Figura 1 prezintă circuitul de măsură pentru traductorul capacitiv. Capacitatea variabilă a traductorului $C(t)$ este montată în serie cu o rezistenţă R şi cu o sursă de curent continuu E. La bornele rezistenţei R se culege o tensiune care, după cum se va vedea în cele de mai jos, este proporţională cu variaţiile capacităţii dacă constanta de timp $\tau = RC$ a circuitului este mult mai mare decît perioada sau durata fenomenului de măsurat.

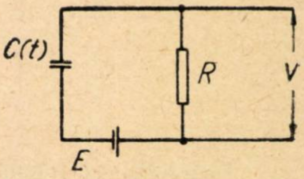


Fig. 1

Această condiţie împiedică utilizarea metodei la cazul vibraţiilor de j.f. deoarece mărirea constantei de timp prin montarea unei capacităţi mari reduce apreciabil semnalul. În cazul cînd τ este mult mai mic decît perioada fenomenului, tensiunea va fi proporţională cu derivata variaţiei în timp a capacităţii.

Constante de timp mult mai mari fără a se mări capacitatea se pot obţine cu ajutorul montajului din figura 2 care permite în acelaşi timp înlăturarea bateriei E.

Astfel capacitatea $C(t)$ se va încărca din bateria anodică a tubului electronic montat ca un repetor catodic care asigură o rezistență de intrare foarte mare.

Schema echivalentă (fig. 3) permite scrierea ecuațiilor pentru montajul propus

$$\rho i_b + R_N i_b + R_k (i_b - i_0) = e_b - E_0 + \mu e_g, \tag{1}$$

$$\frac{1}{C(t)\,p} i_0 + R_g i_0 + R_k (i_0 - i_b) = 0, \tag{2}$$

$$e_g = -(R_g i_0 - R_N i_b), \tag{3}$$

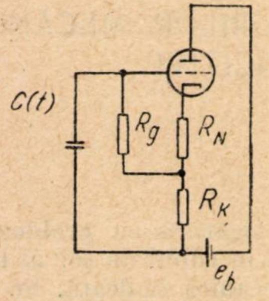


Fig. 2

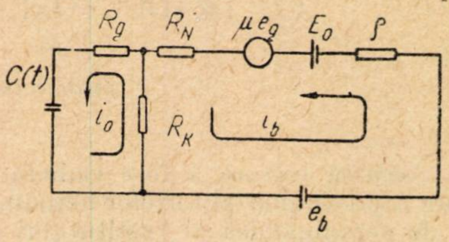


Fig. 3

în care ρ este rezistența internă a tubului iar μ amplificarea sa. Din (1) (2) (3) se poate obține prin eliminarea lui i_b

$$\frac{1}{C(t)}\int i_0\,dt + \left(R_g + R_k + \frac{\mu R_g - R_k}{\frac{R_N+\rho}{R_k} + 1 + \frac{\mu R_N}{R_k}}\right) i_0 = \frac{e_b - E_0}{\frac{R_N+\rho}{R_k} + 1 + \frac{\mu R_N}{R_k}}. \tag{4}$$

Capacitatea circuitului $C(t)$ este compusă dintr-o capacitate constantă în timp C_0 care reprezintă capacitatea de repaus a traductorului precum și capacitățile parazite ale circuitului și o capacitate variabilă în timp $\Delta C \cdot U(t)$, proporțională cu o deplasare mecanică a celor două armături

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cdot U(t) = C_0 (1 + \alpha \cdot U(t)), \tag{5}$$

în care $\alpha = \Delta C / C_0$.

Deoarece valoarea α este foarte mică (de ordinul $\alpha = 0{,}01$) se poate scrie cu foarte bună aproximație

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{1}{C_0(1 + \alpha \cdot U(t))} \cong \frac{1}{C_0}(1 - \alpha U(t)).$$

Cu notațiile

$$\tau_0 = C_0 R; \qquad R = R_g + R_k + \frac{\mu R_g - R_k}{\frac{R_N + \rho}{R_k} + 1 + \frac{\mu R_N}{R_k}};$$

$$I = \frac{e_b - E_0}{R\left(\frac{R_N + \rho}{R_k} + 1 + \frac{\mu R_N}{R_k}\right)}, \tag{6}$$

ecuația (4) ia forma

$$i_0 + \frac{1 - \alpha \cdot u(t)}{\tau_0} \int i_0 \, dt = I. \tag{7}$$

Ținînd seama că $i_0 = \frac{dq}{dt}$ se obține

$$\dot{q} + \frac{1}{\tau_0}(1 - \alpha u(t))\, q = I. \tag{8}$$

Pentru rezolvarea ecuației (8) se va folosi metoda parametrului mic [4] punînd soluția sub forma

$$q = q_0 + \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 + \ldots + \alpha^n q_n + \ldots \tag{9}$$

În acest caz prin înlocuire directă în ecuația (8) se poate obține pentru aproximația de ordinul n expresia recurentă

$$q_n = \frac{\exp(-t/\tau_0)}{\tau_0} \int u(t) \cdot q_{n-1} \cdot \exp(t/\tau_0)\, dt. \tag{10}$$

Astfel soluția (9) se poate scrie

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\tau_0} \cdot \exp(-t/\tau_0) \int u(t)\, q_{n-1} \cdot \exp(t/\tau_0)\, dt. \tag{11}$$

3. Pe baza rezultatului obținut vom examina în cele de mai jos două cazuri. Cazul cînd $u(t)$ este o funcție periodică și cazul cînd $u(t)$ este o funcție cu caracter tranzitoriu.

a) *Cazul general al unei funcțiuni periodice.* Presupunem funcția $u(t)$ de forma

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin kpt. \tag{12}$$

Deoarece valoarea mică a lui α asigură o convergență foarte bună a seriei (9) ne vom limita la prima aproximație (doi termeni).

În acest caz folosindu-ne de (11) obținem

$$q = \tau_0 I - \alpha I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \sin kpt}{\tau_0 (1/\tau_0^2 + p^2 k^2)} - \alpha I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dt} c_k \sin kpt}{1/\tau_0^2 + p^2 \tau^2}. \tag{13}$$

tensiunea v la bornele circuitului va fi

$$v = R\frac{dq}{dt} = R\left(\alpha I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k \sin kpt}{\frac{1}{k^2p^2\tau_0^2}+1} - \alpha I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{d}{dt}c_k \sin kpt}{\tau_0\left(\frac{1}{\tau_0^2}+p^2k^2\right)}\right). \tag{14}$$

Examinîndu-se expresia (14) se poate vedea imediat ținînd seama de (12) că dacă

$$\tau_0 \gg 2\pi/p, \qquad v \cong \alpha RI\cdot u(t), \tag{15}$$

$$\tau_0 \ll 2\pi/k_{\max}\,p, \qquad v \cong \alpha RI\tau_0\frac{dU(t)}{dt}. \tag{16}$$

Rezultatul simplu de mai sus permite calcularea valorii semnului de ieșire al circuitului din figura 2.

Astfel tensiunea v este proporțională fie cu funcția fie cu derivata funcției după cum constanta de timp τ_0 este mai mare sau mai mică decît perioada fenomenului.

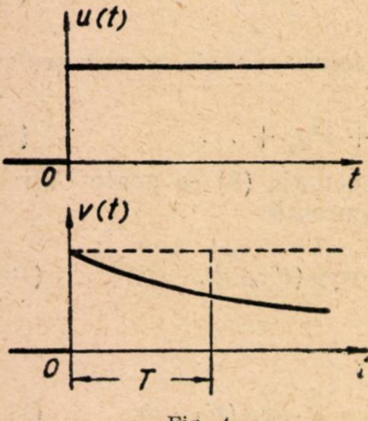


Fig. 4

b. *Cazul funcției tranzitorii.* Presupunem că funcția $u(t)$ este de forma

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

În acest caz ecuația (8) se poate rezolva direct obținîndu-se

$$v = \alpha RI\,\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\tau_0}t\right). \tag{17}$$

Și în acest caz se obține un rezultat asemănător cu cel obținut la punctul a., tensiunea fiind proporțională cu semnalul dacă $\tau_0 \gg T$ cu o eroare relativă maximă

$$\varepsilon = 1 - \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\tau_0}T\right) \cong 1 - \exp(-T/\tau_0) \tag{18}$$

T fiind durata utilă de măsurare (fig. 4).

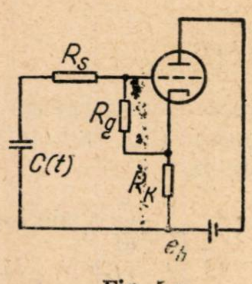


Fig. 5 *a*

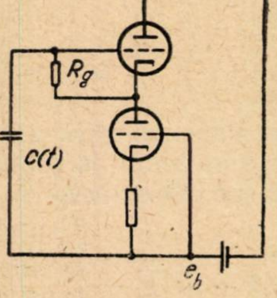


Fig. 5 *b*

Relația (18) permite calcularea constantei de timp necesare pentru circuitul de intrare în funcție de eroarea admisibilă și durata timpului de măsură.

3. Din expresia rezistenței echivalente a circuitului de intrare (6) se vede ușor că utilizînd schema propusă se poate obține un semnal aproximativ de μ ori mai mare față de cel dat de schema din figura 1 pentru aceeași constantă de timp. Pentru mărirea constantei de timp și deci a intervalului de frecvențe se poate folosi schema din figura 5 *a* în care se înseriază rezistența R_s cu rezistența de intrare a circuitului. În acest caz

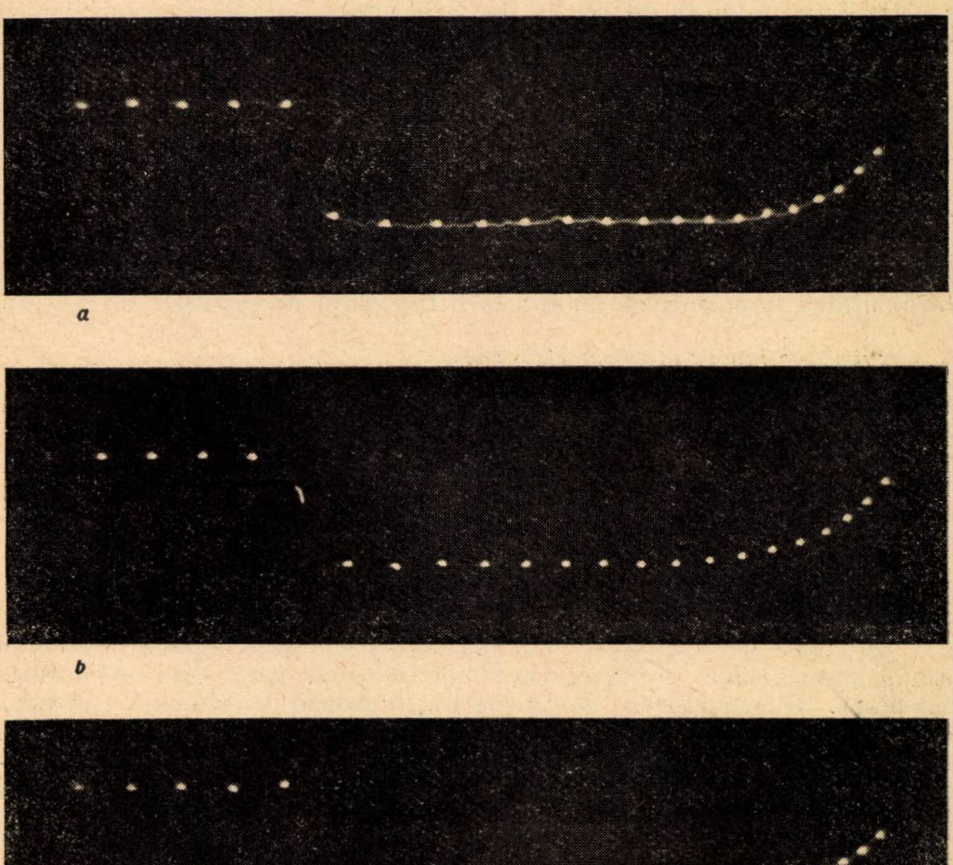


Fig. 6

însă semnalul obţinut va fi mai mic fiind divizat de rezistenţele R_s şi cea de intrare R.

Rezultate bune pot fi obţinute înlocuindu-se rezistenţa cu un tub electronic obţinîndu-se astfel o rezistenţă dinamică (fig. 5 *b*). În aceste condiţii circuitele propuse permit extinderea metodei în domeniul frecvenţelor joase pînă la frecvenţe de 0,1 Hz. La frecvenţe înalte metoda nu este practic limitată decît de banda de frecvenţe a amplificatorului folosit sau cea a traductorului.

4. Rezultatele obţinute mai sus au fost folosite la elaborarea unei aparaturi de măsurarea presiunilor în tubul de şoc al Institutului de mecanică aplicată. În figura 6 se arată cîteva fotooscilograme obţinute cu ajutorul unui circuit de intrare de tipul celui arătat în figura 2.

Traductorul folosit este de tipul traductoarelor cu membrană. Circuitul de măsură a fost conectat la un oscilograf catodic „Orion" tip 1538 iar pentru măsurarea intervalelor de timp s-a utilizat modulaţia de luminozitate cu ajutorul unui generator de impulsuri tip „Orion" tip 1152 care furniza impulsuri de 50 μ s la o frecvenţă de repetiţie de 1,6 Kc.

Primită la redacţie la 30 decembrie 1959.

ИЗМЕРЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ УДАРОВ ПРИ ПОМОЩИ ЕМКОСТНЫХ ДАТЧИКОВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается и анализируется цепь параметрического типа, применяемая в качестве измерительной цепи для емкостных датчиков. Предлагается новая схема, которая расширяет область применимости цепи и, одновременно, упрощает последнюю. Новая схема дает возможность применения метода в диапазоне низких частот. В диапазоне высоких частот метод ограничен лишь динамической характеристикой применяемого датчика.

LA MESURE DES VIBRATIONS ET DES CHOCS MÉCANIQUES AU MOYEN DE TRADUCTEURS CAPACITIFS

RÉSUMÉ

L'auteur fait l'étude et l'analyse d'un circuit du type paramétrique utilisé comme circuit de mesure pour les traducteurs capacitifs. Il propose un nouveau schéma qui améliore les performances du circuit, tout en le simplifiant. Le nouveau schéma permet l'emploi de la méthode dans le

domaine des basses fréquences. Dans le domaine des hautes fréquences, la méthode n'est limitée que par la caractéristique dynamique du traducteur utilisé.

BIBLIOGRAFIE

1. M. **HETENY**, *Handbook of Experimental Stress Analysis*. Ed. John Wiley, New York, 1950.
2. A. M. **TURICIN**, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
3. А. М. **ТУРИЧИН**, *Экспериментальные методы исследования машин*. Академия Наук СССР, Москва, 1952.
4. P. H. **MORSE**, N. **FASHBACH**, *Methods of Theoretical Physics*. Mc. Graw Hill Book Co., 1950.

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

O METODĂ MATRICIALĂ PENTRU CALCULUL VIBRAŢIILOR CADRELOR

DE

K. K. PONOMAREV[1]

După cum se ştie, ecuaţia vibraţiilor libere ale unei bare drepte *OK* de secţiune constantă este

$$y^{\mathrm{IV}} - \frac{\lambda}{l} y = 0$$

unde: $\lambda = \dfrac{\mu\omega^2}{EI}$,

μ — masa grinzii,

ω — frecvenţa vibraţiilor proprii,

l — lungimea deschiderii.

Soluţia acestei ecuaţii împreună cu primele trei derivate formează un sistem care în scriere matricială, făcînd calculul de la stînga la dreapta, are forma

$$\begin{bmatrix} y_K \\ \varphi_K \\ M_K \\ Q_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & -l\psi_2 & -\dfrac{l^2}{EI}\psi_3 & -\dfrac{l^3}{EI}\psi_4 \\ -\dfrac{\lambda}{l}\psi_4 & \psi_1 & \dfrac{l}{EI}\psi_2 & \dfrac{l^2}{EI}\psi_3 \\ -\dfrac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \dfrac{\lambda^4 EI}{l}\psi_4 & \psi_1 & l\psi_2 \\ -\dfrac{\lambda^4 EI}{l^3}\psi_2 & \dfrac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \dfrac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Aici

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda)\,;\; \psi_3 = \frac{1}{2\lambda^2}(\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda)\,;$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2\lambda}(\mathrm{sh}\,\lambda + \sin\lambda)\,;\; \psi_4 = \frac{1}{2\lambda^3}(\mathrm{sh}\,\lambda - \sin\lambda).$$

---

[1] Institutul Unional al industriei alimentare (VZIPP), Moscova.

în prezența reazemelor rigide O și K (grindă cu o singură deschidere, încastrată, rezemată articulat, sau încastrată la un capăt iar la celălalt rezemată articulat).

Introducînd aceste valori în prima ecuație a sistemului (1), obținem expresia

$$Q_0 = \frac{-EI\,\psi_2\,\varphi_0 - l\,\psi_3\,M_0}{l^2\,\psi_4},$$

după eliminarea căreia din ecuațiile a doua și a treia ale sistemului, avem

$$\{Y_K\} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_K \\ \\ M_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 - \dfrac{\psi_2\,\psi_3}{\psi_4} & -\dfrac{l}{EI}\left(\psi_2 - \dfrac{\psi_2^3}{\psi_4}\right)^2 \\ \dfrac{EI}{l}\left(\lambda^4\psi_4 - \dfrac{\psi_2^2}{\psi_4}\right) & \psi_1 - \dfrac{\psi_2\,\psi_3}{\psi_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \\ M_0 \end{bmatrix} \equiv [L]\cdot\{Y_0\}. \tag{2}$$

Matricea deschiderii $[L]$ se simplifică prin introducerea următoarelor funcții ale lui Prager

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \operatorname{ch}\lambda\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda\cos\lambda = 2^2\frac{\lambda^3}{3!} - 2^4\frac{\lambda^7}{7!} + 2^6\frac{\lambda^{11}}{11!} - \ldots + \ldots \\ B(\lambda) &= 2\operatorname{sh}\lambda\sin\lambda = 2^2\frac{\lambda^2}{2!} - 2^4\frac{\lambda^6}{6!} + 2^6\frac{\lambda^{10}}{10!} - \ldots + \ldots \\ C(\lambda) &= \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda - 1 = -2^2\frac{\lambda^4}{4!} + 2^4\frac{\lambda^8}{8!} - 2^6\frac{\lambda^{12}}{12!} + \ldots - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

După transformări algebrice elementare ale ecuațiilor (2) matricea deschiderii capătă forma

$$[L] = \frac{1}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}\begin{bmatrix} A(\lambda) & -\dfrac{l}{\lambda EI}\cdot C(\lambda) \\ \dfrac{\lambda EI}{l}\cdot B(\lambda) & A(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

unde funcția $\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda = -2\left[\dfrac{\lambda^3}{3!} + \dfrac{\lambda^7}{7!} + \dfrac{\lambda^{11}}{11!} + \ldots\right].$

Ecuația (2) în acest caz se scrie sub forma de mai jos

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}\left[A(\lambda)\cdot\varphi_0 - \frac{l}{\lambda EI}\,C(\lambda)\,M_0\right] \\ M_1 &= \frac{1}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}\left[\frac{\lambda EI}{l}\,B(\lambda)\cdot\varphi_0 + A(\lambda)\,M_0\right] \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Matricea (4) conține ecuațiile vibrațiilor pentru cele patru combinații de rezemare posibile (fig. 1). Este numai necesar ca conform condițiilor la limită date, să suprimăm un rînd și o coloană, iar elementul rămas să-l egalăm cu zero.

Mărimea trivială $\lambda = 0$, ca neavînd importanţă practică, nu o vom lua în considerare şi, în felul acesta, numitorul $\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda$ niciodată nu este egal cu zero.

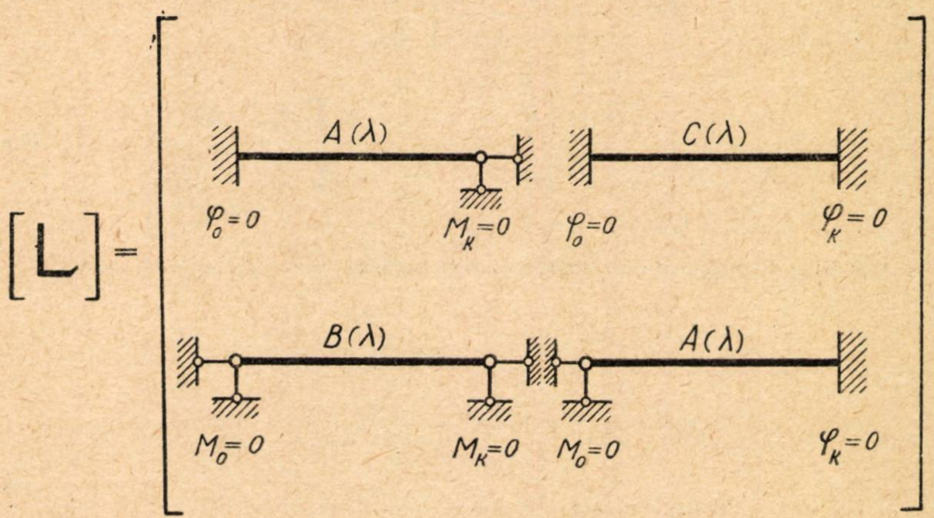


Fig. 1

Rădăcinile funcţiilor A, B, C se găsesc după formulele din tabela 1.

Tabela 1

Funcţia / Rădăcinile	$A/\lambda/ = 0$	$B/\lambda/ = 0$	$C/\lambda/ = 0$
λ_n $/n = 1, 2, 3\ldots/$	$\approx \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$	$n\cdot\pi$	$\lambda_1 = 4{,}7299$ $\approx \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$; $\lambda_2 = 7{,}8531$ $\lambda_3 = 10{,}996$

Starea de tensiune şi de deformaţie în orice secţiune a $n-a$ a grinzii în vibraţie se exprimă prin relaţia

$$\{Y_n\} = [L_n]\cdot[L_{n-1}]\cdot\ldots\cdot[L_2]\cdot[L_1]\cdot\{Y_0\},$$

unde $[Li] = 1, 2, \ldots, n$ — matricea vibraţiilor diferitelor deschideri sau pentru cazul unui sistem de grinzi cu deschideri egale

$$\{Y\} = [L]^n\cdot\{Y_0\}. \tag{6}$$

Introducînd noile funcţii $\hat{B} = \frac{\lambda EI}{l}\cdot\frac{B}{A}$, $\hat{C} = \frac{l}{\lambda EI}\cdot\frac{C}{A}$, $\hat{B}\cdot\hat{C} = \frac{BC}{A^2} = D$ egalitatea (4) capătă forma

$$[L] = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}\begin{bmatrix}1 & -\hat{C}\\ \hat{B} & 1\end{bmatrix}, \tag{7}$$

sau

$$[L]^n = \frac{A^n}{(\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda)^n} \begin{bmatrix} T_n & -\hat{C}S_n \\ \hat{B}S_n & T_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

unde

$$\begin{aligned} T_n &= C_0^n - C_2^n D + C_4^n D^2 - \ldots + \ldots = \sum C_{2i}^n (-D)^i \\ S_n &= C_1^n - C_3^n D + C_5^n D^2 - \ldots + \ldots = \sum C_{2i+1}^n (-D)^i ; \\ i &= 0, 1, 2, 3\ldots \end{aligned} \tag{8 a}$$

Condițiile vibrațiilor pentru diferite condiții la limită conform relației (8) vor fi

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi_0 = 0,\ M_n = 0 \quad A^n \frac{T_n}{(\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda)^n} = 0; \\ &2)\ \varphi_0 = 0,\ \varphi_n = 0 \quad -\hat{C}A^n \frac{S_n}{(\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda)^n} = 0; \\ &3)\ M_0 = 0,\ M_n = 0 \quad \hat{B}A^n \frac{S_n}{(\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda)^n} = 0; \\ &4)\ M_0 = 0,\ \varphi = 0 \quad A^n \frac{T_n}{(\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda)^n} = 0. \end{aligned} \tag{8 b}$$

După cum se știe, momentul reactiv la rotirea reazemului este $M_n = -\mu \cdot \varphi_n$. Folosind (8) vom forma expresia auxiliară

$$-\frac{M_n}{\varphi_n} = \overline{K}, \ (\varphi_n \neq 0), \tag{9}$$

care în cazul cel mai simplu reprezintă caracteristica reazemului redus cu rotație elastică în punctul n.

Pentru reazemul încastrat $-\overline{K}_a^{(n)} = -\frac{T_n}{\hat{C}S_n}$ iar pentru cel articulat $-\overline{K}_b^n = \frac{\hat{B}S_n}{T_n}$.

În cazul particular al grinzii cu o singură deschidere pentru $T_1 = S_1 = I$

$$-\overline{K}_a^{(1)} = -\frac{1}{\hat{C}}\ ;\ -\overline{K}_b^{(1)} = \hat{B}.$$

Ridicînd nedeterminarea acestor expresii (pentru $\lambda = 0$) cu ajutorul regulii lui L'Hôpital, obținem $K_a^{(1)} = -4\frac{EI}{l}$; $K_b^{(1)} = 3\frac{EI}{l}$.

Să studiem vibrațiile oricărui cadru de *contur deschis* (fig. 2*a*). Rigla orizontală a cadrului o luăm ca bară principală. Tăiem toate ramificările, iar acțiunea lor o înlocuim cu reazeme elastice reduse și în felul acesta problema o reducem la calculul vibrațiilor unei grinzi continue.

Deoarece între momentele încovoietoare imediat la stînga şi la dreapta reazemului condiţia de conjugare este

$$M_i^{pr} = M_i^{le\,8} - \mu_i \varphi_i ,$$

rezultă că matricea deschiderii trebuie înmulţită la stînga cu matricea de trecere

$$[F_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mu_i & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

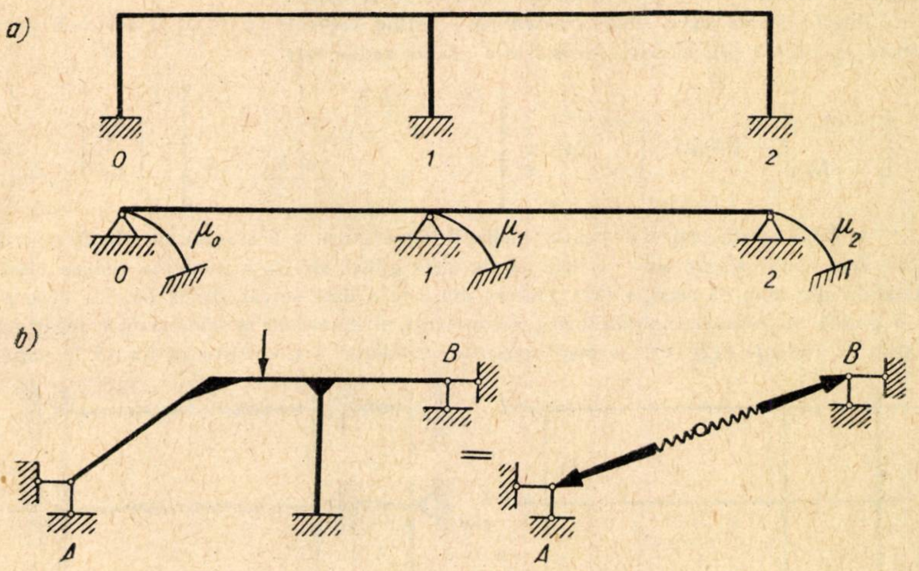


Fig. 2 *a* şi *b*

ceea ce dă: $\{Y_i^*\} = [L_i] \cdot \{Y_{i-1}^*\}$,

sau

$$\{Y_{i-1}^*\} \equiv \left[\begin{array}{c} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ \hdashline \varphi_i \end{array} \right] \} = \{Y_{i-1}\}$$

$$[L_i] = \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \operatorname{sh} \lambda_i} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\hat{C}_i & 0 \\ \hat{B}_i & 1 & -\mu_i \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{c} \varphi_{i-1} - \hat{C} M_{i-1} = \varphi_i \\ \hat{B} \varphi_{i-1} + M_{i-1} - \mu_i \varphi_i \end{array} \right] \right. = \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \operatorname{sh} \lambda_i} \{Y_{i-1}^*\}.$$

Această înmulţire este posibilă prin faptul că al treilea element din prima linie a matricei $[L_i]$ este zero iar în prima linie a produsului se obţine totdeauna o dependenţă liniară care reprezintă primul element al următoarei matrice-coloană $\{Y_i\}$ (sau al treilea element al matricei-coloană completate).

Calculul ulterior nu mai diferă de loc de calculul vibraţiilor grinzii continue.

Calculul vibraţiilor cadrelor de *contur închis* se reduce la următoarele.

Tăiem cadrul în două secţiuni (reazeme) A, B (fig. 2*b*) şi determinăm dependenţa liniară a momentelor M_A, M_B şi a unghiurilor de rotire φ_A şi φ_B sub formă matricială

$$\begin{bmatrix} -M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_{AB}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Aici $[K_{AB}]$ — matricea reazemului elastic bilateral redus (matricea elasticităţii reduse a întregului sistem).

Mărimea M_A s-a luat cu semnul minus, deoarece încărcarea datorită inerţiei porţiunii vibrante a cadrului este repartizată la capetele intervalului.

Pentru grinda cu o singură deschidere, notînd capetele cu O, K şi folosind pentru aceasta egalitatea (7), matricea reazemului elastic redus este

$$\begin{bmatrix} -M_0 \\ M_K \end{bmatrix} = [K_{0K}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_K \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{C}} \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}{A} & -1 \\ -1 & \dfrac{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_K \\ \varphi_0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

În felul acesta, cadrul de contur închis îl împărţim în n bare continue. Legăturile rectilinii care unesc aceste bare trebuie să fie nişte grinzi ale căror reazeme reduse elastice bilaterale sînt date de ecuaţia (12). Fiecare din cele n bare se calculează pe cale obişnuită, ca o grindă cu parametri iniţiali liberi, necunoscuţi, ai eforturilor şi deformaţiilor, legaţi între ei prin dependenţa (12). Prin urmare, datorită existenţei a n condiţii la limită la capătul „din dreapta" al barei trebuie să egalăm cu zero un determinant de ordinul n, ceea ce dă ecuaţia căutată a vibraţiilor. Se obţine un calcul deosebit de clar pentru o schemă dreptunghiulară a cadrului şi pentru un sistem înlocuitor echivalent acesteia din punct de vedere topologic (fig. 3).

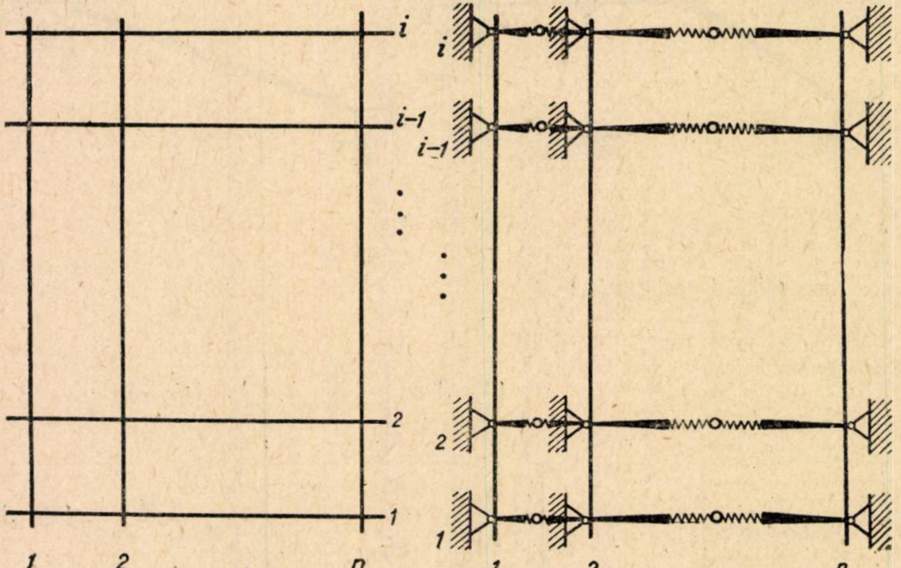


Fig. 3

În acest caz matricea lărgită (7) reprezintă matricea elasticității reduse de ordinul n

$$[L_i] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
\frac{A_1}{\sin\lambda_1 - \mathrm{sh}\,\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{A_1\hat{C}_1}{\sin\lambda_1 - \mathrm{sh}\,\lambda_1} & 00\ldots0 \\
0 & \frac{A_2}{\sin\lambda_2 - \mathrm{sh}\,\lambda_2} & \cdots & \cdots & -\frac{A_2\hat{C}_2}{\sin\lambda_2 - \mathrm{sh}\,\lambda_2} & 0 & 00\ldots0 \\
\hdashline
0 & 0\;\cdots & \frac{A_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\,\lambda_n} & -\frac{A_n\hat{C}_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\,\lambda_n} & \cdots & 00 & 00\ldots0 \\
\hdashline
0 & 0 & \frac{A_n\hat{B}_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\,\lambda_n} & \frac{A_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\,\lambda_n} & \cdots & 00 & \\
\hdashline
0 & \frac{A_2\hat{B}_2}{\sin\lambda_2 - \mathrm{sh}\,\lambda_2} & \cdots & \cdots & \frac{A_2}{\sin\lambda_2 - \mathrm{sh}\,\lambda_2} & 0 & [K] \\
\frac{A_1\hat{B}_1}{\sin\lambda_1 - \mathrm{sh}\,\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{A_1}{\sin\lambda_1 - \mathrm{sh}\,\lambda_1} &
\end{array}\right] \qquad (13)$$

în care matricea-bloc $[K]$ conține toate reazemele elastice reduse unilaterale și bilaterale.

În cazul unui sistem omogen, matricea (13) degenerează în

$$[L_i] = \frac{A}{\sin\lambda - \mathrm{sh}\,\lambda}\left[\begin{array}{cc|c} [E] - \hat{C}\,[U] & & 0 \\ \hat{B} & [E] & [K] \end{array}\right], \qquad (14)$$

unde :

$$[E] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & I \end{bmatrix}, \quad [U] = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & I & 0 & 0 & 0 \\ & \ldots & & \cdot & \cdot & \cdot \\ I & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 1. Să se determine frecvențele proprii minime ale vibrațiilor unui cadru de oțel de asecțiune transversală circulară de rază 3 cm (fig. 4*a*).

Conform condițiilor la limită date (8 b) cînd există trei deschideri ($n = 3$) ecuația vibrațiilor este

$$A^3 \cdot \frac{T_3}{(\sin\lambda - \mathrm{sh}\,\lambda)^3} = 0.$$

Rezolvînd această ecuație obținem : $A(\lambda) = 0$ sau (tabela 1) $\lambda_1 = 3{,}93$, $\lambda_2 = 7{,}07$. Apoi, conform (8 a) :

$$T_3 = I - 3D = 0 \text{ sau } D = \frac{BC}{A^2} = \frac{I}{3}.$$

Rezolvînd ultima egalitate pe cale grafică, obținem

$$\lambda_3 = 3{,}26 \quad \lambda_4 = 4{,}61.$$

Frecvența vibrațiilor se determină din expresia:

$$\lambda^4 = \frac{\mu \cdot F \cdot \omega^2 \cdot l^4}{EI},$$

unde F — suprafața secțiunii transversale, iar celelalte notații rămîn neschimbate.

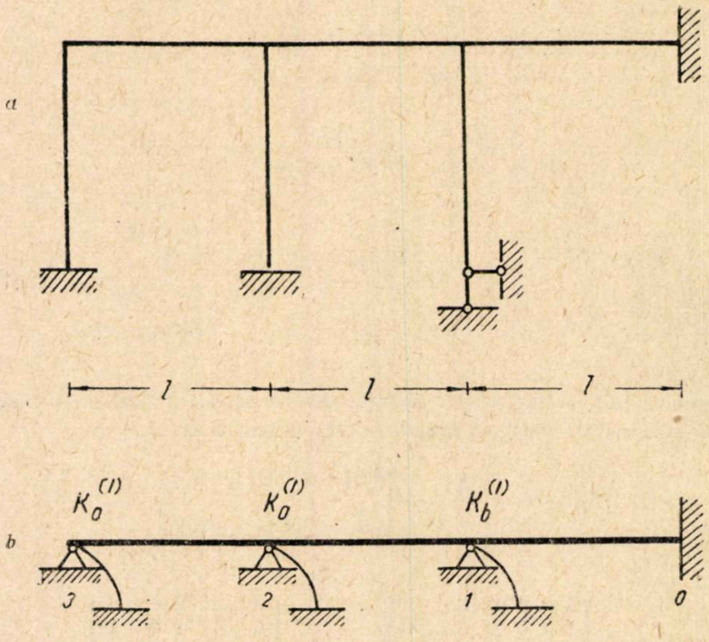


Fig. 4 *a* și *b*

Deoarece momentul de inerție al cercului $I = \frac{F\tau^2}{4}$, iar μ este masa grinzii pe unitatea de lungime (greutatea volumetrică a oțelului 7,8 t/m³), atunci

$$\omega^2 = \frac{981.2{,}1.10^6.3^2}{7{,}8.4.300^4} \lambda^4 = 0{,}0733 \ \lambda^4 \, s^{-2},$$

sau $\omega = 0{,}271 \ \lambda^2 s^{-1}$.

Numărul de vibrații pe minut $f = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30.0{,}271}{3{,}14} \lambda^2 = 2{,}59 \ \lambda^2$ (vib./min).

În felul acesta, numărul de vibrații minim este

$f_1 = 2{,}59 \cdot 3{,}26^2 = 27{,}5$ vib./min

$f_2 = 2{,}59 \cdot 3{,}93^2 = 39$,,

$f_3 = 2{,}59 \cdot 4{,}61^2 = 55$,,

$f_4 = 2{,}59 \cdot 7{,}07^2 = 129{,}4$,, *Exemplul 2.* Să se găsească frecvenţele proprii minime ale vibraţiilor cadrului (fig. 5*a*) Sistemul echivalent cu reazeme elastice reduse este arătat pe figura 5*b*.

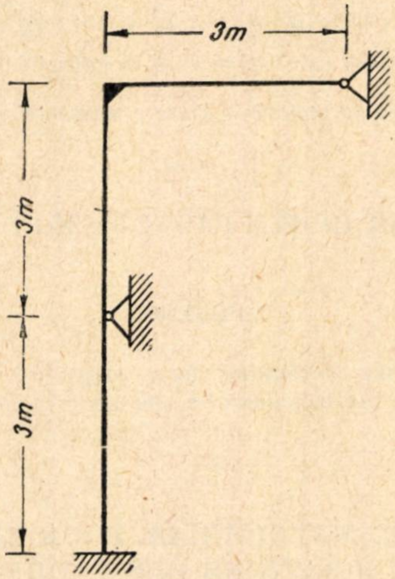


Fig. 5

Deoarece $-K_b^{(1)} = \hat{B}$, iar $-K_a^{(1)} = -\frac{1}{\hat{C}}$, atunci folosind cunoscuta formulă a momentului reactiv al reazemului rotitor $M_i = -\mu_i - \varphi_i$, întocmim trei matrici ale deschiderilor $[Li]$. Ţinînd seama de egalitatea $\hat{B}\hat{C} = D$ obţinem

$$\begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L_1] = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\hat{C} & 0 \\ \hat{B} & 1 & \hat{B} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\hat{C} \\ 1 - D \end{bmatrix} \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda},$$

$$[L_2] = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\hat{C} & 0 \\ \hat{B} & 1 & -\frac{1}{\hat{C}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\hat{C}\,(2 - D) \\ 3 - 3D \end{bmatrix} \frac{A^2}{(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^2},$$

$$[L_3] = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\hat{C} & 0 \\ \hat{B} & 1 & -\frac{1}{\hat{C}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\hat{C}\,(5 - 4D) \\ 8 - 9D + D^2 \end{bmatrix} \frac{A^3}{(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^3} = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ M_3 \end{bmatrix},$$

În prezent 3 : $M_3 = 0$. Prin urmare, expresia

$$M_3 = \frac{A^3}{(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^3} \cdot (8 - 9D + D^2)$$

pentru $A \neq 0$ dă ecuaţia $8-9D+D^2=0$, ale cărei rădăcini sînt $D_1=1$, $D_2=8$. Rezolvînd-o grafic, obţinem

$$\lambda_1^{(1)}=3{,}40\,;\ \lambda_1^{(2)}=3{,}65\,;\ \lambda_2^{(1)}=4{,}45\,;\ \lambda_2^{(2)}=4{,}20.$$

Calculul numeric ulterior este acelaşi ca şi în exemplul 1.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1959; o nouă versiune la 12 martie 1960.

МАТРИЧНЫЙ ПРИЕМ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ РАМ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится систематизация в матричной форме расчета собственных колебаний для рам, составленных из прямых стержней постоянного сечения, при колебаниях изгиба.

UNE MÉTHODE MATRICIELLE POUR LE CALCUL DES VIBRATIONS DES CADRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente une systématisation, sous la forme matricielle, du calcul des fréquences propres, dans le cas des cadres composés de barres droites à section constante, mis en vibration par flexion.

BIBLIOGRAFIE

1. ГАНТМАХЕР Ф. Р., *Теория матриц.* Москва, Гостехиздат, 1954.
2. КРЫЛОВ А. Н., *Собрание трудов.* X, Изд. АН СССР, 1948.
3. ГОГЕНЕМЗЕР К., ПРАГЕР В., *Динамика сооружений.* СИТИ, 1936.
4. ФРЕЗЕР Р., ДУНКАН В., КОЛЛАР А., *Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике.* Москва, ИЛ, 1950.
5. РЖАНИЦЫН А. Р., *Устойчивость равновесия упругих систем.* Москва, Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1955.
6. ФИЛИППОВ А. П., *Колебания упругих систем.* Киев, Изд. АН УССР, 1956.

ASUPRA UNOR FORMULE PRACTICE PENTRU CALCULUL ÎNVELITORILOR CIRCULARE CILINDRICE

DE

CEZAR AMZULESCU*)

I

În cazul folosirii betonului armat, învelitorile subţiri reprezintă soluţiile cele mai economice întrebuinţate la acoperirea suprafeţelor foarte mari fără stîlpi intermediari.

Uşoara lucrabilitate a betonului ar permite, în acelaşi timp, ca, prin forma lor, învelitorile subţiri să satisfacă cît mai bine cerinţele funcţionale şi estetice ale construcţiilor.

Formele învelitorilor subţiri intrate în practica construcţiilor sînt, însă destul de restrînse datorită dificultăţilor matematice, care împiedică prinderea în calcule a multiplelor forme pe care le-ar putea avea învelitorile. Pe de altă parte, datorită calculelor laborioase pe care le necesită chiar cele mai simple forme de învelitori, cum ar fi spre exemplu cele circulare cilindrice, se renunţă uneori la o teorie mai exactă în scopul scurtării timpului de proiectare.

Întrucît învelitorile circulare cilindrice au în prezent o largă răspîndire, în lucrarea de faţă se sistematizează calculul lor în teoria cvasi-completă de încovoiere şi se stabilesc o serie de formule practice, care dau posibilitatea determinării eforturilor, deformaţiilor şi deplasărilor învelitorilor rezemate pe grinzi marginale şi timpane.

★

Suprafaţa mediană a învelitorii circulare cilindrice s-a reprezentat într-un sistem dextrogir, de coordonate curbilinii ortogonale (fig. 1), admiţîndu-se ca origină pentru calculul în teoria de încovoiere mijlocul uneia din generatoarele marginale I sau II.

Pentru exprimarea mai simplă a eforturilor, deformaţiilor şi deplasărilor în teoria de membrană, origina axelor în acest caz se ia la mijlocul generatoarei de la cheie.

Coordonata y poate fi exprimată în funcţie de unghiul φ, măsurat aşa cum se arată în figura 1, prin relaţia $y = \varphi R$, unde R este raza cercului director.

---

*) I.P.C.M.C.

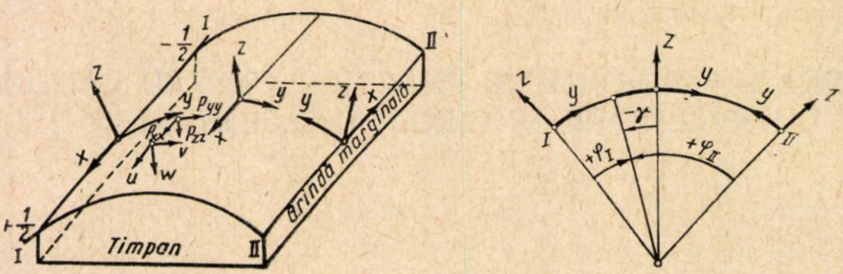
Elementele geometrice ale învelitorii se exprimă funcţie de rază prin relaţiile :

— grosimea învelitorii $H = h\,R$
— deschiderea pe generatoare $L = l\ R$
— deschiderea pe directoare $B = b\,R$

în care h, l şi b sînt coeficienţi de proporţionalitate.

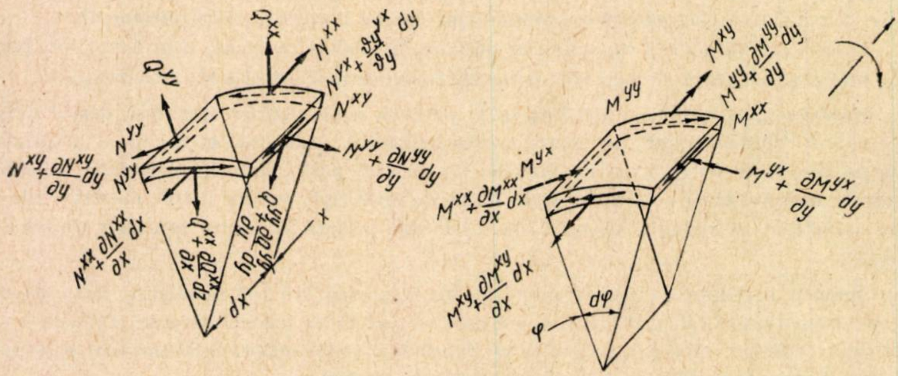
★

Dacă se admit ipotezele tehnice ale lui Kirchhoff ($\gamma^{xz} = \gamma^{yz} = 0$ şi $\sigma^{zz} \cong 0$) şi ipoteza cantitativă a deformaţiilor ($u \ll H$, $v \ll H$, $w \ll H$) atunci ecuaţiile de echilibru scrise pe elementul infinitezimal nedeformat (fig. 2) devin egale cu :



I
$-\frac{1}{2}$
$+\frac{1}{2}$
II
Z
x
y
p_{yy}
p_{xx}
p_{zz}
u
v
w
Timpan
Grinda marginala
$-\gamma$
$+\varphi_I$
$+\varphi_{II}$

Fig. 1



Q^{xx}
Q^{yy}
N^{xx}
$N^{yx} + \frac{\partial N^{yx}}{\partial y} dy$
N^{xy}
N^{yy}
$N^{xy} + \frac{\partial N^{xy}}{\partial y} dy$
$N^{yy} + \frac{\partial N^{yy}}{\partial y} dy$
$N^{xx} + \frac{\partial N^{xx}}{\partial x} dx$
$Q^{xx} + \frac{\partial Q^{xx}}{\partial x} dx$
$Q^{yy} + \frac{\partial Q^{yy}}{\partial y} dy$
x
dx
M^{xy}
M^{yy}
$M^{yy} + \frac{\partial M^{yy}}{\partial y} dy$
M^{xx}
M^{yx}
$M^{xx} + \frac{\partial M^{xx}}{\partial x} dx$
$M^{yx} + \frac{\partial M^{yx}}{\partial y} dy$
$M^{xy} + \frac{\partial M^{xy}}{\partial x} dx$
$d\varphi$
φ

Fig. 2

$$+\frac{\partial N^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N^{yx}}{\partial y} + p^{xx} = 0, \tag{1.1}$$

$$+\frac{\partial N^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N^{yy}}{\partial y} - \frac{Q^{yy}}{R} + p^{yy} = 0, \tag{1.2}$$

$$+\frac{\partial Q^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q^{yy}}{\partial y} + \frac{N^{yy}}{R} + p^{zz} = 0, \tag{1.3}$$

$$+\frac{\vartheta M^{xy}}{\vartheta x}+\frac{\vartheta M^{yy}}{\vartheta y}-Q^{yy}=0, \tag{1.4}$$

$$+\frac{\vartheta M^{xx}}{\vartheta x}+\frac{\vartheta M^{yx}}{\vartheta y}-Q^{xx}=0, \tag{1.5}$$

$$+N^{xy}-N^{yx}+\frac{M^{yx}}{R}=0. \tag{1.6}$$

Pe baza acelorași ipoteze, eforturile care apar într-un punct de pe învelitoare se pot scrie în funcţie de deformaţii în felul următor:

$$N^{xx}=+\frac{EH}{1-\mu^2}\left[+\varepsilon^{xx}+\mu\,\varepsilon^{yy}+\frac{I}{HR}\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta x}\right], \tag{2.1}$$

$$N^{yy}=+\frac{EH}{1-\mu^2}\left[+\mu\,\varepsilon^{xx}+\varepsilon^{yy}+\frac{I}{HR}\left(\frac{1}{R}\varepsilon^{yy}-\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y}\right)\right], \tag{2.2}$$

$$N^{xy}=+\frac{EH}{2(1+\mu)}\left(+\gamma^{xy}+\frac{I}{HR}\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\partial x}\right), \tag{2.3}$$

$$N^{yx}=+\frac{EH}{2\,(1+\mu)}\left[+\gamma^{xy}+\frac{I}{HR}\left(\frac{1}{R}\frac{\vartheta u}{\vartheta y}-\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y}\right)\right], \tag{2.4}$$

$$M^{xx}=-\frac{EI}{1-\mu^2}\left(+\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta x}+\mu\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y}+\frac{\varepsilon^{xx}}{R}\right), \tag{2.5}$$

$$M^{yy}=-\frac{EI}{1-\mu^2}\left(+\mu\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta x}+\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y}-\frac{\varepsilon^{yy}}{R}\right), \tag{2.6}$$

$$M^{xy}=-\frac{EI}{2\,(1+\mu)}\left(+\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\partial y}+\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta x}+\frac{1}{R}\frac{\vartheta v}{\vartheta x}\right), \tag{2.7}$$

$$M^{yz}=-\frac{EI}{2\,(1+\mu)}\left(+\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta y}+\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta x}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.8}$$

unde

$$\begin{gathered}\varepsilon^{xx}=\frac{\vartheta u}{\vartheta x};\quad \varepsilon^{yy}=\frac{\vartheta v}{\vartheta y}-\frac{w}{R};\quad \gamma^{xy}=\frac{\vartheta v}{\vartheta x}+\frac{\vartheta u}{\vartheta y},\\ \alpha^{yz}=\frac{\vartheta w}{\vartheta y}+\frac{v}{R};\quad \alpha^{xz}=\frac{\vartheta w}{\vartheta x}.\end{gathered} \tag{3}$$

Dacă se admite:

— neglijarea termenilor multiplicaţi cu coeficientul lui Poisson;

— neglijarea termenilor multiplicaţi cu raportul $\frac{I}{R}$;

— aproximaţia $\alpha^{yz}\cong\frac{\vartheta w}{\vartheta y}$, atunci expresiile care dau eforturile funcţie de deformaţii devin egale cu

$$N^{xx} = + EH\varepsilon^{xx}, \tag{4.1}$$

$$N^{yy} = + EH\varepsilon^{yy}, \tag{4.2}$$

$$N^{xy} = N^{yx} = + \frac{EH}{2}\gamma^{xy}, \tag{4.3}$$

$$M^{xx} = - EI\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta x}, \tag{4.4}$$

$$M^{yy} = - EI\frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y}, \tag{4.5}$$

$$M^{xy} = M^{yx} = - \frac{EI}{2}\left(\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta x}\right), \tag{4.6}$$

în care :

$$\frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta x} = \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2}; \quad \frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta y} = \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta y^2}; \quad \frac{\vartheta\alpha^{xz}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta\alpha^{yz}}{\vartheta x} = 2\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x\,\vartheta y}. \tag{5}$$

Înlocuind forţele tăietoare obţinute din ecuaţiile (1.4) şi (1.5) în ecuaţia (1.3), iar apoi momentele în funcţie de deformaţii conform expresiilor (4) şi (5), sistemul de ecuaţii (1) devine

$$+ \frac{\vartheta N^{xx}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta N^{xy}}{\vartheta y} + p^{xx} = 0, \tag{6.1}$$

$$+ \frac{\vartheta N^{yy}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta N^{xy}}{\vartheta x} + p^{yy} = 0, \tag{6.2}$$

$$-EI\Delta\Delta w + \frac{N^{yy}}{R} + p^{zz} = 0, \tag{6.3}$$

în care s-a neglijat termenul $\frac{Q^{yy}}{R}$, ceea ce împreună cu aproximaţia $\alpha^{yz} \cong \frac{\vartheta w}{\vartheta y}$ limitează aplicabilitatea calculului la învelitorile al căror raport dintre săgeată şi coardă este egal sau mai mic decît 1/5 [5]. Întrucît această condiţie corespunde, însă, unor unghiuri la centru de circa 87°, cazul tratat în lucrare acoperă cazurile curente întîlnite în practica construcţiilor.

Folosind relaţia de continuitate scrisă sub forma

$$+ \frac{\vartheta^2 N^{xx}}{\vartheta y^2} - 2\frac{\vartheta^2 N^{xy}}{\vartheta x\vartheta y} + \frac{\vartheta^2\vartheta N^{yy}}{\partial x^2} + \frac{EH}{R}\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} = 0 \tag{7}$$

şi înlocuind în aceasta eforturile exprimate cu ajutorul funcţiei de eforturi F

$$N^{xx} = + \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta y^2} - \int p^{xx}dx, \tag{8.1}$$

$$N^{yy} = + \frac{\vartheta^2 F}{\partial x^2} - \int p^{yy}dy, \tag{8.2}$$

$$N^{xy} = - \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta xy}, \tag{8.3}$$

care satisfac identic relaţiile (6.1) şi (6.2), obţinem următoarele ecuaţii:

$$+\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x^2} - EIR\,\Delta\Delta w = +\int p^{vy}\,dy - Rp^{zz}, \tag{9.1}$$

$$+\Delta\Delta F + \frac{EH}{R}\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} = +\int \frac{\vartheta^2 p^{xx}}{\vartheta y^2}\,dx + \int \frac{\vartheta^2 p^{vy}}{\vartheta x^2}\,dy. \tag{9.2}$$

În cazul greutăţii proprii, exprimîndu-se sarcina, funcţie de variabila x, printr-o sumă de funcţii trigonometrice

$$g_p(x) = \frac{4}{\pi} g_p \left[\cos\lambda x - \frac{1}{3}\cos 3\lambda x + \frac{1}{5}\cos 5\lambda x - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)\lambda x\right],$$

în care

$$\lambda = \frac{\pi}{lR} \tag{10}$$

şi luînd numai primul termen, convergenţa şirului fiind suficient de mare, vom avea

$$\begin{aligned} p^{xx} &= 0, \\ p^{vy} &= -\frac{4}{\pi} g_p \cos\lambda x \sin\gamma, \\ p^{zz} &= +\frac{4}{\pi} g_p \cos\lambda x \cos\gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

Înlocuind expresiile (11) ale componentelor sarcinii exterioare în ecuaţiile (9) acestea vor deveni

$$-\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x^2} + EIR\,\Delta\Delta w = +\frac{4}{\pi} g_p \cdot 2R\cos\lambda x\cos\gamma, \tag{12.1}$$

$$+\Delta\Delta F + \frac{EH}{R}\frac{\vartheta^2 w}{\partial x^2} + = \frac{4}{\pi} g_p \cdot R\lambda^2 \cos\lambda x\cos\gamma. \tag{12.2}$$

Dacă se introduce funcţia U a lui V. Z. Vlasov definită prin

$$F = -\frac{EH}{R}\cdot\frac{\vartheta^2 U}{\vartheta x^2} + F_p, \tag{13.1}$$

$$w = +\Delta\Delta U + w_p, \tag{13.2}$$

în care soluţiile particulare F_p şi w_p sînt deduse din condiţia ca ele să satisfacă ecuaţiile diferenţiale (12.1) şi (12.2) şi au valorile

$$F_p = +\frac{4}{\pi} g_p \frac{\lambda^2 R^5 [2R^2 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)^2 EI]}{\lambda^4 R^6 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)^4 EI}\cos\lambda x\cos\gamma, \tag{14.1}$$

$$w_p = +\frac{4}{\pi} g_p \frac{R^4(\lambda^4 R^4 + 4\lambda^2 R^2 + 1)}{\lambda^4 R^6 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)^4 EI}\cos\lambda x\cos\gamma, \tag{14.2}$$

atunci ecuaţia (12.2) este identic satisfăcută, iar ecuaţia (12.1) devine

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U + \frac{H}{R^2 I}\,\frac{\vartheta^4 U}{\vartheta x^4} = 0. \tag{15}$$

Admiţînd notaţia

$$c = \frac{l\sqrt[4]{3}}{\pi\sqrt{h}},$$

şi căutînd prin ecuaţia (15) soluţii de forma

$$U = f(y)\cos\lambda x, \tag{16}$$

se obţine prin introducerea expresiei (16) în ecuaţie cu derivate parţiale (15), o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 8 în $f\ (y)$

$$+\frac{\vartheta^8 f(y)}{\vartheta y^8} - 4\lambda^2\frac{\vartheta^6 f(y)}{\vartheta y^6} + 6\lambda^4\frac{\vartheta^4 f(y)}{\vartheta y^4} - 4\lambda^6\frac{\vartheta^2 f(y)}{\vartheta y^2} + \lambda^8\,(1 + 4\,c^4)\,f\,(y) = 0. \tag{17}$$

Ecuaţia caracteristică asociată este

$$(m^2 - \lambda^2)^4 + 4\,c^4\,\lambda^8 = 0. \tag{18}$$

Cu ajutorul notaţiilor

$$a_{1,\,2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{l}\sqrt{\sqrt{c_1^2 + c^2} \mp c_1}\,; \qquad c_1 = 1 + c,$$

$$a_{3,\,4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{l}\sqrt{\sqrt{c_2^2 + c^2} \mp c_2}\,; \qquad c_2 = 1 - c,$$

rădăcinile ecuaţiei (18) se pot scrie

$$m_{1,\,2,\,3,\,4} = \pm\frac{1}{2R}\,(a_2 \pm ia_1),$$

$$m_{5,\,6,\,7,\,8} = \pm\frac{1}{2R}\,(a_4 \pm ia_3).$$

Admiţînd notaţiile

$$F_{1,5} = e^{\mp\frac{a_2}{2R}y}\sin\frac{a_1}{2R}\,y\,; \qquad F_{3,7} = e^{\mp\frac{a_4}{2R}y}\sin\frac{a_3}{2R}\,y\,;$$

$$F_{2,6} = e^{\mp\frac{a_2}{2R}y}\cos\frac{a_1}{2R}\,y\,; \qquad F_{4,8} = e^{\mp\frac{a_4}{2R}y}\cos\frac{a_3}{2R}\,y.$$

integrala generală a ecuaţiei (15) este de forma

$$U = \sum_{k=1}^{4} C_k F_k \cos\lambda x + \sum_{k=5}^{8} C_k F_k \cos\lambda x, \tag{19.1}$$

în care sumele reprezintă influenţele separate ale celor două margini ale învelitorii.

Integrala generală (19.1) fiind simetrică, expresia ei nu se va modifica dacă se fac schimbările de variabile

$$y_I = y_0 - y_{II},$$

$$x_I = -\,x_{II},$$

echivalente cu o translaţie de pe generatoarea I pe generatoarea II şi o rotaţie de 180°.

Întrucît prin aceste schimbări de variabilă, exponenţialele schimbă semnul exponentului, avem posibilitatea să scriem expresia (19.1) numai funcţie de exponenţiale amortizate, ţinînd seama că în acest caz se lucrează în două sisteme de coordonate diferite, fiecare perturbare fiind raportată la sistemul de axe al marginii la care perturbarea se referă.

Ca urmare integrala generală (19.1), va putea fi scrisă sub forma

$$U = \sum_{K=1}^{4} C_k F_k \cos \lambda x + \sum_{K=5}^{8} C_k F_{k-4} \cos \lambda (-x), \tag{19.2}$$

în care prima sumă reprezintă, în sistemul de axe situat pe o margine, influenţa marginii respective, iar cea de a doua sumă reprezintă, în sistemul de axe situat în urma rotirii cu 180° şi a translaţiei pe cealaltă margine, numai influenţa acestei a doua margini.

Întrucît cei doi termeni din (19.2), nu diferă ca formă, în continuare problema se poate rezolva luîndu-se în considerare, spre exemplu, numai primul termen şi apoi, la soluţiile obţinute să se adauge, după modificările respective şi soluţiile corespunzătoare celui de-al doilea termen al integralei generale (19.2).

Derivatele primului termen al funcţiei U de ordinul m în raport cu x şi de ordinul n în raport cu y se deduc din formula generală

$$\frac{\vartheta^{m+n}}{\vartheta x^m \vartheta y^n} U = (-1)^n \frac{\lambda^m}{2^n R^n} [(B \cos n \psi_1 + A \sin n\psi_1) F_1 + (A \cos n \psi_1 - B \sin n \psi_1) F_2 + \\ + (D \cos n \psi_2 + C \sin n \psi_2) F_3 + (C \cos n \psi_2 - D \sin n \psi_2) F_4] \cos \left(\lambda x + m \frac{\pi}{2} \right), \tag{20}$$

în care funcţiile trigonometrice se calculează cu expresiile

$$\cos n \psi_1 + i \sin n \psi_1 = (a_2 + i a_1)^n ,$$

$$\cos n \psi_2 + i \sin n \psi_2 = (a_4 + i a_3)^n .$$

Cu ajutorul formulei (20), soluţiile generale ale eforturilor, deformaţiilor şi deplasărilor se obţin imediat, ele putînd fi determinate, ca expresie cu formula generală

$$K = m_k [(n_{1k} A + n_{2k} B) F_1 + (n_{2k} A - n_{1k} B) F_2 + \\ + (n_{3k} C + n_{4k} D) F_3 + (n_{4k} C - n_{3k} D) F_4] \begin{bmatrix} \sin \lambda x \\ \cos \lambda x \end{bmatrix}, \tag{21}$$

în care coeficienţii m_K şi n_{iK} au valorile date în tabela 1.

La condiţiile marginale mai pot interveni şi combinaţiile forţelor tăietoare cu momentele de torsiune, cunoscute în literatură sub denumirea de forţe tăietoare generalizate, definite de relaţiile

$$\overline{Q^{xx}} = Q^{xx} + \frac{\vartheta M^{xy}}{\vartheta y},$$

$$\overline{Q^{yy}} = Q^{yy} + \frac{\vartheta M^{yx}}{\vartheta x},$$

şi care pot fi de asemenea scrise cu ajutorul tabelei 1.

* * *

Tabela 1

	m_k	n_{1k}	n_{2k}	n_{3k}	n_{4k}
N^{xx}	$+\ 1$	$-c$	$-c_1$	$-c$	$-c_2$
N^{xy}	$+\dfrac{1}{2\lambda R}$	$+a_1$	$+a_2$	$+a_3$	$+a_4$
N^{yy}	$+1$	0	$+1$	0	$+1$
Q^{xx}	$+\dfrac{1}{2c\lambda R}$	-1	$+1$	-1	-1
$Q^{\overline{xx}}$	$+\dfrac{1}{2c^2\lambda R}$	$-1-2c$	$+2c$	$+1-2c$	$-2c$
Q^{yy}	$+\dfrac{\mathrm{ch}}{4\sqrt{3}}$	$+a_1-a_2$	$+a_1+a_2$	$-a_3-a_4$	$+a_3-a_4$
$Q^{\overline{yy}}$	$+\dfrac{h}{4\sqrt{3}}$	$+b_2$	$+b_1$	$-b_4$	$+b_3$
M^{xx}	$+\dfrac{hR}{2\sqrt{3}}$	-1	0	$+1$	0
M^{xy}	$+\dfrac{h}{4\lambda\sqrt{3}}$	$+a_2$	$-a_1$	$-a_4$	$+a_3$
M^{yy}	$+\dfrac{hR}{2\sqrt{3}}$	$+c_1$	$-c$	$-c_2$	$+c$
Eu	$+\dfrac{1}{h\lambda R}$	$-c$	$-c_1$	$-c$	$-c_2$
Ev	$+\dfrac{c^2}{2\sqrt{3}}$	$+b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$
Ew	$+\dfrac{2c^2}{h}$	-1	0	$+1$	0
$E\vartheta$	$+\dfrac{c^2}{hR}$	$+a_2$	$-a_1$	$-a_4$	$+a_3$

Soluţiile particulare pentru eforturi, deformaţii şi deplasări se deduc cu ajutorul expresiilor (14), folosind relaţiile (8), (2) şi (3) şi sînt de forma

$$
\begin{aligned}
N^{xx} &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{F_p^0}{R^2} \cos \lambda x \cos \gamma, \\
N^{yy} &= -\frac{4}{\pi} g_p (\lambda^2 F_p^0 - R) \cos \lambda x \cos \gamma, \\
N^{xy} &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{\lambda F_p^0}{R} \sin \lambda x \sin \gamma, \\
M^{xx} &= +\frac{4}{\pi} g_p EI \lambda^2 w_p^0 \cos \lambda x \cos \gamma, \\
M^{yy} &= +\frac{4}{\pi} g_p EI \frac{w_p^0}{R^2} \cos \lambda x \cos \gamma, \\
M^{xy} &= -\frac{4}{\pi} g_p EI \frac{\lambda w_p^0}{R} \sin \lambda x \sin \gamma, \\
Q^{xx} &= -\frac{4}{\pi} g_p EI \frac{\lambda w_p^0}{R^2} (1 + \lambda^2 R^2) \sin \lambda x \cos \gamma, \\
Q^{yy} &= -\frac{4}{\pi} g_p EI \frac{w_p^0}{R^3} (1 + \lambda^2 R^2) \cos \lambda x \sin \gamma, \\
Eu &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{F_p^0}{\lambda R^2 H} \sin \lambda x \cos \gamma, \\
Ev &= +\frac{4}{\pi} g_p \frac{F_p}{\lambda^2 R^3 H} (1 + 2\lambda^2 R^2) \cos \lambda x \sin \gamma, \\
Ew &= +\frac{4}{\pi} g_p E w_p^0 \cos \lambda x \cos \gamma, \\
E\partial &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{1}{R} \left(E w_p^0 - \frac{1 + 2\lambda^2 R^2}{\lambda^2 R^3 H} F_p^0 \right) \cos \lambda x \sin \gamma,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

în care

$$
F_p^0 = \frac{\lambda^2 R^5 [2R^2 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)]}{\lambda^4 R^6 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)^4 EI}, \tag{23.1}
$$

$$
w_p^0 = \frac{R^4 (\lambda^4 R^4 + 2\lambda^2 R^2 + 2)}{\lambda^4 R^6 EH + (\lambda^2 R^2 + 1)^4 EI}. \tag{23.2}
$$

Soluţia de membrană, corespunzătoare cazului cînd sarcinile de suprafaţă acţionînd în planul învelitorii, nu produc încovoieri, se deduce din formulele (22), în care se introduc pentru F_p^0 şi w_p^0 valorile

$$F_p^0 = \frac{2R}{\lambda^2}, \tag{24.1}$$

$$w_p^0 = \frac{\lambda^4 R^4 + 4\lambda^2 R^2 + 2}{\lambda^4 R^2 EH}, \tag{24.2}$$

obţinute din expresiile (23) prin neglijarea termenilor multiplicaţi cu EI.

Ca urmare expresiile eforturilor şi deplasărilor în teorie de membrană vor fi

$$\begin{aligned}
N^{xx} &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{2}{\lambda^2 R} \cos\lambda x \cos\gamma,\\
N^{yy} &= -\frac{4}{\pi} g_p R \cos\lambda x \cos\gamma,\\
N^{xy} &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{2}{\lambda} \sin\lambda x \sin\gamma,\\
Eu &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{2}{h\lambda^3 R^2} \sin\lambda x \cos\gamma,\\
Ev &= +\frac{4}{\pi} g_p \frac{4}{h\lambda^2 R}\left(1 + \frac{1}{2\lambda^2 R^2}\right) \cos\lambda x \cos\gamma,\\
Ew &= +\frac{4}{\pi} g_p \frac{R}{h}\left(1 + \frac{4}{\lambda^2 R^2} + \frac{2}{\lambda^4 R^4}\right) \cos\lambda x \sin\gamma,\\
E\vartheta &= -\frac{4}{\pi} g_p \frac{1}{h} \cos\lambda x \sin\gamma.
\end{aligned} \tag{25}$$

Eforturile, deformaţiile şi deplasările din diferitele puncte ale învelitorii vor rezulta din suprapunerea celor două soluţii, soluţia de încovoiere şi soluţia de membrană, ţinîndu-se seama în stabilirea semnelor de faptul că sistemele de referinţă corespunzătoare celor două soluţii sînt diferite. În plus, aşa cum s-a arătat, chiar solicitările din teoria de încovoiere provin din suprapunerea a două valori, corespunzătoare celor două perturbări marginale, care se calculează cu aceleaşi formule, dar care pot diferi ca semn, datorită faptului că reprezentarea solicitărilor s-a făcut pe sisteme de referinţă diferite. În tabela 2 se arată schema după care se calculează solicitările din diferite puncte ale învelitorii.

★

După cum se vede din relaţia (19), solicitările dintr-un punct al învelitorii, determinate cu teoria de încovoiere, depind de cîte 4 constante de integrare pentru fiecare generatoare marginală.

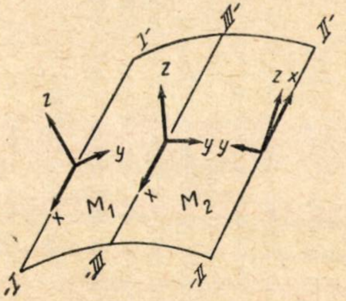
Determinarea constantelor se face punîndu-se condiţia ca solicitările totale să corespundă, pe fiecare din generatoarele de margini, condiţiile reale de rezemare.

În cazul cînd învelitoarea nu are grinzi marginale, constantele rezultă din condiţiile statice :

$$N^{yx} = 0; \quad N^{yy} = 0; \quad \overline{Q^{yy}} = 0 \text{ şi } M^{yy} = 0. \tag{26}$$

Tabela 2

Punctul / Eforturi și deplasări	M_1 Din perturb. marginală I	M_1 Din perturb. marginală II	M_1 Din soluția de membrană	M_2 Din perturb. marginală I	M_2 Din perturb. marginală II	M_2 Din soluția de membrană
N^{xx}	$+N_I^{xx}$	$+N_{II}^{xx}$	$+N_m^{xx}$	$+N_I^{xx}$	$+N_{II}^{xx}$	$+N_m^{xx}$
$N^{xy}=N^{yx}$	$+N_I^{xy}$	$-N_{II}^{xy}$	$-N_m^{xy}$	$+N_I^{xy}$	$-N_{II}^{xy}$	$+N_m^{xy}$
N^{yy}	$+N_I^{yy}$	$+N_{II}^{yy}$	$+N_m^{yy}$	$+N_I^{yy}$	$+N_{II}^{yy}$	$+N_m^{yy}$
Q^{xx}	$+Q_I^{xx}$	$+Q_{II}^{xx}$		$+Q_I^{xx}$	$+Q_{II}^{xx}$	
$Q^{\overline{xx}}$	$+Q_I^{\overline{xx}}$	$+Q_{II}^{\overline{xx}}$		$+Q_I^{\overline{xx}}$	$+Q_{II}^{\overline{xx}}$	
Q^{yy}	$+Q_I^{yy}$	$-Q_{II}^{yy}$		$+Q_I^{yy}$	$-Q_I^{yy}$	
$Q^{\overline{yy}}$	$+Q_I^{\overline{yy}}$	$-Q_{II}^{\overline{yy}}$		$+Q_I^{\overline{yy}}$	$-Q_{II}^{\overline{yy}}$	
M^{xx}	$+M_I^{xx}$	$+M_{II}^{xx}$		$+M_I^{xx}$	$+M_{II}^{xx}$	
$M^{xy}=M^{yx}$	$+M_I^{xy}$	$-M_{II}^{xy}$		$+M_I^{xy}$	$-M_{II}^{xy}$	
M^{yy}	$+M_I^{yy}$	$+M_{II}^{yy}$		$+M_I^{yy}$	$+M_{II}^{yy}$	
Eu	$+Eu_I$	$+Eu_{II}$	$+Eu_m$	$+Eu_I$	$+Eu_{II}$	$+Eu_m$
Ev	$+Ev_I$	$-Ev_{II}$	$-Ev_m$	$+Ev_I$	$-Ev_{II}$	$+Ev_m$
Ew	$+Ew_I$	$+Ew_{II}$	$+Ew_m$	$+Ew_I$	$+Ew_{II}$	$+Ew_m$
$E\vartheta$	$+E\vartheta_I$	$-E\vartheta_{II}$	$-E\vartheta_m$	$+E\vartheta_I$	$-E\vartheta_{II}$	$+E\vartheta_m$



Definirea sistemelor de axe de coordonate

- pe generatoarea I—I: perturbarea marginală I
- pe generatoarea II—II perturbarea marginală II
- pe generatoarea III—III teoria de membrană

În cazul cînd rezemarea se face pe grinzi marginale, constantele rezultă din condițiile geometrice și condițiile statice arătate în tabela 3.

Astfel, pentru învelitorile izolate și simetrice se pun condiții, identice la cele două margini, de egalitate a deplasărilor grinzii și învelitorii. În cazul cînd învelitorile au luminator, învelitoarea se rupe în două și condițiile de rezemare ale marginii II devin diferite, punîndu-se, în acest caz, condițiile ca la această margine deplasarea pe orizontală a învelitorii să fie egală cu zero, în situația cînd se neglijează scurtarea reazemului, iar deplasarea învelitorii pe verticală să fie egală cu cea a grinzii.

În cazul învelitorilor continue fără grinzi marginale, intervine o condiție nouă, prin aceea că întăritura marginală neputînd suporta greutatea ei proprie, aceasta va trebui să fie preluată de învelitoare.

În cazul învelitorilor pentru sheduri se consideră că grinda marginală superioară nu are rigiditate la încovoiere pe direcția transversală și ca atare efortul din învelitoare pe această direcție va trebui să fie nul. Cazul, netrecut în tabela 3, cînd grinda superioară se consideră că reazemă prin intermediul stîlpișorilor pe grinda inferioară, este mai complex și va trebui să fie tratat separat.

Pentru determinarea constantelor avem, deci, la dispoziție cîte patru condiții pentru fiecare din cele două margini ale învelitorii.

Întrebuințarea condițiilor statice, cum ar fi spre exemplu în cazul particular al învelitorilor fără grinzi de margine, duce la rezolvarea unui sistem de ecuații de forma

$$\begin{aligned}
n_{2k}^{1} A - n_{1k}^{1} B + n_{4k}^{1} C - n_{3k}^{1} D &= K_1^0,\\
n_{2k}^{2} A - n_{1k}^{2} B + n_{4k}^{2} C - n_{3k}^{2} D &= K_2^0,\\
n_{2k}^{3} A - n_{1k}^{3} B + n_{4k}^{3} C - n_{3k}^{3} D &= K_3^0,\\
n_{2k}^{4} A - n_{1k}^{4} B + n_{4k}^{4} C - n_{3k}^{4} D &= K_4^0,
\end{aligned} \tag{27}$$

care exprimă condițiile (26) în punctul de coordonate $x = 0$ sau $x = l$ și $y = 0$.

Rezolvînd sistemul de ecuații (27) și introducînd valorile constantelor în expresia (21) obținem formula generală liberă de constante

$$K = -\frac{m_k}{\Delta}\left(U_1 K_1^0 - U_2 K_2^0 + U_3 K_3^0 - U_4 K_4^0\right)\left(\begin{matrix}\sin \lambda x\\ \cos \lambda x\end{matrix}\right), \tag{28}$$

cu ajutorul căreia putem calcula starea de eforturi, deformații și deplasări din învelitoare și în care

$$\begin{aligned}
U_i = {}&+\left(\Delta_2^i n_{1k} - \Delta_1^i n_{2k}\right) F_1 + \left(\Delta_2^i n_{2k} - \Delta_1^i n_{1k}\right) F_2 + \left(\Delta_4^i n_{3k} - \Delta_3^i n_{4k}\right) F_3 +\\
&+\left(\Delta_4^i n_{4k} - \Delta_3^i n_{3k}\right) F_4.
\end{aligned}$$

În ultima expresie Δ_j^i este un determinant minor format din sistemul de ecuații (27) corespunzător termenului situat la încrucișarea liniei j cu coloana i.

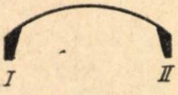
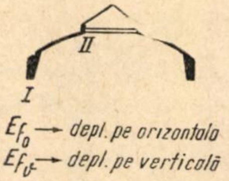
Scrierea condițiilor geometrice corespunzătoare cazurilor arătate în tabela 3, impune determinarea în prealabil a deplasărilor grinzii marginale, sub acțiunea eforturilor din învelitoare și a sarcinilor exterioare, în punctul de legătură al grinzii cu învelitoarea.

Determinarea acestor deplasări se va face pe baza considerațiunilor ce urmează.

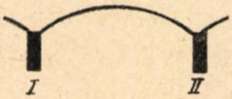
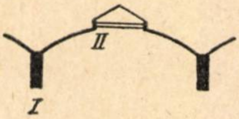
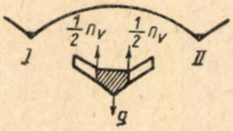
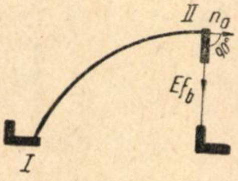
Dacă asupra unei grinzi marginale acționează într-un punct S (fig. 3) sarcinile

$$\begin{aligned}
n'_{1,s} &= \overline{n}'_{1,s} \cos \lambda x,\\
n'_{2,s} &= \overline{n}'_{2,s} \cos \lambda x,
\end{aligned} \tag{29.1}$$

Tabela 3

<table>
<tr><th rowspan="2">Tipul</th><th rowspan="2" colspan="2">Învelitori circulare cilindrice</th><th colspan="2">Condiții la marginea</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A</td><td rowspan="4">izolate</td><td rowspan="4"> </td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $(Ev)_{\text{înv}} = (Ev)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. $(Ew)_{\text{înv}} = (Ew)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = (E\vartheta)_{gr}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">B</td><td rowspan="4">izolate, cu luminator</td><td rowspan="4">

II
I
Ef0 → depl. pe orizontală
Efv → depl. pe verticală

</td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td>2. $(Ev)_{\text{înv}} = (Ev)_{gr}$</td><td>$(Ef_0)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td>3. $(Ew)_{\text{înv}} = (Ew)_{gr}$</td><td>$(Ef_v)_{\text{înv}} = (Ef_v)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = (E\vartheta)_{gr}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C</td><td rowspan="4">continue</td><td rowspan="4"> </td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $(Ef_0)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. $(Ef_v)_{\text{înv}} = (Ef_v)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">D</td><td rowspan="4">continue, cu luminator</td><td rowspan="4"> </td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $(Ef_0)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. $(Ef_v)_{\text{înv}} = (Ef_v)_{gr}$</td></tr>
<tr><td>4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = 0$</td><td>$(E\vartheta)_{\text{înv}} = (E\vartheta)_{gr}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">E</td><td rowspan="4">continue, fără grinzi marginale</td><td rowspan="4"> </td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $(Ef_0)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. $(n_v)_{\text{înv}} = g_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">pentru sheduri</td><td rowspan="4"> </td><td colspan="2">1. $(Eu)_{\text{înv}} = (Eu)_{gr}$</td></tr>
<tr><td>2. $(Ev)_{\text{înv}} = (Ev)_{gr}$</td><td>$(n_a)_{\text{înv}} = 0$</td></tr>
<tr><td>3. $(Ew)_{\text{înv}} = (Ew)_{gr}$</td><td>$(Ef_b)_{\text{înv}} = (Ef_b)_{gr}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. $(E\vartheta)_{\text{înv}} = (E\vartheta)_{gr}$</td></tr>
</table>

îndreptate după direcţiile 1 şi 2 ale axelor principale de inerţie şi sarcinile

$$\begin{aligned} N^{yx} &= \overline{N}^{yx} \sin \lambda x, \\ M^{yy} &= \overline{M}^{yy} \cos \lambda x, \end{aligned} \tag{29.2}$$

atunci scriind ecuaţiile de echilibru pe elementul diferenţial de grindă, se vor putea înlocui sarcinile (29.1) şi (29.2) cu

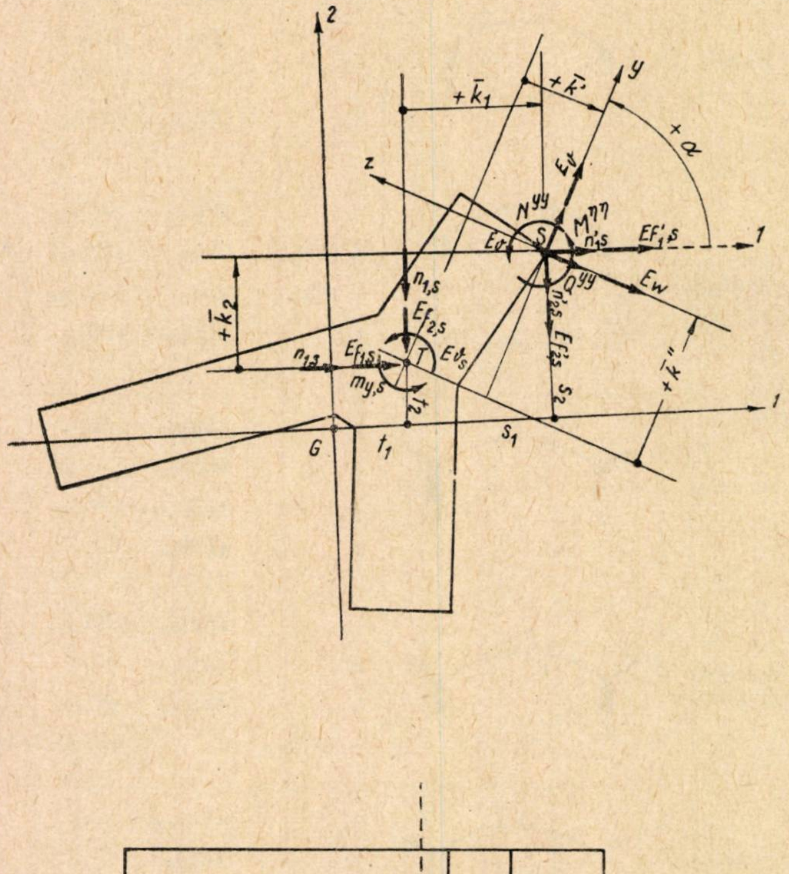

2
y
$+\bar{k}_1$
$+\bar{k}'$
$+\alpha$
z
E_v
N^{yy}
$M^{\eta\eta}$
S
E_ϑ
$n'_{1,s}$
$Ef'_{1,s}$
1
Q^{yy}
E_w
$n_{1,s}$
$Ef_{2,s}$
$+\bar{k}_2$
$n'_{2,s}$
$Ef'_{2,s}$
$n_{1,t}$
$Ef_{1,s}$
T
$E\vartheta_s$
$m_{y,s}$
t_2
s_2
$+\bar{k}''$
1
G
t_1
s_1
h_x
N^{yx}
Ef_x
E_u
x
$k_1 = s_1 - t_1$
$k_2 = s_2 - t_2$
$k' = k_1 \sin\alpha - k_2 \cos\alpha$
$k'' = k_1 \cos\alpha + k_2 \sin\alpha$

Fig. 3

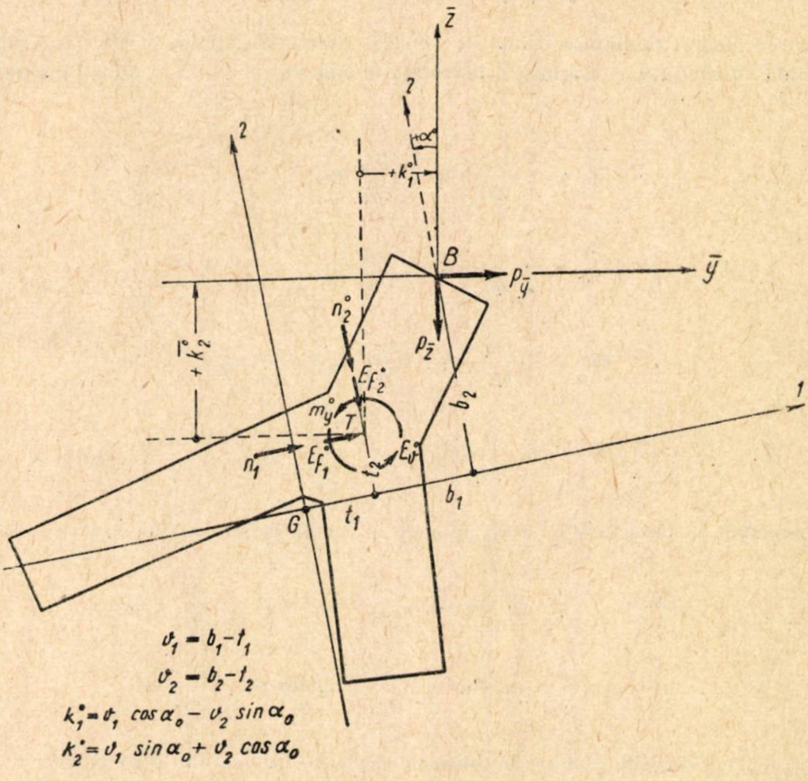
sarcinile echivalente :

$$
\begin{aligned}
n_{1.s} &= n'_{1,s} + s_1 \lambda N^{yx}, \\
n_{2,s} &= n'_{2,s} - s_2 \lambda N^{yx}, \\
m_{y,s} &= - k_2 n'_{1,s} - k_1 n'_{2,s} + M^{yy}
\end{aligned}
\tag{30.1}
$$

acţionînd în centrul de torsiune T şi cu sarcina echivalentă :

$$
n_{x,s} = \frac{1}{\lambda} N^{yx}, \tag{30.2}
$$

ce acţionează în centrul de greutate al secţiunii grinzii de margine.



$\bar{z}$
2
2
$+\alpha$
$+k_1^0$
B
$p_{\bar{y}}$
$\bar{y}$
n_2^0
$+k_2^0$
$p_{\bar{z}}$
$Ef_2^\bullet$
b_2
1
m_y^0
T
n_1^0
$Ef_1^\bullet$
t_2
$E\vartheta^\bullet$
b_1
t_1
G
$\vartheta_1 = b_1 - t_1$
$\vartheta_2 = b_2 - t_2$
$k_1^\bullet = \vartheta_1 \cos\alpha_0 - \vartheta_2 \sin\alpha_0$
$k_2^\bullet = \vartheta_1 \sin\alpha_0 + \vartheta_2 \cos\alpha_0$

Fig. 4

Sarcinile echivalente corespunzătoare unei sarcini exterioare definită prin proiecţiile ei $p_{\bar{y}}$ pe orizontală şi $p_{\bar{z}}$ pe verticală (fig. 4) vor fi

$$
\begin{aligned}
n_1^0 &= \quad p_{\bar{y}} \cos \alpha_0 - p_{\bar{z}} \sin \alpha_0, \\
n_2^0 &= \quad p_{\bar{y}} \sin \alpha_0 + p_{\bar{z}} \cos \alpha_0, \\
m_y^0 &= - k_2^0 p_{\bar{y}} - k_1^0 p_{\bar{z}}, \\
n_x^0 &= \quad 0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Sarcinile echivalente totale, rezultate din cumularea corespunzătoare a valorilor date de expresiile (30) și (31), sînt egale cu

$$\begin{aligned} n_1 &= n'_{1,s} + s_1 \lambda N^{yx} + p_y^- \cos \alpha_0 - p_z^- \sin \alpha_0, \\ n_2 &= n'_{2,s} - s_2 \lambda N^{yx} + p_y^- \sin \alpha_0 + p_z^- \cos \alpha_0, \\ n_x &= \frac{1}{\lambda} N^{yx}, \\ m_y &= - k_2 n'_{1,s} - k_1 n'_{2,s} + M^{yy} - k_2^0 p_y^- - k_1^0 p_z^- . \end{aligned} \tag{32}$$

În continuare, ținîndu-se seama de relațiile diferențiale dintre eforturi și deplasări, se poate stabili cu ușurință că sarcinile echivalente produc în punctul S al grinzii marginale, deplasările

$$\begin{aligned} Ef'_1 &= + \frac{1}{\lambda^4 I_1} n_1 - \frac{2k_2}{\lambda^2 I_t} m_y, \\ Ef'_2 &= + \frac{1}{\lambda^4 I_1} n_2 - \frac{2k_1}{\lambda^2 I_t} m_y, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} Eu &= + \frac{s_1}{\lambda^3 I_2} n_1 - \frac{s_2}{\lambda^3 I_1} n_2 + \frac{1}{\lambda A} n_x, \\ E\vartheta &= + \frac{2}{\lambda^2 I_t} m_y. \end{aligned} \tag{34.1}$$

Proiectînd deplasările Ef'_1 și Ef'_2 pe axele y și z ale învelitorii (fig. 3) vom avea

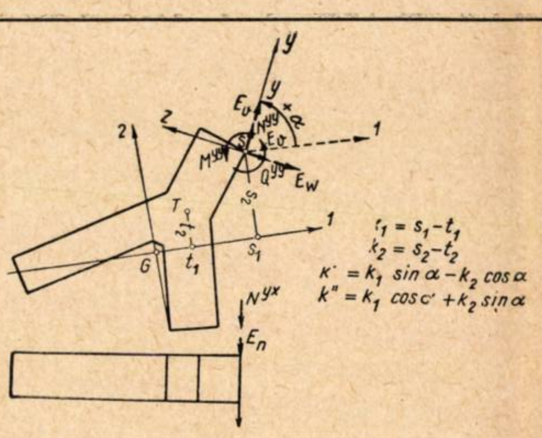
$$\begin{aligned} Ev &= + \frac{1}{\lambda^4 I_2} n_1 \cos \alpha - \frac{1}{\lambda^4 I_1} n_2 \sin \alpha - \frac{2k'}{\lambda^2 I_t} m_y, \\ Ew &= + \frac{1}{\lambda^4 I_1} n_1 \sin \alpha + \frac{1}{\lambda^4 I_2} n_2 \cos \alpha - \frac{2k''}{\lambda^2 I_t} m_y. \end{aligned} \tag{34.2}$$

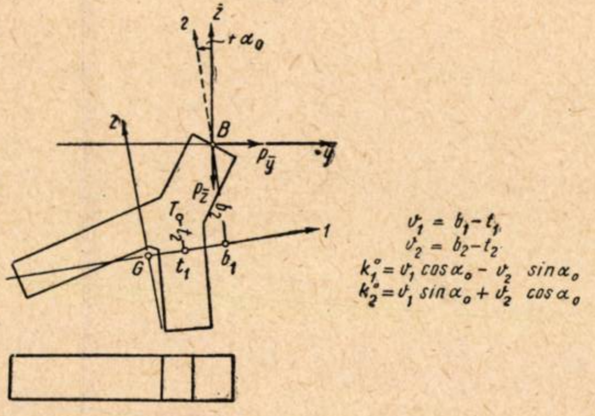
Introducînd relațiile (32) și (34) obținem deplasările punctului S al grinzii de margine sub forma

$$\begin{aligned} Eu &= \vartheta_{11} N^{yx} + \vartheta_{12} N^{yy} + \vartheta_{13} \overline{Q}^{yy} + \vartheta_{14} M^{yy} + Eu^0, \\ Ev &= \vartheta_{21} N^{yx} + \vartheta_{22} N^{yy} + \vartheta_{23} \overline{Q}^{yy} + \vartheta_{24} M^{yy} + Ev_0, \\ Ew &= \vartheta_{31} N^{yx} + \vartheta_{32} N^{yy} + \vartheta_{33} \overline{Q}^{yy} + \vartheta_{34} M^{yy} + Ew^0, \\ E\vartheta &= \vartheta_{41} N^{yx} + \vartheta_{42} N^{yy} + \vartheta_{43} \overline{Q}^{yy} + \vartheta_{44} M^{yy} + E\vartheta^0, \end{aligned} \tag{35}$$

în care deplasările ϑ_{iK} și termenii liberi au expresiile arătate în tabela 4,

Tabela 4


y
y
+α
E_v
N^{yy}
E_ϑ
1
z
2
M^{yy}
Q^{yy}
E_w
s_2
T
t_2
1
G
t_1
s_1
$k_1 = s_1 - t_1$
$k_2 = s_2 - t_2$
$k' = k_1 \sin\alpha - k_2 \cos\alpha$
$k'' = k_1 \cos c' + k_2 \sin\alpha$
N^{yx}
E_n


2
z
$+\alpha_0$
z
B
$p_{\bar{y}}$
y
$p_{\bar{z}}$
b_2
T
t_2
1
G
t_1
b_1
$\vartheta_1 = b_1 - t_1$
$\vartheta_2 = b_2 - t_2$
$k_1^0 = \vartheta_1 \cos\alpha_0 - \vartheta_2 \sin\alpha_0$
$k_2^0 = \vartheta_1 \sin\alpha_0 + \vartheta_2 \cos\alpha_0$

	$N^{yx} = 1$	$N^{vv} = 1$	$Q^{\overline{vv}} = 1$	$M^{vv} = 1$	$p_{\bar{y}} = 1$	$p_{\bar{z}} = 1$	
Eu	$+\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{s_2^2}{I_1}+\frac{s_1^2}{I_2}+\frac{1}{A}\right)$	$+\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\cos\alpha+\frac{s_2}{I_1}\sin\alpha\right)$	$+\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\sin\alpha-\frac{s_2}{I_1}\cos\alpha\right)$	0	$+\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\cos\alpha_0-\frac{s_2}{I_1}\sin\alpha_0\right)$	$-\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\sin\alpha_0+\frac{s_2}{I_1}\cos\alpha_0\right)$	Eu^0
Ev	$+\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\cos\alpha+\frac{s_2}{I_1}\sin\alpha\right)$	$+\frac{1}{\lambda^4}\left(+\frac{1}{I_1}\sin^2\alpha+\frac{1}{I_2}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k'^2}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{1}{2\lambda^4}\left(+\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)\sin 2\alpha-\frac{2k'k''}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{2k'}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_2}\cos\alpha\cos\alpha_0-\frac{1}{\lambda^2 I_1}\sin\alpha\sin\alpha_0-\frac{2}{I_t}k'k_2^0\right)$	$-\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_2}\cos\alpha\sin\alpha_0+\frac{1}{\lambda^2 I_1}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{2}{I_t}k'k_1^0\right)$	Ev^0
Ew	$+\frac{1}{\lambda^3}\left(+\frac{s_1}{I_2}\sin\alpha-\frac{s_2}{I_1}\cos\alpha\right)$	$+\frac{1}{2\lambda^4}\left(+\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)\sin 2\alpha-\frac{2k'k''}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{1}{\lambda^4}\left(+\frac{1}{I_2}\sin^2\alpha+\frac{1}{I_1}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k''^2}{\lambda^2 I_t}$	$-\frac{2k''}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_t}\sin\alpha\cos\alpha_0+\frac{1}{\lambda^2 I_1}\cos\alpha\sin\alpha_0+\frac{2}{I_t}k''k_2^0\right)$	$-\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_2}\sin\alpha\sin\alpha_0-\frac{1}{\lambda^2 I_1}\cos\alpha\cos\alpha_0-\frac{2}{I_t}k''k_1^0\right)$	Ew^0
$E\vartheta$	0	$+\frac{2k'}{\lambda^2 I_t}$	$-\frac{2k''}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{2}{\lambda^2 I_t}$	$+\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_2}\sin\alpha_i\cos\alpha_0+\frac{1}{\lambda^2 I_1}\cos\alpha_i\sin\alpha_i+\frac{2a}{I_t}k_2^0\right)$	$-\frac{1}{\lambda^2}\left(+\frac{1}{\lambda^2 I_2}\sin\alpha_i\sin\alpha_0-\frac{1}{\lambda^2 I_1}\cos\alpha_i\cos\alpha_0-\frac{2a}{I_t}k_1^0\right)$	$E\vartheta^0$

c. 2698

Cu ajutorul relațiilor (35), în care înlocuim solicitările totale cu expresiile lor funcție de constante, calculate cu relația (21) și cu tabela 1, condițiile geometrice din tabela 3, se pot scrie sub o formă asemănătoare cu cea a ecuațiilor (27) :

$$\begin{aligned}
&n_{2k}^{1,*} A - n_{1k}^{1,*} B + n_{4k}^{1,*} C - n_{3k}^{1,*} D = K_1^{0,*}, \\
&n_{2k}^{2,*} A - n_{1k}^{2,*} B + n_{4k}^{2,*} C - n_{3k}^{2,*} D = K_2^{0,*}, \\
&n_{2k}^{3,*} A - n_{1k}^{3,*} B + n_{4k}^{3,*} C - n_{3k}^{3,*} D = K_3^{0,*}, \\
&n_{2k}^{4,*} A - n_{1k}^{4,*} B + n_{4k}^{4,*} C - n_{3k}^{4,*} D = K_4^{0,*},
\end{aligned} \tag{36}$$

și deci formula generală pentru calculul solicitărilor din învelitoare va fi și ea de forma relației (28)

$$K = -\frac{m_k}{\Delta^*}\left(U_1^* K_1^{0,*} - U_2^* K_2^{0,*} + U_3^* K_3^{0,*} - U_4^* K_4^{0,*}\right)\begin{pmatrix}\sin \lambda x \\ \cos \lambda x\end{pmatrix}, \tag{37}$$

unde

$$U_i^* = + \left(\Delta_2^{i,*} n_{1k} - \Delta_1^{i,*} n_{2k}\right) F_1 + \left(\Delta_2^{i,*} n_{2k} - \Delta_1^{i,*} n_{1k}\right) F_2 + \left(\Delta_4^{i,*} n_{3k} - \right.$$

$$\left. - \Delta_3^{i,*} n_{4k}\right) F_3 + \left(\Delta_4^{i,*} n_{4k} - \Delta_3^{i,*} n_{3k}\right) F_4.$$

Expresiile coeficienților $n_{jk}^{i,*}$ și ale termenilor liberi $K_i^{0,*}$ sînt dați în tabela 5, respectiv 6.

Tabela 5 este astfel alcătuită încît dă posibilitatea să se determine coeficienții $n_{jk}^{i,*}$ corespunzători condițiilor marginale arătate în tabela 3. Cu partea superioară a tabelului se pot determina coeficienții corespunzători condițiilor geometrice, formați din termeni proveniți din influența învelitorii și din termeni proveniți din influența grinzii marginale. Influența grinzii se face prin deplasările unitare care intervin ca multiplicatori. Deplasările se iau din tabela 4, în cazul cînd condițiile geometrice conțin deplasări proiectate pe alte direcții.

În cazul cînd condițiile geometrice nu conțin decît termenii corespunzători învelitorii atunci pentru formarea coeficienților $n_{jk}^{i,*}$ nu se iau din tabela 5 decît termenii din coloana învelitoare.

Cu partea inferioară a tabelei 5 se calculează coeficienții corespunzători condițiilor statice, care, așa după cum se vede din tabela 3, nu conțin decît efectul învelitorii. În scrierea acestor coeficienți se va ține seama de indicațiile date la figura 5.

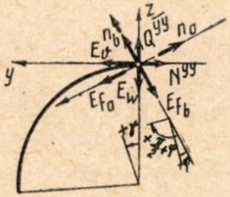
Cu ajutorul tabelei 6 se calculează termenii liberi $K_i^{0,*}$ ai sistemului de ecuații (36). Ca și coeficienții $n_{jk}^{i,*}$ termenii liberi conțin efectul învelitorii și al grinzii și se calculează diferit după cum condițiile de margine sînt de natură geometrică sau statică.

Determinarea termenilor liberi $K_i^{0,*}$ se face prin aproximații succesive și în calculul lor se ține seama de toate cele opt soluții liniar independente ale ecuației diferențiale (15).

Tabela 5

			Învelitoare	Grindă			
				$\frac{1}{2\lambda R}\,\vartheta_{i1}=1$	$\vartheta_{i2}=1$	$\frac{h}{4\sqrt{3}}\,\vartheta_{i3}1=1$	$\frac{hR}{2\sqrt{3}}\,\vartheta_{i4}=1$
Condiţii geome-	n_{1k}^{i*}	1	$-\frac{c}{h\lambda R}$	$-a_1$	0	$-b_2$	$-c_1$
		2	$+\frac{c^2 b_1}{2\sqrt{3}}\cos\gamma_1-\frac{2c^2}{h}\sin\gamma_1$				
		3	$-\frac{c^2 b_1}{2\sqrt{3}}\sin\gamma_1-\frac{2c^2}{h}\cos\gamma_1$				
		4	$-\frac{c^2 a_2}{hR}$				
	n_{2k}^{i*}	1	$-\frac{c_1}{h\lambda R}$	$-a_2$	-1	$-b_1$	$+c$
		2	$-\frac{c^2 b_2}{2\sqrt{3}}\cos\gamma_1$				
		3	$+\frac{c^2 b_2}{2\sqrt{3}}\sin\gamma_1$				
		4	$+\frac{c^2 a_1}{hR}$				
	n_{3k}^{i*}	1	$-\frac{c}{h\lambda R}$	$-a_3$	0	$+b_4$	$+c_2$
		2	$-\frac{c^2 b_3}{2\sqrt{3}}\cos\gamma_1+\frac{2c^2}{h}\sin\gamma_1$				
		3	$+\frac{c^2 b_3}{2\sqrt{3}}\sin\gamma_1+\frac{2c^2}{h}\cos\gamma_1$				
		4	$+\frac{c^2 a_4}{hR}$				

trice	n^{i*}_{4k}	1	$-\dfrac{c_2}{h\lambda R}$	$-a_4$	$+1$	$-b_3$	$-c$
		2	$-\dfrac{c^2 b_4}{2\sqrt{3}}\cos\gamma_1$				
		3	$+\dfrac{c^2 b_4}{2\sqrt{3}}\sin\gamma_1$				
		4	$-\dfrac{c^2 a_3}{hR}$				
Condiţii statice	n^{2*}_{1k}	2	$+\dfrac{hb_2}{4\sqrt{3}}\sin(\gamma+\psi)$				
	n^{2*}_{2k}		$+\cos(\gamma+\psi)+\dfrac{hb_1}{4\sqrt{3}}\sin(\gamma+\psi)$				
	n^{2*}_{3k}		$-\dfrac{hb_4}{4\sqrt{3}}\sin(\gamma+\psi)$				
	n^{2*}_{4k}		$+\cos(\gamma+\psi)+\dfrac{hb_3}{4\sqrt{3}}\sin(\gamma+\psi)$				



$$\cos\left(\gamma+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\gamma+\varphi)$$

$$\sin\left(\gamma+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=+\cos(\gamma+\varphi)$$

pt. n_a şi $Ef_a \rightarrow \psi=\varphi$

pt. n_b şi $Ef_b \rightarrow \psi=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$

$$k'''=k_1\cos\beta-k_2\sin\beta$$

$$\beta=\gamma_1-\alpha;\ \gamma_1=\gamma+\varphi$$

$$n=N^{yy}\cos(\gamma+\psi)+\overline{Q}^{yy}\sin(\gamma+\psi)$$

$$Ef=Ev\ \cos(\gamma+\psi)+Ew\sin(\gamma+\psi)$$

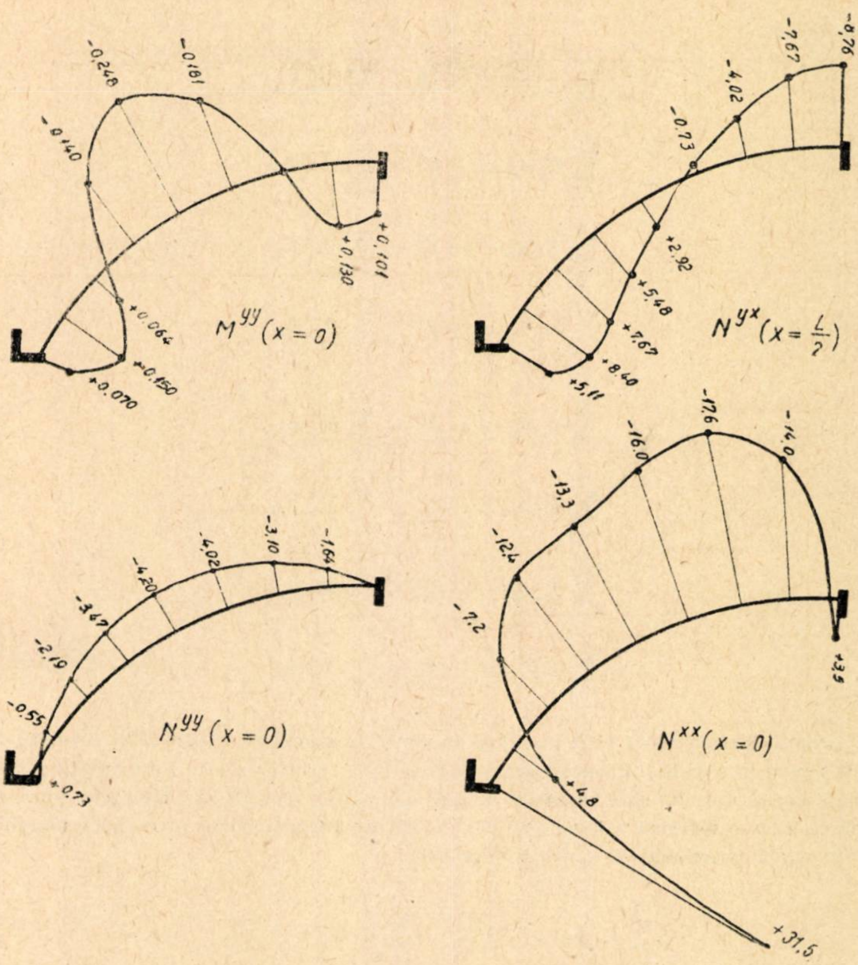
	$N^{yx}=1$	$N^{yy}=1$	$\overline{Q}^{yy}=1$	$M^{yy}=1$
Ef_b	$-\dfrac{1}{\lambda^3}\left(+\dfrac{s_1}{I_2}\sin\beta+\dfrac{s_2}{I_1}\cos\beta\right)$	$-\dfrac{1}{\lambda^4}\left(+\dfrac{1}{I_1}\sin\alpha\cos\beta+\dfrac{1}{I_2}\cos\alpha\sin\beta\right)-$ $-\dfrac{2k'k'''}{\lambda^2 I_t}$	$-\dfrac{1}{\lambda^4}\left(+\dfrac{1}{I_2}\sin\alpha\sin\beta-\dfrac{1}{I_1}\cos\alpha\cos\beta\right)+$ $+\dfrac{2k''k'''}{\lambda^2 I_t}$	$-\dfrac{2k'''}{\lambda^2 I_t}$

Tabela 6

		i	Învelitoare		Grindă		
			Etapa de calcul				
			I	II	I		II
K_i^{0*}	Condiţii geometrice	1	$-Eu_m$	$-Eu_i^{\Phi}$	$+Eu_p$	$+\vartheta_{i1} N_m^{yx} + \vartheta_{i2} N_m^{yy}$	$-\vartheta_{i1} N^{xy} + \vartheta_{i2} N^{yy,\Phi}$ $-\vartheta_{i3} Q^{yy,\Phi} + \vartheta_{i4} M^{yy,\Phi}$
		2	$-Ev_m \cos\gamma_1$ $-Ew_m \sin\gamma_1$	$+Ev_i^{\Phi} \cos\gamma_1$ $-Ew_i^{\Phi} \sin\gamma_1$	$+Ev_p$		
		3	$-Ew_m \cos\gamma_1$ $+Ev_m \sin\gamma_1$	$-Ew_i^{\Phi} \cos\gamma_1$ $-Ev_i^{\Phi} \sin\gamma_1$	$+Ew_p$		
		4	$+E\vartheta_m$	$-E\vartheta_i^{\Phi}$	$+E\vartheta_p$		
	Condiţii statice	2	$+N_m^{yy} \sin\gamma_1$	$+N_i^{yy,\Phi} \sin\gamma_1$ $-Q^{yy,\Phi} \cos\gamma_1$	$+\frac{1}{2} g_{gr}$		—

Într-adevăr, dacă notăm eforturile static nedeterminate introduse de cele două grinzi marginale cu

$$
\begin{aligned}
N_I^{xy} &= K_1 = \sum_{k=1}^{4} m_{k1} C_k F_k\,; & N_{II}^{xy} &= K_5 = \sum_{k=5}^{8} m_{k5} C_k F_k,\\
N_I^{yy} &= K_2 = \sum_{k=1}^{4} m_{k2} C_k F_k\,; & N_{II}^{yy} &= K_6 = \sum_{k=5}^{8} m_{k6} C_k F_k,\\
Q_I^{yy} &= K_3 = \sum_{k=1}^{4} m_{k3} C_k F_k\,; & \overline{Q}_{II}^{yy} &= K_7 = \sum_{k=5}^{8} m_{k7} C_k F_k,\\
M_I^{yy} &= K_4 = \sum_{k=1}^{4} m_{k4} C_k F_k\,; & M_{II}^{yy} &= K_8 = \sum_{k=5}^{8} m_{k8} C_k F_k,
\end{aligned}
\tag{38}
$$



-0,248
-0,181
-0,140
+0,101
+0,130
+0,064
+0,150
+0,070
$M^{yy}(x=0)$
-8,76
-7,67
-4,02
-0,73
+2,92
+5,48
+7,67
+8,40
+5,11
$N^{yx}(x=\frac{L}{2})$
-3,10
-1,64
-4,02
-4,20
-3,67
-2,19
-0,55
+0,73
$N^{yy}(x=0)$
-17,6
-14,0
-16,0
-13,3
-12,4
-7,2
+3,5
+4,8
+31,5
$N^{xx}(x=0)$

Fig. 5

cele opt condiții geometrice, care dau constantele de integrare, se pot scrie concentrat sub forma

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{8} K_i\vartheta_{1i} + \vartheta_1^0 = 0\,; \qquad && \sum_{i=1}^{8} K_i\,\vartheta_{5i} + \vartheta_5^0 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{8} K_i\vartheta_{2i} + \vartheta_2^0 = 0\,; && \sum_{i=1}^{8} K_i\,\vartheta_{6i} + \vartheta_6^0 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{8} K_i\vartheta_{3i} + \vartheta_3^0 = 0\,; && \sum_{i=1}^{8} K_i\,\vartheta_{7i} + \vartheta_7^0 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{8} K_i\vartheta_{4i} + \vartheta_4^0 = 0\,; && \sum_{i=1}^{8} K_i\,\vartheta_{8i} + \vartheta_8^0 = 0,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

sau sub forma

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{1i} &= -\vartheta_1^0 - \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{1i},\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{2i} &= -\vartheta_2^0 - \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{2i},\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{3i} &= -\vartheta_3^0 - \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{3i},\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{4i} &= -\vartheta_4^0 - \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{4i}.
\end{aligned} \tag{40.1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{5i} &= -\vartheta_5^0 - \sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{5i},\\
\sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{6i} &= -\vartheta_6^0 - \sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{6i},\\
\sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{7i} &= -\vartheta_7^0 - \sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{7i},\\
\sum_{i=1}^{8} K_i \vartheta_{8i} &= -\vartheta_8^0 - \sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{8i}.
\end{aligned} \tag{40.2}$$

Grupul de ecuaţii (40), care nu diferă cu nimic de grupul de ecuaţii (39), prezintă avantajul că separă cele două influenţe marginale şi permite rezolvarea prin aproximaţii succesive, posibilă datorită faptului că deplasările unitare din partea dreaptă sînt mici, ele reprezentînd deplasarea dintr-o margină a învelitorii cînd forţa unitară acţionează în cealaltă margine.

În primă aproximaţie se consideră ecuaţiile :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{1i} &= -\vartheta_1^0 ; & \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{5i} &= -\vartheta_5^0,\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{2i} &= -\vartheta_2^0 ; & \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{6i} &= -\vartheta_6^0,\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{3i} &= -\vartheta_3^0 ; & \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{7i} &= -\vartheta_7^0,\\
\sum_{i=1}^{4} K_i \vartheta_{4i} &= -\vartheta_4^0 ; & \sum_{i=5}^{8} K_i \vartheta_{8i} &= -\vartheta_8^0,
\end{aligned}$$

şi se determină constantele ţinîndu-se seama de relaţiile (38).

Cu ajutorul constantelor date de ecuaţiile (40.2) se determină din (38) eforturile K_i şi se introduc în ecuaţiile (40.1) şi (40.2), corectîndu-se în felul acesta termenii liberi, cu ajutorul cărora se determină valorile constantelor în aproximaţia a doua.

Această operaţie iterativă se poate repeta de cîte ori este nevoie ; în general, se constată însă că influenţa unei margini asupra celeilalte este mică şi este suficient calculul în două trepte.

Acest mod de calcul este avantajos, întrucît constantele se obţin din sisteme de patru ecuaţii cu patru necunoscute.

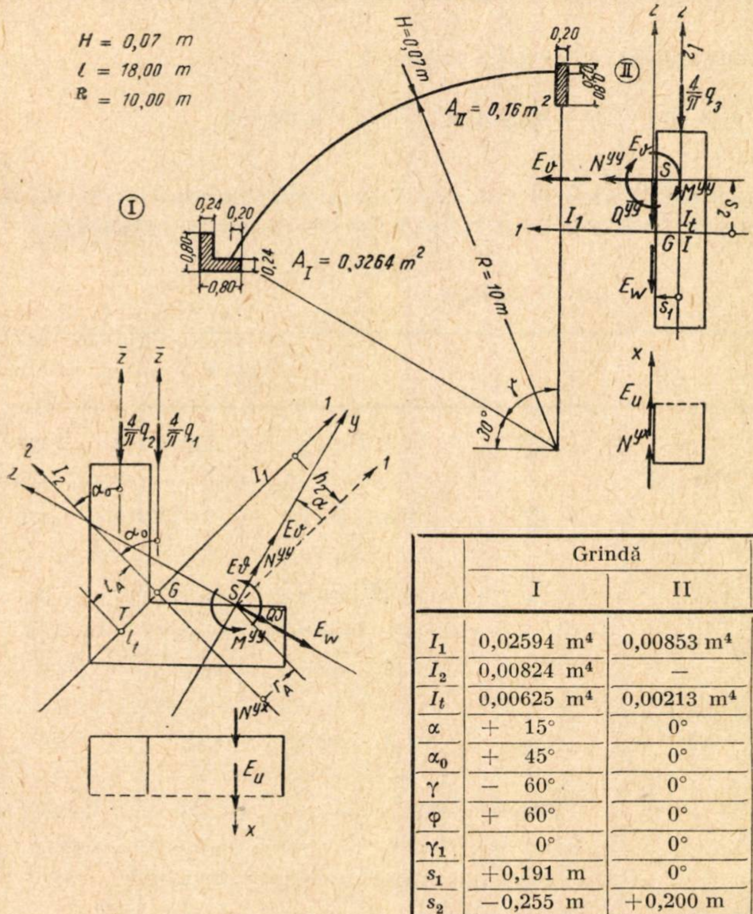
Cu aceasta s-a arătat tot ceea ce este esenţial în calculul învelitorilor circulare cilindrice în teoria de încovoiere, rămînînd ca să se arate pe un exemplu modul practic de conducere a calculului.

Întrucît exemplul cel mai complet şi mai dificil îl constituie învelitoarea nesimetrică, în cele ce urmează se va rezolva un tip de învelitoare care se întîlneşte în mod curent la acoperirea cadrelor de tip shed.

II

Învelitoarea circulară cilindrică a cărei rezolvare se cere, precum şi datele iniţiale sînt arătate în tabela 7.

Tabela 7



H = 0,07 m
l = 18,00 m
R = 10,00 m
H=0,07m
0,20
Ⓘ
ⓘ
A_{II} = 0,16 m²
0,80
l
l
l_2
$\frac{4}{\pi} q_3$
E_ϑ
N^{yy}
S
M^{yy}
s_2
1
I_1
Q^{yy}
I_t
G
I
E_w
s_1
0,24
0,20
0,80
0,24
0,80
A_I = 0,3264 m²
R=10m
ζ
30°
x
E_u
N^{yy}
$\bar{z}$
$\bar{z}$
$\frac{4}{\pi} q_2$
$\frac{4}{\pi} q_1$
2
l
l_2
1
y
I_1
h_2
α
1
$α_0$
$α_0$
E_ϑ
N^{yy}
t_A
G
S
Q^{yy}
T
t_1
M^{yy}
E_w
r_A
N^{yy}
E_u
x

	Grindă			Învelitoare
	I	II		
I_1	0,02594 m⁴	0,00853 m⁴	c	+ 9,01268
I_2	0,00824 m⁴	—	c_1	+ 10,01268
I_t	0,00625 m⁴	0,00213 m⁴	c_2	— 8,01268
α	+ 15°	0°	a_1	+ 4,59042
α_0	+ 45°	0°	a_2	+ 11,9613
γ	— 60°	0°	a_3	+ 11,0583
φ	+ 60°	0°	a_4	+ 4,96532
γ_1	0°	0°	b_1	+144,585
s_1	+0,191 m	0°	b_2	— 54,4701
s_2	—0,255 m	+0,200 m	b_3	+ 65,9722
t_1	—0,233 m	0	b_4	+199,381
t_2	0	0	λ	+ 0,17453

1. *Sarcini.* Asupra învelitorii se consideră că acţionează o sarcină g provenită din greutatea proprie, izolaţii şi zăpadă.

$$g = 0{,}07 \times 2{,}4 + 0{,}120 = 0{,}288 \text{ t/m}^2; \qquad \frac{4}{\pi}\, g = 0{,}367 \text{ t/m}^2.$$

Grinda marginală I este acţionată de greutatea proprie :

$$q_1 = 0{,}3264 \times 2{,}4 = 0{,}783 \text{ t/m}; \qquad \frac{4}{\pi}\, q_1 = 1{,}000 \text{ t/m}$$

şi de greutatea laminatorului :

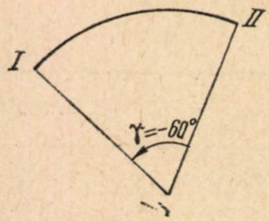
$$q_2 = 0{,}20 \text{ t/m} \qquad \frac{4}{\pi}\, q_2 = 0{,}255 \text{ t/m}.$$

Grinda marginală II este acţionată de greutatea proprie :

$$q_3 = 0{,}16 \times 2{,}4 = 0{,}384 \text{ t/m} \qquad \frac{4}{\pi}\, q_3 = 0{,}488 \text{ t/m}.$$

2. *Eforturi şi deplasări în teoria de membrană.* Folosind grupul de formule (25) valorile maxime ale eforturilor şi deplasărilor în teoria de membrană sînt cele arătate în tabela 8.

Tabela 8

			I	II
	N_m^{xx}	$-$ 2,410 cos γ	$-$ 1,205	$-$ 2,410
	N_m^{yy}	$-$ 3,670 cos γ	$-$ 1,835	$-$ 3,670
	N_m^{xy}	$-$ 4,206 sin γ	$+$ 3,642	0
	Eu_m	$-$ 197,2 cos γ	$-$ 98,61	$-$ 197,2
sin (−60°) = − 0,866 sin 0° = 0 cos (−60°) = + 0,5 cos 0° = + 1	Ev_m	$+$ 801,5 sin γ	$-$ 694,1	0
	Ew_m	$+$1326 cos γ	$+$662,9	$+$1326
	$E\vartheta_m$	$-$ 54,43 sin γ	$+$ 45,40	0

3. *Multiplicatorii şi coeficienţii pentru calculul în teoria de încovoiere.* Multiplicatorii m_k şi coeficienţii n_{ik} calculaţi după tabela 1 au valorile arătate în tabela 9/1.

Tabela 9/1

	m_k	n_{1k}	n_{2k}	n_{3k}	n_{4k}
N^{xx}	$+1$	$-9{,}013$	$-10{,}013$	$-9{,}013$	$+8{,}013$
N^{xy}	$+0{,}2865$	$+4{,}590$	$+11{,}96$	$+11{,}06$	$+4{,}965$
N^{yy}	$+1$	0	$+1$	0	$+1$
Q^{xx}	$+0{,}3178\times10^{-1}$	-1	$+1$	-1	-1
$Q^{\overline{xx}}$	$+0{,}3526\times10^{-2}$	$-19{,}03$	$+18{,}03$	$-17{,}03$	$-18{,}03$
Q^{yy}	$+0{,}9106\times10^{-2}$	$-7{,}371$	$+26{,}55$	$-16{,}02$	$+6{,}093$
$Q^{\overline{yy}}$	$+0{,}1010\times10^{-2}$	$-55{,}47$	$+144{,}6$	$-149{,}4$	$+65{,}97$
M^{xx}	$+0{,}2021\times10^{-1}$	-1	0	$+1$	0
M^{xy}	$+0{,}5789\times10^{-2}$	$+11{,}96$	$-4{,}590$	$-4{,}965$	$+11{,}06$
M^{yy}	$+0{,}2021\times10^{-1}$	$+10{,}013$	$-9{,}013$	$+8{,}013$	$+9{,}013$
Eu	$+81{,}85$	$-9{,}013$	$-10{,}013$	$-9{,}013$	$+8{,}013$
Ev	$+23{,}45$	$+144{,}6$	$+54{,}47$	$-65{,}97$	$-149{,}4$
Ew	$+23{,}210$	-1	0	$+1$	0
$E\vartheta$	$+1{,}160$	$+11{,}96$	$-4{,}590$	$-4{,}965$	$+11{,}06$

4. *Condiții de margine.* Aşa cum rezultă din tabela 3 condițiile de margine în cazul tipului de învelitori de rezolvat sînt

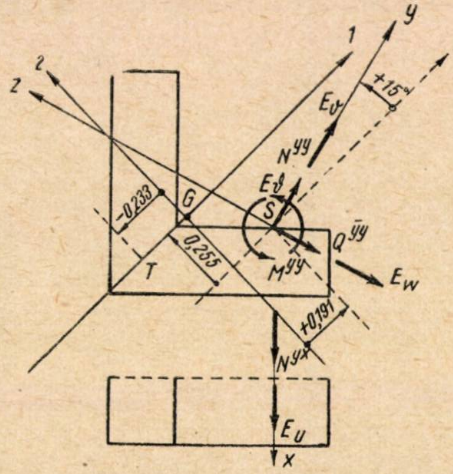
— marginea I

$$(Eu)_{\hat{i}nv} - (Eu)_{gr} = 0,$$
$$(Ev)_{\hat{i}nv} - (Ev)_{gr} = 0,$$
$$(Ew)_{\hat{i}nv} - (Ew)_{gr} = 0,$$
$$(E\vartheta)_{\hat{i}nv} - (E\vartheta)_{gr} = 0;$$

— marginea II

$$(Eu)_{\hat{i}nv} - (Eu)_{gr} = 0; \qquad (Ew)_{\hat{i}nv} - (Ew)_{gr} = 0,$$
$$N^{yy} = 0; \qquad (E\vartheta)_{\hat{i}nv} - (E\vartheta)_{gr} = 0.$$

Tabela 10/4

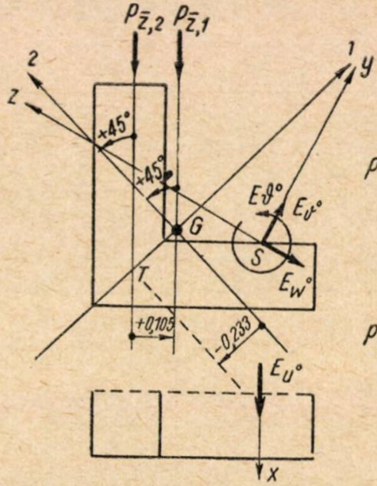

z
2
1
y
1
+15°
E_v
N^{yy}
$E\vartheta$
S
G
-0,233
0,255
T
$Q^{\bar{y}y}$
M^{yy}
E_w
+0,191
N^{yx}
E_u
x

$k_1 = +0{,}424\ m$

$k_2 = -0{,}255\ m$

$k' = +0{,}356\ m$

$k'' = +0{,}344\ m$


$p_{\bar{z},2}$
$p_{\bar{z},1}$
2
z
+45°
+45°
1
y
$E\vartheta^{\circ}$
E_v°
G
S
T
E_w°
+0,105
-0,233
E_u°
x

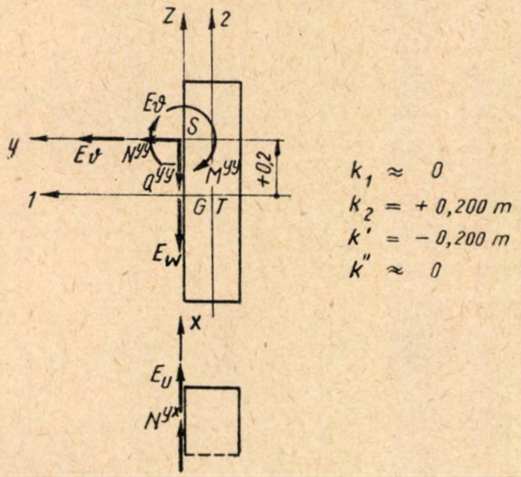
$$p_{\bar{z},1}\begin{cases}\vartheta_1 = +0{,}233\,m\\ \vartheta_2 = 0\\ k_1^{\circ} = +0{,}155\,m\\ k_2^{\circ} = 0\end{cases}$$

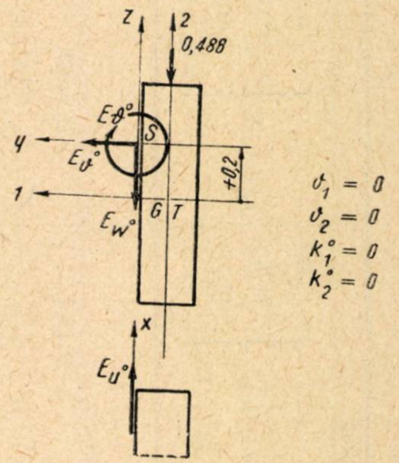
$$p_{\bar{z},2}\begin{cases}\vartheta_1 = 0\\ \vartheta_2 = 0\\ k_1^{\circ} = 0\\ k_2^{\circ} = 0\end{cases}$$

	$N^{vx} = 1$	$N^{vv} = 1$	$Q^{\overline{vv}} = 1$	$M^{vv} = 1$	$p_{\bar{z},1} = 1$	$p_{\bar{z},2} = 0{,}255$	Σ	
Eu	+328,2	+ 3,733	+ 2.914	0	− 1.775	− 1.775	− 2.228	Eu°
Ev	+3.733	+126.100	+21.020	+ 3.741	−97.550	−96.930	−122.300	Ev°
Ew	+2.914	+ 21.020	+48.770	− 3.613	+ 5.037	+ 4.441	+ 6.169	Ew°
$E\vartheta$	0	+ 3.741	− 3.613	+10.510	− 1.733	0	− 1.733	$E\vartheta^{\circ}$

5. *Deplasările grinzilor marginale.* Valorile deplasărilor grinzilor marginale I şi II calculate după tabela 4 sînt arătate în tabela 10/4 respectiv 11/4.

Tabela 11/4





	$N^{yx} = 1$	$Q^{\overline{yy}} = 1$	$M^{yy} = 1$	$p_z^- = 0{,}488$	Σ	
Eu	+359,1	— 4.409	0	— 4.409	— 2.151	*Eu*°
Ew	−4.409	+126.300	0	+126.300	+61.630	*Ew*°
*E*ϑ	0	0	+30.780	0	0	*E*ϑ°

6. *Coeficienţii şi termenii liberi corespunzători ecuaţiei (36).* Folosind tabelele 5 şi 6 şi ţinînd seama de condiţiile de margine arătate la punctul 4 se calculează pentru marginea I coeficienţii n_{jk}^{i*} în tabela 12/5, termenii liberi $k_i^{0,*}$ în tabela 14/6 şi pentru marginea II, coeficienţii n_{jk}^{i*} în tabela 13/5 şi termenii liberi în tabela 15/6.

Pentru determinarea termenilor liberi în etapa a II-a de calcul se dau în tabela 16 valorile maxime ale eforturilor şi deplasărilor dintr-o margine a învelitorii, originea sistemului de axe fiind pe cealaltă margine a învelitorii.

Pentru determinarea semnelor eforturilor şi deplasărilor de pe generatoarea I originea axelor fiind pe generatoarea II, s-a ţinut seama de cele arătate în tabela 2.

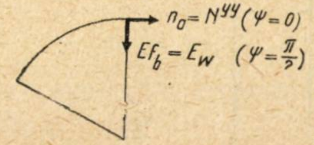
Ca urmare sistemele de ecuaţii (16) pentru fiecare din cele două margini vor fi de forma arătată în tabela 17.

În continuare, ţinînd seama de formula (27) sau de formula (37) şi de tabela 2 se determină valorile solicitărilor ce acţionează învelitoarea şi se trasează diagramele (fig. 5).

Tabela 12/5

	i	Învelitoare	Grindă				Σ
			$0,2865 \times \begin{cases} +328,2 \\ +3733 \\ +2914 \\ 0 \end{cases}$	$1 \times \begin{cases} +3.733 \\ +126.141 \\ +21.024 \\ +3.741 \end{cases}$	$0,00101 \times \begin{cases} +2.914 \\ +21.024 \\ +48.756 \\ -3.613 \end{cases}$	$0,02021 \times \begin{cases} 0 \\ +3.741 \\ -3.613 \\ +10.505 \end{cases}$	
n_{1k}^{i*}	1	− 737,7	− 4,59042	0	+ 54,4701	−10,01268	−1009
	2	+3390					− 1.118
	3	−2321					− 23.626
	4	−1388					− 16.204
n_{2k}^{i*}	1	− 819,6	−11,9613	−1	−144,585	+ 9,01268	− 6.103
	2	+1277					−140.045
	3	0					− 38.792
	4	+5327					+ 4.026
n_{3k}^{i*}	1	− 737,7	−11,0583	0	+149,381	− 8,01268	− 1.338
	2	−1547					− 10.805
	3	+ 23.208					+ 21.921
	4	+5762					+ 3.516
n_{4k}^{i*}	1	− 655,8	− 4,96532	−1	−65,9722	− 9,01268	− 3.738
	2	−3503					−137.036
	3	0					− 27.762
	4	− 12.832					− 18.246

Tabela 13/5

	i	Învelitoare	Grindă			Σ
			$0{,}2865 \times \left\{ \begin{matrix} +359{,}1 \\ -4{,}409 \\ 0 \end{matrix} \right.$	$0{,}00101 \times \left\{ \begin{matrix} -4.409 \\ +126.295 \\ 0 \end{matrix} \right.$	$0{,}02021 \times \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ +30.781 \end{matrix} \right.$	
n_{1k}^{i*}	1	− 737,7	− 4,59042	+ 54,4701	−10,01268	− 1.453
	3	−2321				−10.460
	4	−1388				−20.108
n_{2k}^{i*}	1	− 819,6	−11,9613	−144,585	− 9,01268	− 1.406
	3	0				− 3.343
	4	+5327				+10.933
n_{3k}^{i*}	1	− 737,7	−11,0583	+149,381	− 8,01268	− 2.541
	3	+23.208				+56.236
	4	+ 5.762				+ 777,9
n_{4k}^{i*}	1	− 655,8	− 4,96532	− 65,9722	− 9,01268	+439,0
	3	0				− 2.147
	4	− 12.832				−18.438
n_{1k}	2	0				0
n_{2k}		+ 1				+ 1
n_{3k}		0				0
n_{4k}		+ 1				+ 1

$n_0 = N^{yy} (\psi = 0)$
$EF_b = E_W \quad (\psi = \frac{\pi}{2})$

Tabela 14/6

	i	Învelitoare I	Învelitoare II	Grindă I		Grindă II	Σ I	Σ II
K_i^{0*}	1	+ 98	− 121	−2228	− 5.654	+ 547	− 7.784	+ 426
	2	+694	− 592	−122.268	−217.874	+21.220	−339.448	+20.628
	3	−663	+ 316	+ 6.169	− 27.964	+ 2.310	− 22.458	+ 2.626
	4	+ 45	−2.375	− 1.733	− 6.865	+ 1.033	− 8.553	− 1.342

Tabela 15/6

	i	Învelitoare I	Învelitoare II	Grindă I		Grindă II	Σ I	Σ II
K_i^{0*}	1	+197	−153	− 2.151	0	+ 104	− 1954	− 49
	2	− 3,670	+ 0,154	0	0	0	− 3,670	+0,154
	3	− 1.326	+ 1.882	+61.632	0	+ 2.875	+60.306	− 993
	4	0	− 2.430	0	0	+ 471	0	−1.959

Tabela 16

Originea axelor	I	II
Punctul de calcul	II	I
$N_i^{yx,\Phi}$	− 0,0191	+ 0,2208
$N_i^{yy,\Phi}$	+ 0,1540	+ 0,1760
$Q^{\overline{v}y,\Phi}$	+ 0,0221	+ 0,0130
$M^{yy,\Phi}$	+ 0,0153	+ 0,0312
Eu_i^{Φ}	+153	+121
Ev_i^{Φ}	−398	−592
Ew_i^{Φ}	−1.882	−316
$E\vartheta_i^{\Phi}$	+2.430	+ 2.375

Tabela 17

	i	A	B	C	D	= T.L.
Marginea I	1	− 6.103	+ 1.009	− 3.738	+ 1.338	− 7.358
	2	−140.045	+ 1.118	−137.036	+10.805	−318.820
	3	− 38.792	+23.626	− 27.762	−21.921	− 19.832
	4	+ 4.026	+16.204	− 16.246	− 3.516	− 9.895
Marginea II	1	− 1.406	+ 1.453	+439	+ 2.541	− 2.003
	2	0	+ 1	0	+ 1	− 3,516
	3	− 3.343	+10.460	− 2.147	−56.236	+ 59.313
	4	+ 10.933	+20.108	− 18.438	− 777,9	− 1.959

CONCLUZII

Formele practice stabilite în prezenta lucrare, dau posibilitatea să se calculeze învelitorile circulare cilindrice, simetrice și nesimetrice, izolate sau continue în teorie întîlnită în literatură sub denumirea de teoria cvasi-completă de încovoiere, ţinîndu-se seamă de legătura învelitorilor cu grinzile marginale.

Cazul învelitorilor circulare cilindrice fără grinzi marginale, constituie un caz particular și de importanță mai mult teoretică, ce poate fi dedus cu ușurinţă din formulele generale arătate în lucrare.

Metoda iterativă de determinare a constantelor produce simplificări importante, care avantajează sistemul de calcul expus.

Sistematizările propuse dau, de asemenea, posibilitatea întocmirii unor abace sau tabele de calcul, care ar duce la o și mai mare economie de timp în proiectare.

Primită la redacţie la 24 noiembrie 1959.

О НЕКОТОРЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РАСЧЕТА КРУГЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

РЕЗЮМЕ

В статье систематизируется расчет круглых цилиндрических оболочек в теории изгиба и приводится ряд практических формул, позволяющих легко определить состояние, напряжения, деформации и перемещения при условии наличия краевых балок, которые имеют место у наиболее часто встречающихся оболочек. Случай круглых цилиндрических оболочек без краевой балки, исследуемый инженером М. Михайлеску в [1], являются частным случаем, который можно сразу

вывести из общих формул, приведенных в настоящей работе. В заключение, для иллюстрации способа расчета было найдено решение для круглой цилиндрической несимметрической оболочки. Этот пример, кроме того, что связан с наибольшими трудностями решения, представляет и практический интерес.

CONSIDÉRATIONS SUR QUELQUES FORMULES PRATIQUES POUR LE CALCUL DES COQUES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES

RÉSUMÉ

L'auteur procède à une systématisation du calcul des coques cylindriques circulaires dans la théorie de la flexion et fournit plusieurs formules pratiques permettant de déterminer facilement, dans les cas où il y a des poutres marginales, l'état des contraintes, des déformations et des déplacements, tels qu'ils se manifestent dans les types les plus courants de coques. Le cas des coques cylindriques circulaires sans poutre marginale, qui a été traité par l'ingénieur M. Mihailescu dans [1], représente un cas particulier qui peut être déduit immédiatement des formules générales proposées dans le présent travail. Afin d'illustrer par un exemple le mode de calcul, l'auteur donne, pour conclure, la solution d'une coque cylindrique circulaire non symétrique qui, tout en présentant de grandes difficultés de calcul, offre un grand intérêt pratique.

BIBLIOGRAFIE

1. MIRCEA MIHAILESCU, *Asupra unor formule practice pentru calculul învelitorilor cilindrice subţiri.* Buletin ştiinţific, Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, **IV**, *3—4* (1952).
2. — *Cîteva observaţii în legătură cu studiul şi proiectarea învelitorilor subţiri.* Industria Construcţiilor şi a materialelor de Construcţii, *9* (1952).
3. MIRCEA SOARE, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite de calculul suprafeţelor subţiri.* E.S.A.C., 1954.
4. CEZAR AMZULESCU, *Calculul învelitorilor cilindrice subţiri în teoria de încovoiere.* Revista tehnică militară, **II**, *3* (1954).
5. V. Z. VLASOV, *Teoria generală a învelitorilor şi aplicarea ei în tehnică.* Editura de stat pentru literatură tehnică şi teoretică. Moscova-Leningrad, 1949.
6. V. V. NOVOJILOV, *Teoria învelitorilor subţiri.* Gosudarstvennoe izdatelstvo sudestroitelnoi literaturî, 1951.
7. M. M. FILONENCO-BORODICI, *Curs de rezistenţa materialelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
8. — *Teoria elasticităţii.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
9. G. GRUNING, *Calculul învelitorilor circulare cilindrice fără întrebuinţarea de tabele.* Bauplanung-Bautechnik, Heft *7, 8* (1957).
10. RUDIGER-URBAN, *Învelitori circulare cilindrice.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1955.

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ JUBILIARĂ A INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

Între 4—7 iulie a.c. Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R. a organizat cu prilejul împlinirii a 10 ani de activitate, în colaborare cu Ministerul Industriei Grele, o sesiune științifică jubiliară.

Lucrările sesiunii s-au desfășurat în cadrul următoarelor secții și subsecții :

I. MECANICĂ GENERALĂ

1. Mecanică teoretică și metode de calcul.
2. Teoria mecanismelor și mașinilor.
3. Frecare și uzură în mașini.

II. MECANICA MEDIILOR DEFORMABILE

4. Elasticitate, plasticitate, rezistența materialelor, vibrații în construcția de mașini și în construcții industriale.
5. Statica și dinamica construcțiilor. Mecanica pămînturilor.
6. Prelucrarea metalelor și solului.

III. MECANICA FLUIDELOR

7. Hidrodinamică teoretică și aplicată.
8. Aerodinamică și gazodinamică teoretică și aplicată.
9. Lubrificația hidro-aerodinamică în construcția de mașini.

S-au prezentat peste 180 de comunicări și lucrări de sinteză, elaborate de aproape 200 de colaboratori din diverse institute de cercetări ale Academiei R.P.R. și departamente, catedre din învățămînt, întreprinderi și institute de proiectări. Au participat de asemenea și unii oaspeți străini, oameni de știință din R.P. Bulgaria, R.S. Cehoslovacă, R.D. Germană, R.P. Polonă și R.P. Ungară.

Sesiunea a reprezentat o trecere în revistă a unei activități rodnice de mai bine de 10 ani în decursul cărora cercetarea științifică în acest domeniu a luat în țara noastră un avînt deosebit, datorită condițiilor create de Partid și Guvern care acordă o atenție deosebită acestei ramuri a științelor tehnice.

Prin numărul și conținutul lor comunicările prezentate au reflectat atît probleme importante tehnico-științifice cu caracter aplicativ imediat, interesînd economia națională a țării în plină dezvoltare, cît și probleme importante din punct de vedere științific general.

Din trecerea în revistă a lucrărilor prezentate şi a discuţiilor purtate, s-a putut desprinde, în lumina Directivelor celui de-al III-lea Congres al P.M.R., şi a Hotărîrii Comitetului Central al P.M.R. şi al Consiliului de Miniştri, privind ridicarea nivelului tehnic al producţiei, linia de dezvoltare a cercetărilor viitoare în cadrul Institutului de mecanică aplicată.

CONSILIUL INTERNAŢIONAL AL ŞTIINŢELOR AERONAUTICE

AL II-LEA CONGRES INTERNAŢIONAL

Între 12—16 septembrie a avut loc la Zürich cel de-al II-lea Congres al ştiinţelor aeronautice.

Tematica congresului cuprinde :

Scurgeri hipersonice, transonice şi supersonice, strat limită, aerotermochimie, structuri, oboseala materialelor, magneto-fluido-dinamică, medicină aeronautică, transport aerian, zbor cosmic etc.

S-au prezentat lucrări ale unor specialişti din diferite ţări, din care menţionăm : U.R.S.S., S.U.A., Anglia, Franţa, R.P. Polonă, Italia etc.

RECENZII

AUGUSTIN PETRE și MIHAIL ATANASIU, *Bare cu pereți subțiri*. Ed. tehnică, București, 1960, 232 pag.

Tendința de ușurare și ieftinire continuă a construcțiilor și mașinilor duce la folosirea tot mai intensă a *barelor cu pereți subțiri*, avînd profil deschis sau închis. Aceste elemente caută să satisfacă cele două condiții antagoniste, aceea de a realiza o rigiditate cît mai mare și aceea a unei construcții cît mai ușoare.

Modul de tratare a acestor bare prin metodele uzuale ale rezistenței materialelor aplicate barelor s-a dovedit necorespunzător. Aplicarea teoriei elasticității, prin considerarea barelor ca formate din mai multe plăci plane, sau învelitori cilindrice subțiri prezintă dificultăți de calcul.

Nevoia de a soluționa problema prin metode accesibile inginerului proiectant a dus la crearea unei noi ramuri a rezistenței materialelor și teoriei elasticității, *studiul barelor cu pereți subțiri*.

În literatura tehnică din țări cu industrie foarte avansată studiul acesta este ilustrat prin publicații valoroase. Este necesar să subliniem în special seria de monografii ale lui V. Z. Vlasov, distinse prin premii Stalin de gradul I și II.

La noi în țară, acest studiu începe să-și facă loc, în publicații, în învățămînt, în proiectare.

Lucrarea despre care dorim a vorbi este prima publicație de ansamblu despre acest subiect. Ea expune în mod succint, elementele fundamentale ale calculului de rezistență, stabilitate și vibrații pentru barele cu pereți subțiri.

Calculul de rezistență este prezentat într-o formă nouă pornind de la ecuațiile generale ale teoriei elasticității și ajungînd la relațiile teoriei barelor cu pereți subțiri.

Primul capitol se ocupă de calculul la rezistență a barelor cu profil deschis, ca și de precizarea mărimilor caracteristice acestui studiu. În al doilea capitol se studiază barele cu pereți închiși o singură dată.

Capitolul III se ocupă de barele cu pereți închiși de mai multe ori, avînd ca exemplu tipic scheletul aripii de avion. Al patrulea capitol tratează calculul de rezistență și deformații al barelor curbe.

Capitolul V se ocupă de barele static nedeterminate, iar capitolul VI de barele așezate pe mediu elastic.

În capitolele VII și VIII se studiază stabilitatea barelor cu profil închis și a celor cu profil deschis.

În capitolul IX se examinează vibrațiile libere, forțate și cele ale barelor pe mediu elastic.

Ultimul capitol dă tabele și relații pentru calculul elementelor geometrice ale profilelor cu pereți subțiri.

Lucrarea are o serie de aplicații numerice și un număr mare de indicații bibliografice. De subliniat că în cadrul acestui volum se publică rezultatele unor cercetări originale ale autorilor, iar o serie de probleme sau capitole se tratează într-o formă nouă, proprie autorilor.

Sîntem de părere că lucrarea apărută este o contribuție prețioasă la îmbogățirea patrimoniului literaturii noastre tehnice, că ea poate servi atît studenților și inginerilor proiectanți, cît și cercetătorilor științifici.

Gh. Buzdugan

AL. MARINESCU, *Teoria Elicopterului*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1960. 267 pagini + 80 figuri.

Nota distinctivă a acestei cărți este tratarea modern inginerească a subiectului, în sensul că toate ecuațiile și soluțiile matematice propuse se sprijină pe de o parte pe fenomene fizice deosebit de clar scoase în evidență, iar pe de altă parte servesc direct aspectele constructive ale acestor mașini aeriene.

În elaborarea unui proiect de elicopter rezultatele prezentate își au un rol și un loc primordial, anume în etapa stabilirii prin calcul a performanțelor și dimensiunilor principale ale elicopterului. Chiar și o sumară trecere în revistă a capitolelor cărții ilustrează caracterul ei aplicativ :

Noțiunile introductive, capitolul I, cuprind tipuri constructive de elicoptere, principii constructive ale rotorului de elicopter și alte aspecte constructive ale acestei mașini pentru a familiariza pe cititor cu specificul abordării teoretice a problemelor elicopterului, adică permanenta legătură cu necesitățile constructive ale mașinii. În capitolul II, *Aerodinamica rotorului de elicopter, în incompresibil*, este urmată în linii mari teoria Glauert-Wheatley dîndu-se însă și exemple tratate cu ajutorul metodei tabelare a lui Bayley. Sînt de remarcat de asemenea date de calcul din paragraful *Influența modului de cuplaj și de prindere al palei asupra caracteristicilor rotorului* și *Interacțiunea rotoarelor*.

Capitolul III cuprinde considerații asupra reacțiunilor aerodinamice pe elicile rigide, cu aplicații la elicea anticuplu, elicile unor convertoplane și la elicile avioanelor cu decolare pe verticală.

Capitolul IV, destinat performanțelor elicopterului, se ocupă de calculul puterii în zbor la punct fix, în zbor pe verticală și în zbor spre înainte — dîndu-se și un exemplu numeric pentru utilizarea diagramelor de calcul.

Capitolul V, care acoperă un sfert din carte, este închinat stabilității elicopterelor, domeniu în care autorul aduce un aport personal substanțial. Linia de tratare matematică este cea clasică : sistem liniar, determinant Hurvitz, ecuație caracteristică. Autorul tratează complet, în cadrul unor ipoteze simplificatoare judicios alese, cazurile elicopterelor monorotoare, birotoare coaxiale și în tandem, determinînd de fiecare dată explicit perioada oscilațiilor instabile. Paragrafele referitoare la aspectul fizic al oscilațiilor instabile și la metodele de ameliorare a stabilității dinamice se înscriu pe linia valorii aplicative a cărții.

Capitolele VI, VII și VIII sînt consacrate calculului de rezistență al rotorului de elicopter și vibrațiilor diferitelor organe : pale, fuzelaj etc. Cititorul va găsi și în aceste capitole interesante puncte de vedere moderne și prețioase indicații pentru alegerea judicioasă a formelor constructive.

Prin valoroasa contribuție personală a autorului, prin nivelul cercetării teoretice şi numeroasele rezultate aplicative, această primă carte romînească despre elicopter merită toată atenția studenților, inginerilor, cercetătorilor din toate domeniile apropiate de aviație.

Şt. N. Săvulescu

AL. STOENESCU, GH. SILAŞ, *Curs de mecanică teoretică*, ed. a II-a, Ed. tehnică, București, 1959, 500 pag.

Cursul de mecanică teoretică întocmit de prof. Al. Stoenescu şi Gh. Silaş este destinat studenților din institutele tehnice superioare şi cuprinde materialul necesar pregătirii unor viitori ingineri. Aici găsim, pe lîngă programa analitică prevăzută de Ministerul Învăţămîntului şi culturii, şi unele capitole speciale — care fac legătura cu diferite domenii practice inginereşti sau care se referă la unele probleme de mecanică ce s-au dezvoltat mult în ultimul timp.

Cele trei părți ale cursului cuprind statica, cinematica și dinamica. Fiecare din aceste părţi este împărţită într-un număr de capitole astfel aranjate încît, pentru înţelegerea materialului cuprins în partea respectivă, este suficient să se citească — în general — primele capitole. La sfîrșitul fiecărei părţi se dă cîte un capitol de concluzii care, în cîteva pagini, cuprinde o sinteză generală a părții respective.

Întregul material este tratat cu ajutorul calculului vectorial; în partea a treia a cursului se dau cîteva noţiuni de mecanică analitică (ecuaţiile lui Lagrange, ecuaţiile lui Hamilton).

În partea I se tratează pe larg modul de a reduce sistemele de forţe şi de cupluri în plan şi spaţiu, împreună cu diferitele cazuri particulare importante. Pe această bază se consideră apoi problemele de echilibru, precum și unele probleme speciale, cum sînt grinzile cu zăbrele, maşinile simple, firele.

În cadrul părţii a II-a se studiază pe rînd cinematica punctului material şi cinematica rigidului. Bazaţi pe aceste rezultate se poate trece la mişcarea relativă a particulei și a rigidului. Menţionăm unele interesante aplicaţii ale cinematicii în tehnică, în special în legătură cu mişcarea plan-paralelă şi transformările și transmisiile de mişcări.

Partea a III-a (dinamica), după unele noţiuni introductive (principiile mecanicii clasice, legături, momente de inerţie), prezintă teoremele generale ale dinamicii. Menţionăm că se prezintă simultan aceste teoreme pentru cazul punctului material şi pentru cazul sistemelor de puncte materiale. Se dau, de asemenea, principiile diferenţiale ale mecanicii precum și ecuațiile Lagrange și Hamilton. Un grup de capitole studiază probleme de dinamica punctului material. Se consideră și dinamica punctului de masă variabilă : problema rachetei. În cadrul problemelor de dinamica rigidului se tratează cazul mişcării cu o axă fixă sau cu un punct fix, dîndu-se aplicaţii pentru giroscop. Un capitol special se ocupă de mişcarea relativă. Ciocnirile și percusiunile, precum și stabilitatea echilibrului sînt de asemenea tratate. Menţionăm un capitol de elemente de similitudine şi teoria modelului.

Ediţia a II-a a acestui volum prezintă unele îmbunătăţiri de text şi o anexă asupra dinamicii zborului de la pămînt la lună.

Acest curs de mecanică nu are un cuprins mult prea dezvoltat, renunţîndu-se uneori la anumite demonstraţii teoretice riguroase dar prea lungi. În schimb este trecut în revistă un material destul de vast, sînt date cele mai importante rezultate şi, mai ales, se arată cum pot fi atacate şi rezolvate problemele care se pun în practică. În felul acesta considerăm că lucrarea este deosebit de utilă învăţămîntului nostru tehnic superior, precum şi oricăruia care doreşte să-şi îmbunătăţească cunoştinţele în acest domeniu.

P. P. Teodorescu

Д. В., ВАЙНБЕРГ, Е. Д. ВАЙНБЕРГ, *Пластины, диски, балки-стенки* (Plăci, şaibe, grinzi-pereţi). Госстрой-издат, Киев, 1959, 1059 pag., 482 fig.

Manualul cu titlul de mai sus este rezultatul cercetării şi sistematizării unui vast material bibliografic (421 referinţe bibliografice) referitor la calculul plăcilor, şaibelor şi grinzilor-pereţi. În lucrare se prezintă, într-o formă deosebit de îngrijită şi concisă, formule, grafice şi tabele pentru calculul rezistenţei, stabilităţii şi oscilaţiei plăcilor, şaibelor, grinzilor-pereţi, şi membranelor precum şi al sistemelor de plăci de diferite tipuri, pentru diferite moduri de rezemare şi scheme de încărcare.

O deosebită atenţie este acordată determinării concentrărilor de eforturi în vecinătatea orificiilor din plăci precum şi calculului capacităţii portante a plăcilor de beton armat.

La începutul fiecărui capitol este dată o scurtă prezentare a bazelor teoretice ale problemei tratate.

Pentru ca folosirea manualului să fie cît mai uşoară, fiecare paragraf are următoarea alcătuire :

— desen înfăţişînd schema plăcii considerate, modul de rezemare, sarcina precum şi eforturile şi deformaţiile căutate ;

— notaţii ;

— formulele principale de calcul, tabele şi grafice cu valori ale coeficienţilor ce intervin în calcule ;

— schema de calcul şi exemplul de calcul.

Lucrarea are 51 capitole, grupate în 8 părţi.

Partea I, se ocupă cu încovoierea simetrică şi nesimetrică a plăcilor circulare şi inelare de grosime constantă şi variabilă (cap. I—VI). De asemenea, se tratează încovoierea plăcilor circulare rezemate pe mediu elastic (cap. VII), precum şi încovoierea simetrică a plăcilor circulare rigidizate cu nervuri radiale (cap. VIII).

În partea a II-a se prezintă încovoierea plăcilor dreptunghiulare de grosime constantă (cap. IX—XVIII). Capitole speciale sînt dedicate încovoierii plăcii patrate aşezată pe mediu elastic, sub acţiunea unei sarcini uniform distribuite (cap. XIX), încovoierii plăcilor continue (cap. XX), încovoierii plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate întărite cu nervuri de rigidizare (cap. XXI) şi încovoierii plăcilor de fundaţie sub acţiunea unei reţele de stîlpi.

Partea a III-a se referă la încovoierea plăcilor de diferite forme şi anume :

— încovoierea plăcilor triunghiulare şi trapezoidale (cap. XXIII) ;

— încovoierea plăcilor eliptice (cap. XXIV) ;

— încovoierea plăcilor în formă de sector de cerc (cap. XXV).

Starea plană de eforturi a şaibelor, plăcilor şi grinzilor-pereţi face obiectul părţii a IV-a.

Se prezintă deformaţia simetrică şi nesimetrică a şaibelor circulare şi inelare de grosime constantă (cap. XXVII—XXVIII), precum şi deformaţia simetrică a şaibelor circulare şi inelare de grosime variabilă (cap. XXIX).

Starea plană de eforturi a grinzilor-pereţi este prezentată în capitolul XXX. În capitolul XXXI este tratată întinderea plăcilor circulare întărite cu nervuri radiale, iar în capitolul XXXII — starea plană de eforturi a corpurilor de diferite forme.

În partea a V-a se prezintă rezistenţa plăcilor la solicitări compuse.

Partea a VI-a se ocupă cu stabilitatea şi oscilaţiile plăcilor şi grinzilor-pereţi.

Partea a VII-a cuprinde probleme referitoare la concentrările de eforturi în plăci şi grinzi-pereţi în jurul orificiilor de diferite forme, mărimi şi poziţii, pentru diferite scheme de solicitare.

În ultima parte (a VIII-a) se tratează o problemă specifică betonului armat şi anume calculul capacităţii portante a plăcilor de beton armat de diferite forme.

Din lucrare reiese aportul substanţial adus de cercetările autorilor în special în domeniul teoriei încovoierii cu întindere a plăcilor sub acţiunea forţelor concentrate şi a sarcinilor nesimetrice.

Scrisă de autori cu o bogată activitate în domeniul teoriei plăcilor plane lucrarea *Plăci, şaibe, grinzi-pereţi* este un excelent manual pentru calculul acestor elemente de construcţie.

V. Petcu

* * * *Non - Homogeneity in Elasticity and Plasticity* (Neomogeneitate în elasticitate şi plasticitate). Symposium, Warsaw, September 2—9, 1958, edited by Professor W. Olszak, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Pergamon Press, London-New York-Paris-Los Angeles, 1959, 530 + XXIV pag.

Sub auspiciile Uniunii Internaţionale de mecanică teoretică şi aplicată (International Union of Theoretical and Applied Mechanics — I.U.T.A.M.) a avut loc între 2—9 septembrie 1958, la Varşovia, un simposium cu privire la probleme de neomogeneitate în teoria elasticităţii şi în teoria plasticităţii. La acest simposium s-au dezbătut probleme interesante privind calculul corpurilor neomogene şi au fost prezentate comunicări de către cercetători din diferite ţări, inclusiv din R. P. Romînă. În afară de cîteva date cu caracter general (lista participanţilor, programul desfăşurării lucrărilor etc.), volumul menţionat mai sus cuprinde 52 de comunicări în diferite domenii ale temei indicate.

În prima parte sînt cuprinse 11 lucrări privind probleme de elasticitate. Menţionăm astfel lucrarea fundamentală a lui D. I. Sherman (U.R.S.S.), privind rezolvarea problemei plane a unui corp elastic neomogen cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă, precum şi comunicarea lui S. A. Ambarţumian (U.R.S.S.) în legătură cu plăcile plane şi curbe subţiri anizotrope. J. Golecki (R. P. Polonă) se ocupă de problema plană a corpurilor neomogene incompresibile, rezultatele obţinute fiind folositoare şi în cazul corpurilor fluide vîscoase incompresibile. K. Hruban (R. S. Cehoslovacă) face un studiu aprofundat al semispaţiului elastic în diferite cazuri de neomogeneitate. O lucrare asupra barelor cu pereţi subţiri alcătuite dintr-un material neomogen a fost prezentată de A. Petre (R.P.R.). C. I. Borş (R.P.R.) foloseşte metoda funcţiilor de tensiune în problema torsiunii barelor anizotrope şi neomogene. Într-o comunicare privind corpurile elastice cu neomogeneitate continuă, P. P. Teodorescu (R.P.R.) şi M. Predeleanu (R.P.R.) reduc problema corpurilor neomogene la o succesiune de probleme similare pentru corpuri omogene.

Partea a II-a cuprinde 16 comunicări din domeniul teoriei plasticităţii. W. Olszak şi W. Urbanowski (R. P. Polonă) prezintă un referat privind stadiul actual al cercetărilor teoretice şi experimentale în această direcţie. Remarcăm comunicarea lui W. Prager (S.U.A.) cu privire la utilizarea optimă a unui element de construcţie. A. Sawczuk (R.P.P.) studiază problema penei plastice neomogene. Z. Sobotka (R. S. Cehoslovacă) se ocupă de calculul pămînturilor neomogene. Menţionăm că P. G. Hodge, Jr. (S.U.A.) cercetează problema liniarizării ecuaţiilor plasticităţii în cazul corpurilor neomogene.

În partea a III-a sînt cuprinse 5 lucrări de reologie. M. A. Biot (S.U.A.) face o trecere în revistă a studiilor sale privind stabilitatea mediilor vîsco-elastice neomogene. Influenţa neomogeneităţii materialului asupra rezultatelor încercărilor de fluaj este luată în considerare de către F.K.G. Odqvist şi A. Mellgren (Suedia).

Partea a IV-a tratează probleme dinamice şi propagări de unde atît în domeniul elastic cît şi în domeniul plastic (9 comunicări). Problema propagării undelor elasto-plastice într-o bară este considerată de P. Perzyna (R.P.P.). S. Kaliski (R.P.P.) prezintă unele metode proprii de construcţie a soluţiilor de bază pentru corpurile anizotrope neomogene. M. Z. Krzywoblocki (R.P.P.) studiază problemele din punct de vedere al mecanicii statice. Problema mişcării firului plan neomogen este considerată de Gr. C. Moisil (R.P.R.). N. Cristescu (R.P.R.) se ocupă de propagarea unidimensională a undelor elasto-plastice.

În partea a V-a (5 comunicări) se fac consideraţii de micro-neomogeneitate şi de neomogeneitate statistică, în special de către cercetătorii francezi. M. Davin (Franţa) studiază distribuţia tensiunilor într-un mediu neomogen plan pentru care se pun asemenea probleme. J. Murzewski (R.P.P.) consideră corpuri elasto-plastice stocastic neomogene.

Partea a VI-a este intitulată *Varia* şi cuprinde 6 lucrări. Menţionăm în special studiile de fotoplasticitate ale lui M. M. Frocht şi R. A. Thomson (S.U.A.).

Fiecare din aceste părţi este însoţită de discuţii la comunicările respective.

Acest volum reprezintă prima lucrare cuprinzînd studii asupra neomogeneităţii corpurilor solide. Problemele puse, reprezentînd contribuţia multor cercetători, arată dificultăţile mari de calcul care trebuie învinse. Totodată se constată interesul din ce în ce mai mare pe care îl suscită asemenea probleme puse de practică.

Lucrările acestui simposium reprezintă o bibliografie fundamentală pentru toţi cei care doresc să întreprindă cercetări asupra corpurilor solide neomogene.

P. P. Teodorescu

PROF. DR. ING. A. BĂRGLĂZAN

La 17 octombrie 1960, s-a stins din viață dr. ing. Aurel Bărglăzan, membru corespondent al Academiei R.P.R., profesor, șef de catedră și decan al Facultății de mecanică a Institutului politehnic din Timișoara.

Născut la 27 martie 1905, în comuna Porumbacu de Sus, regiunea Sibiu, urmează liceul la Sibiu, apoi Politehnica la Timișoara, unde își ia diploma de inginer electromecanic în anul 1928.

După o pregătire sistematică în mai multe laboratoare din țară și străinătate, obține în 1940 titlul de dr. inginer cu o teză din domeniul mașinilor hidraulice și anume transformatorul hidraulic.

După 23 August 1944, prof. A. Bărglăzan desfășoară o activitate susținută atît pe tărîm profesional cît și obștesc.

Pe lîngă activitatea didactică, conduce secția de mașini hidraulice din cadrul Bazei de cercetări științifice a Academiei R.P.R. din Timișoara. Înființează și organizează un laborator de cercetări științifice, în cadrul căruia s-a dezvoltat o activitate rodnică cu totul remarcabilă, realizîndu-se în același timp o strînsă legătură cu producția. Prin această activitate a adus o contribuție valoroasă în domeniul mașinilor hidraulice, formînd în jurul său o întreagă pleiadă de cercetători și specialiști.

Paralel cu activitatea de cercetare, dr. ing. A. Bărglăzan, ca profesor, a pregătit multe generații de ingineri, transmițîndu-le temeinice cunoștințe de specialitate. Pentru a înlesni studenților însușirea cunoștințelor necesare, a publicat și cursurile respective.

Rezultatele cercetărilor sale sînt sintetizate în numeroase studii, publicate în diverse periodice științifice, și se referă la probleme de cavitație, la rețelele de profile pentru turbine hidraulice precum și la realizări de aparate de măsură folosite în încercarea mașinilor hidraulice și pneumatice. Împreună cu unii din colaboratorii săi a publicat volumele : *Turbotransmisiile hidraulice* și *Încercările mașinilor hidraulice și pneumatice* care reprezintă o contribuție importantă adusă literaturii de specialitate din acest domeniu.

Pentru întreaga sa activitate științifică, didactică și obștească, regimul nostru de democrație populară, prețuind meritele sale l-a distins cu Ordinul Muncii și Premiul de Stat. În 1955 Academia R.P.R. l-a ales membru corespondent.

Încetarea din viață a prof. Aurel Bărglăzan reprezintă pentru lumea noastră științifică și didactică pierderea unui distins om de știință și a unui profesor eminent.

Comitetul de redacție al revistei *Studii și cercetări de mecanică aplicată*, al cărui membru a fost, va păstra prof. dr. ing. A. Bărglăzan o aducere aminte plină de recunoștință și deosebită considerație.

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

ANATOLII GHEORGHIEVICI BETEHTIN, Izdat. A.N.S.S.S.R., Moscova, 1959. 45 p.

— Naucinîe Trudî. Novocerkasskii Politehniceskii Institut. (Rabotî mehaniceskogo Instituta). T. 30/44.1955.

A. J. BAZILEVICI, A. V. PODLASOV, Proiektirovanie i rascet napornîh truboprovodov meliorativnîh nasosnîh stanții. Izd-vo Lvovskogo Universiteta, 1958. 98 p.

— Problemî povîșenia prohodimosti kolesnîh mașin. Izdvo Akad. Nauk SSSR. 1959. 159 p.

M. G. GHENKIN, N. F. KUZMIN, IU. A. MIȘARIN, Voprosî zaedania zubciatîh koles. Moskva. Izd-vo Akad. Nauk SSSR. 1959. 147 p.

— Ucenie Urala v borbe za tehniceskii progress. I. Akad. Nauk SSSR, Uralskii Filial-Sverdlovsk, 1959. 203 p.

V. P. SEVERDENKO, L. I. FEDOROV, Prokatka v mașinostroenii. Azd-vo Akad. Nauk SSSR, 1959. 172 p.

G. G. MAKSIMOVICI, Avtomatcinîi kontrol rozmiriv rizbi. Izd-vo Akad. Nauk Ukrainskoi R.S.R., 1959. 116 p.

— Gazodinamika i fizika gorenia. Izd-vo Akad. Nauk SSSR. 1959. 172 p.

— Filtrațiini rozrahunki ghidrotehnicinih sporud. Izd-vo Akad. N. Ukrainskoi RSR. 1959. 163 p.

P. F. FILCEAKOV, Teoriia filtrații pod ghidrotehniceskimi soorujeniami. Izd-vo Akad. Nauk Ukrainoskoi SSR, 1959. 308 p.

I. T. ȘVET, E. P. DÎBAN, Vozdușnoe ohlajdenie rotorov gazovîh turbin. Izd-vo Kievskogo Univesiteta. 1959. 351 p.

— Razvitie ghidrodinamiceskoi teorii smazki primenitelno k opornîm podșipnikam skoljeniia. Izd-vo Akad. Nauk SSSR. 1959. 151 p.

— Trudî Tallinskogo politehniceskogo instituta, Seria A No. 165, 166, 167, 168/1959.

— Sbornik vedeckych praci fakulty inzenyrskeho stavitelstvi k oslavam 250 let inzenyrskych skol v praze. Praha. 1958. 261 p.

M. BRDICKA, Mechanika kontinua. Praha, Nakladatelstvi Ceskoslovenska Akademie Ved, 1959. 718 p.

— Godișnik na injenerno-stroitelnîa Institut. Sofia. T. XI. Kniga 1, 1959. 464 p.

J. CRISTESCU, Doublet d'hélices coaxiales. Hélice unique. 1960. Paris. 276 p.

— Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen. No. 456, 620, 719, 794, 799, 1959.

— Berichte. Deutsche Versuchsanstalt fur Luftfahrt. No. 108, 126/1960.

J. CRISTESCU, Travaux et Publications. Laboratoire d'Hydraulique et de Mécanique des Fluides. Toulouse. 1959.

— Transactions of Chalmers University of Technology Göteburg. 214, 215, 216/1959; 224, 226/1960.

Disertaţii de la Institutul Politehnic Karlsruhe

H. WAGNER, Zur Festigkeitsberechnung biegungssteifer Rotationsschalen mit beliebiger Meridianform. 1959. 116 p.

K. MELCHER, Die Berechnung von ebenen Potentialströmungen mit an den Wänden vorgegebener Druckverteilung. 1959. 70 p.

V. LUFT, Beitrag zur Berechnung der Kreiszylinderschale unter axialer Einzellast. 1959. 68 p.

K. R. K. SARMA, Wärmeübergang und Druckverlust in konzentrischen Ringspalten. 1959. 79 p.

W. TEEPE, Beitrag zur spannungsoptischen Untersuchung von Schalen. 1959. 110 p.

Disertaţii de la Institutul Politehnic Darmstadt

H. SCHAPPERT, Programmierverfahren fur elektronische Rechenautomaten mittlerer Grösse. 1959. 77 p.

W. DHEN, Entwurf und Aufbau eines repetierenden Analogrechners. 1959. 94 p.

H. D. ELSCHENBROICH, Die Berücksichtigung moderner technischer Entwicklungen in der Gewinnplanung industrieller Betriebswirtschaften. 1959. 158 p.

Pentru a vă asigura o colecție completă și ***primirea*** *la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dvs. pentru 1961.*

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

5
ANUL XI
1960

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

5

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

— Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

— Referate ştiinţifice în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice în Institutul de mecanică aplicată.

— Recenzii asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

— Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

— Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor metode de executarea lucrărilor de construcţii).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 5 1960

SUMAR

Pag.

STUDII

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

N. TIPEI și V. N. CONSTANTINESCU, Influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente din stratul de lubrifiant 1091
ALEŠ TONDL, Influența exercitată de reazemul elastic al fundațiilor asupra oscilațiilor autoexcitate ale rotoarelor datorită acțiunii filmului de lubrifiant al lagărelor de alunecare 1103
O. BIȚĂ și colab., Posibilități de caracterizare a materialelor de fricțiune. 1117

TEORIA MECANISMELOR

CHR. PELECUDI și V. I. CALCAN, Asupra sintezei mecanismelor curbelor ciclice superioare 1133

ELASTICITATE, PLASTICITATE, REZISTENȚA MATERIALELOR

M. MIȘICU, Asupra comportării reologice a barelor scurte de cupru supuse la șocuri cu mase solide și fluide 1149
M. ARCAN, Cercetări cu privire la încovoierea grinzilor cu goluri rectangulare 1175
V. VISARION și C. STĂNESCU, Reducerea formală a stării de tensiune globală a învelitorilor elastice subțiri la starea de momente pure cvasiinvariantă 1195
FL. DINCĂ și N. BOICU, Calculul elasto-dinamic al tuburilor cilindrice circulare solicitate axial simetric 1201

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU, Parametrii regimului de așchiere la oțelurile carbon obișnuite 1219
C. I. FLORESCU și M. VASILESCU, Posibilități de clasificare a tipurilor de sol și de determinare a efectelor lucrărilor cu ajutorul unor mărimi fizico-mecanice. I. . . 1233

AEROMECANICĂ

T. OROVEANU, Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene. 1249
ȘT. N. SĂVULESCU, Utilizarea profilelor tip de viteze pentru determinarea calitativă a unor caracteristici ale scurgerii turbulente anizotrope 1269

Pag.

E. PROCOPOVICI, Traductor capacitiv de foarte mică inerţie pentru detectarea undelor de şoc 1293

NOTE

L. GUŞEF, Asupra unei proprietăţi geometrice a axelor principale de inerţie 1303

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

E. CARAFOLI şi TIBERIU HACKER, Congresul Unional de mecanică teoretică şi aplicată, Moscova, 27 ianuarie — 3 februarie 1960 1311

Consfătuirea asupra tehnicii aşchierii metalelor şi tehnicii rodajului 1319

RECENZII 1321

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1333

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ «ТРАЯН ВУЯ»

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI, № 5 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

СТАТЬИ

СМАЗКА, ТРЕНИЕ, ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Влияние закона изменения пути смешения на турбулентное движение в смазочном слое 1091
АЛЕС ТОНДЛ, Влияние установки машин на упругоопертой массе фундамента с низкой частотой колебаний на самовозбуждаемые колебания роторов в результате воздействия несущего слоя смазки подшипников скольжения 1103
ОЛЬГА БИЦЭ и сотр., О возможности определения характеристик фрикционных материалов 1117

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

К. ПЕЛЕКУДИ и В. И. КАЛКАН, К синтезу механизмов циклических кривых высшего порядка 1133

УПРУГОСТЬ, ПЛАСТИЧНОСТЬ, СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

М. МИШИКУ, О реологическом поведении коротких медных стержней, подверженных ударам о твердые и жидкие массы 1149
М. АРКАН, Исследования по изгибу балок с прямоугольными отверстиями 1175
В. ВИСАРИОН и К. СТЭНЕСКУ, Формальное приведение суммарного напряженного состояния тонких упругих оболочек к чисто моментному квазиинвариантному состоянию 1195
Ф. ДИНКЭ и Н. БОЙКУ, Упруго-динамический расчет круглых цилиндрических труб при осесимметрических нагрузках 1201

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Параметры режима резания для обыкновенных углеродистых сталей 1219
К. ФЛОРЕСКУ и М. ВАСИЛЕСКУ, Возможности классификации типов грунтов и определения эффектов работ при помощи физико-механических величин I. 1233

Стр.

АЭРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ, О течении газов в неоднородных пористых средах 1249
Ш. Н. СЭВУЛЕСКУ, Использование типовых профилей скоростей для качественной оценки некоторых характеристик анизотропных турбулентных течений 1269
Е. ПРОКОПОВИЧ, Емкостный датчик очень малой инерции для улавливания ударных волн 1293

ЗАМЕТКИ

Л. ГУШЕВ, Об одном геометрическом свойстве главных осей инерции . . . 1303

УЧАСТИЕ В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ЗА РУБЕЖОМ

Э. КАРАФОЛИ и ТИБЕРИУ ХАКЕР, Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Москва, 27 января — 3 февраля 1960 года . 1311
Совещание о технике резания металлов и технике обкатки. 1319
РЕЦЕНЗИИ 1321
КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 1333

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).

— *Гидромеханика* (*гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства*).

Машиностроение (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).

— *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).

— *Статика и динамика сооружений* (*методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике*).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающих работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

Рукописи следует направлять в трех экземллярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные рабоы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(«ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE»)

publie :

— des études originales, des recherches fondamentales d'un caractère hautement scientifique, orientées vers l'activité pratique ;

— des notes (communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question ;

— des rapports scientifiques et techniques où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau ; des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée ; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée ;

— des notes bibliographiques au sujet des livres et des études roumains et étrangers.

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs) ;

— hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes) ;

— constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus) ;

— mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques) ;

— statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions. étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction) ;

— technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, raionul Gh. Gheorghiu-Dej, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, nº 5 1960

SOMMAIRE

Page

ÉTUDES

LUBRIFICATION, FROTTEMENT, USURE

N. TIPEI et V. N. CONSTANTINESCU, Influence de la loi de variation de la longueur de mélange sur le mouvement turbulent de la couche de lubrifiant 1091
ALEŠ TONDL, Influence exercée par l'appui élastique des fondations sur les oscillations auto-excitées des rotors, par suite de l'action du film lubrifiant des paliers lisses 1103
O. BIŢĂ et collaborateurs, Possibilités de caractériser les matériaux de friction . . 1117

THÉORIE DES MÉCANISMES

CHR. PELECUDI et V. I. CALCAN, Sur la synthèse des mécanismes des courbes cycliques supérieures 1133

ÉLASTICITÉ, PLASTICITÉ, RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

M. MIŞICU, Sur le comportement rhéologique des barres courtes de cuivre soumises à des chocs avec des masses solides et fluides 1149
M. ARCAN, Recherches sur la flexion des poutres aux trous rectangulaires 1175
V. VISARION et C. STĂNESCU, Réduction formelle de l'état de tension globale des voiles élastiques minces à l'état quasi-invariant des moments purs 1195
FL. DINCĂ et N. BOICU, Calcul élasto-dynamique des tubes cylindriques circulaires sollicités symétriquement par rapport à l'axe 1201

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. P. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Paramètres du régime de coupe dans le cas des aciers au carbone 1219
C. I. FLORESCU et M. VASILESCU, Possibilités de classifier les types de sol et de déterminer les effets des travaux au moyen de certaines grandeurs physico-mécaniques. I. 1233

AÉROMÉCANIQUE

T. OROVEANU, Sur l'écoulement des gaz à travers des milieux poreux non homogènes 1249
ŞT. N. SĂVULESCU, Utilisation des profils de vitesse type pour l'évaluation qualitative de certaines caractéristiques de l'écoulement turbulent anisotrope 1269

Page

E. PROCOPOVICI, Traducteur capacitif à très petite inertie pour la détection des ondes de choc 1293

NOTES

L. GOUCHEFF, Sur une propriété géométrique des axes principaux d'inertie . . . 1303

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

E. CARAFOLI et TIBERIU HACKER, Le Congrès Unional de Mécanique théorique et appliquée, Moscou, 27 janvier — 3 février 1960 1311

Conférence sur la technique du tournage des métaux et sur la technique du rodage 1319

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1321

LIVRES REÇUS DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 1333

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

INFLUENȚA LEGII DE VARIAȚIE A LUNGIMII DE AMESTEC ASUPRA MIȘCĂRII TURBULENTE DIN STRATUL DE LUBRIFIANT

DE

N. TIPEI și V. N. CONSTANTINESCU

Dacă scurgerea în interiorul stratului de lubrifiant este turbulentă, ecuațiile de mișcare se scriu aproximativ sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\rho \overline{v_1' v_2'}\right), \\ \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\rho \overline{v_2'^2}\right), \\ \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}_3} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{v}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\rho \overline{v_2' v_3'}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

în care p este presiunea, μ viscozitatea, ρ densitatea lubrifiantului, v_1, v_2, v_3 componentele vitezei, iar x_1, x_2, x_3 axele de coordonate, alese astfel încît axa x_2 să fie orientată după normala la una din suprafețe. Notațiile supraliniate reprezintă valorile medii în timp ale mărimilor considerate, iar v_1', v_2', v_3' sînt pulsațiile vitezelor.

A doua ecuație a sistemului de mai sus dă distribuția presiunilor după normala la stratul de lubrifiant, iar prima și ultima guvernează distribuția vitezelor, cu condiția ca să se cunoască tensiunile turbulente $\overline{v_1' v_2'}$, $\overline{v_2'^2}$, $\overline{v_2' v_3'}$.

Așa după cum s-a mai arătat [1], din cauza grosimii foarte reduse a stratului de lubrifiant în raport cu celelalte dimensiuni ale suprafețelor lubrificate, mișcarea medie este cvasiunidimensională și în consecință, pentru determinarea tensiunilor turbulente se poate utiliza ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl. Astfel de exemplu

$$-\rho \overline{v_1' v_2'} = \rho l^2 \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2} \left| \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2} \right|, \tag{2}$$

iar prima ecuaţie (1) se scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho l^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\left|\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right|\right) + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{3}$$

ecuaţie absolut asemănătoare obţinîndu-se şi pentru viteze.

Notînd cu

$$l^* = \frac{l}{\sigma^*}\ ; \quad \sigma^* = \left(\frac{dl}{dx_2}\right)_{x_2=0}, \tag{4}$$

ecuaţia (3) se scrie, după o primă integrare în raport cu x_2

$$\sigma^{*2} \mathcal{R}_e \frac{l^{*2}}{\delta^2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\left|\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\right| + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}\bar{x}_2 - C = 0, \tag{5}$$

în care s-a renunţat la notaţia supraliniată pentru a se indica valorile medii pentru parametrii mişcării (deoarece în cele ce urmează se vor considera numai valorile medii ale lor); în schimb s-a utilizat această notaţie pentru mărimile adimensionale

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{V}\ , \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{\delta}. \tag{6}$$

În sfîrşit, în ecuaţia (5) numărul Reynolds este dat de relaţia

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho V \delta}{\mu} \tag{7}$$

unde V este viteza relativă dintre suprafeţe, iar δ este grosimea stratului de lubrifiant.

Ecuaţia (5) a fost integrată anterior [1], [2], [3] considerînd o variaţie liniară a lungimii de amestec, de forma

$$\left.\begin{aligned} \bar{l}^* &= \frac{l^*}{\delta} = \bar{x}_2 && \left(0 < x_2 \leqslant \frac{\delta}{2}\right), \\ \bar{l}^* &= \frac{l^*}{\delta} = 1 - \bar{x}_2 && \left(\frac{\delta}{2} \leqslant x_2 \leqslant \delta\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

reuşindu-se să se determine atît distribuţiile vitezelor v_1, v_3 cît şi legătura dintre debitele de lubrifiant şi derivatele $\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $\frac{\partial p}{\partial x_3}$ care permit apoi scrierea ecuaţiei diferenţiale a presiunilor şi rezolvarea problemei lubrificaţiei în regim turbulent.

După cum se vede (8) ipoteza unei variaţii liniare a lungimii de amestec impune împărţirea grosimii stratului de lubrifiant în două porţiuni egale, în care lungimea l are variaţii diferite, cele două drepte intersectîndu-se la $x_2 = \frac{\delta}{2}$ (fig. 1). În realitate, această presiune constituie o aproximaţie deoarece este foarte puţin probabil ca variaţia lungimii de amestec cu x_2 să prezinte un punct unghiular ca în figura 1.

Pentru a putea aprecia eroarea introdusă de aproximaţia de mai sus, vom considera în cele ce urmează şi alte legi posibile de variaţie a lungimii de amestec, în particular a variaţiei trigonometrice

$$\bar{l}^* = \frac{1}{\pi}\sin \pi\bar{x}_2 \qquad (9)$$

şi una parabolică

$$\bar{l}^* = \bar{x}_2(1 - \bar{x}_2) \qquad (10)$$

alese astfel încît derivata $\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \sigma^*$ să aibă aceeaşi valoare. În cazurile obişnuite din mecanica fluidelor, constanta σ^* este egală cu

$$\sigma^* = 0{,}4. \qquad (11)$$

În cazul lubrificaţiei, datorită faptului că mişcarea se efectuează în straturi foarte subţiri este posibil şi chiar probabil ca această constantă să aibă valori ceva mai reduse, valoarea respectivă trebuind determinată pe cale experimentală [3].

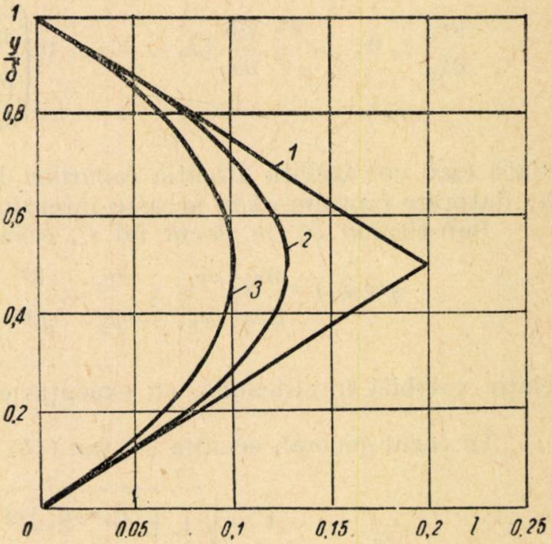


Fig. 1

În figura 1 s-au reprezentat valorile lungimii de amestec date de relaţiile (8), (9) şi (10) în cazul cînd $\sigma^* = 0{,}4$. După cum se vede diferenţele la $x_2 = \frac{\delta}{2}$ sînt destul de mari, în special cînd se iau în considerare relaţiile (8) şi (10).

Revenind la ecuaţia (5) se constată că, dacă se notează cu x_2^* punctul în care viteza v_1 prezintă un maxim sau un minim constanta C este egală cu

$$C = -\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{x_2^*}{\delta} = -\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}\bar{x}_2^*, \qquad (12)$$

iar derivata vitezei pe cele două frontiere este egală cu

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\right)_{\bar{x}_2=0} = C = -\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}\bar{x}_2^*;\ \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\right)_{\bar{x}_2=1} = \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1} + C = \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}(1 - \bar{x}_2^*). \qquad (13)$$

În același timp pentru

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} > 0\,; \quad \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star) < 0 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} > 0\ ,\ \bar{x}_2 < \bar{x}_2^\star \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_1} < 0\ ,\ \bar{x}_2 > \bar{x}_2^\star \end{pmatrix} \\
&\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} < 0\,; \quad \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star) > 0 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} > 0\ ,\ \bar{x}_2 > \bar{x}_2^\star \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_1} < 0\ ,\ \bar{x}_2 < \bar{x}_2^\star \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

relații care vor facilita discuția cazurilor de integrare posibilă a ecuației (5), datorate faptului că în aceasta intervine modulul derivatei vitezei v_1.

Substituind $\bar{x}_2^\star$ în locul lui C, ecuația (5) se scrie

$$\sigma^{\star 2}\,\mathfrak{R}_e\,\bar{l}^{\star 2}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\left|\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}\right| + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\delta^2}{\mu V}\,\frac{\partial p}{\partial x_1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star) = 0, \tag{15}$$

relație valabilă întotdeauna, cu excepția cazului $\frac{\partial p}{\partial x_1} \to 0$ cînd $\bar{x}_2^\star \to \infty$.

În cazul general, ecuația (5) sau (15) se mai poate pune sub forma

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} = \mp\,\frac{1 - \sqrt{1 \pm 4\sigma^{\star 2}\,\mathfrak{R}_e\,\bar{l}^{\star 2}\left(C + \dfrac{\partial^2}{\mu V}\,\dfrac{\partial p}{\partial x_1}\,\bar{x}_2\right)}}{2\sigma^{\star 2}\,\mathfrak{R}_e\,l^{\star 2}}, \tag{16}$$

după cum $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \gtrless 0$, iar

$$\bar{v}_1 = \mp \int \frac{1 - \sqrt{1 \pm 4\sigma^{\star 2}\,\mathfrak{R}_e\;\bar{l}^{\star 2}\left(C + \dfrac{\delta^2}{\mu V}\,\dfrac{\partial p}{\partial x_1}\,\bar{x}_2\right)}}{2\sigma^{\star 2}\,\mathfrak{R}_e\,\bar{l}^{\star 2}}\,d\bar{x}_2 + C_2. \tag{17}$$

Dacă $0 \leqslant \bar{x}_2^\star \leqslant \delta$ atunci se vede imediat că

$$C_2 = \bar{v}_{1m}, \tag{18}$$

v_{1m} fiind viteza maximă sau minimă care se produce.

Integrala (17) poate fi efectuată, fără dificultăți pentru cazul $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$ (mişcare Couette). Pentru o variație liniară a lui $l^\star$ expresiile respective au fost deduse în lucrarea [1]. În cazul unei variații trigonometrice,

se obţine

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi}{2\sigma^{\star 2}\mathcal{R}_e}\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\pi\bar{x}_2} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left\{\frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\pi\bar{x}_2}}{\operatorname{tg}\pi\bar{x}_2} + F\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\bar{x}_2\right), k\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - E\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\bar{x}_2\right), k\right]\right\}\right\} + C_2 \tag{19}$$

unde F şi E sînt integrale eliptice de speţa întîia şi a doua de modul k şi argument φ

$$k^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2\mu V}{4\sigma^{\star 2}\mathcal{R}_e\delta C}}\ ; \quad \varphi = \pi\left(\frac{1}{2} - \bar{x}_2\right). \tag{20}$$

Condiţiile la limită pentru soluţia v_1 sînt, dacă $\dfrac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{x}_2} > 0$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 0 \quad \text{la} \quad \bar{x}_2 = 0, \\ \bar{v}_1 &= \frac{1}{2} \quad \text{la} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{21}$$

astfel încît rezultă

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right], \tag{22}$$

constanta k se determină din relaţia

$$\frac{\sigma^{\star 2}\mathcal{R}_e}{\pi}\sqrt{1-k^2} = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \tag{23}$$

iar soluţia (19) se scrie în cele din urmă

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi}{2\sigma^{\star 2}\mathcal{R}_e}\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\pi\bar{x}_2} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left\{\frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\pi\bar{x}_2}}{\operatorname{tg}\pi\bar{x}_2} + F\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\bar{x}_2\right), k\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\bar{x}_2\right), k\right] + E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right\}\right\}. \tag{24}$$

În figura 2 s-a reprezentat distribuţia vitezelor în cazul unei mişcări Couette pentru $\varkappa = 0{,}4$ şi $\mathcal{R}_e = 1\,000$ pentru legile de variaţie ale lungimii de amestec considerate : liniară (8), şi trigonometrică (9) (s-a ales o valoare redusă pentru numărul Reynolds cu scopul de a avea diferenţe mai mari între curbe). Se constată că influenţa legii de variaţie a lungimii de amestec este în acest caz foarte redusă. În particular, curbele obţinute în cazul variaţiei liniare şi sinusoidale se suprapun.

Se poate deci deduce concluzia că influenţa legii de variaţie a lungimii de amestec asupra alurei distribuţiei vitezelor este redusă. Pentru a vedea influența acestei legi asupra legăturii dintre debitul de lubrifiant și $\frac{\partial p}{\partial x_1}$, care determină atît distribuția presiunilor cît și a forțelor de frecare pe cele două suprafețe lubrificate (13), va trebui să studiem și cazul general cînd $\frac{\partial p}{\partial x_1} \neq 0$.

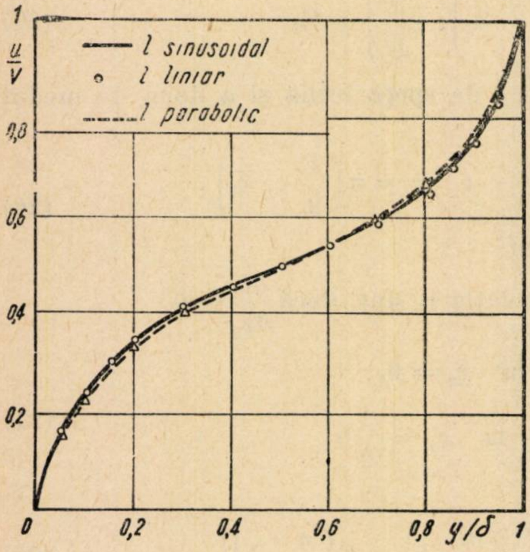


Fig. 2

Integrarea ecuației (15) sau (16) în cazul general $\frac{\partial p}{\partial x_1} \neq 0$ conduce la calcule laborioase. De aceea, ca și pentru cazul considerării legii (8) pentru lungimea de amestec [1], vom considera că în apropierea suprafețelor lubrificate, pentru $0 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant \varepsilon_1$ și respectiv $(1 - \varepsilon_2) \leqslant \bar{x}_2 \leqslant 1$, influența termenului $\varkappa^2 \mathcal{R}_e l^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \left| \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \right|$ este neglijabilă, fiind valabile relațiile

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} = C + \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} \bar{x}_2 = \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star), \quad (25)$$

$$\bar{v}_1 = C_2' + C\bar{x}_2 + \frac{\delta^2}{2\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} \bar{x}_2^2 = C_2' + \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} \bar{x}_2 \left(\frac{\bar{x}_2}{2} - \bar{x}_2^\star \right), \quad (26)$$

În restul grosimii stratului de lubrifiant $(\varepsilon_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant 1 - \varepsilon_2)$ $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2}$ devine neglijabil față de $\varkappa^2 \mathcal{R}_e l \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \left| \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} \right|$ astfel că

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} = \pm \frac{1}{\sigma^\star \sqrt{\mathcal{R}_e}} \frac{\sqrt{\pm \left(C + \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} \bar{x}_2 \right)}}{\bar{l}^\star} = \pm \frac{1}{\sigma^\star \sqrt{\mathcal{R}_e}} \frac{\sqrt{\left| \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|} \sqrt{|\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star|}}{\bar{l}^\star}. \quad (27)$$

Aproximația de mai sus presupune existența unui strat limită laminar în apropierea pereților, ipoteză perfect justificabilă din punct de vedere fizic.

Deoarece abaterile cele mai mari de la distribuția de viteze obținută pentru variația liniară a grosimii de amestec sînt date în cazul legii parabolice (10), vom deduce soluțiile ecuației (28) în acest ultim caz.

Dublul semn cît și modulul $|\bar{x}_2 - \bar{x}_2^\star|$, vor conduce la diferite forme pentru soluția ecuației (28), deoarece toate cazurile menționate în condițiile (14) pot interveni în realitate.

Diferitele forme ale soluției ecuației (28) sînt

$$
\left.
\begin{array}{l}
\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}
(\bar v_1)_{\varepsilon_1\leqslant\bar x_2\leqslant x_2^\star}= \\
=\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}C_1}\left[I_1+2\sqrt{\frac{1}{C_1}-1}\,I_3\right]+\bar v_2^\star \\
(\bar v_1)_{\bar x_2^\star\leqslant\bar x_2\leqslant 1-\varepsilon_2}= \\
=-\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}C_1}\left[-2I_2+\sqrt{\frac{1}{C_1}-1}\,I_4\right]+\bar v_1^\star
\end{array}
&
\left|\begin{array}{l}
0<C_1=\bar x_2^\star<1, \\
\\
\frac{\partial p}{\partial x_1}<0,
\end{array}\right.
\\
\begin{array}{l}
(\bar v_1)_{\varepsilon_1\leqslant\bar x_2\leqslant\bar x_2^\star}= \\
=-\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}C_1}\left[-I_1+2\sqrt{\frac{1}{C_1}-1}\,I_3\right]+\bar v_1^\star \\
(\bar v_1)_{\bar x_2^\star\leqslant\bar x_2\leqslant 1-\varepsilon_2}= \\
=\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}C_1}\left[-2I_2+\sqrt{\frac{1}{C_1}-1}\,I_4\right]+\bar v_1^\star
\end{array}
&
\left|\begin{array}{l}
0<C_1=\bar x_2^\star<1, \\
\\
\frac{\partial p}{\partial x_1}>0,
\end{array}\right.
\end{array}
\\
\bar v_1=\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}C_1}\left[I_1+\sqrt{1-\frac{1}{C_1}}\,I_4\right]+\bar v_1^\star; \\
C_1>1,\frac{\partial p}{\partial x_1}<0,\quad C_1<0,\frac{\partial p}{\partial x_1}>0, \\
\bar v_1=-\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}C_1}\left[-I_1+\sqrt{1-\frac{1}{C_1}}\,I_4\right]+\bar v_1^\star; \\
C_1<0,\frac{\partial p}{\partial x_1}<0,\quad C_1<1,\frac{\partial p}{\partial x_1}>0, \\
\bar v_1=\pm\frac{1}{\sigma^\star\sqrt{\mathcal{R}_e}}\sqrt{\frac{\delta}{\mu V}C_1'\ln\frac{\bar x_2}{1-\bar x_2}+\frac{1}{2}};\quad \frac{\partial p}{\partial x_1}=0,\ C_1'=\frac{\partial p}{\partial x_1}\delta C_1,
\end{array}
\right\}\quad(28)
$$

în care

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{\bar{x}_2}{C_1}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{\bar{x}_2}{C_1}}}\right|; \quad I_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\bar{x}_2}{C_1}-1}, \\ I_3 &= \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C_1-\bar{x}_2}{1-C_1}}; \quad I_4 = \ln\left|\frac{\sqrt{|1-C_1|}+\sqrt{|\bar{x}_2-C_1|}}{\sqrt{|1-C_1|}-\sqrt{|\bar{x}_2-C_1|}}\right|. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Cazurile intermediare $\bar{x}_2^* = 0$ sau $\bar{x}_2^* = 1$ nu conduc la formule deosebite pentru distribuţia de viteze $\bar{v}_1$, ele deducîndu-se din formulele de mai sus înlocuind x_2^* cu 0 respectiv cu 1.

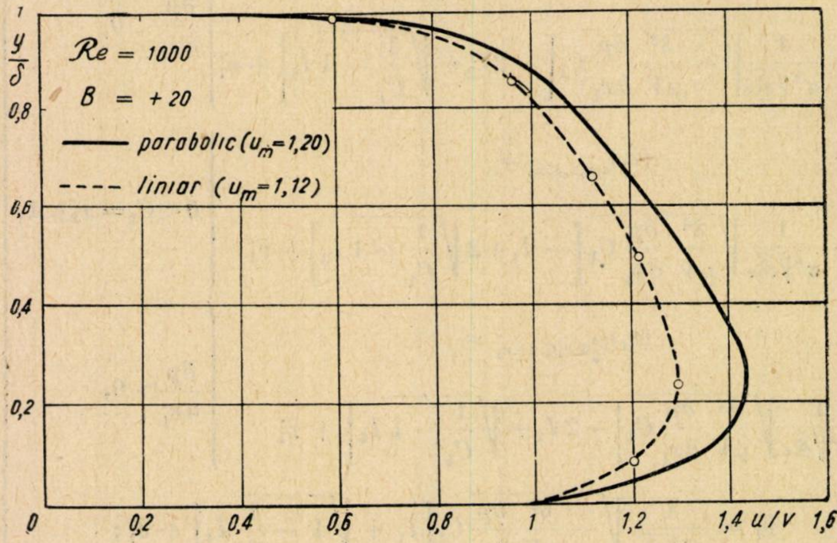


Fig. 3

În diagrama din figura 4 s-a reprezentat distribuţia de viteze care se obţine pentru $\sigma^* \mathcal{R}e = 160$ ($\mathcal{R}e = 1\,000$ dacă $\sigma^* = 0,4$) şi $\dfrac{\delta^2}{\mu V}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} = -20$ în comparaţie cu distribuţia obţinută în cazul considerării unei variaţii liniare a lungimii de amestec. Alura celor două curbe este aproape identică, avînd maximul ($\bar{x}_2 = \bar{x}_2^*$) aproape în acelaşi punct. În schimb, există unele diferenţe în ceea ce priveşte mărimea absolută a vitezei, cît şi asupra vitezii medii rezultate. Astfel în cazul legii liniare $v_{1m} = 1,12\ V$ în timp ce cazul legii parabolice $v_{1m} = 1,2\ V_m$. Eroarea este de aproximativ 8%, dar creşte cu numărul Reynolds.

Faptul că viteza medie rezultă mai mare în cazul legii parabolice decît în cazul legii liniare, pentru acelaşi număr Reynold şi $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ este normal, deoarece, după cum se constată din figura 1, tensiunile turbulente în zona centrală a grosimii stratului de lubrifiant sînt mai reduse în cazul legii parabolice, dacă constanta σ^* este aceeaşi în ambele cazuri. Dacă însă constanta σ^* s-ar lua ceva mai mare în cazul legii parabolice, curbele din figura 4 s-ar apropia foarte mult sau chiar s-ar suprapune pentru o anumită valoare σ^*. Rămîne însă de văzut care din cele două soluţii se apropie mai mult de realitate. O indicaţie în această privinţă se poate obţine comparînd datele obţinute din calcul cu rezultatele experimentale obţinute de Laufer [4] pentru mişcările de tip Poiseuille. Astfel în figura 4 s-au reprezentat rezultatele obţinute în cazul cînd $\sigma^* = 0{,}4$, $\mathcal{R}_e = 12\,300$. După cum se vede legea liniară pentru lungimea de amestec corespunde perfect datelor experimentale, în timp ce vitezele calculate pe baza legii parabolice (10) sînt mai mici decît cele experimentale, iar diferenţele în ceea ce priveşte gradientul $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ corespunzător sînt mai mari. În consecinţă, legea liniară pare să fie mai apropiată de fenomenul real, sau că în cazul legii parabolice, trebuie să se admită o valoare a constantei σ^* mai mare decît cazul liniar.

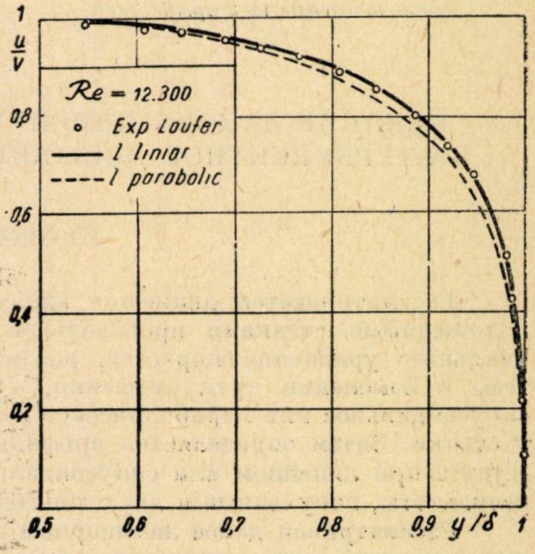


Fig. 4

★

În concluzie, legea de variaţie a lungimii de amestec are o influenţă redusă asupra alurii distribuţiei vitezelor, în stratul de lubrifiant. În schimb, legea după care variază lungimea de amestec are o influenţă mai mare asupra distribuţiei presiunilor şi a mărimii forţelor de frecare pe cele două suprafeţe lubrificate. Din compararea cu datele experimentale obţinute de Laufer rezultă că legea liniară de variaţie reală a lungimii de amestec (fig. 1) este probabil că va fi apropiată de una liniară, bineînţeles cu excepţia punctului unghiulos din zona $x_2 \sim \frac{\delta}{2}$ unde desigur că există o trecere continuă. În consecinţă, rezultatele obţinute anterior [1], [2], [3] pot fi considerate ca mai corecte decît cele care s-ar obține utilizînd o altă lege de variație pentru lungimea de amestec, de exemplu parabolică. Aceasta cu atît mai mult, cu cît în calculele efectuate constanta $\sigma^\star$ a fost lăsată oarecare, valoarea sa urmînd să fie determinată pe cale experimentală (așa după cum s-a mai arătat [3], în cazul lubrificației $\sigma^\star = 0{,}25 \div 0{,}35$).

Primit la redacție la 2 aprilie 1960.

ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ПУТИ СМЕШЕНИЯ НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ В СМАЗОЧНОМ СЛОЕ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается движение вдоль оси между двумя близко расположенными стенками произвольной формы. Исходя из дифференциального уравнения скоростей, рассматриваются затем разные гипотезы о изменении пути смешения, а именно допускается линейное, синусоидальное или параболическое изменение при заданных условиях у стенки. Затем определяется профиль скоростей для движения типа Куетта при линейном или синусоидальном изменении и сравниваются результаты, полученные в двух гипотезах.

Рассматривая далее ламинарный подслой, авторы разделяют толщину жидкого слоя на две зоны (ламинарную и турбулентную) и определяют профиль скорости для общего случая (с градиентом давления). Для этой цели допускается также линейный или параболический закон изменения пути смешения по нормалям к одной из поверхностей, сравнивая результаты в обоих случаях.

INFLUENCE DE LA LOI DE VARIATION DE LA LONGUEUR DE MÉLANGE SUR LE MOUVEMENT TURBULENT DE LA COUCHE DE LUBRIFIANT

RÉSUMÉ

On considère le mouvement le long d'un axe entre deux parois voisines de forme quelconque. En partant de l'équation différentielle des vitesses, on prend ensuite en considération les diverses hypothèses sur la variation de la longueur de mélange, en admettant une variation linéaire, sinusoïdale ou parabolique, satisfaisant à des conditions aux parois données. On détermine le profil des vitesses du mouvement de Couette, dans le cas des variations linéaire et sinusoïdale, et compare les résultats obtenus dans ces deux hypothèses.

En considérant ensuite la sous-couche laminaire, on peut diviser la couche du fluide en deux zones (laminaire et turbulente) ; on détermine ainsi le profil des vitesses dans le cas général (à gradient de pression). A cette fin, les auteurs admettent, en outre, la loi linéaire ou la loi parabolique de la variation de la longueur de mélange selon la normale à l'une des surfaces, et comparent les résultats obtenus dans les deux cas.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 103 (1958).
2. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 139 (1958).
3. — *Asupra problemei tridimensionale a lubrificației în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *3* (1959).
4. T. LAUFER, *Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Chanel.* Journal of Aeronautical Sciences, **17**, 277 (1950).

STUDII

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

INFLUENȚA EXERCITATĂ DE REAZEMUL ELASTIC AL FUNDAȚIILOR ASUPRA OSCILAȚIILOR AUTOEXCITATE ALE ROTOARELOR DATORITĂ ACȚIUNII FILMULUI DE LUBRIFIANT AL LAGĂRELOR DE ALUNECARE

DE

ALEŠ TONDL[1]

În cele ce urmează s-au folosit următoarele notații :

		dimensiunea
l	lungimea lagărului,	cm
d	diametrul fusului,	cm
D	diametrul cuzinetului,	cm
P	greutatea rotorului,	kg
$p = \frac{P}{2ld}$	sarcina specifică,	kg cm^{-2}
$2\delta = D - d$	jocul lagărului,	cm
Φ	diametrul exterior al fusului în porțiunea elementelor elastice,	cm
n	numărul de rotații al rotorului,	min^{-1}
n_s	numărul de rotații al rotorului la care se produc oscilații autoexcitate,	min^{-1}
n_{01}, n_{02}, n_{03}	turația critică,	min^{-1}
$q = \frac{n}{n_{03}}$	raportul dintre numărul de rotații și turația critică,	
$q_s = \frac{n_s}{n_{03}}$	raportul limită de producere a oscilațiilor autoexcitate.	

Notațiile înregistrărilor obținute prin măsurare :

2δ — 40 notația jocului lagărului în sutimi de milimetru,

Φ — 44 notația (în milimetri) a diametrului exterior al lagărului, echipat cu elemente elastice,

---

[1] Vyzkumný ústav tepelné technicky C.A.V., Praga.

p — 1,65	notația sarcinii specifice în kg cm^{-2},
t — 30°	temperatura uleiului de scurgere,
R — 35,8/40	notația rotorului (greutatea discului 35,8 kg, diametrul arborelui 40 mm),
$\frac{V}{H}$	notația înregistrării — înregistrarea superioară : V (componenta verticală a mișcării discului) — înregistrarea inferioară : H (componenta orizontală a mișcării discului),
R_v, R_h	notația componentei verticale sau orizontale a mișcării executate de șasiu,
C—50	viteza de deplasare a filmului de lubrifiant în aparatul pentru luat vederi, în milimetri/s.

1. INTRODUCERE

Oscilațiile autoexcitate ale rotoarelor, datorite filmului de lubrifiant al lagărelor de alunecare, au fost examinate de mai mulți autori [1], [2], [3], [4], [5]. La Institutul național de cercetări termotehnice din Praga s-a examinat, de asemenea, acest fenomen primejdios nu numai din punct de vedere teoretic [6], dar și practic [7], [8].

Vom menționa cîteva din rezultatele cele mai imortante, necesare pentru concluziile noastre ulterioare. Printre aceste rezultate trebuie specificat faptul că oscilațiile autoexcitate se produc în cazul unui număr de rotații mai mare decît dublul turației critice.

Raportul dintre numărul de rotații în cursul căruia se produc autoexcitațiile și turația critică $q_s = \frac{n_s}{n_0}$ depinde înainte de toate și în afară de alți parametri, de construcția lagărului și constituie cea mai importantă dintre datele care caracterizează rezistența lagărului la formarea oscilațiilor autoexcitate.

Dacă stabilim raportul dintre amplitudinea A a oscilațiilor discului și numărul de rotații n ale unui rotor simplu — un disc greu pe un arbore ușor și elastic, al cărui număr de rotații este n_0 — avem diagrama reprodusă în figura 1 (presupunînd că nu se produc oscilații autoexcitate, cu alte cuvinte că rotorul este fixat, de pildă, pe un lagăr cu bile ; în afară de aceasta se suprimă influența exercitată de greutatea proprie a discului). În cazul oscilațiilor autoexcitate, diagrama pentru acest rotor simplu va fi modificată în linii mari, așa cum se vede în figura 2. În figura 3 avem raportul dintre frecvența oscilațiilor f și numărul de rotații n. După cum vom vedea mai departe, frecvența oscilațiilor autoexcitate este, în mod practic, egală cu frecvența proprie a rotorului f_0. În cazul unui număr de rotații în creștere, frecvența oscilațiilor autoexcitate crește lent [5], [7]. În cercetările sale experimentale O. Pinkus [5] s-a folosit de rotoare cu distribuție uniformă a masei, primul și al doilea număr critic de rotații aflîndu-se în domeniul turației de încercare.

Trebuie menționat aici, unul dintre cele mai importante rezultate ale cercetării de mai sus : dacă notăm schematic relația de amplitudine a oscilațiilor, obținem, în cazul cînd nu iau naștere oscilații autoexcitate (de pildă în cazul unui rotor cu lagăre cu bile), două vîrfuri de rezonanță (fig. 4). În cazul unui rotor rezemat pe lagăre de alunecare, diagrama se va schimba ca urmare a formării oscilațiilor autoexcitate, după cum se vede în figura 5. În vecinătatea celui de-al doilea număr critic de rotații, va avea loc o suprimare temporară a oscilațiilor autoexcitate, așa încît frecvența oscilațiilor va corespunde frecvenței numărului de rotații ale

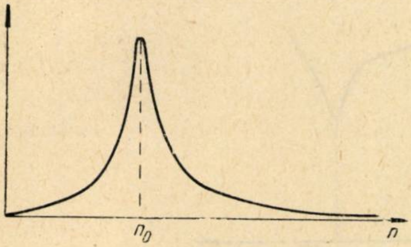


Fig. 1

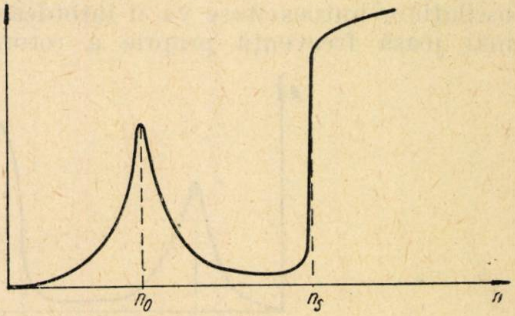


Fig. 2

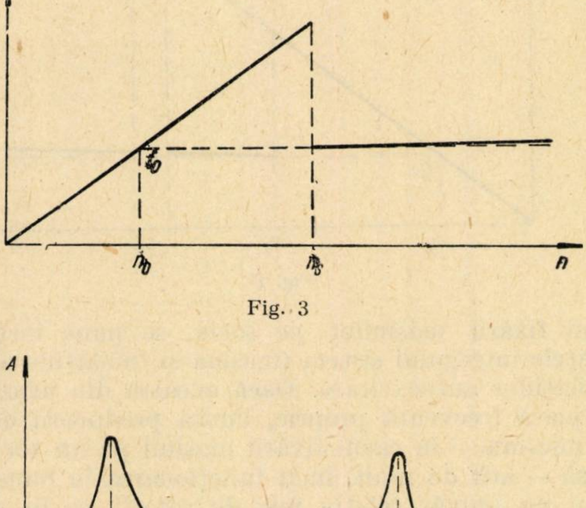


Fig. 3

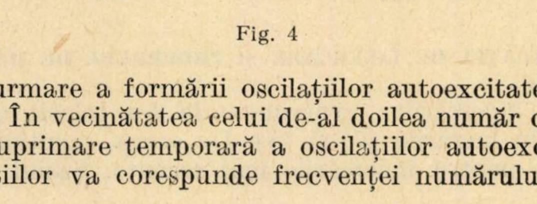


Fig. 4

rotorului (fig. 6). De îndată ce se trece la al doilea număr critic de rotații, oscilațiile autoexcitate vor apărea din nou. Frecvența oscilațiilor autoexcitate în tot domeniul lor de existență va fi egală în mod practic cu frecvența proprie a rotorului. Se poate spune deci, în concluzie, că frecvența oscilațiilor autoexcitate va fi întotdeauna egală, în mod practic, cu cea mai joasă frecvență proprie a rotorului.

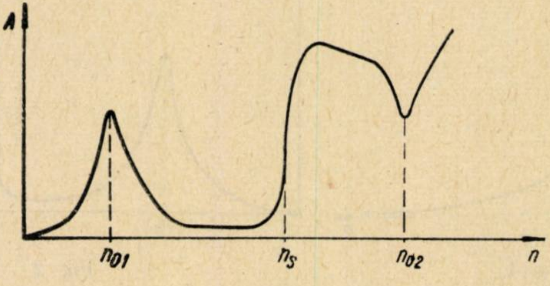


Fig. 5

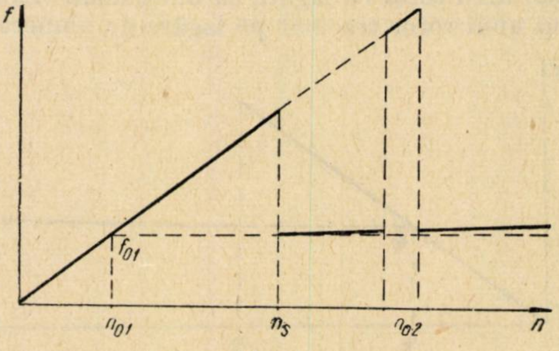


Fig. 6

În timpul fixării mașinilor pe soclu, se pune întrebarea cu care dintre frecvențele întregului sistem (mașina și fundațiile ei) se va potrivi frecvența oscilațiilor autoexcitate. Dacă aceasta din urmă ar fi formată din cea mai joasă frecvență proprie, limita producerii oscilațiilor autoexcitate s-ar micșora — în cazul fixării mașinii pe un soclu acordat la o frecvență joasă — atît de mult, încît funcționarea în bune condiții, chiar la mașinile cu un număr relativ mic de rotații, ca în cazul grupărilor de turbine, ar fi amenințată.

Vom consacra studiul de față, răspunsului la această importantă întrebare.

2. INSTALAȚIA DE ÎNCERCARE ȘI PROCEDEUL DE MĂSURARE

În cursul încercărilor experimentale s-a folosit o instalație existentă, descrisă în lucrările [7] și [8]. De aceea, menționăm aici modificările executate pentru încercările mai recente. Șasiul instalației, fixat anterior pe un soclu de beton, a fost fixat de data aceasta pe un reazem elastic, astfel încît ambele frecvențe proprii ale oscilațiilor (în sens orizontal şi vertical) să fie mai mici decît frecvențele proprii ale rotorului fixat pe reazeme rigide. La origine, şasiul era fixat în mod liber pe arcuri de oțel, dar mai tîrziu, din motive de siguranță [1]), şasiul a fost fixat deoparte pe blocuri de cauciuc poros şi de altă parte pe arcuri de oțel.

Astfel, reazemul elastic are un caracter neliniar, dar a fost realizată o mai bună amortizare a mişcării executate de şasiu. În al doilea caz, motorul de antrenare era rezemat rigid pe fundație (în primul caz avea un reazem elastic liber).

Toate aceste măsuri au fost luate cu un singur rotor (diametrul arborelui : 40 mm ; lungimea arborelui între centrele palierelor : 1420 mm ; greutatea discului : 35,8 kg), avînd o turație critică de 1020 min^{-1}. În cazul ideal al unui rotor avînd în mijloc un disc unic pe un arbore fără masă fixat pe un fundament elastic, se obțin, în cazul unor rigidități inegale ale suportului elastic (în direcție orizontală şi verticală) patru rotații (presupunînd fireşte că nu vor avea loc devieri unghiulare ale masei, care constituie fundația).

Două dintre ele vor fi scăzute din frecvențele proprii ale fundației (în direcție orizontală şi verticală), iar celelalte două din frecvența rotorului însuşi. În cazul nostru, aceste rotații erau în mod practic egale şi $n_{03} = 1310\ \text{min}^{-1}$. Rotațiile deduse din reazemul elastic erau : $n_{01} = 325$ min^{-1} şi $n_{02} = 570\ \text{min}^{-1}$.

Rotorul era rezemat pe două tipuri de cuzineți cilindrici şi cuzineți cu elemente elastice. La toți, lungimea lagărului era egală cu $l = 40$ mm. Diametrul fusului era $d = 40$ mm.

S-au folosit cuzineți cilindrici avînd un joc de $2\,\delta = 0{,}4$ mm. În afara de aceasta s-a ales un aranjament (reglaj al cuzinetului) de aşa natură încît cuzineții cu elemente elastice, sprijiniți pe o fundație rigidă, să prezinte fie o mare rezistență la producerea vibrațiilor autoexcitate ale cuzinetului (în cazul cuzineților de tipul $2\,\delta = 0{,}20$ mm, $\Phi = 43{,}8$ mm), fie o rezistență relativ joasă — (în cazul cuzineților de tipul $2\,\delta = 0{,}30$ mm $\Phi = 43{,}6$ mm şi $2\,\delta = 0{,}20$ mm, $\Phi = 45$ mm) — ambele cazuri, pentru acelaşi reglaj.

S-a înregistrat, pe de oparte, mişcarea relativă a discului față de şasiu, iar pe de altă parte, mişcarea şasiului şi aceasta nu numai în direcție verticală, dar şi orizontală. S-au executat înregistrări de etalonaj al deviațiilor, înregistrîndu-se deviații de 0,2 mm pentru disc şi de 0,1 mm pentru şasiu. S-a folosit ca aparat de măsură, un indicator de capacitate TESLA.

---

[1]) În primul caz, atunci cînd şasiul era fixat liber pe arcuri de oțel şi motorul era fixat liber pe cauciucuri, a avut loc o avarie în cursul unei treceri prin cea mai mare turație critică. La o creştere prea mare a amplitudinilor vibrațiilor de la şasiu, s-a produs mişcarea arcurilor din suporturi şi ruptura cuplajului după lăsarea în jos a şasiului.

REZULTATELE MĂSURĂTORILOR

Rezultatul cel mai important este elucidarea problemei fundamentale care stătea la baza cercetărilor şi anume dacă toate frecvenţele proprii ale întregului sistem (maşină şi fundaţie) sau dacă numai o parte a lor participă la producerea oscilaţiilor autoexcitate.

S-au constatat următoarele :

Frecvenţa oscilaţiilor autoexcitate este practic conformă frecvenţei întregului sistem mecanic (maşină şi fundaţie) scăzută din frecvenţa cea mai joasă a rotorului. Nu s-au constatat oscilaţii autoexcitate cu frecvenţe proprii corespunzătoare reazemului elastic al fundaţiei.

Faţă de această constatare credem necesar, pentru evaluarea tipurilor particulare de lagăre, să exprimăm limita producerii oscilaţiilor autoexcitate prin raportul $q_s = \frac{n_s}{n_{03}}$, adică prin relaţia dintre numărul de rotaţii n_s, din care iau naştere excitaţiile autoexcitate şi (în cazul nostru n_{03}) acela cu care frecvenţa oscilaţiilor autoexcitate era în mod practic identică.

Prin raportul $q_s = \frac{n_z}{n_{03}}$ se exprimă limita la care oscilaţiile autoexcitate dispar.

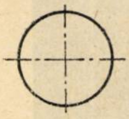
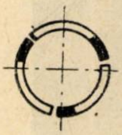
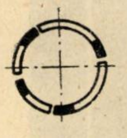
Pentru fiecare tip special de lagăre s-au reprodus rezultatele mai importante pe tabela 1. În general, se poate spune că nu numai raportul limită q_s dar mai ales q_z era redus atît timp cît oscilaţiile autoexcitate nu erau suprimate. Acest lucru este valabil nu numai pentru un lagăr cilindric, dar şi pentru cel cu 4 elemente, în cazul rotaţiei fusului în sens contrar extremităţilor libere ale elementelor elastice.

Pentru sensul contrar al rotaţiei are loc fără excepţie o suprimare a oscilaţiilor autoexcitate, la toate lagărele examinate cu elemente elastice. La un lagăr cu trei elemente s-a ajuns la o suprimare a oscilaţiilor autoexcitate pentru cele două sensuri de rotaţie a fusului.

Dar, comparînd valorile absolute ale turaţiilor limită în cazurile unui reazem elastic şi neelastic al fundaţiilor, se poate constata, în general, că ţinînd seamă de faptul că o acordare joasă ar fi sporit numărul de ture corespunzător cu 1020—1310 pe minut, numărul de ture limită de la producerea oscilaţiilor autoexcitate (n_s) nu a diminuat în cazul unui reazem elastic, faţă de cazul unui reazem rigid, în nici unul din cazurile examinate.

S-au reprodus pe figura 7 înregistrările componentelor verticale şi orizontale ale mişcării discului; pe figura 8 componentele verticale şi orizontale ale mişcării şasiului şi pe figura 9 înregistrările componentelor verticale ale mişcării executate de disc şi şasiu, făcînd să crească, în mod continuu, numărul de ture pînă la producerea oscilaţiilor autoexcitate şi să scadă în acelaşi fel. În aceste înregistrări s-a notat cu n_{01}, n_{02}, n_{03}, poziţiile numerelor critice de turaţii şi prin n_s oscilaţiile autoexcitate. S-au executat toate aceste înregistrări folosindu-se lagăre cilindrice cu jocul de $2\delta = 0{,}4$ mm. Din aceste înregistrări se poate vedea că mişcarea relativă a discului faţă de şasiu (care serveşte de măsură pentru solicitarea arborelui rotorului) nu are amplitudini mai mari decît în cazul numărului critic de ture n_{0s} şi la naşterea oscilaţiilor autoexcitate. Toate

Tabela 1

Tipul lagărului	Date privitoare la lagăre	Sensul rotirii rotorului în direcţia acelor de ceasornic			Sensul rotirii rotorului contrar acelor de ceasornic
		q_s	q_z		
	2 δ — 40	2,5 — 3,0	1,4 — 1,7	oscilaţii autoexcitate cu amplitudine mare	
	2 δ — 20 Φ — 43,8	—	—	nu s-au produs oscilaţii autoexcitate. Nu se produc decît mici avarii. percuţie stabilă	nu există oscilaţii autoexcitate
	2 δ — 20 Φ — 45	2,7—3,25	1,7 — 2,0	amplitudinea oscilaţiilor autoexcitate, după depăşirea limitelor de producere creşte uşor, atunci cînd numărul de turaţii creşte. Limita de formare depinde întrucîtva de temperatura uleiului	
	2 δ — 30 Φ — 43.6	2,7 — 3,0	1,3 — 2,3	oscilaţii autoexcitate cu amplitudine mare	

aceste înregistrări au fost executate folosindu-se cuzineţi cilindrici avînd un joc de $2\delta = 0{,}4$ mm.

Din aceste înregistrări se poate vedea că mişcarea relativă a discului faţă de şasiu (care serveşte de măsură pentru solicitarea arborelui rotorului) nu are amplitudini mai mari decît la numărul critic de ture n_{0s} şi la formarea oscilaţiilor autoexcitate. Componenta orizontală a mişcării executate de şasiu are amplitudini mari pentru n_{01}, n_{03} şi n_s. Pentru toate aceste componente ale mişcării rotorului şi şasiului, oscilaţiile ating amplitudinea maximă la producerea oscilaţiilor autoexcitate. Acestea se nasc şi dispar pe disc şi pe şasiu în acelaşi timp. Cu cît ele sînt mai intense

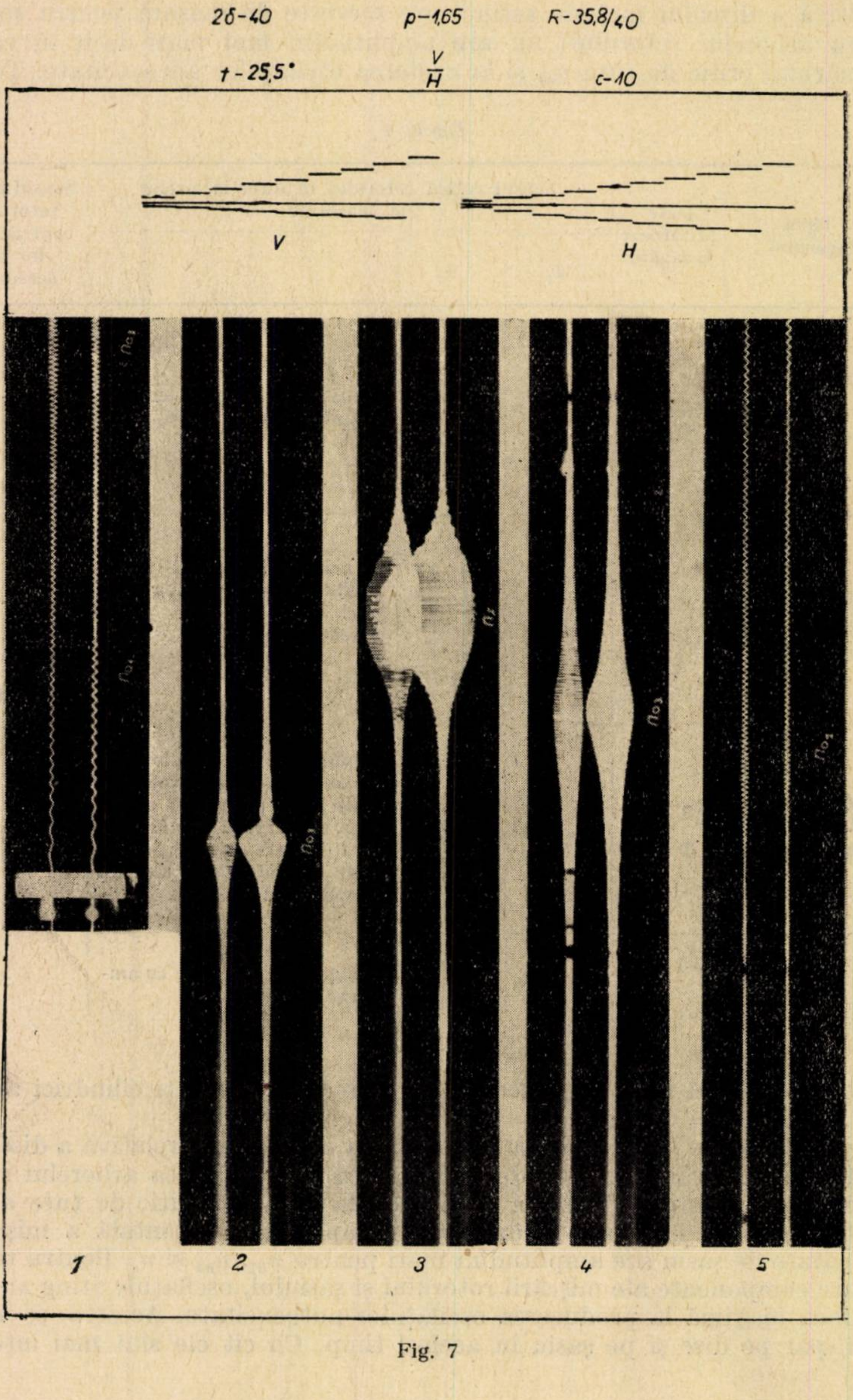


Fig. 7

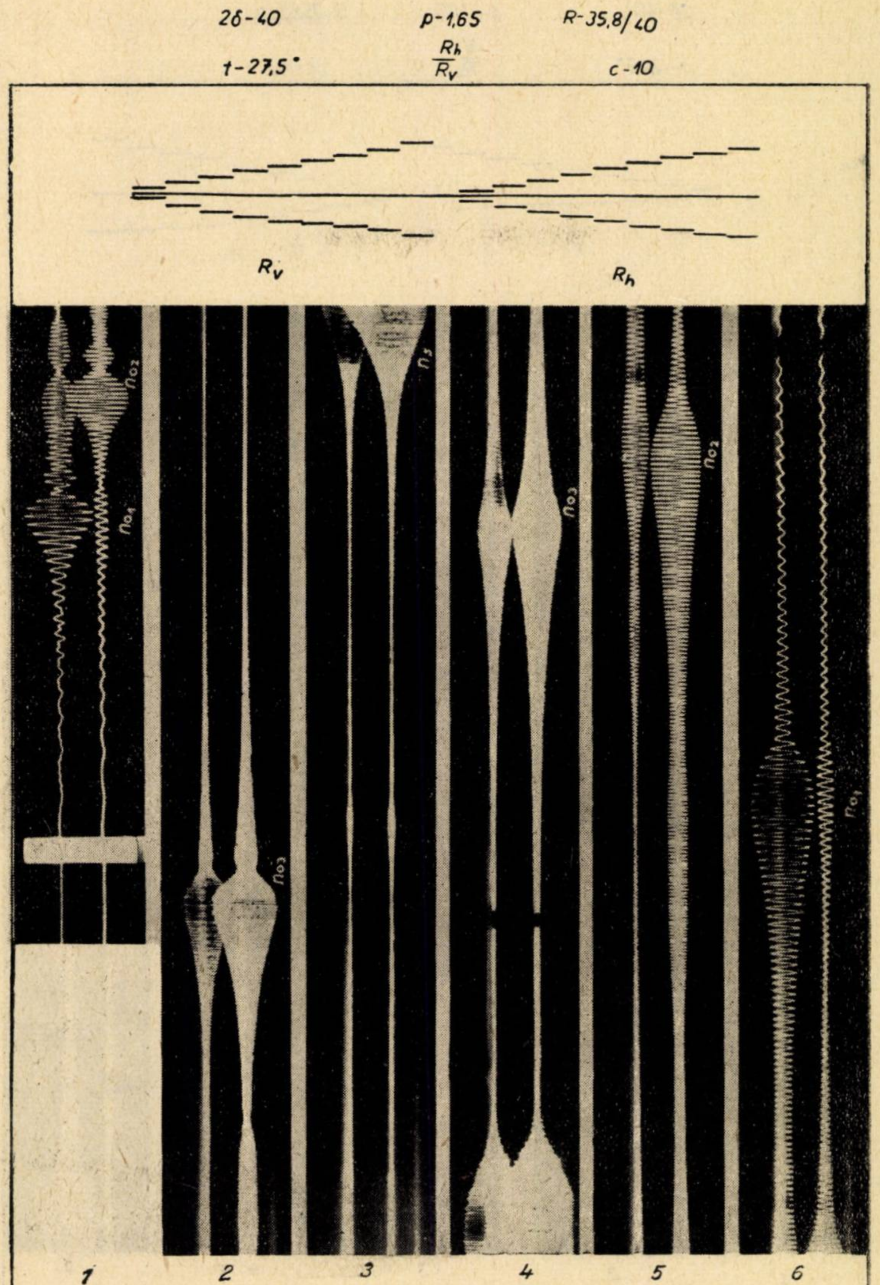

26-40
p-1,65
R-35,8/40
t-27,5°
Rh/Rv
c-10
Rv
Rh
по2
по1
по3
п3
по3
по2
по1
1
2
3
4
5
6

Fig. 8

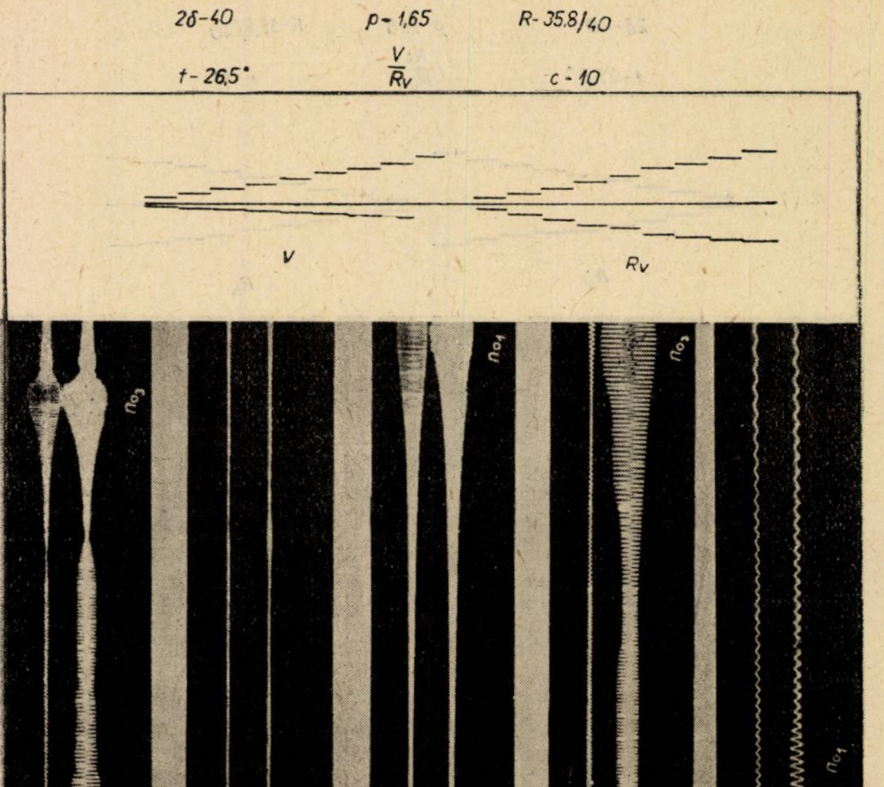

2δ-40
p-1,65
R-35,8/40
t-26,5°
V/Rv
c-10
V
Rv
n03
n02
n01
n04
n5
n03
n01
1
2
3
4
5

Fig. 9

(cu cît se depăşeşte limita producerii lor, sau cu cît sînt lăsate mai mult să evolueze), cu atît raportul q_z este mai mic.

Reducerea expresiei q_z în raport cu cazul unui reazem rigid de fundaţie, s-a produs prin faptul că masa fundaţiei acţionează alături de acţiunea masei discului asupra menţinerii oscilaţiilor autoexcitate.

Dacă rotorul este montat pe lagăre cu trei elemente elastice ($2\delta =$ 0,20 mm, $\Phi = 43{,}8$ mm) oscilaţiile autoexcitate, practic, nu se formează. Înregistrările nu reproduc decît urmele avariilor (fig. 10). În consecinţă, un reazem elastic al şasiului ar însemna o îmbunătăţire, faţă de cazul unui reazem rigid [7], chiar dacă temperatura uleiului la ieşire ar atinge valori la care oscilaţiile autoexcitate apar totdeauna în cazul unui reazem rigid al şasiului. Pentru sensul contrar al rotaţiei, oscilaţiile autoexcitate nu mai apar.

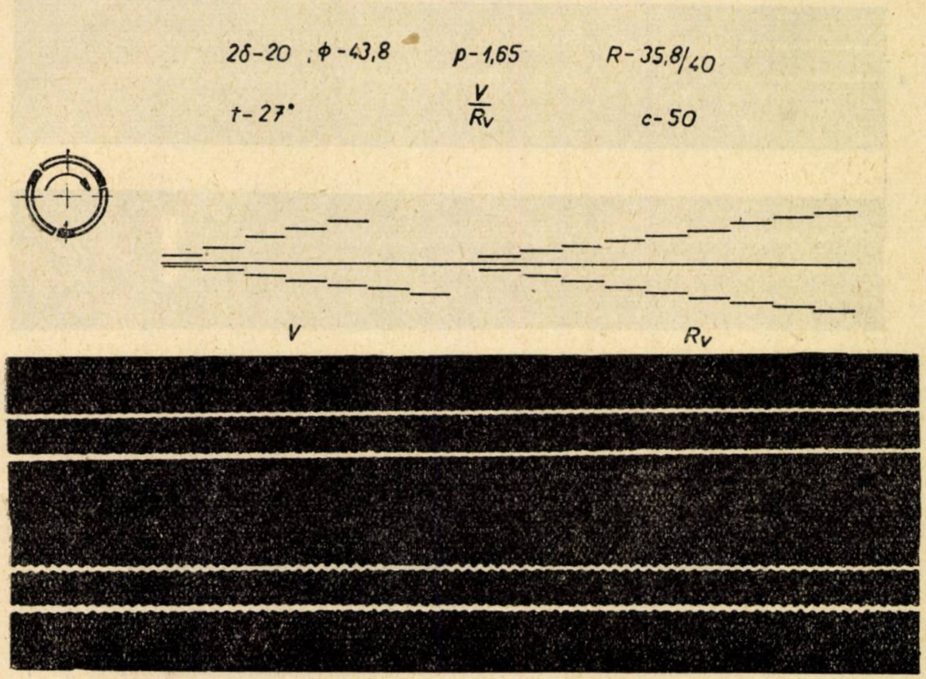


Fig. 10

Pe figura 11 s-au reprodus specimene de înregistrări obţinute în încercările cu percuţie pe rotor. În partea de sus s-au reprodus înregistrări ale componentelor verticale ale mişcării (lagărul de $2\delta = 20$, $\Phi-45$) obţinute în timpul rotaţiei fusurilor în sens contrar extremităţilor libere ale elementelor elastice, iar jos, în timpul rotaţiei contrare. În primul caz, oscilaţiile autoexcitate au apărut cu o amplitudine relativ mică.

În al doilea caz, s-a ajuns la o amortizare rapidă a oscilațiilor, ca, de altfel, în toate cazurile de rotație a fusului în direcția extremităților libere ale elementelor.

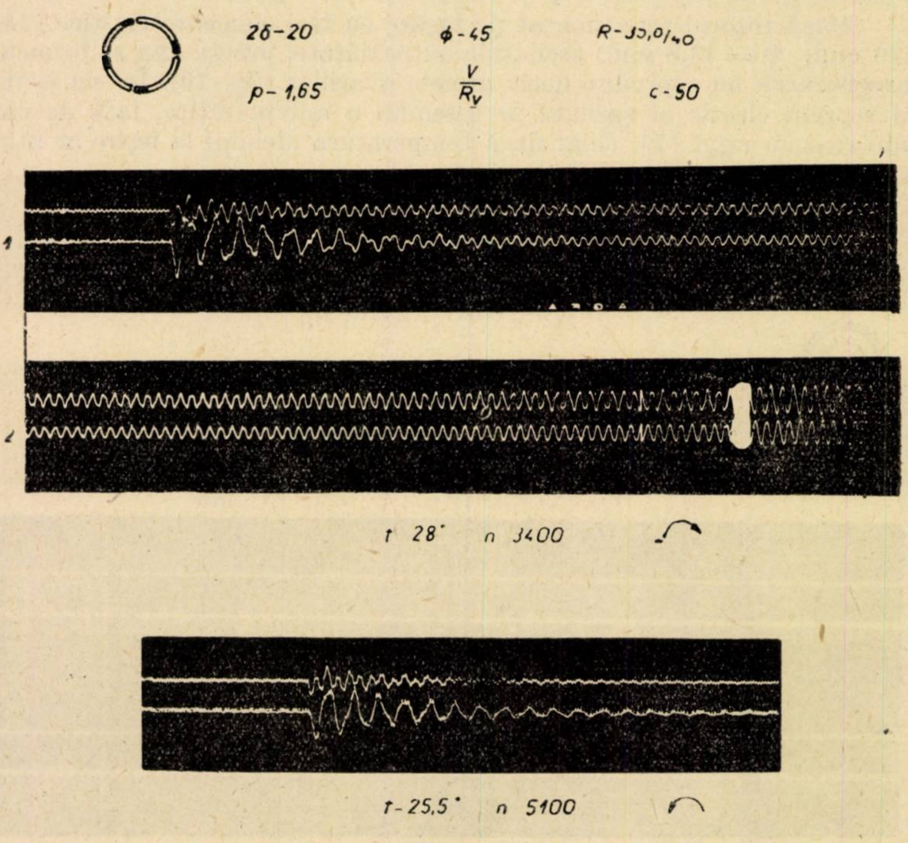


Fig. 11

CONCLUZIE

Rezultatele mai importante ale măsurătorilor executate pot fi rezumate după cum urmează :

1. Frecvența oscilațiilor autoexcitate este practic conformă acelei frecvențe a întregului sistem, care s-a scăzut din frecvența cea mai joasă a rotorului însuși.

2. La producerea oscilațiilor autoexcitate intense, acestea se formează atît la rotor cît și la fundație.

3. La lagărele cilindrice şi la lagărele cu patru elemente elastice, s-a putut constata, în cazul rotaţiei fusurilor în sens contrar extremităţilor libere ale elementelor elastice, o reducere a raportului limită al producerii oscilaţiilor autoexcitate faţă de cazul unui reazim rigid al rotorului. Dar, în general, nu s-a constatat o reducere a valorii absolute a numărului de ture limită al producerii oscilaţiilor autoexcitate, întrucît numărul critic de ture corespunzător a crescut considerabil datorită influenţei reazemului elastic cu acordare de fundaţie joasă.

4. În cursul rotirii fusului în sens contrar extremităţilor libere ale elementelor elastice ale unui lagăr cu trei elemente, oscilaţiile autoexcitate nu s-au produs; înregistrarea prezenta numai mici urme de avarii în cîteva zone.

5. În sensul contrar turaţiei fusului, oscilaţiile autoexcitate nu s-au constatat la lagărele cu elemente elastice.

Putem rezuma deci astfel: reazemul unei maşini pe o fundaţie cu acordare joasă, nu reprezintă un pericol serios din punct de vedere al oscilaţiilor autoexcitate, atît timp cît funcţionarea maşinii este liniştită pe un fundament rigid (cu acordare ridicată).

Primit la redacţie la 21 martie 1960.

ВЛИЯНИЕ УСТАНОВКИ МАШИН НА УПРУГООПЕРТОЙ МАССЕ ФУНДАМЕНТА С НИЗКОЙ ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ НА САМОВОЗБУЖДАЕМЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НЕСУЩЕГО СЛОЯ СМАЗКИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования самовозбуждаемых колебаний ротора, возникающих в результате воздействия несущего слоя смазки подшипников скольжения для случая установки машин на упругоопертой массе фундамента с низкой частотой колебаний. Наиболее важным результатом здесь является то, что частота самовозбуждаемых колебаний практически совпадает с частотой собственных колебаний всей системы, выведенной из наименьшей частоты собственных колебаний самого ротора. Установка машин на массу фундамента с низкой частотой колебаний, с точки зрения возникновения самовозбуждаемых колебаний, не представляет большой опасности при условии, что работа такой машины на жесткой массе фундамента с высокой частотой колебаний протекала спокойно.

INFLUENCE EXERCÉE PAR L'APPUI ÉLASTIQUE DES FONDATIONS SUR LES OSCILLATIONS AUTO-EXCITÉES DES ROTORS, PAR SUITE DE L'ACTION DU FILM LUBRIFIANT DES PALIERS LISSES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente les résultats des recherches expérimentales sur les vibrations auto-excitées du rotor, dont l'apparition est due à l'action de la couche portante de lubrifiant dans les paliers lisses au cas où les machines sont montées sur une masse élastiquement appuyée sur la fondation, dont la fréquence des vibrations est petite.

Le principal résultat est constitué par le fait que la fréquence des vibrations auto-excitées coïncide pratiquement avec la fréquence propre des vibrations du système entier, déduite de la fréquence minimum des vibrations propres du rotor même.

Le montage d'une machine sur une fondation à basse fréquence de vibrations ne présente pas de grands dangers du point de vue de l'apparition des vibrations auto-excitées, pourvu que le fonctionnement de la machine sur une fondation à haute fréquence de vibrations découle-doucement.

BIBLIOGRAFIE

1. B. L. NEWKIRK, H. D. TAYLOR, *Shaft whipping due to oil action in journal bearings.* General Electric Review, **28**, august, 1925.
2. A. C. HAGG, P. C. WARNER, *Oil whip of flexible rotors.* Trans. ASME (1953).
3. A. C. HAGG, *The influence of oil-film journal bearings on the stability of rotating machines.* Journal of Applied Machines. Trans. ASME, **68** (1946).
4. G. F. BOEKER, B. STERNLICHT, *Investigation of translatory fluid whirl in vertical machines.* Trans. ASME, **78** (1956).
5. O. PINKUS, *Experimental Investigation of resonant whip.* Trans. ASME, July (1956).
6. A. TONDL, *Vliv nosné mazaci vrstvy na stabilitu pohybu cepu v lozinsku a vznik samobuzených kmitu rotoru.* Rozpravy CSAV, **V**, *2* (1956).
7. — *Experimental Investigation of Self-Excited Vibration of Rotors Due to Action of the Lubricating Oil Film*, in Journal Bearings Monography? SVUTT, SNTL Praha, 1960.
8. — *Cîteva rezultate experimentale privind mişcarea fusului în lagăr.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI** (1960).

STUDII

UNGERE, FRECARE, UZURĂ

POSIBILITĂȚI DE CARACTERIZARE A MATERIALELOR DE FRICȚIUNE

DE

O. BIȚĂ și colaboratori

CONSIDERAȚII GENERALE

Ansamblurile de frînare sînt în ultimă instanță, agregate care consumă o cantitate de energie care a devenit sau tinde să devină supărătoare.

În toate împrejurările, aceste agregate se limitează la a transporta punctul de aplicație al unei forțe de-a lungul unui parcurs oarecare, energia fiind evident $W = F \times L$, unde W — energia, F — forța (de frecare) și L — deplasarea.

În mod schematic, se admite că forța de frecare este constantă și atunci energia consumată este aria dreptunghiului construit într-un sistem de axe rectangulare, cu baza egală cu parcursul și înălțimea egală cu forța de frecare (fig. 1).

Cum forța de frecare este — la sarcină constantă — proporțională cu coeficientul de frecare, s-a considerat că ultimul constituie un criteriu satisfăcător pentru exprimarea comportării ansamblurilor de frînare.

În realitate, după cum se arată în figura 2, forța de frecare nu este constantă și nici nu variază după o lege cunoscută sau previzibilă. Ca urmare, coeficientul de frecare nu poate fi suficient de concludent pentru exprimarea calității unui material de fricțiune.

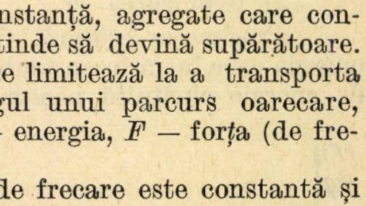


Fig. 1. — Reprezentarea schematică a energiei ($W = F \times L$).

Ca alternativă se poate adopta criteriul energetic, propus în altă lucrare [1]

$$\eta_u = \frac{1}{\tilde{a}\frac{A}{\sigma}\frac{Q}{V} + 1},$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

unde :

η_u — randamentul procesului de uzură,
A — echivalentul mecanic al căldurii,
σ — energia superficială a suprafețelor nou formate,
Q — căldura produsă,
V — volumul materialului produs prin uzură,
$\tilde{a}$ — un coeficient care exprimă intensitatea procesului de uzură și rezultă din $\tilde{a} = \frac{V}{S}$ în care S — suprafața totală a particulelor rezultate prin uzură.

Ca și în cazul uzurii, obiectivul urmărit este acela de a lucra cu un η_u minim, ceea ce revine la a urmări o valoare cît mai mare a raportului Q/V.

Deoarece randamentul unor astfel de procese este foarte mic (de ordinul 10^{-7} — 10^{-10}), prima etapă în cercetarea unui ansamblu de frînare se referă la comportarea termică a acestuia, urmînd ca uzura să constituie o preocupare ulterioară mai puțin specifică.

Din punctul de vedere al comportării termice, problema prezintă două aspecte ușor de formulat :

1) producerea căldurii și
2) expulzarea ei.

Producerea căldurii. Ca bilanț energetic se poate afirma că toată energia care intră în ansamblul de frînare se transformă în căldură ; partea de energie cheltuită pentru creare de suprafețe noi sau pentru diferite modificări locale fiind infimă.

Rolul principal în producerea căldurii îl are materialul de fricțiune care trebuie să asigure o forță tangențială mare și constantă.

În realitate, capacitatea de frînare este puternic influențată de condițiile de lucru și mai ales de sarcină, temperatură și viteză.

În general, materialele de fricțiune sînt fabricate pe bază de mase plastice, acestea fiind mult superioare ca performanță generală, fiecare varietate de astfel de material avînd însă o comportare proprie și o sensibilitate proprie la influența condițiilor de lucru.

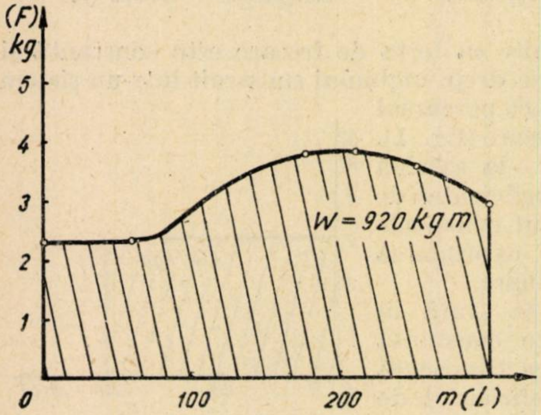


Fig. 2. — Reprezentarea reală a energiei.

Caracterizarea — din acest punct de vedere — a materialelor de fricțiune, trebuie făcută ținînd seama de valorile parametrilor funcționali, care — bineînțeles — trebuie să aparțină domeniului de valori uzuale.

Expulzarea căldurii. Dacă se are în vedere faptul că majoritatea materialelor de fricțiune sînt fabricate pe bază de masă plastică și că masele plastice au o proastă conducție a căldurii (uneori de peste 1 000 ori inferioară metalelor), se înțelege ușor că fenomenele termice se concentrează într-o zonă foarte subțire de la suprafața de frecare a saboților, astfel că cea mai mare parte din căldura formată se disipează prin tambur.

Dacă tamburul poate să expulzeze cu suficientă rapiditate căldura primită, ansamblul de frînare se va comporta mulțumitor. În caz contrar se va ajunge la distrugerea tamburului și eventual aprinderea materialului de frînare iar comportarea materialului va fi — evident — nesatisfăcătoare.

Se înțelege de aici că proasta comportare a unui ansamblu de frînare nu poate fi explicată exclusiv prin calitatea materialului de frînare, soluția constructivă avînd deseori un rol precumpănitor.

RELAȚII FUNCȚIONALE ÎN PROCESUL DE FRÎNARE

În vederea caracterizării materialelor de frînare se pot stabili două grupe de parametri : unii hotărîți de specificul construcției (grupa I) și alții hotărîți de specificul condițiilor de lucru (grupa II) conform tabelei 1.

Tabela 1

Grupa I	Calitatea materialului, suprafața de frecare, geometria, particularități constructive
Grupa II	Sarcina, viteza, temperatura

Deși conținutul tabelei 1 nu este limitativ, parametrii înscriși sînt suficienți pentru a defini problema.

Calitatea materialului intervine foarte mult atunci cînd interesează în special uzura. Pentru a caracteriza proprietățile de frecare se obișnuiește să se indice coeficientul de frecare care depinde — după cum se va vedea — de parametrii din grupa a II-a.

Suprafața de frecare. Rezistența de frecare depinde atît de calitatea, cît și de întinderea suprafețelor de frecare. În ceea ce privește calitatea suprafețelor de frecare, influența acesteia este de scurtă durată, deoarece foarte repede suprafața se netezește și, printr-un convenabil transfer reciproc cu suprafața tamburului, ajunge la o netezime de regim oarecum satisfăcătoare.

Teoretic, aria suprafeței de frecare nu ar trebui să intervină, practic însă intervine destul de mult, modificînd sarcina unitară, ceea ce — în realitate — are o mare influență.

Geometria saboților de frînă prezintă importanță în măsura în care înrăutățește sau îmbunătățește condițiile termice locale. Astfel un sabot lung va prezenta zone locale mai calde decît un sabot scurt, de unde rezultă că există un raport optim între lățime și lungime pentru a obține cel mai bun rezultat.

Particularități constructive. Mecanismul procesului de frînare poate diferi, modificînd în mod corespunzător performanța materialului de frînare.

Astfel, frînarea se poate face cu sabot interior, în care caz, încărcînd în mod egal cei doi saboţi este evident că, pentru un anumit sens de rotaţie, un sabot se va autoîncărca în mod suplimentar (sabotul 1 din fig. 3). O situaţie similară se poate întîlni la frînele cu bandă care înfăşoară tamburul; în acest caz interesează nu numai unghiul de înfăşurare, ci şi modul de încărcare.

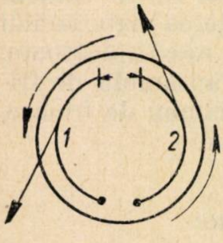


Fig. 3. — Reprezentarea schematică a frînei cu saboţi interiori.

De asemenea, în toate cazurile interesează gradul de degajare a saboţilor de care depinde eventuala lor răcire ca şi posibilitatea de evacuare a particulelor de uzură, care reduc considerabil coeficientul de frecare, dacă rămîn între suprafeţe.

Sarcina. Dacă se face asbtracţie de natura materialului de fricţiune se poate afirma că legea lui Coulomb reprezintă doar o primă aproximaţie a realităţii şi că de fapt sarcina influenţează apreciabil coeficientul de frecare şi respectiv forţa de frecare.

Astfel, în figurile 4 şi 5 se arată legile de variaţie a forţei de frecare şi variaţia coeficientului de frecare în funcţie de sarcină, deduse experimental pentru cîteva materiale de frînă diferite, la o viteză periferică de 7 m/s.

În general, se constată o tendinţă destul de sistematică de creştere a forţei de frecare cu sarcina, ceea ce ar putea avea două cauze, şi anume:

1. Sarcina face să crească suprafaţa reală de contact.

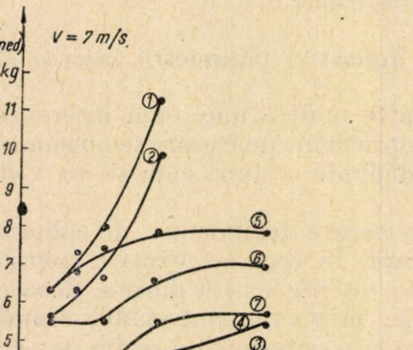


Fig. 4. — Variaţia forţei de frecare în funcţie de sarcină pentru mai multe materiale de frînă (valori experimentale).

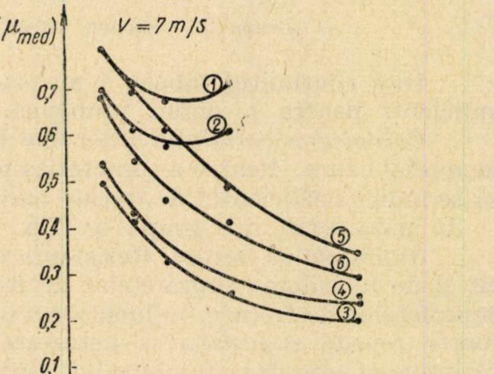


Fig. 5. — Variaţia coeficientului de frecare în funcţie de sarcină, pentru aceleaşi materiale din figura 4.

2. Deoarece cu creşterea sarcinii creşte şi temperatura, o parte din constituenţi se plastifiază şi prin aceasta măresc aderenţa faţă de suprafaţa opusă.

În condiţiile experimentale folosite (Φ tambur FC 24 = 23 mm, supr. sabot. = 280 mm²) sub sarcini de ordinul 1 — 2,5 kg/cm² forţa de frecare uscată nu este influenţată de durata procesului, ci doar foarte puţin de viteza relativă.

Astfel, un material de bună calitate prezintă o valoare constantă a forţei de frecare pe un parcurs de alunecare de aproximativ 250 m, indiferent dacă sarcina este 1,4 sau 2,8 kg/cm², la o viteză de alunecare de 3 m/s (fig. 6).

La aceste sarcini chiar şi materialele de calitate mai proastă nu sînt excesiv influenţate într-un interval de timp limitat (un parcurs de 250 m).

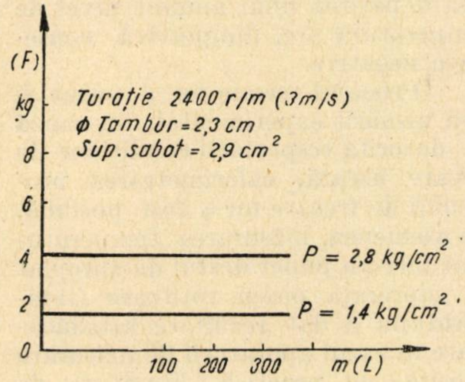


Fig. 6. — Variaţia forţei de frecare pe un parcurs de 250 m, la sarcini şi viteze mici, în cazul unui material de calitate mai bună (valori experimentale).

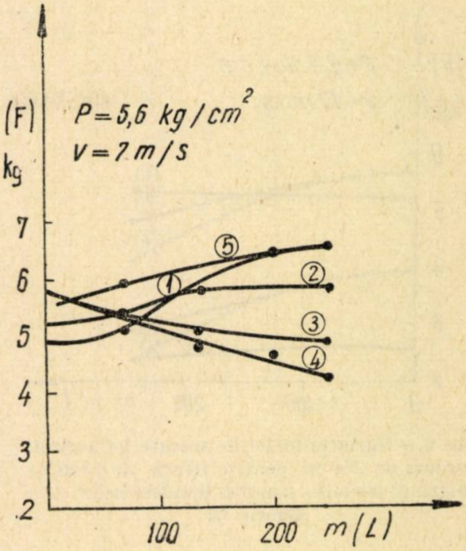


Fig. 7. — Variaţia forţei de frecare pe un parcurs de 250 m, la sarcină şi viteză mai mare (5,6 kg/cm² şi 7 m/s) în cazul materialelor încercate.

Sub sarcini mai mari de 5 kg/cm², de-a lungul unui parcurs de alunecare de 250 m, forţa de frecare poate varia foarte mult după legi diferite, funcţie de natura materialului de frînare. Astfel, cîteva materiale de frînă prezintă curbele de variaţie din figura 7, obţinute sub o încărcare de 5,6 kg/cm² la o viteză de 7 m/s, pentru un tambur FC 24 cu $\Phi = 43$ mm.

Alura diferită a curbelor din figura 7 se poate explica prin plastifierea parţială a unui element component în cazul curbelor ascendente şi prin formarea prin uzură a unui material pulverulent sau a lichefierii unui element component (prin depăşirea unui anumit prag de temperatură) care reduce coeficientul de frecare, în cazul curbelor descendente.

La alte viteze (13 m/s de ex.) alura curbelor poate fi diferită, după cum se arată în figura 8. Aceasta indică necesitatea unei anumite solicitări termice a materialului, pentru a prezenta o comportare satisfăcătoare.

Viteza şi temperatura. Aceşti doi parametri intervin prin mecanisme fizice diferite, dar dacă se analizează numai performanţa materialelor de fricţiune, nu pare ca în domeniul valorilor uzuale efectul vitezei să fie apreciabil.

Totuşi, viteza de deplasare intervine printr-un mecanism termic, determinînd viteza de generare a căldurii. Dacă aceasta depăşeşte viteza de disipare a căldurii, temperatura creşte, avînd ca urmare modificarea stării fizice a materialului şi, eventual, chiar distrugerea lui chimică.

Din determinările experimentale efectuate, rezultă că toate materialele de frînare îşi îmbunătăţesc performanţa prin încălzire moderată însă depăşirea unui anumit nivel de temperatură are, dimpotrivă, consecinţe negative.

Procesul termic nu a putut fi însă urmărit experimental, din cauză că, datorită respectării condiţiilor de frecare uscată, calorimetrarea procesului de frecare nu a fost posibilă. De asemenea, măsurarea temperaturilor într-un punct destul de apropiat de suprafaţa piesei rotitoare (tamburul) nu a dat rezultate satisfăcătoare în cazul aparaturii de măsurare folosită; în practică, literatura de specialitate indică posibilitatea întîlnirii temperaturilor de cîteva sute de grade (pînă la aprox. 900°C) [2].

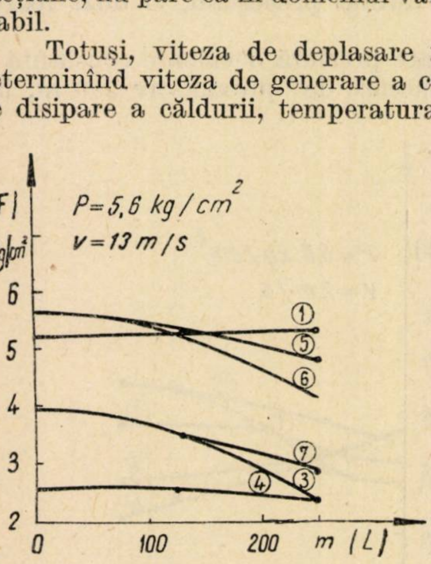


Fig. 8. — Variaţia forţei de frecare pe acelaşi parcurs de 250 m pentru viteza de 13 m/s, păstrînd celelalte condiţii identice celor din figura 7.

Viteza, timpul şi sarcina intervin prin creşterea temperaturii în vecinătatea punctelor fizico-chimice critice (temperatura de topire sau temperatura de transformare).

Din figura 9 se observă că forţa de frecare este puţin influenţată de viteză la valorile uzuale ale acesteia, efectul ei fiind mai pronunţat la sarcini mai mari. Ca urmare, viteza influenţează foarte puţin şi coeficientul de frecare, fapt ilustrat în figura 10.

Principalele observaţii experimentale ce decurg din cele prezentate mai sus se pot formula după cum urmează:

1) Forţa de frecare variază după legi diferite, funcţie de natura materialului, presiune, viteză, timp de frînare şi temperatură.

2) În celelalte condiţii egale, viteza influenţează foarte puţin forţa de frecare.

3) În condiţii de lucru diferite, viteza influenţează intensitatea de acţiune a celorlalţi parametri, în special producerea şi disiparea căldurii produse.

4) Exprimarea performanţei numai prin unul din cele două criterii, coeficient de frecare sau forţă de frecare, nu este concludentă, deoarece aceasta depinde şi de alţi parametri.

O primă concluzie care se trage de aici este aceea că materialul de frînare trebuie să fie caracterizat prin capacitatea de transformare a energiei mecanice în energie calorică, în condiţii determinate de presiune, viteză şi timp de frînare.

Condiţiile de lucru pot diferi apreciabil ; de exemplu unele materiale de frînă pot fi chemate să asigure deceleraţia unui corp mobil de la o viteză de 30 m/s la zero într-un interval de timp de 5 secunde, altele să anihileze efectul accelerator al unei forţe constante (coborîrea unui vehicul pe o pantă) la o viteză de ordinul a 10 m/s, timp de cîteva sute de secunde. În cazul instalaţiilor de foraj, condiţiile specifice de lucru sînt de aşa natură, încît impun transformarea în căldură a unei cantităţi de energie de 100 mii. . .150 mii kgm într-un interval de timp de aprox. 1 s, de la o viteză de circa 10 m/s la zero, iar în cazul scoaterii din funcţiune a instalaţiei

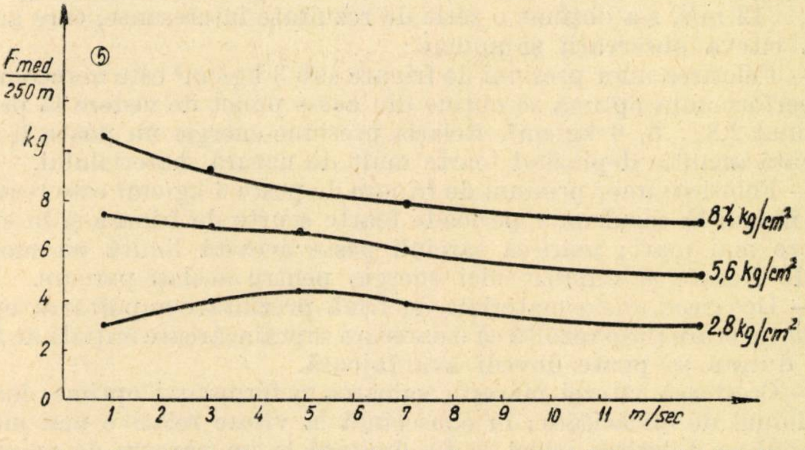


Fig. 9. — Variaţia de frecare funcţie de viteza periferică la sarcini diferite.

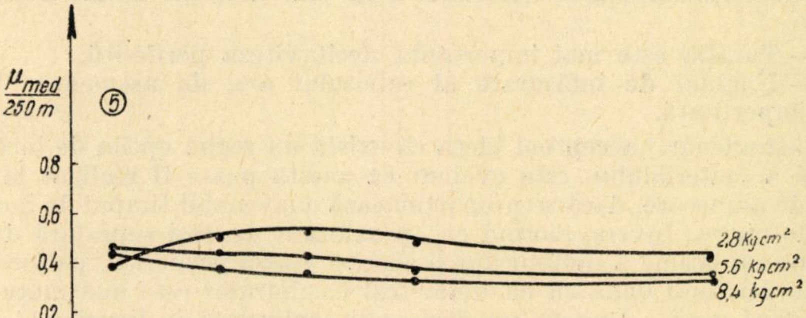


Fig. 10. — Variaţia coeficientului de frecare funcţie de viteză în condiţii experimentale identice celor din figura 9.

hidromatice de frînare, energia totală de absorbit este de aprox. 2 500 000 kgm iar timpul 17...28 s.

Materialele de fricţiune pot fi exploatate într-un mare domeniu de presiuni şi viteze. Astfel, determinînd cantităţile de energie absorbite de către instalaţia experimentală folosită, în cazul mai multor materiale de frînare, diferite ca natură, sub sarcini de 1,4...8,4 kg/cm^2 şi viteze de 0,8...12 m/s, s-a obţinut o serie de rezultate interesante, care au condus la cîteva observaţii şi anume :

— Folosirea unor presiuni de frînare sub 3 kg/cm^2 este nerecomandabilă ; performanţa optimă se obţine din acest punct de vedere la presiuni de ordinul 2,8...5, 6 kg/cm^2. Relaţia presiune-energie nu poate fi totuşi exprimată analitic depinzînd foarte mult de natura materialului.

— Folosirea unor presiuni de frînare de peste 6 kg/cm^2 este recomandabilă numai în cazul unor perioade foarte scurte de frînare şi în special la viteze mai mari ; mărirea sarcinii peste această limită nu modifică forţa de frecare şi implicit nici energia pentru acelaşi parcurs.

— Deoarece unele materiale de frînă prezintă comportarea optimă după un oarecare timp rezultă că o oarecare supraîncărcare iniţială de foarte scurtă durată se poate dovedi avantajoasă.

— Creşterea vitezei măreşte valoarea peformanţei optime, însă reduce timpul de eficacitate ; în consecinţă la viteze relative mai mari se recomandă ca folosirea frînei să fie limitată la un parcurs de maximum 250 m.

Din experimentările efectuate s-au mai desprins următoarele concluzii :

— Turaţia este mai importantă decît viteza periferică,

— Unghiul de înfăşurare al sabotului are, de asemenea, foarte mare importanţă.

Într-adevăr, acceptînd ideea că există un regim optim de încărcare termică a materialului, este evident că acesta poate fi realizat la orice viteză de alunecare, dacă se proporţionează convenabil timpul de încălzire şi cel de răcire. Invers, lucrînd cu aproximativ aceeaşi suprafaţă de frecare, aceeaşi lăţime a tamburului şi aceeaşi viteză periferică, performanţa va fi cu atît mai bună cu cît diametrul tamburului este mai mare (deci turaţia mai mică). Această concluzie este confirmată de figurile 11 şi 12.

În figura 11 se prezintă energia absorbită în două minute de acelaşi material de frînare, lucrînd cu tamburi de diametri diferiţi sub sarcini, de 5, 6 kg/cm^2 la o viteză periferică de 4,8 m/s. Este de remarcat că mărirea diametrului tamburului, pentru aceeaşi viteză periferică, determină nu numai mărirea capacităţii momentane de absorbţie a energiei, ci şi stabilizarea comportării, fluctuaţiile forţei de frecare fiind practic eliminate.

Figura 12 confirmă concluzia expusă mai sus, demonstrînd că viteza periferică influenţează mai puţin decît turaţia performanţa materialului.

Concluzia a doua privind unghiul de înfăşurare al sabotului constituie de fapt o generalizare a celei anterioare şi se poate reformula după cum urmează :

— Pentru fiecare material de frînă există un anumit unghi de înfășurare, care asigură performanța optimă a ansamblului.

Paralel se remarcă o altă observație importantă:

— Pentru fiecare material de frînă există anumite condiții care îi asigură performanța optimă. De exemplu în figura 13 se prezintă comportarea energetică a mai multor materiale încercate în funcție de viteza periferică la o sarcină de 5,6 kg/cm². Pentru materialele (*1*), (*2*) și (*5*) cea mai bună comportare, în cazul instalației experimentale folosite, se obține la viteza de 7 m/s. La alte materiale căderea performanței în funcție de viteză are un caracter mai brutal și cantitativ se poate considera că reduce mult posibilitatea folosirii acestora peste o anumită valoare a vitezei.

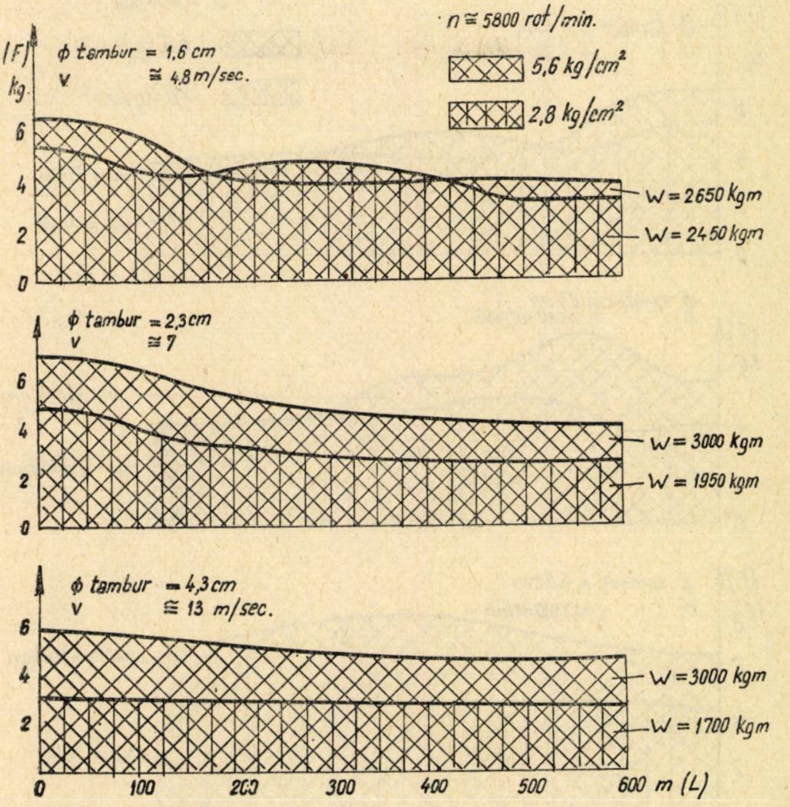


Fig. 11. — Influența turației tamburului asupra performanței sabotului de frînare (păstrînd viteza periferică de lucru, constantă și variind diametrul tamburului).

La fel se poate vorbi de o sarcină optimă. Un exemplu semnificativ este furnizat de diagramele din figura 14, în care se observă că pentru fiecare material de frînare există un regim optim de încărcare.

Din legea clasică a frecării uscate ar urma ca forța tangențială să fie întotdeauna proporțională cu forța normală, coeficientul de proporționalitate fiind coeficientul de frecare. După cum s-a văzut, ipoteza nu este confirmată de realitate; condițiile efective de lucru fac să intervină particularitățile instalației, care au o pondere mult mai mare în stabilirea acestei dependențe.

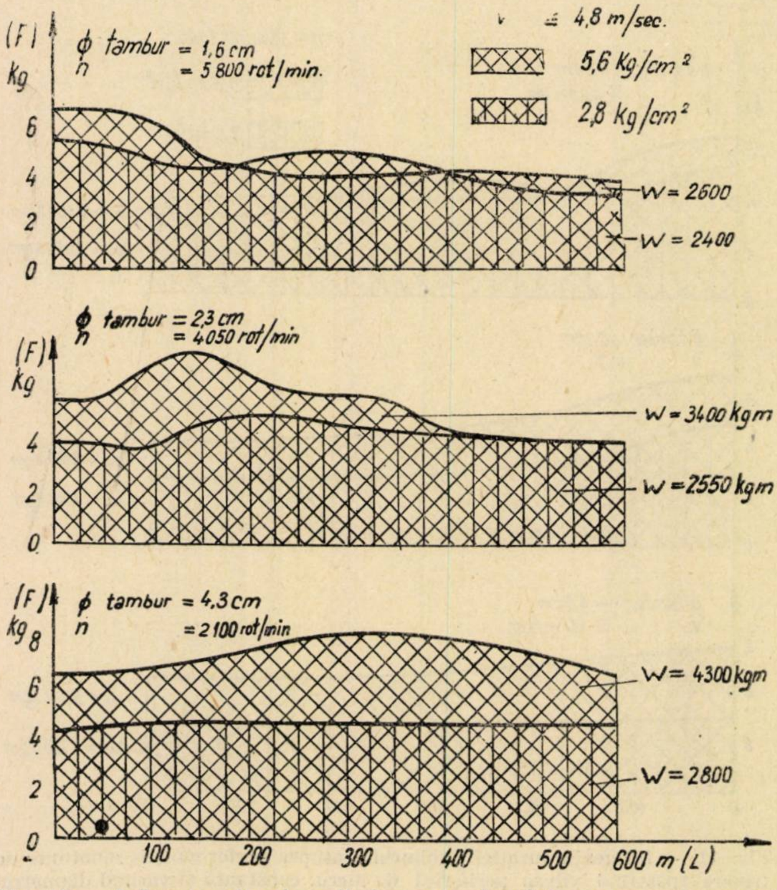


Fig. 12. — Influența vitezei periferice a tamburului asupra performanței sabotului de frînare (păstrînd turația constantă și variind diametrul tamburului).

Dacă se ia în considerație faptul că rezistența la frecare este legată de o anumită comportare plastică a materialului de frînă și că aceasta necesită o oareare sarcină și o oarecare încărcare termică (care de altfel sînt legate între ele), se înțelege că particularitățile geometrice ale ansamblului influențează destul de mult fenomenul.

Aceasta conduce la concluzia că pentru anumite condiții de lucru, pentru o suprafață determinată a tamburului, este necesară o anumită suprafață de frecare a sabotului, anume de o dimensiune astfel proporționată, încît să se autocondiționeze termic. Cu alte cuvinte, reducerea

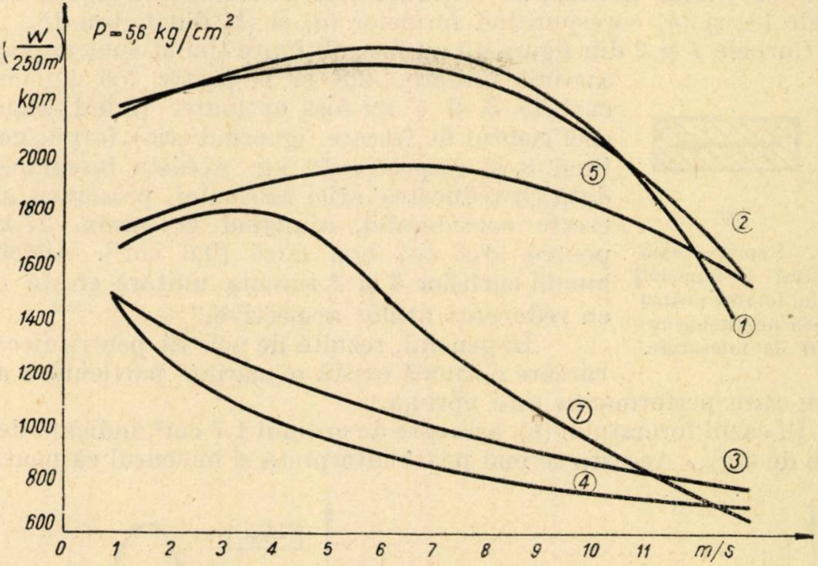


Fig. 13. — Influența vitezei periferice asupra performanței (energiei înmagazinate) în cazul cîtorva materiale de frînă încercate experimental.

suprafeței sabotului ar echivala de la un moment dat cu reducerea vitezei, determinînd o insuficientă condiționare termică a materialului — deci o reducere a forței de frecare. La fel, o mărire a suprafeței sabotului pentru același tambur ar corespunde unei generări de căldură, care depășește posibilitățile de disipare a acesteia de către materialul tamburului, ceea ce ar echivala de la un moment dat cu creșterea excesivă a vitezei, cu același efect de reducere a forței de frecare.

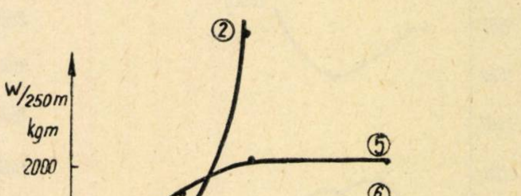


Fig. 14. — Influența sarcinii asupra performanței materialelor de frînă.

Pentru a verifica această concluzie, s-a redus treptat aria sabotului după două direcții, obținînd suprafețe de formă dreptunghiulară, ca în figura 15, săgeata indicînd sensul de rotire al tamburului. Condițiile de lucru au fost medii cu încărcări de 3...30 kg/cm² și viteze de ordinul a 5m/s.

S-a început cu o înfășurare a tamburului de aprox. 140°, considerată ca o condiție severă pentru un tambur de 16 mm ⌀ care se rotește cu 5 800 rot/min. Rezultatele obținute sînt prezentate în figura 16, diagramele (*a*) și (*b*) corespunzînd formelor (*a*) și (*b*) din figura 15.

Curbele *1* și *2* din figura 16 au fost obținute ținînd cont de valoarea sarcinii unitare, 2,8 și respectiv 5,6 kg/cm², iar curbele *3* și *4* au fost obținute, ținînd seama de coeficientul de frecare (ignorînd aria), forțele normale fiind 8 și respectiv 16 kg. Aceasta înseamnă că o dată cu reducerea ariei sabotului, presiunea unitară crește considerabil, ajungînd la aprox. 27 kg/cm² pentru aria cea mai mică (0,6 cm²). Altfel, de-a lungul curbelor *3* și *4* sarcina unitară crește o dată cu reducerea ariilor respective.

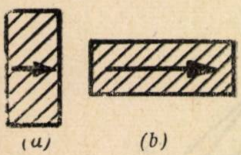


Fig. 15. — Reprezentarea schematică a formelor sabotului folosite pentru obținerea diferitelor unghiuri de înfășurare.

În general, rezultă de aici că pentru fiecare încărcare normală există o mărime particulară a ariei pentru care performanța este optimă.

În cazul formatului (*b*), aria este de ordinul 1,7 cm², indicînd degajări axiale de 40%. Aceasta se mai poate interpreta și în sensul că pentru unghiul de înfășurare de ~ 140°, cantitatea de metal este insuficientă pentru a disipa toată căldura generată. Scăderea relativ rapidă a performanței în curbele *3* și *4* (cu reducerea ariei), confirmă supraîncărcarea termică a materialului și necesitatea unei mase suplimentare de metal.

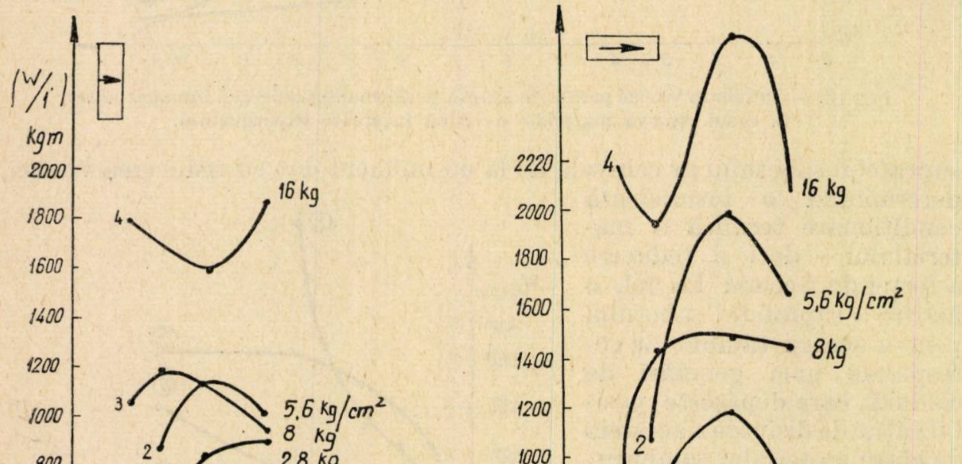


Fig. 16. — Influența unghiului de înfășurare al sabotului asupra capacității de frînare a acestuia. Diagramele (*a*) și (*b*) corespund formelor (*a*) și (*b*) din figura 15.

În cazul formatului (*a*), la sarcini moderate curbele prezintă de asemenea un maxim la un unghi de înfășurare de aprox. 60°. Dacă unghiul de înfășurare crește, evident că are loc o supraîncărcare termică a materialului și capacitatea de frînare scade. Dacă unghiul de înfășurare se reduce, căldura generată scade și timpul de răcire crește. Rezultatul însumat al acestor efecte este descărcarea termică a materialului sub limita necesară.

Curba 4 (*a*) se abate însă de la regula generală și în loc de un maxim, prezintă un minim. Apariția acestei forme particulare este logică și în acord cu imaginea generală prezentată pentru mecanismul procesului de frînare, așa cum a rezultat din această cercetare. Într-adevăr, trebuie amintit că de-a lungul curbei *4* sarcina unitară crește o dată cu descreșterea ariei. În această situație se pot urmări în acțiune cei doi parametri care distrug relația liniară dintre forța tangențială și coeficientul de frecare: plastifierea termică și curgerea mecanică. Spre dreapta, din cauza creșterii unghiului de înfășurare se tinde către punctul optim de încărcare termică, sarcina unitară fiind insuficientă pentru a duce materialul în domeniul plastic. Spre stînga, cu reducerea unghiului de înfășurare, creșterea încărcării unitare are rezultatul scontat de mărire a forței de frecare mai mult decît prevede legea $F_T = \mu F_N$, valabilă — ar rezulta de aici — în condiții în care starea fizică a materialului nu este modificată nici termic, nici mecanic.

CONCLUZII

Din cele prezentate au rezultat următoarele concluzii:

— Calitatea materialelor de fricțiune nu poate fi exprimată numai prin coeficientul de frecare, acesta variind funcție de încărcarea termică și mecanică a materialului.

În realitate, comportarea acestor materiale depinde de:

— capacitatea lor de a produce căldură (coef. de frecare),

— capacitatea instalației de a disipa căldura produsă,

— capacitatea materialelor de frînare de a înmagazina — fără consecințe dăunătoare fizice sau chimice — excesul de căldură nedisipat de instalație.

Capacitatea materialelor de fricțiune de a produce căldură se exprimă — în primă aproximație și în condiții moderate de încărcare mecanică — prin coeficientul de frecare.

Capacitatea instalației de a disipa căldura este condiționată în parte de particularitățile constructive ale instalației și în parte, de particularitățile funcționale ale acesteia. Elementul constructiv principal din acest punct de vedere este masa metalică pusă la dispoziție pentru a prelua căldura generată la un nivel termic moderat. Elementul funcțional principal este viteza sau, mai exact, frecvența ciclului de încălzire-răcire, respectiv timpul disponibil pentru ciclul de răcire.

Capacitatea materialelor de fricțiune de a înmagazina — fără urmări dăunătoare — excesul de căldură, este o însușire absolut individuală.

Se menționează că o oarecare încălzire este favorabilă dar depășirea acestei limite este uneori — din punct de vedere practic — catastrofală.

Pentru a evita supraîncălzirea va trebui, deci, să se acționeze asupra parametrilor care reduc intensitatea procesului de încălzire sau care intensifică procesul de răcire.

Rezultă de aici că nici o caracteristică instantanee nu poate caracteriza materialul decît dacă este realizată în condiții de echilibru termic.

Din cele arătate decurg unele concluzii de interes practic și anume :

1. Caracterizarea materialelor de fricțiune se poate face prin reprezentare energetică, respectiv prin indicarea capacității de transformare a energiei mecanice în energia termică, în condiții determinate.

2. Condițiile experimentale pentru caracterizarea materialelor de fricțiune pot fi identice celor din exploatare sau chiar standardizate, determinările putîndu-se executa la scară de laborator respectînd condiții de similitudine (forma instalației, unghiul de înfășurare a sabotului, viteza și sarcina identice) și raport constant între masa metalică și suprafața sabotului.

3. Pentru a stabili condițiile optime de lucru, este bine ca determinările să se facă la valori diferite ale unghiului de înfășurare. Curba obținută va indica (v. fig. 16) dacă materialul de frînare este supra sau sub solicitat termic și sensul în care trebuie să acționeze asupra sarcinii sau vitezei pentru a realiza performanța optimă.

Aceste concluzii nu țin seama de susceptibilitatea la uzură a materialelor, dar este probabil că acționarea asupra unghiului de înfășurare pentru a obține cea mai avantajoasă încărcare este și din acest punct de vedere superioară acționării asupra încărcării.

De asemenea, este evident că atunci cînd gabaritele se măresc, se va recurge la mărirea masei metalice și la îmbunătățirea posibilităților de conducție și radiație a căldurii din această masă.

Primit la redacție la 25 mai 1960.

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

РЕЗЮМЕ

Авторы приводят новый критерий для характеристики фрикционных материалов, а именно путем энергетического изображения, соответственно, путем указания способности преобразования механической энергии в тепловую при определенных условиях.

Также показывается, что экспериментальные лабораторные условия для определения характеристики фрикционных материалов могут быть идентичными существующим при эксплуатации, соблюдая

при этом условия подобия (форму установки, угол обматывания колодки, одинаковые значения скорости и нагрузки) и постоянное отношение металлической массы к поверхности колодки.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схематическое изображение энергии ($W=F\times L$).

Рис. 2. — Истинное изображение энергии.

Рис. 3. — Схематическое изображение тормоза с внутренними колодками.

Рис. 4. — Изменение силы трения в зависимости от нагрузки для нескольких тормозных материалов (экспериментальные значения).

Рис. 5. — Изменение коэффициента трения в зависимости от нагрузки для материалов рисунка 4.

Рис. 6. — Изменение силы трения на пробеге в 250 м при малых нагрузках и скоростях для материала повышенного качества (экспериментальные значения).

Рис. 7. – Изменение силы трения на пробеге в 250 м при больших значениях нагрузки и скорости (5,6 кг/см^2 и 7 м/сек) для испытуемых материалов.

Рис. 8. — Изменение силы трения на том же пробеге в 250 м при скорости, равной 13 м/сек. Остальные условия сохраняются, как на рис. 7.

Рис. 9. — Изменение силы трения в зависимости от окружной скорости при различных нагрузках.

Рис. 10. — Изменение коэффициента трения в зависимости от скорости при экспериментальных условиях, аналогичных рис. 9.

Рис. 11. — Влияние числа оборотов барабана на показатели работы тормозной колодки (при сохранении постоянного значения окружной рабочей скорости и изменении диаметра барабана).

Рис. 12. — Влияние окружной скорости барабана на показатели работы тормозной колодки (при сохранении постоянного числа оборотов и изменении диаметра барабана).

Рис. 13. — Влияние окружной скорости на показатели работы (накопленную энергию) для нескольких экспериментально испытанных тормозных материалов.

Рис. 14. — Влияние нагрузки на показатели работы тормозных материалов.

Рис. 15. — Схематическое изображение форм колодок, применяемых для получения различных углов обматывания.

Рис. 16. — Влияние углов обматывания колодки на тормозящую способность последней. Диаграммы (*a*) и (*b*) соответствуют формулам (*a*) и (*b*) на рис. 15.

POSSIBILITÉS DE CARACTÉRISER LES MATÉRIAUX DE FRICTION

RÉSUMÉ

Les auteurs proposent un nouveau critérium permettant de caractériser les matériaux de friction, à savoir, par la représentation énergétique, respectivement, par l'indication de la capacité de transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique, dans des conditions déterminées.

Ils montrent, en outre, que les conditions expérimentales permettant de caractériser les matériaux de friction au laboratoire peuvent être identiques à celles rencontrées dans l'exploitation, pourvu que l'on satisfasse

à certaines conditions de similitude (forme de l'installation, angle d'enveloppement du sabot, vitesses et charges), et à un rapport constant entre la masse métallique et la surface du sabot.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Représentation schématique de l'énergie ($W = F \times L$).

Fig. 2. — Représentation réelle de l'énergie.

Fig. 3. — Représentation schématique du frein à sabots intérieurs.

Fig. 4. — Variation de la force de frottement en fonction de la charge, pour plusieurs matériaux utilisés dans les freins (valeurs expérimentales).

Fig. 5. — Variation du coefficient de frottement en fonction de la charge, pour les mêmes matériaux que dans la figure 4.

Fig. 6. — Variation de la force de frottement sur un parcours de 250 m, à de petites charges et vitesses, dans le cas d'un matériel de meilleure qualité (valeurs expérimentales).

Fig. 7. — Variation de la force de frottement sur un parcours de 250 m dans le cas des matériaux essayés, lorsque la charge et la vitesse sont plus grandes (5,6 kg/cm^2 et 7 m/s).

Fig. 8. — Variation de la force de frottement sur le même parcours de 250 m, à la vitesse de 13 m/s, les autres conditions étant identiques à celles de la figure 7.

Fig. 9. — Variation de la force de frottement en fonction de la vitesse périphérique, sous diverses charges.

Fig. 10. — Variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse, dans des conditions expérimentales identiques à celles de la figure 9.

Fig. 11. — Influence de la vitesse de rotation du tambour sur la performance du sabot de freinage (en gardant constante la vitesse périphérique de travail et en variant le diamètre du tambour).

Fig. 12. — Influence de la vitesse périphérique du tambour sur la performance du sabot de freinage (en gardant la vitesse de rotation constante et en variant le diamètre du tambour).

Fig. 13. — Influence de la vitesse périphérique sur la performance (l'énergie emmagasinée) dans le cas de quelques matériaux de frein essayés expérimentalement.

Fig. 14. — Influence de la charge sur la performance des matériaux de frein.

Fig. 15. — Représentation schématique des formes de sabot permettant d'obtenir les divers angles d'enveloppement.

Fig. 16. — Influence de l'angle d'enveloppement du sabot sur sa capacité de freinage. Les diagrammes (*a*) et (*b*) correspondent aux formes (*a*) et (*b*) de la figure 15.

BIBLIOGRAFIE

1. O. PREOTESCU şi colaboratori, *Cîteva aspecte fundamentale ale proceselor de uzură.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *1*, 169—185 (1958).
2. V. M. GUDCENKO, I. V. KRAGHELSKI, *Bazele de creare a materialelor de fricţiune pentru frînele tensionate,* în *Frecarea şi uzura de maşini.* Culegerea **XII**, I.D.T., Bucureşti, 1959, 67—97.

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

ASUPRA SINTEZEI MECANISMELOR CURBELOR CICLICE SUPERIOARE

DE

CHR. PELECUDI şi V. I. CALCAN

Mecanismele pentru producerea curbelor ciclice se pot realiza uşor şi au posibilităţi multiple de reglare pentru redarea unei mari varietăţi de curbe. Mecanismul de bază pentru formarea curbelor ciclice constă din bare articulate acţionate prin roţi dinţate cu centrele în punctele de articulaţie şi cu dimensiunile în concordanţă cu condiţiile geometrice şi cinematice necesare. Pentru roţile legate de elementele $(p-1)$ şi $(p+1)$ trebuie să se respecte relaţiile

$$r_{p-1,p} + r_{p,p+1} = R_p \qquad \frac{r_{p-1,p}}{r_{p,p+1}} = \frac{\omega_{p+1} - \omega_p}{\omega_p - \omega_{p-1}}, \tag{1}$$

unde ω_p este viteza unghiulară şi R_p lungimea elementului p (fig. 1).

Din acest mecanism de bază pot deriva altele prin întrebuinţarea unor lanţuri cinematice cu proprietăţi îmbunătăţite şi dintre care o parte au fost studiate în lucrarea [1], respectînd însă schema de construcţie a mecanismului de bază. În acest fel vectorul punctului legat de elementul k este reprezentat prin

$$z = \sum_k R_k \, e^{i(\omega_k t + \theta_k)} . \tag{2}$$

În lucrarea menţionată ne-am ocupat şi de sinteza curbelor ciclice inferioare obţinute prin compunerea a două rotaţii sau o rotaţie şi o translaţie în conformitate cu o codificare a lor. Vom căuta să extindem rezultatele la compunerea a trei mişcări, rămînînd ca pentru curbele plane oarecare închise să întrebuinţăm metodele de aproximare. Ele vor fi reprezentate aproximativ de curbele ciclice superioare, după ce în prealabil se vor interpreta convenabil proprietăţile acestora : puncte multiple, puncte de intersecţie cu o dreaptă etc.

Pentru desene ce nu cer o mare precizie, interesînd mai ales ca motive decorative, se poate executa sinteza aproximativă prin compunerea a trei mișcări pentru o curbă medie caracteristică, peste care se aplică influențele celei de-a patra mișcări, concretizată prin rotația unei bare, eventual de lungime mai mică dar de viteză unghiulară mai mare, aceasta brodînd arce de cicloidă multiple pe curba fundamentală. O dată stabilită curba de bază se pot varia în trepte mici lungimile sau vitezele unghiulare ale vectorilor componenți pentru a se tinde la deformarea dorită a curbei.

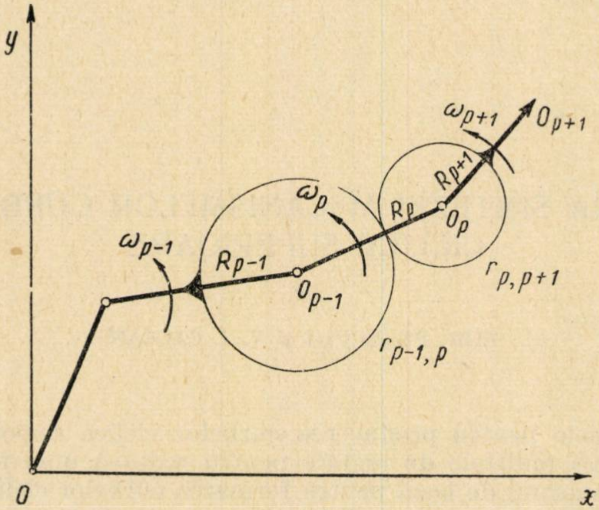


Fig. 1

Pentru ciclice algebrice de ordinul 3 cu axă de simetrie de rotație, la care vectorii în poziție inițială sînt coliniari, fie $R_1 > R_2 > R_3$ și ω_1; ω_2; ω_3 lungimile și vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului, respectiv N_1; N_2; N_3. Numărul de rotații complete pînă la închiderea curbei va fi

$$N_p = \omega_p \frac{D}{\Delta} \tag{3}$$

unde D este numitorul comun iar Δ factorul comun al vitezelor unghiulare. Numărul axelor de simetrie M este cel mai mare factor comun al diferențelor $N_1 - N_3$ și $N_2 - N_3$.

$$N_1 = MK_1 + N_3; \quad N_2 = MK_2 + N_3, \tag{4}$$

N_1; N_2; N_3 fiind întregi și prime între ele. Unghiul la centru între două axe de simetrie este deci $2\pi/M$. Pe aceste axe avem

$$|z| = \sum_{1}^{3} \pm R_i,$$

după sensul vectorilor coliniari din poziția inițială.

Considerînd cazul $R_E = R_1 + R_2 + R_3$, axele după care $\overline{R}_E = R_1 + R_2 - R_3$ se găsesc numai pentru K_1 și K_2 numere impare. Pentru axele după care raza cercului înscris (care poate fi și negativă) este $R_I = R_1 - R_2 - R_3$ rezultă K_1 impar și K_2 par. Situația inversă cu K_1 par și K_2 impar corespunde axelor după care $\overline{R}_I = R_1 - R_2 + R_3$; $R_I < \overline{R}_I < \overline{R}_E < R_E$. Întrucît în poziția inițială vectorii coliniari pot avea sensuri diferite în formulele de mai sus se vor considera corespunzător mărimile R_1, R_2 și R_3 pozitive sau negative.

Alte proprietăți ale curbelor ciclice arată că cele de ordinul 3 se pot produce în trei feluri diferite prin rostogolirea a două ciclice inferioare una pe cealaltă fără alunecare, că au un număr de puncte de intersecție cu o dreaptă cel mult 2 max $|N_p|$ și un număr de tangente duse dintr-un punct cel mult 2 max $|N_p|$ sau 2 M max $\{|K_p|$ sau $|K_1 - K_2|\}$.

Pentru ciclicele superioare vom întrebuința metoda de aproximare bazată pe dezvoltarea în serie Fourier cu termeni complecși a curbelor plane închise. Desigur aproximația va fi cu atît mai bună cu cît convergența seriei este mai rapidă și cu cît întrebuințăm mai mulți termeni, ceea ce corespunde considerării unei curbe ciclice de ordin mare. În acest fel conform proprietății seriilor Fourier, poligoanele trigonometrice ai căror coeficienți corespund celor ai seriei Fourier, ne dau abaterea medie pătratică cea mai mică. La considerarea mai multor elemente construcția mecanismului se complică și va trebui să alegem între o precizie mare și o construcție mai complicată care însă de multe ori micșorează precizia.

Aproximarea pe baza dezvoltării în serie Fourier ține seama la înscrierea mecanică nu numai de forma curbei dar și de descrierea ei în timp. În adevăr, dezvoltarea

$$z = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m e^{imt}, \tag{5}$$

ne dă la un moment dat și poziția punctului ce generează curba prezentînd în plus și posibilitatea determinării rapide a vitezelor și accelerațiilor

$$\dot{z} = i \sum_{-\infty}^{+\infty} m\, C_m e^{imt}, \tag{6}$$

$$\ddot{z} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} m^2 C_m e^{imt}, \tag{7}$$

ale căror hodografe sînt aproximate prin ciclice de același ordin, obținute cu aceleași viteze unghiulare dar cu lungimea elementelor multiplicată respectiv cu m și m^2.

Pentru o curbă plană oarecare determinarea coeficienților Fourier este dată de:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z e^{-imt}\, dt, \tag{8}$$

ceea ce corespunde în cazul poligoanelor (fig. 2) la

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{T_{k-1}}^{T_k} [z_{k-1} + s_k(t)\, e^{i\alpha_k}]\, e^{-imt} dt, \tag{9}$$

deoarece pentru latura de ordin k:

$$z = z_{k-1} + s_k(t)\, e^{i\alpha_k} \quad ; \quad z_k = z_{k-1} + L_k\, e^{i\alpha_k}, \tag{10}$$

cu notațiile din figura 2, $s_k(t)$ reprezentînd legea spațiului parcurs pe latura k.

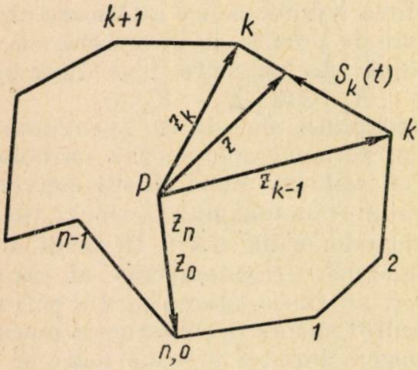


Fig. 2

Pentru $m \neq 0$ printr-o integrare prin părți se ajunge la

$$C_m = \frac{1}{2\pi m i} \int_0^{2\pi} \dot{z}\, e^{-imt} dt \tag{11}$$

și respectiv

$$C_m = \frac{1}{2\pi m i} \sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha_k} \int_{T_{k-1}}^{T_k} v_k(t)\, e^{-imt} dt, \tag{12}$$

unde $\dot{s}_k(t) = v_k(t)$ este viteza pe latura k.

Coeficientul C_0 va putea fi considerat nul, condiția sa de anulare precizînd poziția centrului P al curbei sau poligonului plan închis.

În vîrfurile poligonului vectorul viteză prezintă discontinuități prin schimbarea de direcție cu unghiul $(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ ceea ce micșorează convergența seriei Fourier. Pentru aceasta se va căuta ca în vîrfurile poligonului viteza să se anuleze, iar dacă aceste condiții vor fi păstrate și pentru derivatele superioare ale legii spațiului

$$\begin{aligned} &s_k(T_k) = L_k\,; \quad s_k'(T_k) = 0\,; \quad \ldots\,; \quad s_k^{(p-1)}(T_k) = 0\,; \quad s_k^{(p)}(T_k) \neq 0 \text{ sau } 0 \\ &s_k(T_{k-1}) = 0\,; \quad s_k'(T_{k-1}) = 0\,; \ldots\,; \quad s_k^{(p-1)}(T_{k-1}) = 0\,; \quad s_k^{(p)}(T_{k-1}) = 0 \text{ sau } \neq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

convergența va fi cu atît mai rapidă, întrucît pentru funcțiile periodice cu $(p-1)$ derivate continue și cu derivata de ordinul (p) continuă pe porțiuni serie numerică $\sum |C_m|\, m^{p-1}$ este convergentă.

Vom avea deci

$$C_m = \frac{1}{2\pi (mi)^p} \sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha_k} \int_{T_{k-1}}^{T_k} s_k^{(p)}(t)\, e^{-imt} dt, \tag{14}$$

și la o transformare de variabilă $t = \tau + T_{k-1}$

$$C_m = \frac{1}{2\pi (mi)^p} \sum_{k=1}^{n} e^{i\,\alpha_k - mT_{k-1})} \int_0^{T_k - T_{k-1}} s_k^{(p)}(\tau + T_{k-1})\, e^{-im\tau} d\tau\,. \tag{15}$$

În ceea ce privește modul de parcurgere a laturii vom presupune două cazuri.

a) Să considerăm intervalul de timp pentru parcurgerea laturilor constant, independent de lungimea lor

$$T_k - T_{k-1} = \frac{2\pi}{n}\,; \quad T_k = k\,\frac{2\pi}{n} \tag{16}$$

şi

$$s_k^{(p)}(\tau + T_{k-1}) = L_k\, s^{(p)}(\tau), \tag{17}$$

în care $s^{(p)}(\tau)$ păstrează condițiile de continuitate

$$\begin{gathered} s(0) = 0\,; \quad s'(0) = 0\,; \quad \ldots\,; \quad s^{(p-1)}(0) = 0\,; \quad s^{(p)}(0) \neq 0, \\ s\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1\,; \quad s'\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0\,; \quad \ldots\,; \quad s^{(p-1)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0\,; \quad s^{(p)}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \neq 0, \end{gathered} \tag{18}$$

ceea ce duce la

$$C_{m_p} = \frac{I_{m_p}\Sigma_m}{2\pi\,(mi)^p}, \tag{19}$$

$$I_{m_p} = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} s^{(p)}(\tau)\, e^{-im\tau}\, d\tau \tag{20}$$

$$\Sigma_m = \sum_{k=1}^{n} L_k\, e^{i\left[\alpha_k - m\,(k-1)\frac{2\pi}{n}\right]}, \tag{21}$$

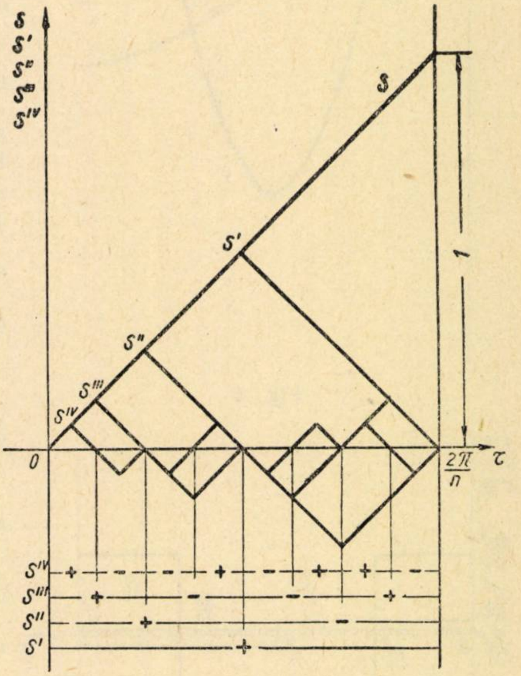


Fig. 3

Pentru construirea funcției $s(\tau)$ care îndeplinește condițiile (18) se poate urmări figura 3, în care atît funcția cît și derivatele sale sînt schematizate prin linii drepte. Pe intervalul de timp $\frac{2\pi}{n}$ se poate interpreta legea spațiului ca reprezentată printr-un sfert de sinusoidă, prima derivată ca jumătate de sinusoidă, derivata a doua ca o sinusoidă completă, derivata a treia ca două sinusoide simetrice față de centrul intervalului și așa mai departe. O altă interpretare schematizată în partea inferioară a figurii corespunde considerării primei derivate constantă pozitivă pe lungimea întregului interval, derivatei secunde constantă pozitivă pe prima jumătate a intervalului și constantă negativă pe a doua jumătate a intervalului și așa mai departe. Legea de formare a diagramei constă în trecerea la o derivată superioară prin obținerea dintr-un interval pozitiv a două intervale în ordinea pozitiv-negativ şi invers pentru intervalul negativ.

Pentru calculul integralelor I_{m_p} din formula coeficienţilor C_{m_p} conform primei sau a doua părţi din schema expusă, avem cazurile din tabela 1 şi figurile 4 şi 5.

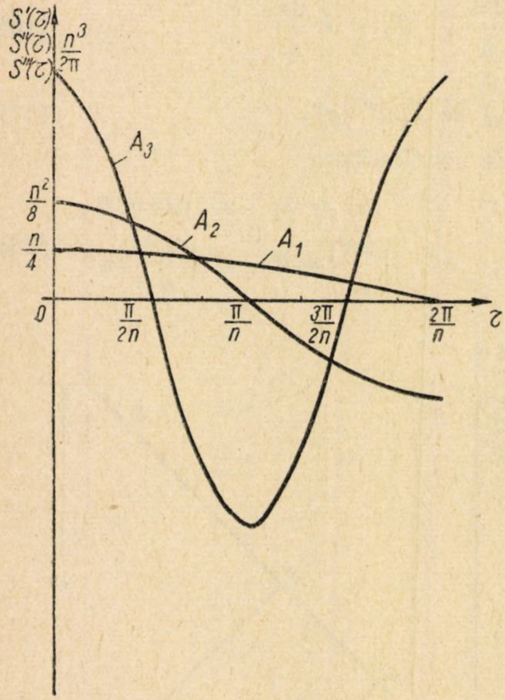


Fig. 4

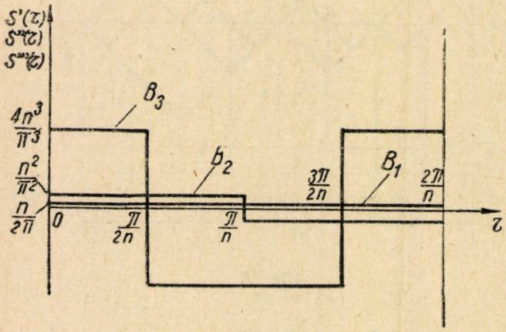


Fig. 5

Pentru calculul sumei $\sum_m$ care intră în formula coeficienţilor C_{m_p} se poate întrebuinţa metoda grafică prin construcţia poligonului de laturi L_k şi unghiuri respectiv $\alpha_k - m(k-1)\frac{2\pi}{n}$ legat direct de poligonul iniţial aşa cum se exemplifică în figura 6.

Obţinerea sumei $\sum_m$ se reduce de asemenea la cazurile :

— poligoane cu σ (par) simetrii de rotaţie, deci cu $\frac{n}{\sigma}$ laturi cuprinse între două axe de simetrie. Pentru obţinerea unghiului α'_k făcut cu orizontala de simetrica laturii L_k de unghi α_k, faţă de axa de simetrie ce face unghiul $\gamma = \frac{2\pi}{\sigma}$ cu orizontala avem relaţia :

$$\alpha'_k = 180 + 2\gamma - \alpha_k .$$

La o nouă simetrie, ceea ce corespunde unui unghi de rotaţie 2γ se obţine : $\alpha''_k = 2\gamma + \alpha_k$.

Ordinul laturii L_k la prima simetrie este $\frac{2n}{\sigma} - k + 1$, iar la a doua simetrie este $\frac{2n}{\sigma} + k$, după care se continuă prin adăugarea unui număr întreg de $\frac{2\pi}{\sigma}$. Rezultă în felul acesta în suma amintită două progresii geometrice, reprezentînd primele două grupuri de construcţie de la început, celelalte obţinîndu-se prin rotaţii de unghiuri 2γ, 4γ etc., a căror sumă este $\frac{\sigma}{2}$ dacă $m = 1 + \lambda\frac{\sigma}{2}$, anulîndu-se în

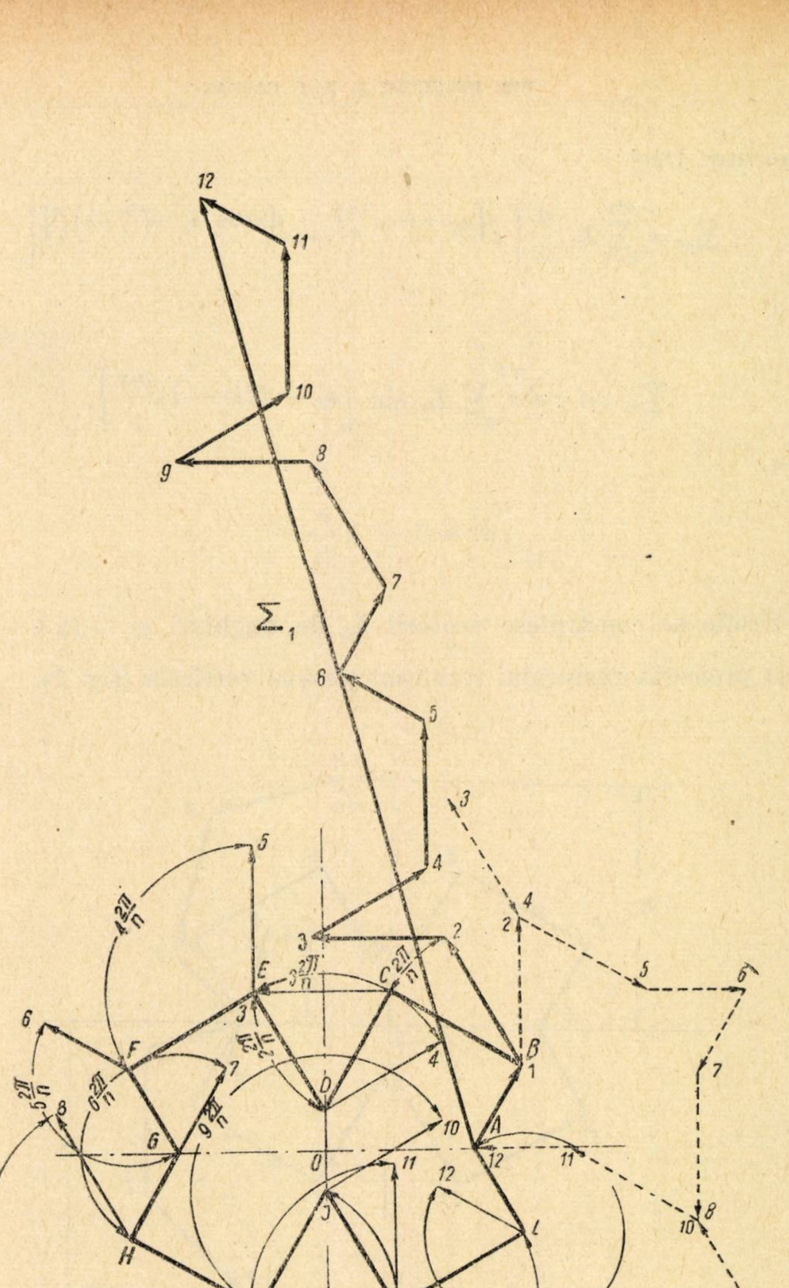

12
11
10
9
8
7
Σ_1
6
5
4
3
2
1
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
0
$\frac{2\pi}{n}$
$2\frac{2\pi}{n}$
$3\frac{2\pi}{n}$
$4\frac{2\pi}{n}$
$5\frac{2\pi}{n}$
$6\frac{2\pi}{n}$
$7\frac{2\pi}{n}$
$8\frac{2\pi}{n}$
$9\frac{2\pi}{n}$
$10\frac{2\pi}{n}$
$11\frac{2\pi}{n}$

Fig. 6

caz contrar. Deci

$$\Sigma_m = \sum_{k=1}^{n/\sigma} L_k \frac{\sigma}{2}\left[e^{i\left[\alpha_k - m(k-1)\frac{2\pi}{n}\right]} + e^{i\left[\pi + 2\gamma - \alpha_k - m\left(\frac{2n}{\sigma} - k\right)\frac{2\pi}{n}\right]}\right] \tag{22}$$

sau

$$\Sigma_m = i\,\sigma\, e^{i\frac{m\pi}{n}} \sum_{k=1}^{\frac{n}{\sigma}} L_k \sin\left[\alpha_k - (2k-1)\frac{m\pi}{n}\right], \tag{23}$$

pentru

$$m = 1 + \lambda \frac{\sigma}{2}. \tag{24}$$

Grafic se construiesc vectorii L_k de unghiuri $\alpha_k - (2\,k - 1)\,\frac{m\pi}{n}$ şi se ia proiecţia vectorului rezultant pe axa verticală (fig. 7).

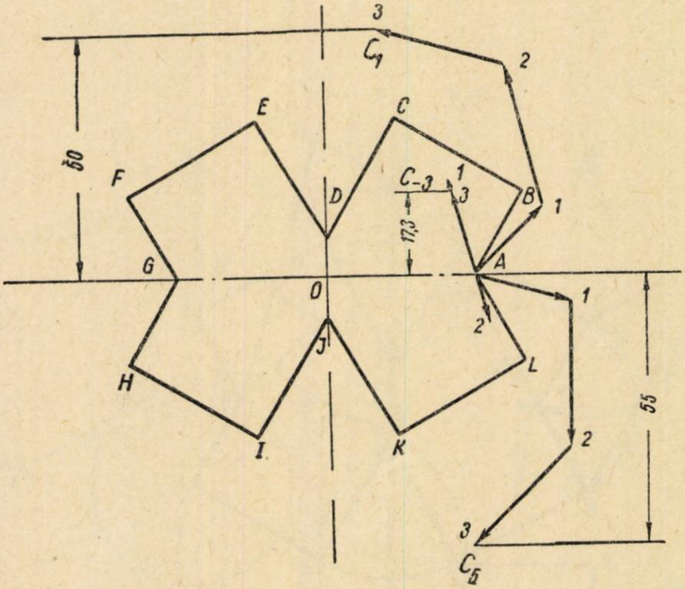


Fig. 7

— liniile frînte pot fi considerate ca poligoane degradate, fiind parcurse de două ori, dus şi întors. Latura k este parcursă o dată la ducere şi apoi la întoarcere ca latură de ordinul $n - k + 1$ şi de unghi $\alpha_{k'} = \pi + \alpha_k$.

De aici avem suma

$$\sum_m = -2ie^{i\frac{m\pi}{n}}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} L_k \sin\ (2k-1)\frac{m\pi}{n}\, e^{i\alpha_k}\,. \tag{25}$$

b) Să considerăm intervalul de timp variabil în funcţie de lungimea laturei respective.

— pentru viteză constantă :

$$s_k'(t) = v = \frac{L}{2\pi}, \tag{26}$$

$$T_k = T_{k-1} + 2\pi\frac{L_k}{L}, \tag{27}$$

$$C_{m_v} = -\frac{iv}{\pi m^2}\sum_{k=1}^{n} e^{i\left[\alpha_k - m\frac{T_k+T_{k-1}}{2}\right]} \sin m\pi\frac{L_k}{L}; \tag{28}$$

— pentru acceleraţie constantă

$$a = \left[\frac{\sum_1^n \sqrt{L_k}}{\pi}\right]^2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned} s_k''(t) &= +a \quad \text{pe intervalul de la } T_{k-1} \text{ la } \frac{T_k+T_{k-1}}{2} \\ s_k''(t) &= -a \quad \text{pe intervalul de la } \frac{T_k+T_{k-1}}{2} \text{ la } T_k\,, \end{aligned} \tag{30}$$

$$T_k = T_{k-1} + 2\pi\frac{\sqrt{L_k}}{\sum_1^n \sqrt{L_k}}, \tag{31}$$

$$C_{m_a} = -\frac{2ia}{\pi m^3}\sum_{k=1}^{n} e^{i\left[\alpha_k - m\frac{T_k+T_{k-1}}{2}\right]} \sin^2\frac{m\pi}{2}\,\frac{\sqrt{L_k}}{\sum_1^n \sqrt{L_k}}\,. \tag{32}$$

La poligoanele regulate ambele cazuri (*a* şi *b*) dau următoarea soluţie :

$$C_{m_p} = \frac{ne^{i\alpha} l\, I_{m_p}}{2\pi\,(mi)^p} \tag{33}$$

deoarece

$$\alpha_k = \alpha + (k-1)\frac{2\pi}{n} \quad \text{şi} \quad \sum_m = ne^{i\alpha} \quad \text{pentru } m = 1 + \lambda n \tag{34}$$

unde unghiul α este făcut de prima latură cu orizontala şi poate fi luat arbitrar corespunzînd unei rotaţii a figurii.

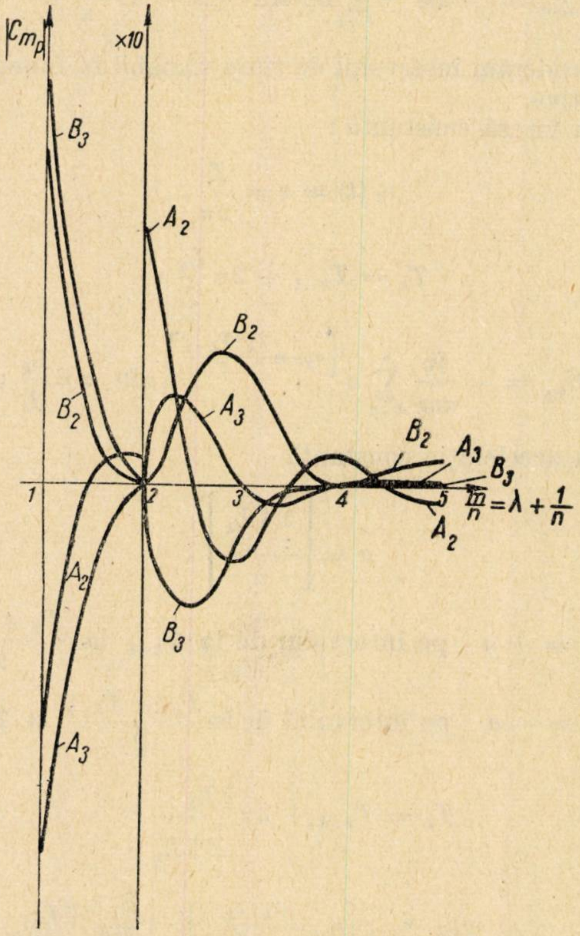


Fig. 8

Înlocuind valorile integralei I_{m_p} obţinem (fig. 8):

$$C_{m_1} = \frac{l}{2\pi} \frac{e^{-im\frac{2\pi}{n}} + 4\frac{m}{n} i}{\frac{m}{n}\left[16\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right]}, \tag{35}$$

$$C_{m_2} = \frac{l}{2\pi} \frac{\cos \frac{m\pi}{n}}{\frac{m}{n}\left[4\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right]} e^{-\frac{im\pi}{n}} \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \tag{36}$$

$$C_{m_3} = \frac{l}{2\pi^2} \frac{\sin \frac{m\pi}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2\left[\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right]} e^{-i\frac{m\pi}{n}}, \tag{37}$$

sau

$$C_{m_1} = \frac{l}{2\pi^2} \frac{\sin \frac{m\pi}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2} e^{-i\frac{m\pi}{n}}, \tag{38}$$

$$C_{m_2} = \frac{2l}{\pi^3} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^3} e^{-i\frac{m\pi}{n}} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}, \tag{39}$$

$$C_{m_3} = \frac{16}{\pi^4} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{4n} \sin \frac{m\pi}{2n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^4} e^{-i\frac{m\pi}{n}} \tag{40}$$

Pentru curbele plane formula (11) devine :

$$C_m = \frac{1}{2\pi mi} \int_0^{2\pi} v(t)\, e^{i[\alpha(t) - mt]}\, dt, \tag{41}$$

unde în punctele de întoarcere ale curbei, va trebui să considerăm că viteza și eventual derivatele următoare se anulează.

OBSERVAŢII

— Deoarece vectorul de poziție al unui poligon este dat de $z = z_{k-1} + s_k(t)\, e^{i\alpha_k}$ rezultă că hodografele vectorilor reprezentînd derivatele :

$$\dot{z} = \dot{s}_k(t)\, e^{i\alpha_k} \quad ; \quad \ddot{z} = \ddot{s}_k(t)\, e^{i\alpha_k},$$

vor apărea ca o variație a modulului în timp pe direcțiunea unghiului α_k.

Tabela 1

A_1	$0 \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = \sin\frac{n\tau}{4}$; $s'(\tau) = \frac{n}{4}\cos\frac{n\tau}{4}$	$I_{m_1} = -\frac{e^{-im\frac{2\pi}{n}} + 4\left(\frac{m}{n}\right)i}{16\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}$
A_2	$0 \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = \sin^2\frac{n\tau}{4}$; $s'(\tau) = \frac{n}{4}\sin\frac{n\tau}{2}$; $s''(\tau) = \frac{n^2}{8}\cos\frac{n\tau}{2}$	$I_{m_2} = -\frac{im\cos\frac{m\pi}{n}}{4\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}\, e^{-i\frac{m\pi}{n}}$
A_3	$0 \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = \frac{1}{2\pi}(n\tau - \sin n\tau)$; $s'(\tau) = \frac{n}{\pi}\sin^2\frac{n\tau}{2}$ $s''(\tau) = \frac{n^2}{2\pi}\sin n\tau$; $s'''(\tau) = \frac{n^3}{2\pi}\cos n\tau$	$I_{m_3} = \frac{mn\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi\left[\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right]}\, e^{-i\frac{m\pi}{n}}$
B_1	$0 \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = v\tau$; $s'(\tau) = v$; $v = \frac{n}{2\pi}$; $v_k = vL_k$	$I_{m_1} = \frac{n}{\pi m}\sin\frac{m\pi}{n}\, e^{-i\frac{m\pi}{n}}$
B_2	$0 \div \frac{\pi}{n}$	$s(\tau) = \frac{a\tau^2}{2}$; $s'(\tau) = a\tau$; $s''(\tau) = a$; $a = \frac{n^2}{\pi^2}$; $a_k = aL_k$	$I_{m_2} = \frac{4n^2 i}{\pi^2 m}\sin^2\frac{m\pi}{2n}\, e^{-i\frac{m\pi}{n}}$
	$\frac{\pi}{n} \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = -\frac{a}{2}\left(\tau - \frac{2\pi}{n}\right)^2 + 1$; $s'(\tau) = -a\left(\tau - \frac{2\pi}{n}\right)$; $s''(\tau) = -a$	
B_3	$0 \div \frac{\pi}{2n}$	$s(\tau) = \frac{b\tau^3}{6}$; $s(\tau) = \frac{t\tau^2}{2}$; $s''(\tau) = b\tau$; $s'''(\tau) = b$	$I_{m_3} = -\frac{32n^3}{\pi^3 m}\sin^2\frac{m\pi}{4n}\sin\frac{m\pi}{2n}\, e^{-i\frac{n\pi}{n}}$
	$\frac{\pi}{2n} \div \frac{3\pi}{2n}$	$s(\tau) = -\frac{b\left(\tau - \frac{\pi}{n}\right)^3}{6} + b\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\tau - \frac{\pi}{2n}\right)$; $s'(\tau) = -b\frac{\left(\tau - \frac{\pi}{n}\right)^2}{2} + b\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$; $b = \frac{4n^3}{\pi^3}$; $s''(\tau) = -b\left(\tau - \frac{\pi}{n}\right)$; $s'''(\tau) = -b$ $b_k = bL_k$	
	$\frac{3\pi}{2n} \div \frac{2\pi}{n}$	$s(\tau) = b\frac{\left(\tau - \frac{2\pi}{n}\right)^3}{6} + 1$; $S'(\tau) = b\frac{\left(\tau - \frac{2\pi}{n}\right)^2}{2}$; $s''(\tau) = b\left(\tau - \frac{2\pi}{n}\right)$; $s'''(\tau) = b.$	

— De fapt $\frac{n}{\pi} I_{m_p}$ sînt coeficienții Fourier ai dezvoltării funcției $s^{(p)}(\tau)$ pe intervalul $0 \div \frac{2\pi}{n}$. În condițiile părții a doua a schemei expuse forma generală a integralei I_{m_p} este

$$I_{m_p} = i^{(p-1)} \frac{c_p}{m} 2^p \sin^2 \frac{m\alpha}{2} \sin m\alpha \sin 2\, m\alpha \ldots \sin 2^{p-3} m\alpha\, e^{-im2^{p-2}\alpha}, \quad (42)$$

în care $\alpha = \frac{\pi}{n} \frac{1}{2^{p-2}}$ este intervalul pe care funcția $s^{(p)}(\tau)$ este constantă și egală cu $\pm c_p$.

Deoarece :

$$c_p = \left(\frac{n}{\pi}\right)^p 2^{\frac{(p-2)(p+1)}{2}}, \quad (43)$$

rezultă :

$$C_{m_p} = \frac{\Sigma_m}{2\pi m i} \frac{\sin \alpha_{p-1}}{\alpha_{p-1}} \prod_{q=1}^{p-1} \frac{\sin \alpha_q}{\alpha_q} e^{-i\alpha_0}, \quad (44)$$

cu

$$\alpha_q = \frac{m\pi}{n\, 2^q}.$$

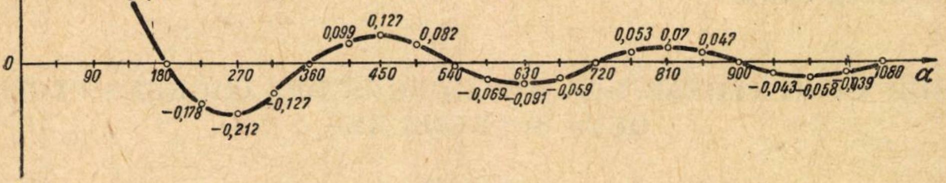


Fig. 9

Termenii din produsul Π variază după funcția $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (fig. 9).

APLICAŢIE

În figura 10 prezentăm un dreptunghi realizat pe cale mecanică prin compunerea a patru rotații de viteze unghiulare -3; -1; $+1$ şi $+3$.

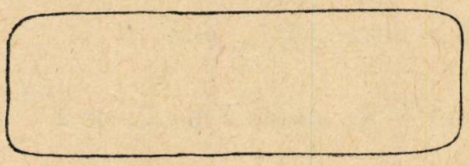


Fig. 10

Coeficienţii seriei Fourier, obţinuţi prin aplicarea formulelor (19) şi (23) cu $I_{m_p} = I_{m_2} = \frac{4\,n^2 i}{\pi^2 m} \sin^2 \frac{m\pi}{2n}\, e^{-i\frac{m\pi}{n}}$ (tabela 1) sînt

$$C_{-3} = -2{,}88\,;\quad C_{-1} = +\,11{,}6\,;\quad C_1 = +\,23{,}2\,;\quad C_3 = -1{,}44.$$

Primită la redacţie la 25 mai 1960.

К СИНТЕЗУ МЕХАНИЗМОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ КРИВЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

Исходя из свойств циклических кривых высшего порядка, излагается их синтез. Рассматриваются, в частности, циклические кривые третьего порядка, а для остальных применяется приближенный метод рядов Фурье для изображения замкнутых плоских кривых.

Рассматривается, главным образом, случай плоских многоугольников, причем устанавливаются условия быстрой сходимости, иллюстрируя их на диаграммах и рисунках. Также приводятся графические построения, облегчающие вычисление коэффициентов Фурье.

Работа заканчивается рядом применений, делающих конкретной изложенную теорию. Представленные рисунки были получены механическим путем.

SUR LA SYNTHÈSE DES MÉCANISMES DES COURBES CYCLIQUES SUPÉRIEURES

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ les propriétés des courbes cycliques supérieures, les auteurs en font une synthèse qu'ils particularisent pour les cycliques d'ordre III, tout en employant pour les autres la mé-

thode approximative des séries de Fourier appliquée à la représentation des courbes planes fermées.

Ils s'occupent tout spécialement du cas des polygones plans, pour lesquels ils établissent des conditions de convergence rapide, dont ils donnent des exemples, illustrés par des diagrammes et des figures. Ils donnent aussi des constructions graphiques, destinées à faciliter le calcul des coefficients de Fourier.

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, V. I. CALCAN, *Contribuții la sinteza mecanismelor curbelor ciclice*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, *3* (1960).
2. S. BLOCH, *Angenäherte Synthese von Mechanismen*. Verlag Technik, Berlin, 1951.
3. MEYER ZUR CAPELLEN, *Die Zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven*. Z.A.M.M., *1/2* (1959).
4. W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien*. Österr. Ing. — Arch. **I** (1947).
5. — *Höhere Radlinien als Näherungskurven*. Österr. Ing. Arch., **IV** (1950).

STUDII

ELASTICITATE - PLASTICITATE - REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA COMPORTĂRII REOLOGICE A BARELOR SCURTE DE CUPRU SUPUSE LA ȘOCURI CU MASE SOLIDE ȘI FLUIDE

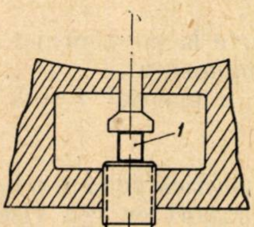
DE

M. MIŞICU

În literatura de specialitate există descrise diferite elemente teoretice privind comportarea mecanică a barelor scurte de cupru supuse la şocul maselor solide şi fluide.

În domeniul teoriei barelor scurte, rezultatele clasice sînt date în lucrarea lui C. Cranz [1] privind determinarea prin procedee semistatice a presiunii gazelor cu ajutorul unor cilindri de cupru care se deformează sub acțiunea presiunii gazelor prin intermediul unui piston (fig. 1).

Pentru legea de variație a presiunilor în timp, R. Sarrau şi P. Vieille admit, pentru simplificarea calculelor, o alură mai simplă (fig. 2). Măsurătorile arată însă o comportare complexă a crusherelor supuse la şoc. Pentru precizarea ideilor, în figurile 3,4,5 sînt reproduse variațiile deplasărilor, vitezelor şi accelerațiilor în bare scurte pe baza unor măsurători cunoscute în literatură, iar în fig. 6 raportul între lucrul mecanic de deformare dinamic şi static pentru barele de cupru de Ø 15, $l = 10$; Ø 8, $l = 3$ mm.



1 bară scurtă de cupru

Fig. 1

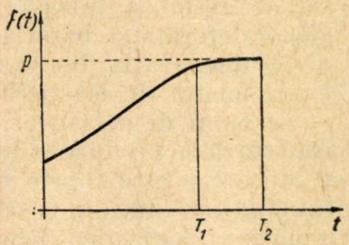


Fig. 2

O dată cu dezvoltarea procedeelor experimentale s-au putut determina cu precizie variaţiile deplasărilor vitezelor şi acceleraţiilor în barele scurte supuse la şoc. În lucrarea [2], L. M. Şestopalov citează o serie de procedee experimentale, interesînd acest subiect, cum ar fi încercările lui E. T. Habib asupra barelor scurte şi ale lui A. Nadai şi M. J. Manjoine pentru epruvete de cupru tensionate cu diferite viteze.

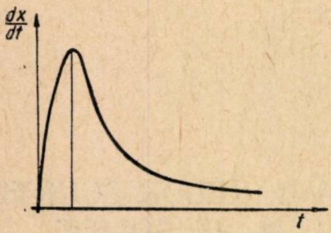


Fig. 3

Pe baza unor serii de încercări la şoc asupra barelor scurte de cupru, am fost conduşi la elaborarea unei teorii reologice a acestora, comportînd o completare a teoriei descrise în [2] în cadrul căreia se ţine seama atît de fenomene plastice, cît şi vîscoase şi se corectează o serie de inadvertenţe care există în integrarea ecuaţiilor mişcării. Rezultatele sînt comparabile astfel efectiv cu datele experimentale.

Vom utiliza notaţiile:

m = masa pistonului (berbecului),
u = deplasarea pistonului (berbecului),
$v = \frac{\partial u}{\partial t}$ = viteza pistonului (berbecului),
l_0 = lungimea iniţială a barei scurte,
R = rezistenţa totală care o opune bara scurtă,
t = timpul,
σ = tensiunea în bare scurte,
σ_0 = tensiunea în crusher în momentul atingerii limitei plastice,
$s(t)$ = secţia transversală a barei scurte la momentul t,
l = lungimea crusherului la momentul,
Δl = scurtarea barei scurte,
$p = f(t)$ = presiunea aplicată barei scurte la momentul t în kg,
$\varepsilon = u/l_0$ = deformaţia barei scurte la momentul,
ε_0 = deformaţia barei scurte la momentul $t = 0$,
E = modul de elasticitate,
τ = timp de relaxare.

În bara scurtă se produce o deformaţie elastică pe care o considerăm instantanee, deoarece este foarte rapidă în raport cu cea viscoplastică. În momentul cînd tensiunea în crusher atinge valoarea σ_0 se produce fenomenul deformării viscoplastice. Reacţiunea crusherului este

$$R = \sigma S, \tag{1}$$

unde s este secţia la momentul t. Vom presupune că între secţia $S(t)$ şi secţia iniţială subzistă o relaţie liniară de forma

$$S = S_0 (1 + q\varepsilon), \tag{2}$$

coeficientul q deducîndu-se pe baza ipotezei că volumul se conservă ceea ce este suficient de just în cazul marilor deformaţii iar că S reprezintă o secţie

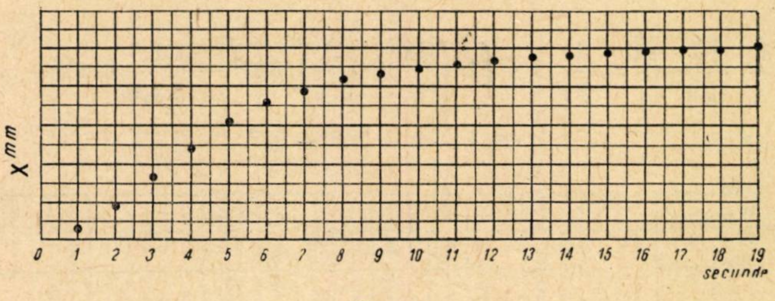


Fig. 4

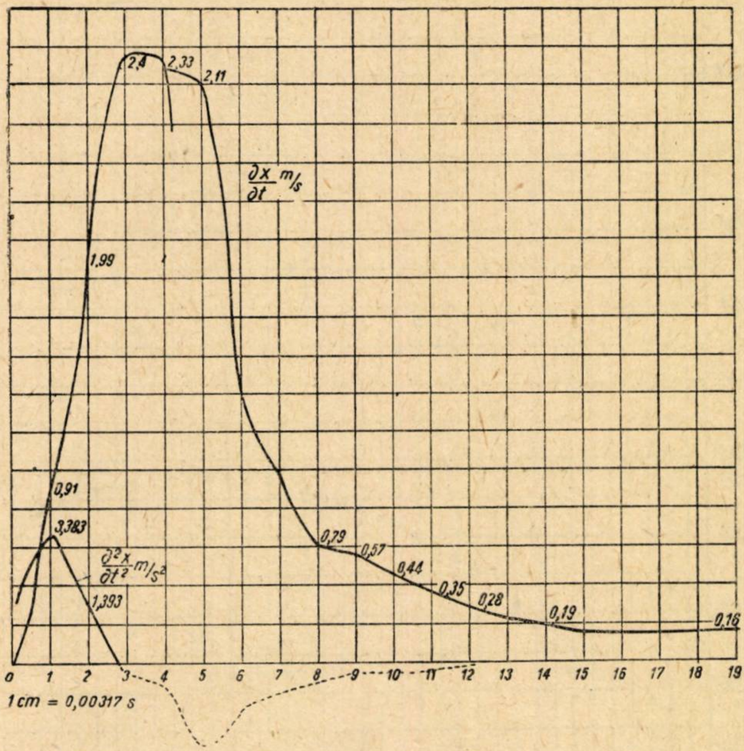


Fig. 5

medie a cilindrului deformat echivalent cu un cilindru de înălţime $l_0 - \Delta l$

$$S_0 l_0 = S\,(l_0 - \Delta l), \tag{3}$$

sau

$$1 = (1 + q\,\varepsilon)\;(1 - \varepsilon) \approx 1 + (q - 1)\;\;\varepsilon - q^2\,\varepsilon^2, \tag{4}$$

de unde se deduce ecuaţia

$$q^2\varepsilon - q + 1 = 0, \tag{5}$$

şi deci

$$q = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\left[1-\left(1-\frac{4\varepsilon}{2}+\frac{1.1}{2.4}\right)(4\varepsilon)^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}(4\varepsilon)^3+\ldots\right] \tag{6}$$

$$= 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3.$$

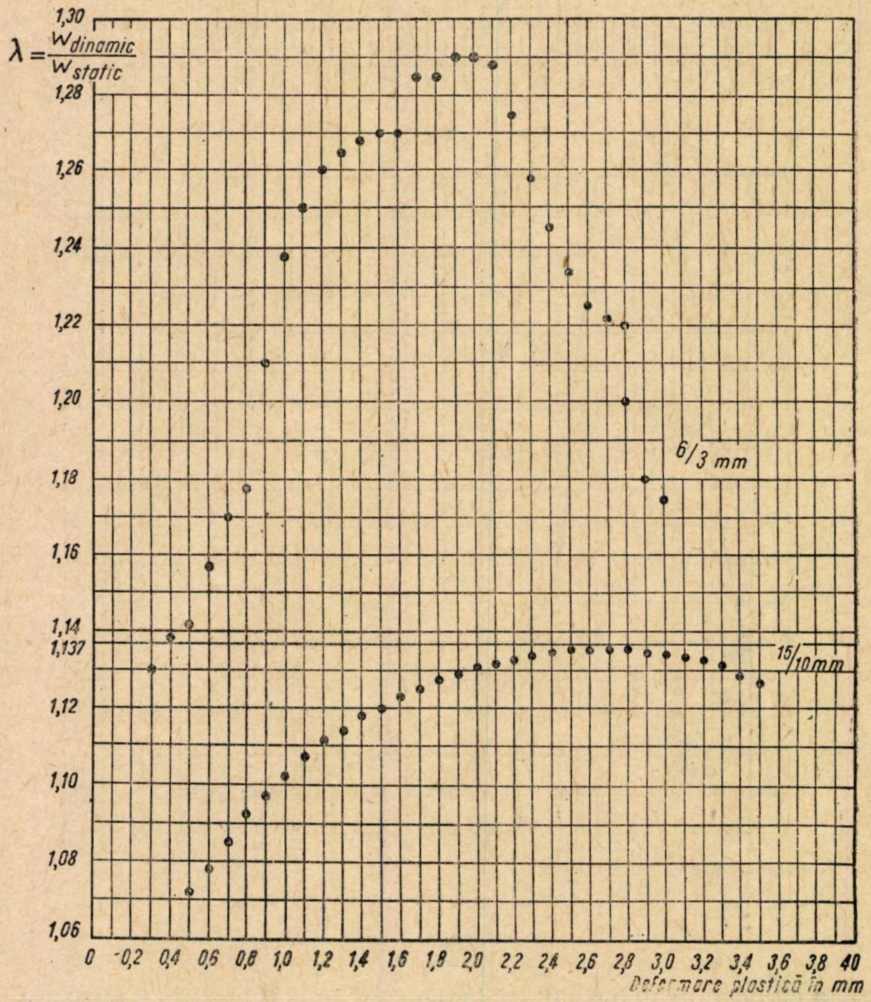


Fig. 6

Deformaţia crusherului poate fi în formă de butoi sau hiperboloid. În cazul cuprului se poate admite un model reologic maxvellian dat de următoarea legătură între tensiuni şi deformaţii:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma - \sigma_0) = E\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon - \varepsilon_0') - \frac{\sigma - \sigma_0}{\tau}; \quad \sigma > \sigma_0 \tag{7}$$

$$\tau = \tau_0\, e^{-(u_0 - u,\, th\, \sigma)/kT}$$

unde E este modulul de viscoplasticitate iar τ un timp de relaxare, funcţie de constanta lui Boltzmann, temperatură, energie de activare şi tensiune. În cele ce urmează vom presupune τ constant iar ε_0' neglijabil în raport cu deformaţiile ε (viscoplastic), ε_0' reprezentînd deformaţia elastică maximă.

Pentru $\sigma < \sigma_0$, vom admite un model Hookeian

$$\sigma = E'\varepsilon, \quad \sigma < \sigma_0 \tag{8}$$

E', fiind modulul de elasticitate.

Ecuaţia de mişcare este

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(1 + q\,\varepsilon) S_0 = f(t). \tag{9}$$

Pentru $\sigma < \sigma_0, f(t) = 0$, avem că $1 + q\,\varepsilon \approx 1$ iar

$$m\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \sigma_0 s_0 = 0, \; \sigma = E'\,\varepsilon \leqslant \sigma_0, \tag{10}$$

soluţiile u' fiind elastice, sînt neglijabile în raport cu u.

Pentru $\sigma > \sigma_0$ avem ecuaţia

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\sigma - \sigma_0)(1 + q\varepsilon) S_0 + \sigma_0 (1 + q\varepsilon) S_0 = f(t), \tag{11}$$

unde $\sigma - \sigma_0$ satisface ecuaţia (7).

În acest caz, deoarece $1 + q\,\varepsilon \leqslant 2$, putem spune că

$$\sigma_0(1 + q\,\varepsilon) S_0 \leqslant 2\sigma_0 S_0 = -\,q' m\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}, \; q' \leqslant 2, \tag{12}$$

ecuaţia (11) devenind

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - q'u') + (\sigma - \sigma_0)(1 + q\,\varepsilon) S_0 = f(t), \tag{13}$$

unde $q'\,u'$ este neglijabil în raport cu (u).

În definitiv, ecuaţia de mişcare va fi cu suficientă precizie

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\sigma - \sigma_0)(1 + q\,\varepsilon) S_0 = f(t). \tag{14}$$

Deoarece

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{l_0}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\tag{15}$$

ecuaţia (14) se mai scrie

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\sigma-\sigma_0}{ml_0}(1+q\varepsilon)S_0=\frac{f(t)}{ml_0}.\tag{16}$$

Prin derivare se obţine

$$\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3}+\frac{S_0}{ml_0}\left[(1+q\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}(\sigma-\sigma_0)+(\sigma-\sigma_0)\frac{\partial q\varepsilon}{\partial t}\right]=\frac{1}{ml_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}.\tag{17}$$

Ţinînd seama de (7) va rezulta următoarea ecuaţie diferenţială a deformaţiilor :

$$\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3}+\frac{S_0}{ml_0}(1+q\varepsilon)\left[\frac{E\partial\varepsilon}{\partial t}-\frac{\sigma-\sigma_0}{\tau}\right]+\frac{\partial q\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\dfrac{f(t)}{ml_0}-\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}}{1+q\varepsilon}=\frac{1}{ml_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\tag{18}$$

sau

$$\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3}+\frac{S_0}{ml_0}(1+q\varepsilon)E\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\left(\frac{f(t)}{ml_0}-\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^2}\right)\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{\dfrac{\partial q\varepsilon}{\partial t}}{1+q\varepsilon}\right)=\frac{1}{ml_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}.\tag{19}$$

Regrupînd termenii, (19) se mai scrie

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3}+\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{1+q\varepsilon}\frac{\partial q\varepsilon}{\partial t}\right]\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}+\left[\frac{S_0E}{ml_0}(1+q\varepsilon)+\right.\\ \left.+\frac{f(t)}{ml_0(1+q\varepsilon)}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{ml_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f(t)}{\tau}\right).\end{aligned}\tag{20}$$

Pentru rezolvare vom utiliza substituţia

$$p=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}.\tag{21}$$

Este clar că

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\cdot p\,;\quad\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3}=p\left(\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\right)^2+p^2\frac{\partial^2 p}{\partial\varepsilon^2}\tag{22}$$

şi ecuaţia (20) devine

$$\begin{aligned}p\frac{\partial^2 p}{\partial\varepsilon^2}+\left(\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau p}-\frac{1}{1+q\varepsilon}\cdot\frac{p+\varepsilon\dfrac{\partial q}{\partial t}}{p}\right)p\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}+\\ +\left[\frac{ES_0}{ml_0}(1+q\varepsilon)+\frac{f(t)}{ml_0(1+q\varepsilon)}\right]=\frac{1}{ml_0 p}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f(t)}{\tau}\right).\end{aligned}\tag{23}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(p\,\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)=\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)^2+p\,\frac{\partial^2 p}{\partial \varepsilon^2}, \tag{24}$$

avem

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(p\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)+\left[\frac{1}{\tau p}-\frac{1}{1+q\varepsilon}\left(q+\frac{\varepsilon\,\dfrac{\partial q}{\partial t}}{p}\right)\right]p\,\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}+$$
$$+\left[\frac{ES_0}{ml_0}(1+q\varepsilon)+\frac{f(t)}{ml_0(1+q\varepsilon)}\right]-\frac{1}{ml_0 p}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f(t)}{\tau}\right)=0. \tag{25}$$

Vom introduce o nouă variabilă

$$z=p\,\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}, \tag{26}$$

astfel că

$$\frac{p^2}{2}=\int z d\varepsilon+C. \tag{27}$$

Pe baza acestor notaţii rezultă din (16)

$$z=\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}=-\frac{S_0}{ml_0}(\sigma-\sigma_0)\ (1+q\varepsilon)+\frac{f(t)}{ml_0} \tag{28}$$

şi

$$\frac{p^2}{2}=C-\frac{S_0}{ml_0}\int(\sigma-\sigma_0)\ (1+q\varepsilon)\,d\varepsilon+\int\frac{f(t)}{ml_0}\,d\varepsilon. \tag{29}$$

Pentru $\varepsilon << 1$ se poate face aproximaţia

$$\int(\sigma-\sigma_0)\ (1+q\varepsilon)\,d\varepsilon\approx\left(\int(\sigma-\sigma_0)\ d\varepsilon=a(\varepsilon)\right)\approx k\varepsilon^2+k'\varepsilon^3, \tag{30}$$

unde a (ε) este energia deformaţiei pur viscoplastice iar k şi k' constante. Această aproximaţie este mai riguroasă decît cea considerată în literatură deoarece ţine seama de termenii liniari care intervin sensibil în cazul vitezelor mai mici de şoc şi pentru că această aproximaţie se aplică doar părţii pur viscoplastice a fenomenului, alternînd deci o parte mai restrînsă de rezultate.

În definitiv, se obţine

$$\frac{p^2}{2}=C-\frac{S_0 k}{ml_0}(\varepsilon^2+k'\varepsilon)+\frac{f(t)\varepsilon}{ml_0}. \tag{31}$$

Vom pune condiţiile iniţiale şi finale

$$\varepsilon=0,\ p=v_0/l_0, \tag{32}$$

$$p=0,\ \varepsilon=\varepsilon_0,\ f=f_0, \tag{33}$$

ε_0 fiind deformația remanentă iar f_0 presiunea la sfîrşitul procesului de detonație (se ia în general zero).

Vom avea atunci din (31), (32), (33)

$$C = \frac{v_0^2}{2l_0^2} = \frac{S_0}{ml_0} k (\varepsilon_0^2 + k'\varepsilon_0) - \frac{f_0\varepsilon_0}{ml_0} \tag{34}$$

relația (31) scriindu-se

$$p = \frac{v_0}{l_0} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 + (k' - f(t)/S_0k)\,\varepsilon}{\varepsilon_0^2 + (k' - f(0)/S_0k)\,\varepsilon_0}}. \tag{35}$$

Cu acestea ecuația (25) se scrie

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} + \left[\frac{1}{\dfrac{\tau\nu_0}{l_0}\sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon^2 + (k' - f(t)/S_0k)\,\varepsilon}{\varepsilon_0^2 + (k' - f(0)/S_0k)\varepsilon_0}}} - \frac{1}{1 + q\varepsilon}\left(q + \frac{\varepsilon\partial q}{p\partial t}\right)\right] z = \tag{36}$$

$$= -\frac{ES_0}{ml_0}\left[1 + q\varepsilon + \frac{f(t)}{ES_0(1 + q\varepsilon)} - \frac{1}{pES_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f(t)}{\tau}\right)\right]. \tag{37}$$

Soluția corespunzătoare este

$$z = e^{-\int pd\varepsilon}\left[\int Qe^{\int pd\varepsilon} . d\varepsilon + C\right], \tag{38}$$

unde

$$P = \frac{1}{\dfrac{\tau v_0}{l_0}\sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon^2 + (k' - f(t)/S_0k)\,\varepsilon}{\varepsilon_0^2 + (k' - f(0)/S_0k)\varepsilon_0}}} - \frac{1}{1 + q\varepsilon}\cdot\frac{\partial q\varepsilon}{\partial \varepsilon}, \tag{39}$$

$$Q = -\frac{ES_0}{ml_0}\left[1 + q\varepsilon + \frac{f(t)}{ES_0(1 + q\varepsilon)} - \frac{1}{pES_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f(t)}{\tau}\right)\right]\cdot \tag{40}$$

Integrînd, se obține

$$\int pd\varepsilon = \lambda \arcsin y - \ln(1 + q\varepsilon), \tag{41}$$

unde

$$\begin{gathered} \lambda = \frac{l_0\mathcal{E}_0}{\tau v_0}, \ \mathcal{E} = \varepsilon + (k' - f(t)/S_0k)/2, \\ \mathcal{E}_0 = \varepsilon_0 + (k' - f(0)/S_0k)/2, \ y = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}\cdot \end{gathered} \tag{42}$$

De asemenea, (38) devine

$$\begin{gathered} z = (1 + q\varepsilon)\, e^{-\lambda \arcsin y}\left[C - \frac{ES_0}{ml_0}\int \frac{e^{\lambda \arcsin y}}{1 + q\varepsilon} (1 + q\varepsilon) + \right. \\ \left. + \frac{f(t)}{ES_0(1 + q\varepsilon)} - \frac{1}{pES_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f(t)}{\tau}\right)\right]. \end{gathered} \tag{43}$$

În cele ce urmează vom studia doar cazul $f(t) = 0$. Pentru a efectua integrala ce apare în (43) vom pune

$$\arcsin y = x\text{; şi deci } \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin x,\ d\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos x \cdot dx. \tag{44}$$

Se calculează

$$\begin{aligned} \int e^{\lambda \arcsin y} \cdot d\varepsilon &= \mathcal{E}_0 \int dx \cdot \cos x \cdot e^{\lambda x} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{\lambda x}}{1+\lambda^2} (\lambda \cos x + \sin x) = \\ &= \frac{\mathcal{E}_0 e^{\lambda x}}{1+\lambda^2} (y + \lambda \sqrt{1-y^2}) \cdot \end{aligned} \tag{45}$$

Relaţia (45) devine

$$z = (1 + q\varepsilon) \left[C \cdot e^{-\lambda \arcsin y} - \frac{ES_0}{ml_0} \frac{\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2} (y + \lambda \sqrt{1-y^2}) \right]. \tag{46}$$

Tensiunea $\sigma - \sigma_0$ va avea valoarea dată de relaţia (16)

$$\sigma - \sigma_0 = - \frac{ml_0}{(1+g\varepsilon) S_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{E\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2} \left[y + \lambda \sqrt{1-y^2} - C' . e^{-\lambda \arcsin y} \right]. \tag{47}$$

Vom pune condiţia ca pentru $\varepsilon = 0$, $\sigma = \sigma_0 + \sigma_0'$ unde σ_0' este o limită suplimentară de plasticitate asupra căreia vom reveni. În acest caz avem cu

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{00} = \frac{k'}{2},\ y_0 = \frac{\mathcal{E}_{00}}{\mathcal{E}_0} = \frac{k'/2}{\varepsilon_0 + k'/2} \tag{48}$$

următoarea expresie a tensiunilor:

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{E\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2} [y + \lambda \sqrt{1-y^2}] + \sigma_0'' \cdot e^{-\lambda \,\mathrm{are}\, (\sin y - \sin y_0)}, \tag{49}$$

$$\sigma_0'' = \sigma_0' - \frac{E\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2} (y_0 + \lambda \sqrt{1-y_0^2}). \tag{50}$$

Din relaţia (7) scrisă sub forma

$$\ln (\sigma - \sigma_0) - E \int \frac{d\varepsilon}{\sigma - \sigma_0} = - \frac{t}{\tau} + C \tag{51}$$

vom deduce timpul. Vom calcula integrala

$$I \equiv E \int \frac{d\varepsilon}{\sigma - \sigma_0} = (1 + \lambda^2) \int \frac{dy}{y + \lambda \sqrt{1-y^2} + \sigma_0'' \cdot e^{-\lambda \,\mathrm{arc}\, (\sin y - \sin y_0)}} \cdot \tag{52}$$

Vom neglija efectul exponenţialei care apare în integrală deoarece are o valoare foarte mică. Aceasta revine la existenţa unei limite suplimentare de plasticitate variabilă cu viteza de masă de şoc

$$\sigma_0' = \frac{E\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2} (y_0 + \lambda \sqrt{1-y_0^2}). \tag{53}$$

Aceste ipoteze sînt ambele, compatibile cu rezultatele experienţelor. Vom avea atunci

$$I = (1 + \lambda^2) \cdot \int \frac{dy}{y + \lambda \sqrt{1-y^2}} \tag{54}$$

Vom pune $y = \sin \mathfrak{z}$, $dy = \cos \mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{z}$ astfel că

$$I = (1 + \lambda^2) \int \frac{\cos \mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{z}}{\sin \mathfrak{z} + \lambda \cos \mathfrak{z}} \cdot \tag{55}$$

Punînd

$$\chi = \operatorname{tg} \mathfrak{z}/2, \tag{56}$$

se deduce

$$\sin \mathfrak{z} = \frac{2\chi}{1 + \chi^2}, \quad \cos \mathfrak{z} = \frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2}, \quad d\mathfrak{z} = \frac{2}{1 + \chi^2} \cdot d\chi . \tag{57}$$

Întrucît

$$\begin{aligned} \frac{\cos \mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{z}}{\sin \mathfrak{z} + \lambda \cos \mathfrak{z}} &= \frac{2(1 - \chi^2)\, d\chi}{(\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2)(1 + \chi^2)} = 2\, \frac{A + B\chi}{1 + \chi^2} d\chi + \\ &+ 2\, \frac{C + D\chi}{\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2}, \end{aligned} \tag{58}$$

$$A = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad B = -\frac{1}{1 + \lambda^2}, \quad C = \frac{1}{1 + \lambda^2}, \quad D = -\frac{\lambda}{1 + \lambda^2},$$

iar

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\chi}{1+\chi^2} = \operatorname{arc\,tg} \chi ; \quad \int \frac{\chi d\chi}{1 + \chi^2} = \frac{1}{2} \ln (1 + \chi^2), \\ &\int \frac{d\chi}{\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2} = -\frac{1}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \frac{1 - \lambda\chi + \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 - \lambda\chi - \sqrt{1 + \lambda^2}}, \\ &\int \frac{\chi d\chi}{\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2} = \frac{-1}{2\lambda} \ln (\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2) + \frac{1}{\lambda} \int \frac{d\chi}{\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2}, \end{aligned} \tag{59}$$

se deduce că

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{z}}{\sin \mathfrak{z} + \lambda \cos \mathfrak{z}} &= 2 \left[A \operatorname{arc\,tg} \chi + B\, \frac{1}{2} \ln (1 + \chi^2) \right] - \\ &- \frac{C}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \frac{1 - \lambda\chi + \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 - \lambda\chi - \sqrt{1 + \lambda^2}} + D \left(- \frac{1}{2\lambda} \ln (\lambda + 2\chi - \lambda\chi^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda} \left(- \frac{1}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \frac{1 - \lambda\chi + \sqrt{1 + \lambda^2}}{1 - \lambda\chi - \sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \right) = \frac{2}{1 + \lambda^2} \left[\lambda \operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} \frac{\mathfrak{z}}{2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\mathfrak{z}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\lambda + 2\operatorname{tg} \frac{\mathfrak{z}}{2} - \lambda \operatorname{tg}^2 \frac{\mathfrak{z}}{2} \right) \right] \cdot \end{aligned} \tag{60}$$

Revenind la variabila y, avem

$$E\int\frac{d\varepsilon}{\sigma-\sigma_0}=2\,\lambda\,\text{arc}\,\sin\,y+\ln\left(1+\text{tg}^2\frac{\mathfrak{z}}{2}\right)^{-1}\left(\lambda+2\,\text{tg}\frac{\mathfrak{z}}{2}-\lambda\,\text{tg}^2\frac{\mathfrak{z}}{2}\right)\cdot \tag{61}$$

Deoarece $y=\sin\,\mathfrak{z}$, $\sqrt{1-y^2}=\cos\,\mathfrak{z}$, $\text{tg}\,\dfrac{\mathfrak{z}}{2}=\dfrac{\sin\,\mathfrak{z}}{1+\cos\,\mathfrak{z}}=$

$$=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}, \tag{62}$$

avem

$$\begin{aligned}E\int\frac{d\,\varepsilon}{\sigma-\sigma_0}&=2\,\lambda\,\text{arc}\,\sin y+\ln\left(1+\frac{y^2}{2-y^2+2\sqrt{1-y^2}}\right)^{-1}\left(\lambda+\frac{2\,y}{1+\sqrt{1-y^2}}-\right.\\&\left.-\frac{\lambda y^2}{2-y^2+2\sqrt{1-y^2}}\right)=2\,\lambda\,\text{arc}\,\sin\,y+\ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-y^2}}\right)^{-1}\cdot\\&\cdot\frac{\lambda\,(2-y^2+2\sqrt{1-y^2})+2y\,(1+\sqrt{1-y^2})-\lambda y^2}{(1+\sqrt{1-y^2})^2}=\\&=2\lambda\,\text{arc}\sin y+\ln\cdot\frac{\lambda\sqrt{1-y^2}\,(1+\sqrt{1-y^2})+y\,(1+\sqrt{1-y^2})}{(1+\sqrt{1-y^2})}=\\&=2\,\lambda\,\text{arc}\,\sin\,y+\ln\,(y+\lambda\sqrt{1-y^2})\cdot\end{aligned} \tag{63}$$

În definitiv avem

$$\begin{aligned}t/\tau&=2\,\lambda\,\text{arc}\,\sin\,y+\ln\,(y+\lambda\sqrt{1-y^2})-\\&-\ln\left[\frac{E\mathscr{E}_0}{1+\lambda^2}\,(y+\lambda\sqrt{1-y^2})+\sigma_0''e^{-\lambda\,\text{arc}\,(\sin y-\sin y_0)}\right]-C\,.\end{aligned} \tag{64}$$

Pentru $t=0$, $\varepsilon=0$ avem

$$C=2\lambda\,\text{arc}\,\sin y_0+\ln\,(y_0+\lambda\sqrt{1-y_0^2})-\ln\left(\frac{E\mathscr{E}_0}{1+\lambda^2}\,(y_0+\lambda\sqrt{1-y})\right)+\sigma_0\,. \tag{65}$$

În mod aproximativ $\lambda>1$, avem pentru $t'=0$

$$t_0=2\tau\lambda\frac{\pi}{2}=\pi\lambda\tau=\frac{\pi}{\nu_0}\,l_0\mathscr{E}_0\,. \tag{66}$$

Să trecem la calculul energiei

$$\begin{aligned}a=\int_0^\varepsilon(\sigma-\sigma_0)\,d\varepsilon+\int_0^\varepsilon\sigma_0d\varepsilon=\sigma_0\varepsilon+\frac{E\,\varepsilon_0^2}{1+\lambda^2}\int_{y_0}^{y}[y+\lambda\sqrt{1-y^2}]\,dy\,+\\+\,\sigma_0''\varepsilon_0\int_{y_0}^{y}e^{-\lambda\,\text{arc}\,(\sin\,y\,-\,\sin\,y_0)}\,.\,dy.\end{aligned} \tag{67}$$

Deoarece

$$\int \sqrt{1-y^2}\cdot dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \mathrm{arc}\ \sin y\right),$$

$$\int e^{-\lambda\, \mathrm{arc}\sin y}\cdot dy = \int e^{-\lambda z}\cdot \cos z \cdot dz = \frac{e^{-\lambda z}(\sin \mathfrak{z} - \lambda \cos \mathfrak{z})}{1+\lambda^2} = \tag{68}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\, \mathrm{arc}\sin y}}{1+\lambda^2}\left(y - \lambda\sqrt{1-y^2}\right)$$

avem

$$a = \sigma_0\varepsilon_0 + \frac{E\mathcal{E}_0^2}{1+\lambda^2}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \mathrm{arc}\ \sin y\right)\right]_{y_0}^{y} +$$

$$+ \sigma_0''\mathcal{E}_0 \frac{e^{-\lambda\, \mathrm{arc}\,(\sin y - \sin y_0)}}{1+\lambda^2}\left(y - \lambda\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_{y_0}^{y}. \tag{69}$$

Pentru $k' = 0$, $\lambda >> 1$, $y = 1$, $y_0 = 0$,

$$a = \sigma_0\varepsilon_0 + \frac{E\mathcal{E}_0^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\lambda\right) + \frac{\sigma_0''\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2}\left(\lambda + e^{-\lambda\pi/2}\right),$$

$$\sigma_0'' = \sigma_0' - \frac{E\mathcal{E}_0}{1+\lambda^2}. \tag{70}$$

Pentru $\sigma_0' = 0$ avem

$$a = \sigma_0\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0'}{1+\lambda^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\lambda - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}\right) =$$

$$= \sigma_0\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{\pi}{4}\lambda - 0{,}5\right) \simeq \sigma_0\varepsilon_0 + \frac{\pi E\tau}{4\, l_0} v_0\varepsilon_0. \tag{71}$$

Această energie este egală cu $m\, v_0^2/2\, S_0 l_0$.

ÎNCERCĂRI

S-au efectuat încercări statice la presa de 10 tone cu 3 scări (2 000, 5 000, 10 000 kg) Schopper asupra unor bare scurte din cupru electrolitic industrial şi convenţionale. Scopul acestor încercări a fost de a construi diagramele care dau legătura între forţa aplicată static şi deformaţia remanentă, (diagrama 1 fig. 7), cum şi diagrama care dă legătura între lucrul mecanic consumat şi deformata remanentă (diagrama 2 (fig. 8)).

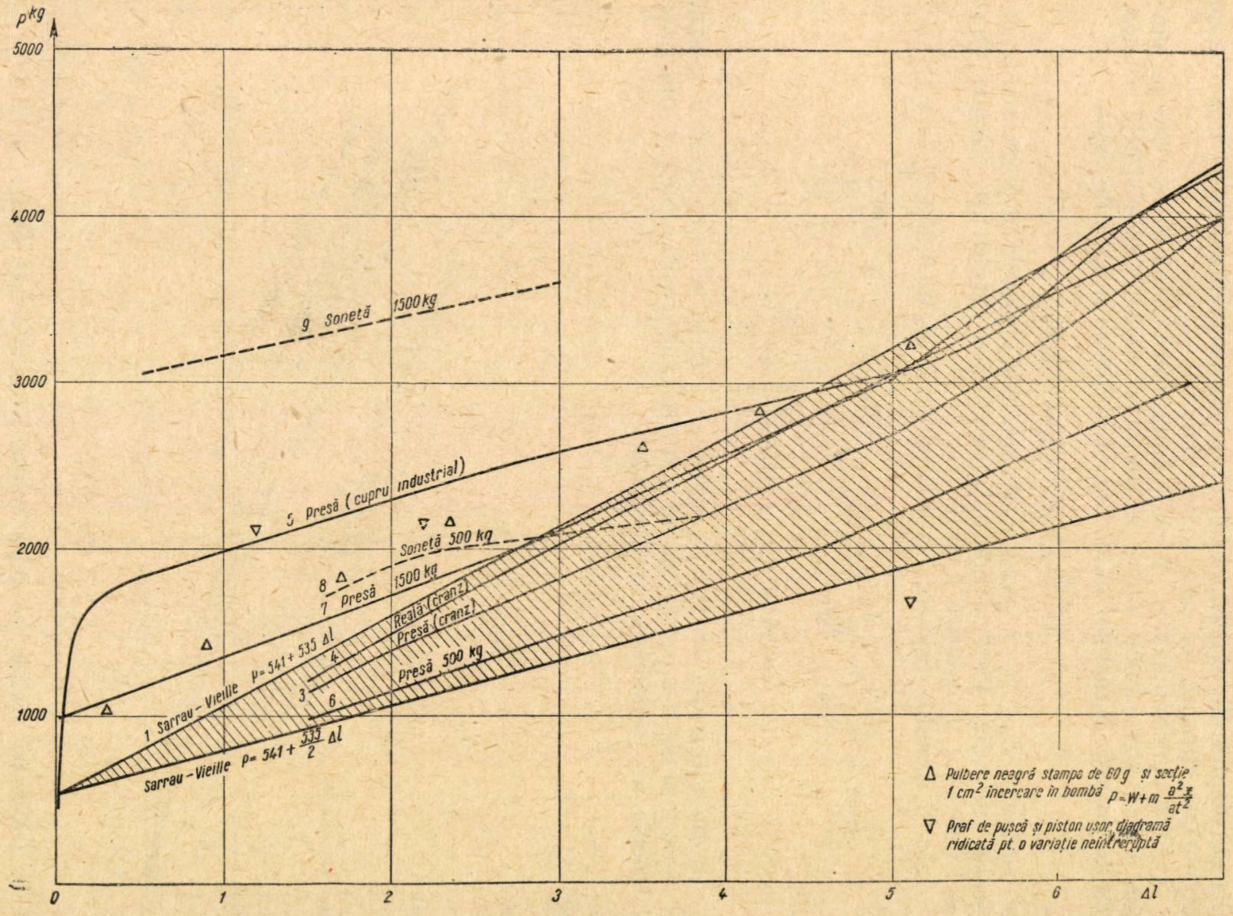

p^{kg}
5000
4000
3000
2000
1000
0
1
2
3
4
5
6
Δl
9 Sonetă 1500 kg
5 Presă (cupru industrial)
Sonetă 500 kg
8
7 Presă 1500 kg
Reală (cranz)
Presă (cranz)
Presă 500 kg
1 Sarrau - Vieille p = 541 + 535 Δl
4
3
6
Sarrau - Vieille $p = 541 + \frac{535}{2} \Delta l$
Δ Pulbere neagră stampe de 60 g și secție 1 cm² încercare în bombă $p = W + m \frac{a^2 x}{a t^2}$
∇ Praf de pușcă și piston ușor diagramă ridicată pt. o variație neîntreruptă

Fig. 7

a. *Încercări pe bare scurte din cupru electrolitic industrial.*

Aceste bare scurte au fost încercate în scopul de a extinde comparaţia teoriei cu rezultatele experimentale. S-a constatat că aceste bare scurte au o comportare diferită de cele convenţionale.

Pentru eprubetele Ø 8, $l = 13$ diagrama statică se acoperă pe porţiunea $P = 2\,900 - 5\,000$ kg cu aceea a lui Sarau-Vieille şi cele clasice. Legea de variaţie a forţelor cu deformaţiile poate fi dată de legea

$$P - P_0 = \mathcal{E} S_0 \varepsilon (1 + \varepsilon),$$

unde termenul $S_0 (1 + \varepsilon)$ este secţiunea reală pentru deformaţia ε iar S_0 secţia iniţială. Pentru compatibilitate cu experienţa trebuie luat $P_0 = 1\,500$ kg.; $\mathcal{E} = 6\,650$ kg/cm².

Lucrul mecanic raportat la volum va fi ($S_0 = 0{,}502$, $l_0 = 1{,}3$)

$$a = \int \frac{P \Delta l}{S_0 l_0} = \frac{1}{S_0 l_0} \left[P_0 \Delta l_0 + \frac{\mathcal{E} S_0}{l_0} \left(\frac{\Delta l_0^2}{2} + \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l_0^3}{3} \right) \right] =$$

$$= 3000 \cdot \varepsilon_0 + 6650 \left(\frac{\varepsilon_0^2}{2} + \frac{\varepsilon_0^3}{3} \right).$$

În diagramă sînt trecute şi curbele obţinute pe baza acestor relaţii.

S-au mai făcut încercări pe bare scurte Ø 10, $l = 15$ ale căror rezultate sînt trecute de asemenea în diagrame.

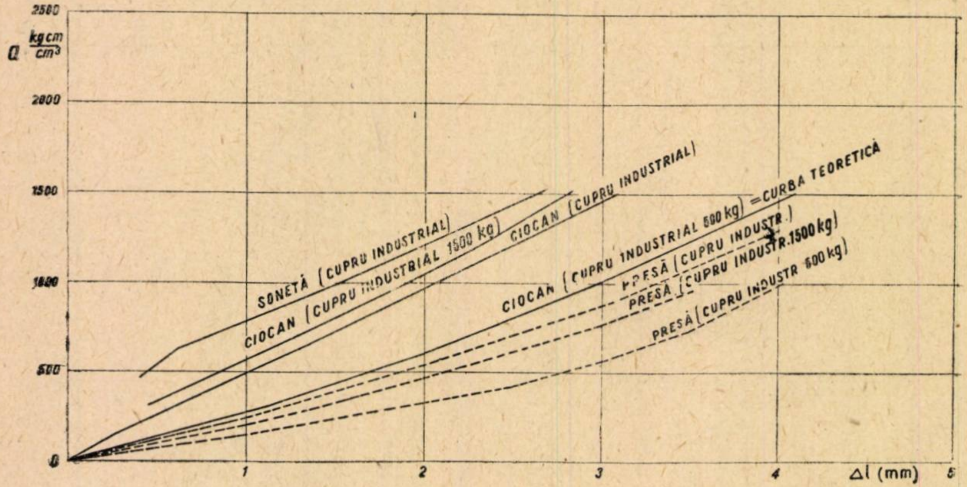


Fig. 8

b. *Încercări statice pe bare scurte convenţionale* Ø 8, $l = 13$.

Pentru barele scurte convenţionale s-au obţinut curbe diferite indicînd comportarea viscoplastică a materialului. Pentru modulul de elasticitate s-a obţinut valoarea $E = 1\,570\,000$ kg/cm² prin încercări cu tensometru inductiv la presă.

Variaţia energiilor în raport cu deformaţiile are alura dată în diagrama 2 (fig. 8).

c. *Încercări la şoc.*

Încercările la şoc s-au efectuat la sonetă pentru bare din cupru industrial şi la ciocanul electronic pentru aceleaşi bare şi pentru bare scurte convenţionale.

Încercările la sonetă sînt date de diagrame şi tabele. Rezultatele indică o deviere faţă de încercările la pendul. Cauza este elasticitatea ridicată a sonetei care absoarbe o parte din energie.

Tangentele la diagrama energie — deformaţia remanentă dau forţele corespunzătoare deformatei.

Încercările la ciocan au fost efectuate pentru energii de la 1 la 10 kgm.

Pentru a calcula presiunile mari corespunzătoare diferitelor deformaţii remanente şi energii pe baza tangentei la curba energii-deformaţii s-a calculat următorul tabel :

Încercări pe bare scurte convenţionale ∅ 8; l = 13 precomprimate la 500 kg

$a = \frac{mv_0^2}{2S_0l_0}$ kg cm/cm³	$\frac{\Delta l}{\text{cm}}$	δa	$\delta\Delta l$	$\frac{\delta a}{\delta\Delta l} = \bar{\sigma}_{\text{med}}$	sl_{med}	$\bar{P}_{\text{med}} = \bar{\sigma}_{\text{med}} \cdot S_0$
310	0,113	300	0,087	3440	0,156	1720
610	0,200	315	0,078	4040	0,239	2020
925	0,278	305	0,072	4240	0,314	2120
1230	0,350	300	0,0685	4380	0,381	2200
1530	0,4185					

Se constată că presiunile dinamice prin şoc la ciocan sînt cu mult mai superioare celor statice (a se vedea diagramele).

Trebuie remarcat că aceste presiuni reprezintă valori medii şi nu pot fi identificate cu presiunile care ar apare în ţevi prin detonaţii realizînd aceleaşi deformaţii remanente şi care se pot deduce pe baza considerentelor enunţate şi a valorilor E, τ în regim dinamic care vor fi determinate pe baza rezultatelor experimentale în cele ce urmează.

Sînt date o serie de fotografii ale încercărilor la şoc la ciocanul electronic. Acestea s-au obţinut prin înregistrare pe un tambur avînd turaţia de 2 700 rot/min = 45 rot de diametru 57,3 mm. Se deduce că la 1 mm înălţime al clişeului corespunde $1{,}23 \cdot 10^{-3}$ s. (fig. 3, fig. 9). La 98 mm lăţime a clişeului corespunde 2 mm deformaţia reală a crusherului (fig. 9, 10, 11).

Aceste fotografii arată că vitezele care se deduc cu formula $mv_0^2/2\, S_0l_0 = a$, $v_0 = \sqrt{2g\,h}$, h fiind înălţimea de cădere a greutăţii (7,93 kg) sînt juste.

Fenomenul se produce în timp după o lege aproximativ liniară, apropiată de cea dată de formulele deduse pentru v_0.

S-au mai făcut trei filmări rapide la 500 şi la 1500 imagini pe secundă care verifică timpii şi legile de deformare deduse (fig. 12, 13).

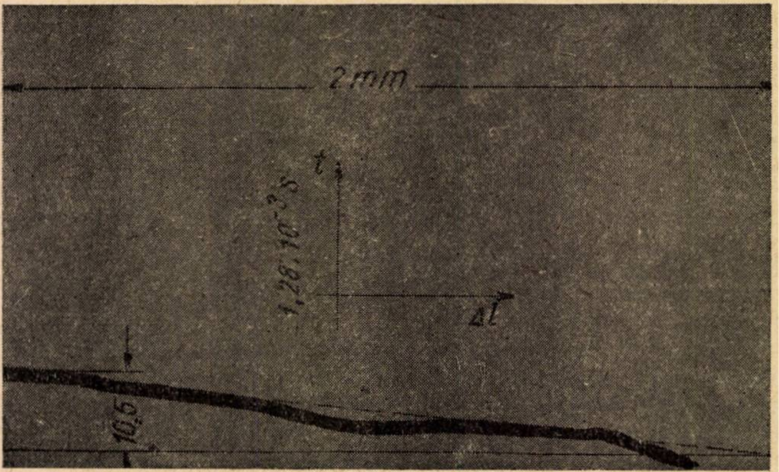


Fig. 9

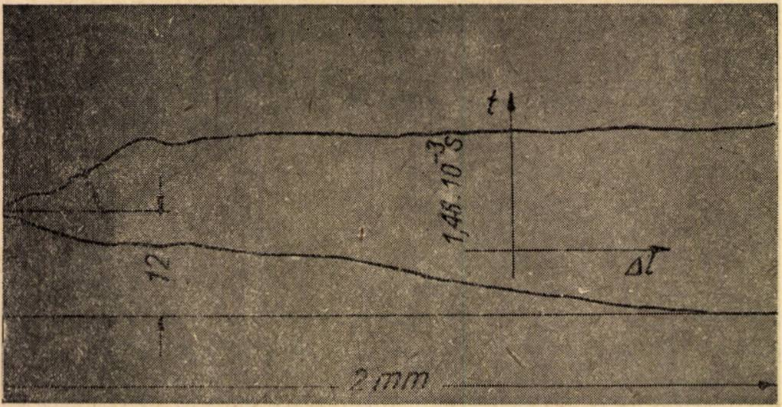


Fig. 10

d. *Deducerea valorilor* E, τ *pentru bare scurte convenţionale* $\varnothing$ *8,* $l = 13$ *în regim dinamic.*

Dacă încercăm să satisfacem condiţia ca relaţia (71) să dea variaţia energiei (a) în raport cu Δl reprezentabilă pe aceeaşi diagramă ca cea obţinută experimental, am vedea că acest lucru nu e riguros posibil.

Motivul acestei nepotriviri rezidă în următoarele :

a) Teoria barelor scurte porneşte de la ipoteza $\tau = \text{const.}$ ceea ce pentru viteza $< 6{,}35$ m/s nu poate aproxima suficient de exact variaţia tensiunilor cu deformaţiile

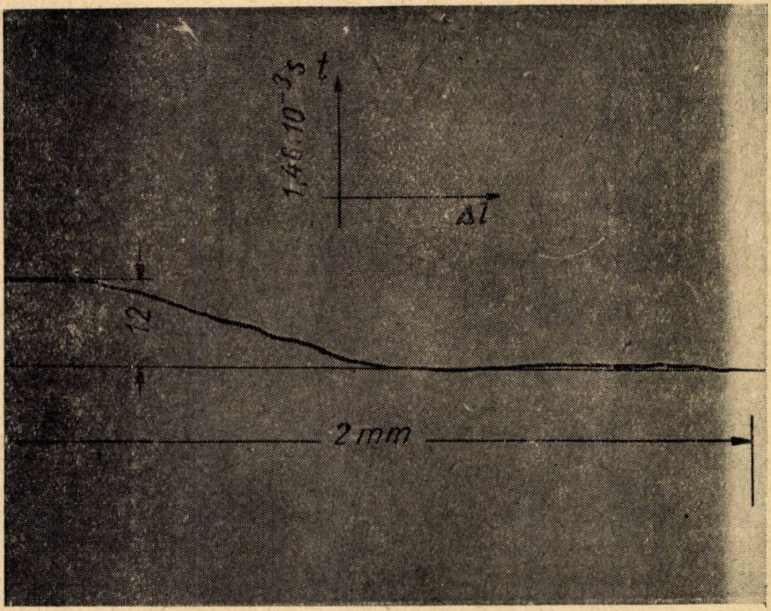


Fig. 11

b) Legea $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\tau}$ dă o variaţie iniţial prea redusă a tensiunilor în raport cu deformaţiile.

c) În calculul existent se porneşte de la ipoteza că $a \cong k\varepsilon^2$ ceea ce apare în diagrama rezultată teoretic, pe baza teoriei descrise în [2], dar nu corespunde realităţii pentru viteze mai mici de 6,35 m/s.

d) În cadrul teoriei din [2] s-au calculat curbele $a - \Delta l$ pentru $\tau = 7{,}35 \cdot 10^{-4}$; $E = 33\,400$ kg/cm^2 şi $\tau = 3{,}15 \cdot 10^{-5}$ s. $E = 1\,570\,000$ kg/cm^2 care coincid între ele, dar nu pot urmări alura curbelor reale deşi sînt cele mai apropiate posibile în cadrul acestei teorii. Prima din aceste curbe corespunde unei valori a timpului de relaxare conformă rezultatelor obţinute pe cale fotografică la ciocan. Astfel, în baza formulei (II, 188 [2]) care se mai scrie :

$$t = \tau \left[(1 + \lambda^2)\,\pi - \ln \frac{E\,\varepsilon_0}{1 + \lambda^2} \right],$$

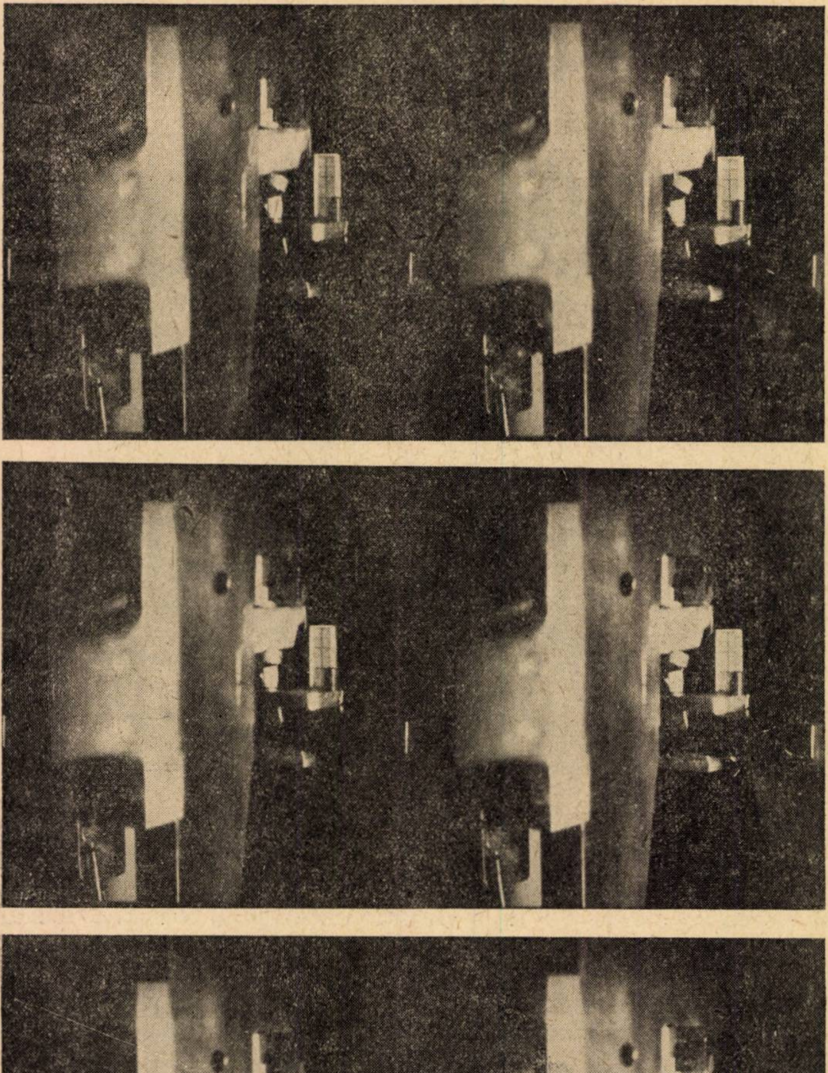


Fig. 12

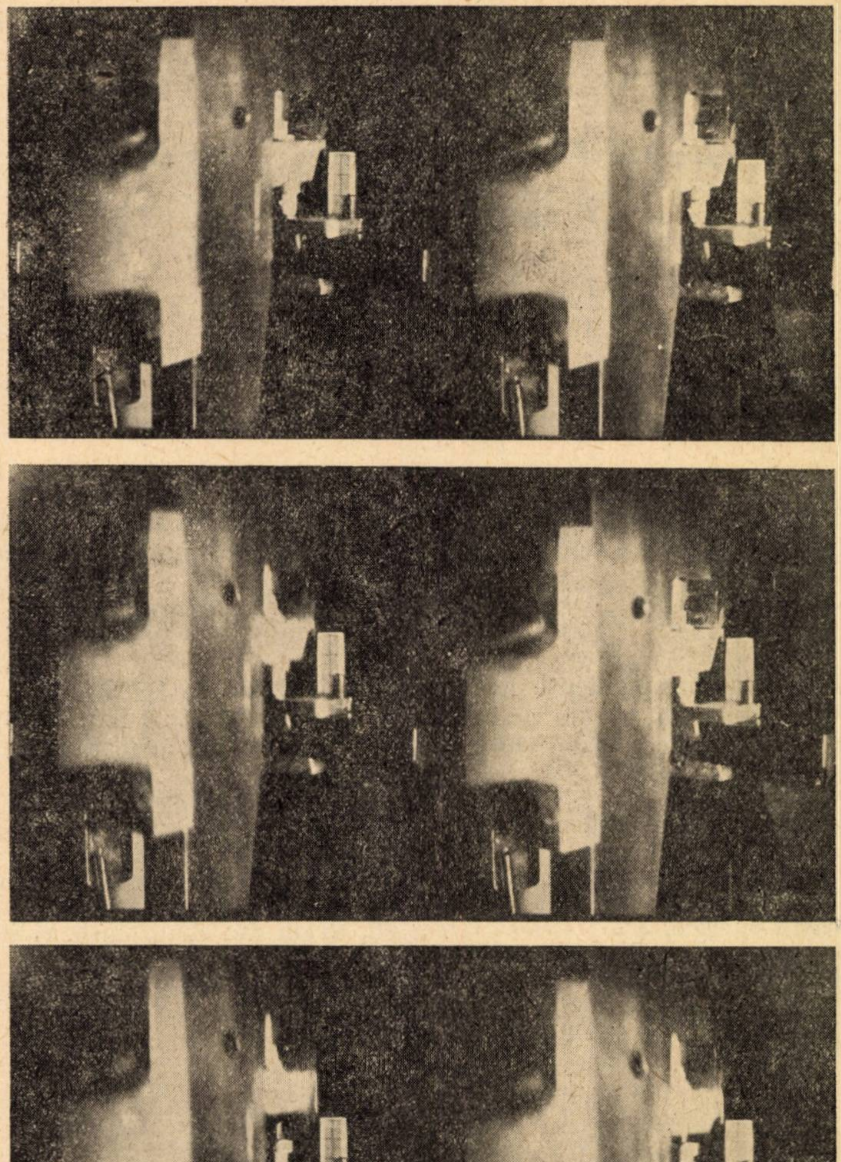


Fig. 13

se obţine pentru $E = 33\,400$ kg/cm^2 şi valorile experimental stabilite

$$\varepsilon_0 = \frac{0,258}{1,3} = 0,2, \ 500 \text{ kg cm energie}, \ v_0 = 350 \text{ cm/s} =$$

$$= \sqrt{2g.\,122 \text{ cm}} \text{ (măsurată pe clişeu)} = 353 \text{ m/s}.$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\cdot\Delta l}}{\tau v_0} = \frac{\sqrt{2}.0,258.10^4}{7,35.350} = 1,42,$$

$$t = \frac{7,35}{104}(3,01\,\pi - 7,7) = \frac{1,33}{10^3}\text{ s}.$$

Experimental s-a stabilit că

$$t \approx \frac{2\text{ s}}{10^3}.$$

Dacă am încerca să calculăm timpul de relaxare în cazul $\tau=3,15.10^{-5}$; $E = 1\,570\,000$ kg/cm^2 s-ar obţine un rezultat necorespunzător realităţii

$$\lambda = 32,8\,;\ t = \frac{3,15}{10^5}[1081\,\pi - \ln\, 2900] = 0,10700 \text{ s}.$$

Aceste necorespondenţe ne-au condus la reluarea teoriei.

Vom verifica în primul rînd timpul necesar deformării. Experimental pentru o energie de şoc de 500 kg.cm, s-a dedus pe cale fotografică că $v_0 = 353$ cm/s.

Teoretic avem însă $v_0 = \sqrt{\dfrac{2}{m}500}$, $m = \dfrac{7,93}{981}$, greutatea ciocanului fiind de 7,93 kg; aşadar $V_0=352$ în concordanţă cu cele măsurate. La această energie, $a = \dfrac{500}{1,3\cdot 0,502} = 770$, avem din diagramele ridicate $\Delta l = 0,239$.

Deoarece $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{c} = 0,184$, avem conform formulei (70)

$$t_0 = \frac{\pi}{v_0} l_0\, \varepsilon_0 = \frac{\pi\cdot 1,3\cdot 0,184}{353} \approx 2 \text{ s}.$$

rezultat compatibil cu experienţa.

Este clar că în cazul formulei din [2] se obţinea acelaşi timp doar pentru valori incompatibile ale lui E şi τ.

În sfîrşit, trecînd la diagrama $a-\Delta l$, vom lua pentru crusherele Ø 8 precomprimate la 500 kg valorile măsurate experimental:

$$\tau = 2\cdot 10^{-5}, \quad E = 1,17\cdot 10^6.$$

Din formula (75), avem

$$\sigma_0 = \frac{a - \frac{\pi}{4}\frac{E\tau}{l_0} v_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{a - v_0 \varepsilon_0 \; 4{,}5}{\varepsilon_0}.$$

Experimental s-a obţinut

$$a = 1230, \quad \varepsilon = 0{,}269, \quad v_0 = 440$$

şi de mai sus rezultă

$$\sigma_0 = \frac{1230 - 440 \cdot 0{,}269 \cdot 4{,}5}{0{,}269} = 2600.$$

Astfel că din (71)

$$a = \sigma_0 \varepsilon_0 + \frac{\pi}{4} \frac{E\tau}{l_0} v_0 \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (\sigma_0 + 4{,}5 v_0) = \varepsilon_0 \; (2600 + 4{,}5 \, v_0).$$

Pe baza unor valori ε_0, v_0 stabilite experimental şi extrase din diagramă (fig. 8) pe baza formulei

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{m} S_0 l_0 a}$$

s-a calculat tabela de mai jos

Date experimentale				Date teoretice
a	Δl	ε_0	v_0	a
500	0,168	0,129	283	0,129 (2600 + 1270) = 500
1000	0,296	0,227	400	0,227 (260 + 1800) = 1000
1230	0,35	0,269	440	0,269 (2600 + 1980) = 1230
1500	0,40	0,307	490	0,307 (2600 + 2200) = 1470

Construind diagrama teoretică $a - \Delta l$ vedem că ea coincide exact cu cea experimentală pe baza valorilor adoptate pentru τ, σ_0, E.

În cazul barelor scurte precomprimate la 500 kg dacă am accepta aceeaşi aproximaţie vom avea $l_0 \approx 10{,}60$ mm.

În acest caz pentru $\Delta l = 0{,}19$, $a = 1\,000$, $V = 400$, avem

$$\varepsilon = \frac{0{,}19}{1{,}06} = 0{,}179,$$

$$\sigma_0 = \frac{1\,000}{0{,}179} = 5\,580 \text{ kg/cm}^2.$$

Se deduce legea

$$a = \varepsilon_0 \cdot 5\,580.$$

care aproximează în cadrul teoriei situaţia reală.

Justificarea alegerii termenului $E\,\tau = 0$ stă în aceea că prin precomprimare se modifică legea $(\sigma - \varepsilon)$ ajungîndu-se în zona unde curba $P - \Delta l$ este aproximativ paralelă cu axa Δl $(\varepsilon \approx 0)$.

O aproximare mai riguroasă se poate face recurgînd la forme generale deduse pentru $k' \neq 0$ şi anume $k\,k' > 0$.

Pentru aceeaşi aproximaţie, avem

$$a = \sigma_0\,\varepsilon_0 + \frac{\pi E \tau}{4 l_0}\, v_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{k'}{2} \right), \quad \sigma_0'' = 0,$$

unde pentru $t = 0$

$$a_0 = \frac{\pi E \tau}{8 l_0}\, \tau\, v_0\, k' = 120 \quad \text{kgcm/cm}^3,$$

(vezi diagrama fig. 8) se deduce pentru $E\,\tau = 4{,}5$, $l_0 = 1{,}06$

$$\sigma_0 = \frac{a - \dfrac{\pi E \tau}{4 l_0}\, v_0 \varepsilon_0 - 120}{\varepsilon_0} = \frac{1\,000 - 120 - 3{,}33 \cdot 400 \cdot 0{,}179}{0{,}179} =$$

$$= \frac{880 - 238}{0{,}179} = 3580\,;$$

şi se construieşte următoarea tabelă :

Date experimentale				Date teoretice
a	Δl	ε_0	ν_0	a
500	0,086	0,081	283	120 + 0,081 (3580 + 3,33.283) = 485
1000	0,19	0,179	400	120 + 0,179 (3580 + 3,33.400) = 1000
1500	0,28	0,264	490	120 + 0,264 (3580 + 3,33.490) = 1490

În concluzie, curba se acoperă complet cu cea experimentală spre deosebire de cea dedusă pe cale aproximativă.

Tabela 1

Încercări statice la presă pe bare scurte din cupru electrolitic industrial

Nr. crt.	∅	l_0	l_1	Δl	P	v mm/min	Observații
1	7,75	12,96	12,96	0,00	460	30	cuprul e netratat termic ulterior decupării și prelucrării fețelor
2	7,89	13,00	12,97	0,03	900	30	
3	7,82	12,90	12,81	0,09	1420	30	
4	7,88	13,21	12,76	0,45	1820	30	
5	7,78	13,05	10,42	2,63	2500	30	
6	7,84	13,11	8,35	4,76	3000	30	
7	7,88	12,75	6,88	5,87	3500	30	
8	7,90	12,75	6,30	6,45	4000	30	
9	7,89	13,10	5,54	7,56	4500	30	
10	7,84	13,16	5,02	8,14	5000	30	
1	9,91	15,56	15,39	0,17	920	30	
2	9,92	15,14	14,91	0,23	2000	30	
3	9,91	15,37	14,67	0,70	3000	30	
4	9,92	15,26	11,65	3,61	4000	30	
5	—	15,36	8,43	6,93	5000	30	
1	7,96	13,27	13,27	0,00	500	5	
2	7,90	13,48	13,43	0,05	1000	5	
3	7,90	13,38	13,33	0,05	1500	5	
4	7,90	12,78	11,17	1,61	2000	5	
5	7,89	12,92	9,33	3,59	2500	5	
6	7.90	12,84	7,56	5,28	3000	5	
7	7,94	13,11	7,01	6,10	3500	5	
8	7,92	13,13	6,29	6,84	4000	5	
9	7,89	13,1	5,59	7,51	4500	5	
10	7,93	12,99	5,29	7,70	5000	5	
1	9,91	15,23	15,08	0,15	1000	5	
2	9,91	15,13	14,87	0,26	2000	5	
3	9,92	15,34	13,59	1,75	3000	5	
4	9,91	14,87	10,38	4,49	4000	5	
5	9,91	15,33	8,71	6,62	5000	5	

Tabela 2

Încercări la presă pe bare scurte din cupru electrolitic tratat special ∅ 8 mm precomprimate la 500 kg

Nr. crt.	P	Δl	Observaţii
1	500	0,015	Încercare continuă a aceleiaşi epruvete cu viteză minimă de 5 mm/min Înregistrare la scara de 5000 kg a maşinii Schopper
2	1000	1,25	
3	1500	2,93	
4	2000	4,58	
5	2500	5,26	
6	3000	6,15	
7	3500	8,41	
8	4000	8,77	
9	4500	—	
10	5000	10,11	

Tabela 3

Încercări la presă pe bare scurte din cupru electrolitic tratate special precomprimate la 1 500 kg.

Nr. crt.	P	Δl	Observaţii
1	500	0,015	Încercare continuă lentă prin acţionarea manivelei cu mîna. Înregistrare la scara de 5000 kg a maşinii $l=11,85$ mm
2	1000	0,05	
3	1500	1,4	
4	2000	2,87	
5	2500	4	
6	3000	5,1	
7	3500	6,1	
8	4000	6,6	
9	4500	7	
10	5000	7,3	

Tabela 4

Încercări la ciocan pe bare scurte convenționale ∅ 8, l = 13 mm, G = 7.93 kg

Nr. crt.	l_0	l	Δl	Lucru mecanic kg.m	Observații
1	13,27	8,31	4,91	10	Precomprimate la 500 kg
2	12,62	9,13	3,49	8	,, ,, ,,
3	12,60	9,82	2,78	6	,, ,, ,,
4	12,58	10,57	2,00	4	,, ,, ,,
5	12,57	8,64	3,85	10	,, ,, ,,
6	12,58	11,44	1,14	2	,, ,, ,,
7	12,60	8,69	3,91	10	,, ,, ,,
8	10,84	8,01	2,83	10	,, la 1 500 kg
9	10,83	8,50	2,33	8	,, ,, ,,
10	10,85	9,11	1,74	6	,, ,, ,,
11	10,84	9,73	1,11	4	,, ,, ,,
12	10,84	10,39	0,45	2	,, ,, ,,

Tabela 5

Încercări la sonetă pe bare scurte din cupru electrolitic industrial

Nr. crt.	∅	h	l	l_0	Δl	Observații
1	8	1,465	12,97	9,86	3,11	Greutatea berbecului a fost de 7,85 kg
2	8	1,260	12,98	10,88	2,71	
3	8	1,080	13,03	10,84	2,19	
4	8	0,88	13,06	11,39	1,67	
5	8	0,71	12,91	11,71	1,20	
6	8	0,525	12,97	12,35	0,62	
7	8	0,385	12,74	12,34	0,40	
8	10	1,490	15,16	13,26	1,90	
9	10	1,50	15,14	13,86	1,28	
10	10	1,11	15,25	14,09	1,16	
11	10	0,93	15,46	14,66	0,80	
12	10	0,79	15,57	14,83	0,74	
13	10	0,645	15,20	14,83	0,37	
14	10	0,435	15,50	15,16	0,34	

Primită la redacție la 12 aprilie 1960.

О РЕОЛОГИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ КОРОТКИХ МЕДНЫХ СТЕРЖНЕЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ УДАРАМ О ТВЕРДЫЕ И ЖИДКИЕ МАССЫ

РЕЗЮМЕ

В работе продолжается теоретическое и экспериментальное исследование коротких медных стержней, подверженных ударам, учитывая реологическую модель, более приближающуюся к реальному поведению некоторых категорий материалов. Интегрируется уравнение в деформациях, причем получаются выражения для изменения во времени перемещений, деформаций, усилий и механических работ. Теоретические результаты сравниваются с экспериментальными, подтверждая при этом совместимость применяемых реологических моделей.

При помощи диаграмм можно определить ударное давление в зависимости от измеренной деформации.

SUR LE COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE DES BARRES COURTES DE CUIVRE SOUMISES À DES CHOCS AVEC DES MASSES SOLIDES ET FLUIDES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur reprend l'étude théorique et expérimentale des barres courtes de cuivre, soumises à des chocs, en se référant à un modèle rhéologique représentant assez fidèlement le comportement réel de certaines catégories de matériaux. En intégrant l'équation en déformation, on obtient des relations exprimant la variation, avec le temps, des déplacements, des déformations, des efforts et du travail. La comparaison des résultats théoriques avec les résultats expérimentaux confirme la compatibilité des modèles rhéologiques adoptés.

Les diagrammes permettent de déterminer la pression de choc en fonction de la déformation mesurée.

BIBLIOGRAFIE

1. C. CRANZ, *Lehrbuch der Ballistik*. Springer, 1926, **II** 69–94, **III** 192–257, Ergänzungsband, 141–154.
2. Л. М. ШЕСТОПАЛОВ, *Деформирование металлов и волны пластичности в них*. Издат. Ак. Наук СССР, *1* (1959).

CERCETĂRI CU PRIVIRE LA ÎNCOVOIEREA GRINZILOR CU GOLURI RECTANGULARE

DE

M. ARCAN

1. Calculul la încovoiere al grinzilor avînd un şir axial de goluri rectangulare apare necesar într-o serie de probleme cu caracter tehnic :

— proiectarea diafragmelor de rigidizare antiseismică a clădirilor prevăzute cu goluri pentru uşi sau ferestre, ţinînd seama de o schemă statică de sarcini standardizată ;

— calculul rezistenţei de ansamblu a carcasei unui vagon de călători considerat ca grindă ;

— studiul influenţei unui şir de fisuri transversale (considerate ca goluri) asupra stării de tensiune într-o grindă şi în mod special într-o grindă de beton armat.

Studiul stării de tensiune în asemenea grinzi (discuri) reprezintă o problemă delicată datorită prezenţei golurilor. Aşadar, datorită caracterului multiplu conex al conturului, calculul teoretic este complicat şi se impune un studiu prin mijloace experimentale, în vederea stabilirii principalelor date asupra acestui tip de grinzi.

Lucrările publicate pînă în prezent în acest domeniu [1], [2], [3], [4], [5], nu intră într-o analiză amănunţită a influenţei şirului de goluri asupra stării de tensiune din grindă, datorită faptului, că aceste lucrări nu au la bază o cercetare experimentală a stării de tensiuni care să permită o cunoaştere cît mai reală şi de ansamblu a acestei influenţe. Numai în lucrarea [2] se face o verificare tensometrică a concluziilor teoretice ale autorului pe structura unui vagon ce prezintă goluri pentru ferestre, verificare suficientă pentru scopurile concrete ale articolului, însă insuficientă pentru generalizarea pe care o urmărim în cele ce urmează, pentru orice fel de dimensiuni relative ale golurilor şi montanţilor. În lucrarea [5] se face aplicarea şi verificarea tensometrică a cercetărilor teoretice [6], [7], privind influenţa unui singur gol asupra stării de tensiune în bara supusă la încovoiere pură şi se generalizează pentru un şir întreg de goluri. Însă după cum va rezulta şi din lucrarea de faţă, şirul de goluri are caracteristici proprii a căror influenţă nu a fost pînă în prezent luată în considerare, deşi acesta este cazul mai general întîlnit şi el poate duce la eforturi maxime mai importante.

În lucrarea de faţă, se studiază pe cale experimentală şi teoretică încovoierea pură a grinzilor cu şir de goluri rectangulare, în funcţie de o serie de parametri dovediţi ca semnificativi, în vederea stabilirii influenţei acestui şir de goluri asupra distribuţiei tensiunilor şi deformabilităţii grinzii. O atenţie specială se dă influenţei şirului de goluri asupra distribuţiei eforturilor unitare în dreptul montanţilor, unde a rezultat că apar valori mai mari decît în secţiunile din dreptul golurilor; dealtfel studiile efectuate pînă în prezent (a se vedea lucrările citate mai sus), dau date privind distribuţia tensiunilor numai în secţiunile din dreptul golurilor, considerate ca cele mai periculoase şi în special în cazul grinzilor cu un singur gol. Urmează ca într-o lucrare viitoare să fie prezentate şi cercetările privind încovoierea cu forţă tăietoare.

2. Studiile experimentale au fost efectuate prin metoda fotoelastică în laboratoarele INCERC (Institutul de cercetări pentru construcţii şi economia construcţiilor — Bucureşti). Au fost executate, încercate şi studiate modelele ale căror caracteristici se dau în tabela 1 şi în figura 1. După cum rezultă din această tabelă, principalele caracteristici sînt :

Tabela 1

Grinzi cu şir de goluri axiale. Caracteristiciele modelelor incercate

Model nr.	Nr. de goluri	Distanţa între reazeme	Înălţimea golului αH_α	Baza golului βH_β	Baza montantului $\beta' H_{\beta'}$	$K = \frac{\beta}{\alpha}$	$K' = \frac{\beta'}{\alpha}$	Obs.
1	0	152	—	—	—	—	—	fără goluri
2	9	156	0,15	0,01	0,66	0,067	4,4	1 şir de gol.
3	9	153	0,15	0,165	0,50	1,11	3,33	,,
4	9	152	0,15	0,33	0,33	2,20	2,20	,,
5	9	157	0,15	0,50	0,165	3,33	1,11	,,
6	9	156	0,33	0,01	0,66	0,03	2,00	,,
7	4	153	0,33	0,165	1,165	0,50	3,54	,,
8	9	153	0,33	0,165	0,50	0,50	1,51	,,
9	9	152	0,33	0,33	0,33	1,00	1,00	,,
10	9	157	0,33	0,50	0,165	1,51	0,50	,,
11	9	153	0,40	0,33	0,33	0,83	0,83	,,
12	9	156	0,50	0,01	0,66	0,02	1,32	,,
13	9	152	0,50	0,165	0,50	0,33	1,00	,,
14	9	153	0,50	0,33	0,33	0,67	0,67	,,
15	9	158	0,50	0,50	0,165	1,00	0,33	,,
16	9	156	0,66	0,01	0,66	1,52	1,00	,,
17	9	157	0,66	0,165	0,50	0,25	0,76	,,
18	9	152	0,66	0,33	0,33	0,50	0,5	,,
19	9	158	0,66	0,50	0,165	0,76	0,25	,,
20	2×20	180	0,10	0,20	0,10	2,00	1,00	2 şiruri de goluri.

— numărul de goluri, la majoritatea grinzilor este de 9, aşezate regulat în axa barei ; există de asemenea modele prevăzute cu două şiruri de goluri așezate simetric față de axa barei, precum și un model fără goluri încercat pentru comparație;

— înălțimea golului αH, în care H este înălțimea grinzii iar α variază între 0,15 și 0,66;

— baza golului βH, unde β variază între 0,01 și 0,5;

— baza montantului $\beta' H$, unde β' variază între 0,166 și 1,165;

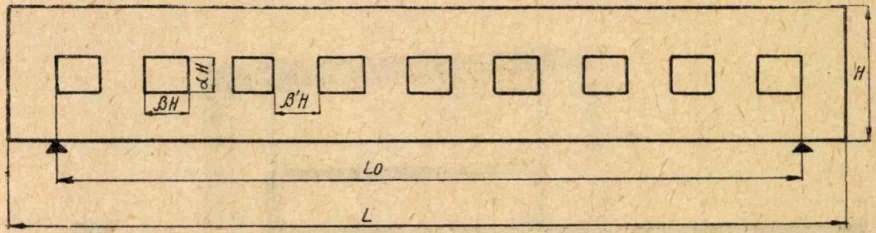


Fig. 1

— raportul $K = \frac{\beta}{\alpha}$ al dimensiunilor în plan ale golului variază între 0,015, ceea ce reprezintă, în mod aproximativ, o fisură verticală (transversală) și 3,33, ceea ce reprezintă o fantă orizontală (în axa barei) și trecînd prin valori care apropie grinda de tipul Vierendeel;

— raportul $K' = \frac{\beta'}{\alpha}$ al dimensiunilor în plan ale montantului variază între 0,25, ceea ce reprezintă un montant zvelt și 4,6, ceea ce reprezintă o zonă masivă limitată de goluri rare.

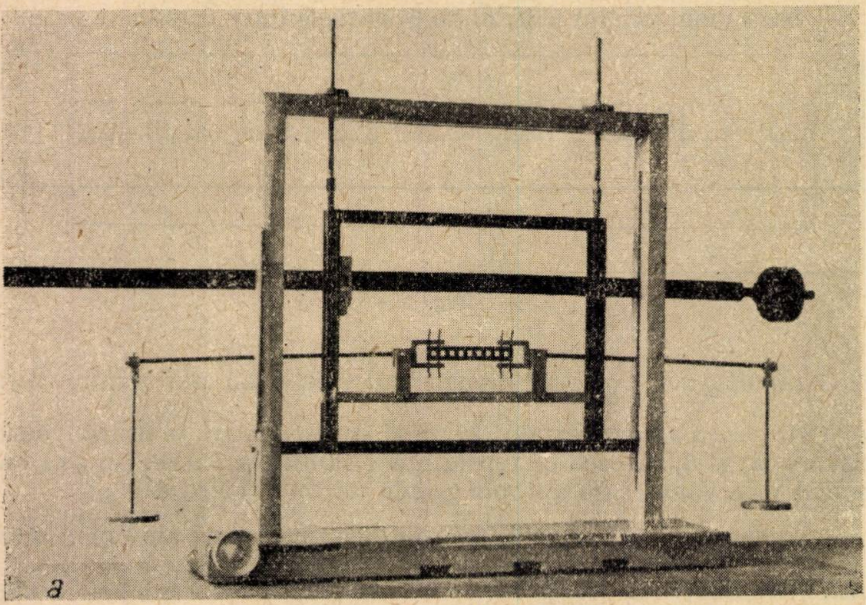
Este deci vorba de o gamă largă de modele, cu un număr mare de parametri variabili, din care s-a încercat a se desprinde parametrii caracteristici ai tipului de grinzi studiat și influența variației acestora asupra stării de tensiune și de deformație.

Încercările fotoelastice au fost efectuate pe modele de plexiglas pentru determinarea izoclinelor și pe modele de Dinox F 110 [8] pentru determinarea izocromatelor. Izoclinele au fost obținute în lumină albă și ridicate prin desenare folosind rețele de patrate suprapuse pe model și pe planșe. Izocromatele au fost ridicate prin fotografiere în lumină monocromatică de sodiu. Dispozitivul utilizat pentru încercarea la încovoiere pură a fost cel prezentat în figura 2 și se bazează pe aplicarea cîte unui cuplu de forțe la fiecare capăt al barei, amplificat cu ajutorul unei pîrghii.

3. Studiul familiilor de izocline obținute, ca și al izostaticelor ce rezultă din acestea, pe baza unor integrări grafice ne permite a face o serie de observații privind modul de comportare și de participare la deformații a diferitelor zone ale grinzilor cu goluri:

— Tălpile grinzilor de tipul studiat formează, așa cum era de așteptat, o zonă izoclină de parametru 0°, cu excepția unor perturbări în jurul colțurilor care au un caracter strict local.

— Montanții (zonele cuprinse între goluri) au o comportare similară (practic identică) independentă de dimensiunile lor absolute pentru același raport $K' = \frac{\beta'}{\alpha}$ al acestor dimensiuni în planul grinzii. Astfel, se observă, de exemplu, asemănarea perfectă dintre tablourile de izocline



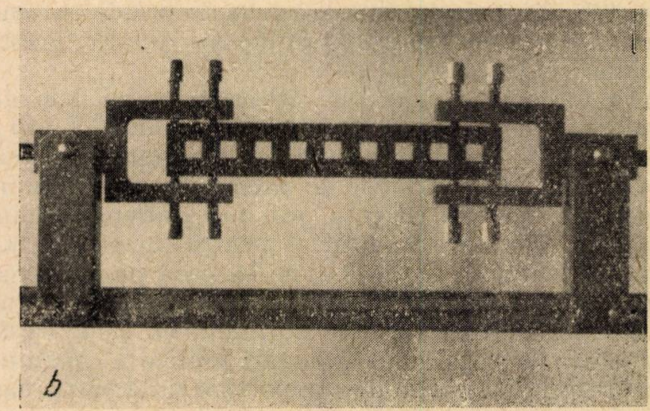


Fig. 2 *a* și *b*

pentru grinzile nr. 9 și 13 din figurile 3 *a* și 4 *a* și dintre izostaticele respective din figurile 3 *b* și 4 *b*. Cele două modele au parametrul $K' \approx 1$,

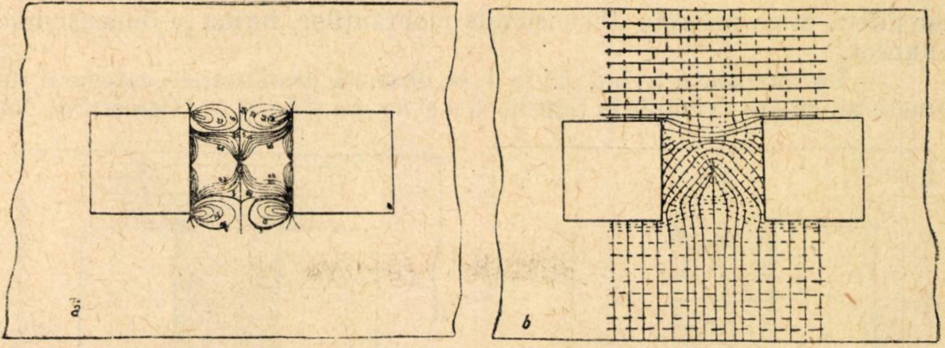


Fig. 3 *a* și *b*

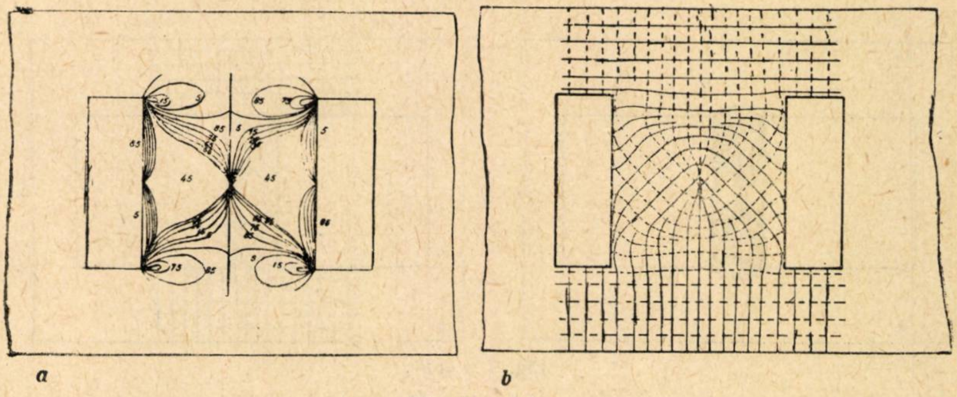

75
5
85
75
65
85
5
45
45
5
5
86
75
85
5
15
a
b

Fig. 4 *a* și *b*

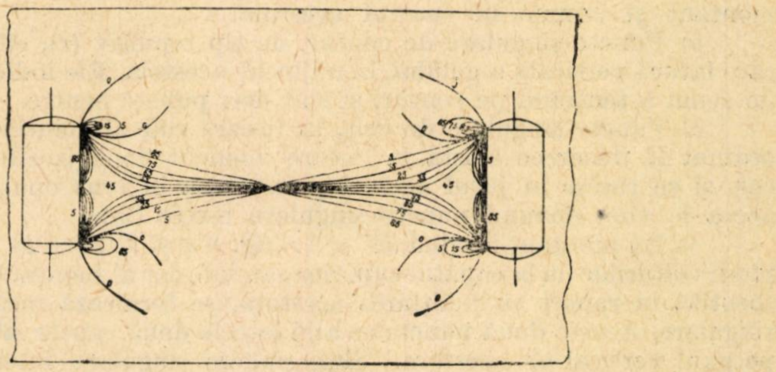

0
15
5
0
45
5
85
0
5
45
15
5
0
0

Fig. 5

dar diferă în ce privește dimensiunile montanților, forma și dimensiunile golurilor.

— La montanții avînd $K' \geqslant 1$ se observă următoarele categorii de puncte singulare (vizibile în figurile 3 *a* și *b* ; 4 *a* și *b* ; și 5). Cercetarea lor

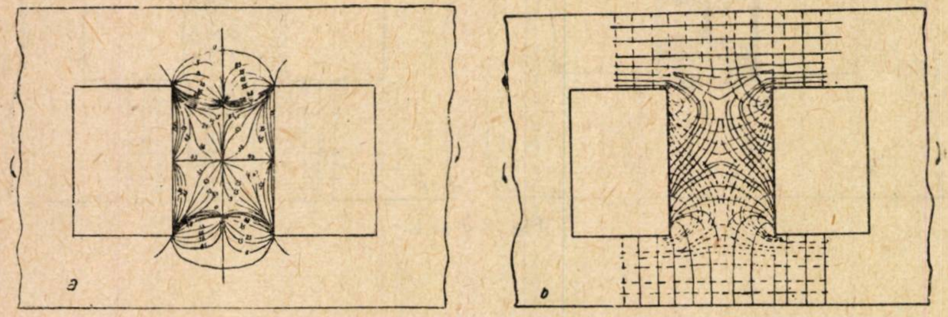


Fig. 6 *a* și *b*

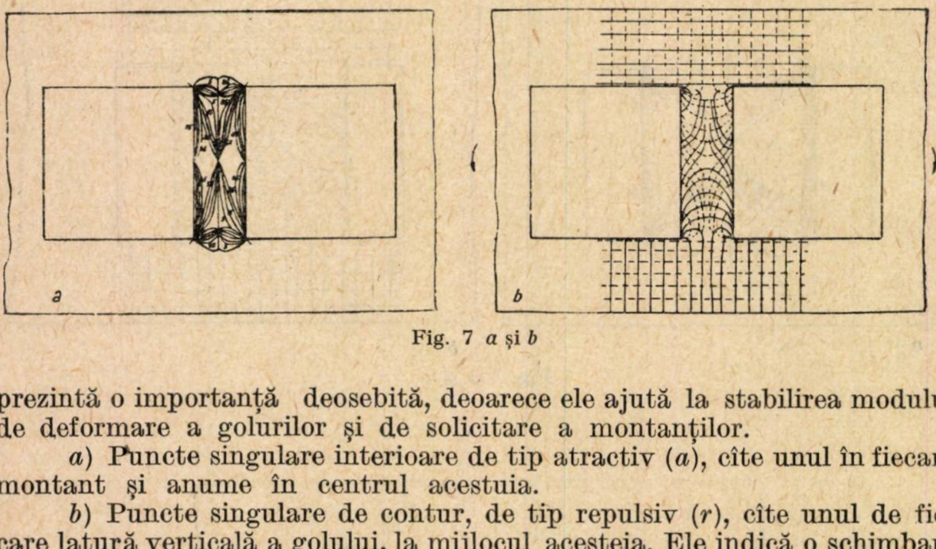


Fig. 7 *a* și *b*

prezintă o importanță deosebită, deoarece ele ajută la stabilirea modului de deformare a golurilor și de solicitare a montanților.

a) Puncte singulare interioare de tip atractiv (*a*), cîte unul în fiecare montant și anume în centrul acestuia.

b) Puncte singulare de contur, de tip repulsiv (*r*), cîte unul de fiecare latură verticală a golului, la mijlocul acesteia. Ele indică o schimbare de semn a tensiunii pe contur, și sînt deci puncte neutre.

c) Puncte singulare de colț, la fiecare colț al golurilor. Ele sînt de ordinul II deoarece există în fiecare moment două izocline ce ajung la colț și se rotesc în jurul acestui punct, una în sens opus celeilalte; de aceea le vom denumi puncte singulare mixte (*m*).

— La montanții avînd $K' < 1$, (fig. 6 *a* și *b*, 7*a* și *b*) datorită apropierii colțurilor de la capătul superior sau inferior al montanților, apropiere socotită în raport cu înălțimea acestora, se formează încă două puncte singulare. Aceste două puncte se află la cele două capete ale montanților pe axul vertical al acestora. Sînt puncte singulare interioare, de tip repulsiv. O dată cu apariția lor, celălalt punct singular interior, din centrul montantului, se transformă din punct atractiv în punct de tip repulsiv. În acest caz, punctele singulare de colț, mixte, devin de tip atractiv. Schemele care prezintă pozițiile relative ale punctelor singulare sînt date în figura 8*a* și *b* și se observă cum trei puncte singulare (pentru $K' < 1$), vecine dar fără legătură prin izocline între ele sînt de același tip repulsiv și înconjoară punctul singular de colț, de tip atractiv, cu care fiecare din cele trei are legături prin izocline.

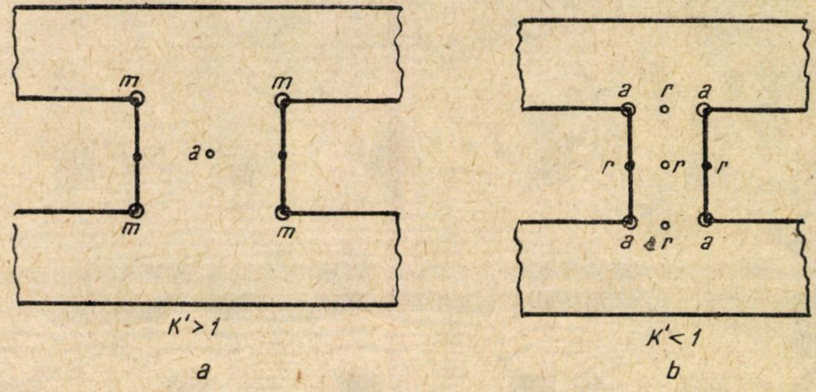


Fig. 8 *a* și *b*

4. Studiul izocromaticelor confirmă și completează prin date cantitative observațiile făcute asupra tablourilor de izocline și izostatice:

— Astfel, tablourile de izocromatice prezintă, în tălpi, benzi paralele cu axa barei, caracteristice încovoierii pure (fig. 9 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*) benzi care permit ca în cele ce urmează să se stabilească diagrame ale distribuției tensiunilor. Atunci cînd înălțimea golurilor este relativ mică ($\alpha < 0{,}33$), alura acestor benzi nu este tulburată și paralelismul lor se păstrează în afara zonei golurilor.

Pentru înălțimi relative mai mari ($\alpha > 0{,}33$), influența prezenței golurilor se întinde pînă la fibrele extreme.

— Se observă asemănarea dintre aspectul izocromaticelor la montanții cu același parametru K' (fig. 9 *c* și *d* de exemplu). În funcție de K' și pe măsură ce acesta se micșorează, axa neutră întreruptă de goluri, își păstrează poziția orizontală (fig. 9 *a*), descrește apoi ca lungime și devine un punct pentru $K' \approx 1{,}5$ (fig. 9 *b*), ia o poziție verticală (fig. 9 *c*), sau capătă forma unui dublu T (fig. 9 *d* și *e*) creind astfel, între goluri, o zonă neutră (inactivă) în locul axei neutre, zonă a cărei înălțime o notăm cu $2a < \alpha H$ (fig. 10 *a*).

— Cînd $K' > 1$, deoparte și de alta a golurilor, s-ar putea spune sub protecția acestora, apar zone cu tensiuni foarte mici, practic nesolicitate, pe înălțimea golurilor și de lungime $\frac{\alpha H}{2}$ (fig. 10 *b*).

— Punctele singulare interioare se află în zonele neutre; în cazul $K' < 1$, punctele singulare care apar în mod suplimentar se observă și pe tabloul de izocromate tinzînd a da poziție verticală sau forma unui dublu T, zonei neutre.

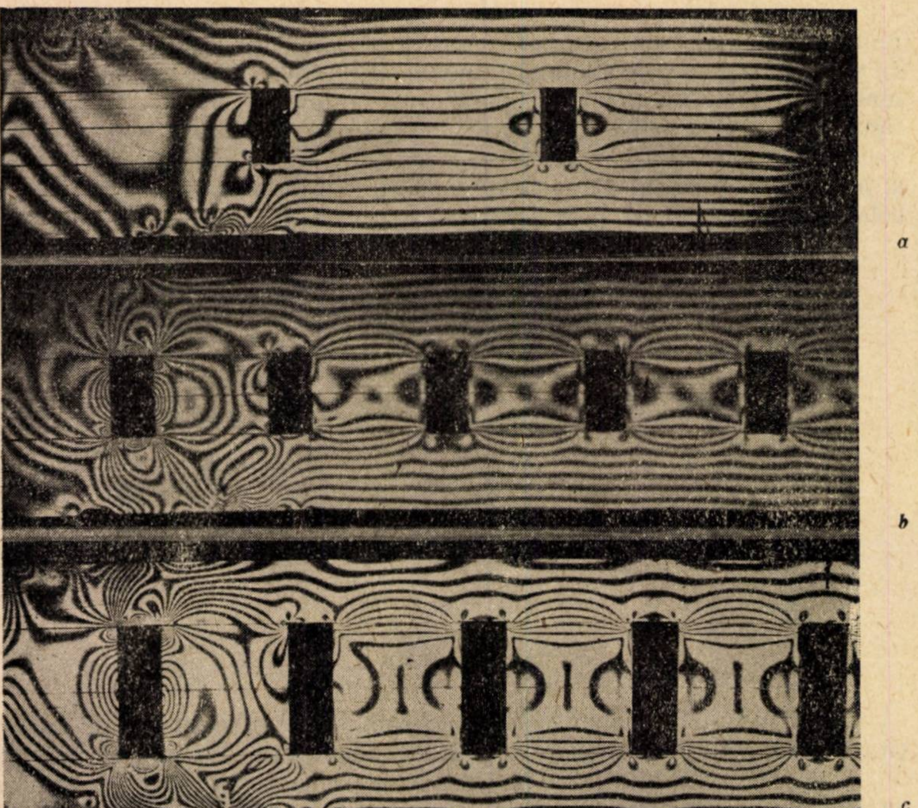


Fig. 9 *a*, *b*, *c*, *d* și *e*

— Pe baza datelor prezentate în cele de mai sus, şi folosindu-se o metodă simplă pentru determinarea semnului tensiunilor pe conturul golului, prin aplicarea unei forțe concentrate, s-a putut stabili modul de deformație al acestui contur şi implicit al montantului. În figura 11 *a* şi *b* se dau aspectul deformat al golului şi montantului după solicitare; se observă că punctele singulare din mijlocul verticalelor care delimitează golul corespund unor puncte de inflexiune (puncte neutre).

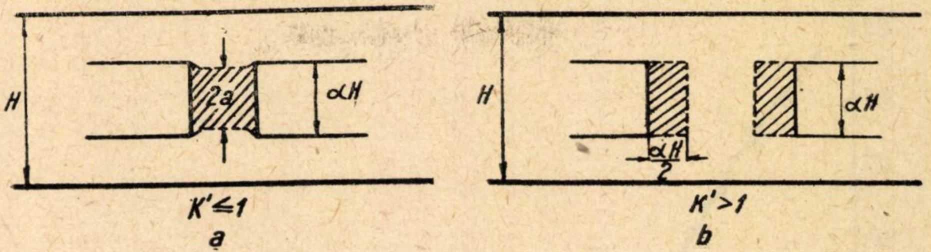


Fig. 10 *a* şi *b*

Dintre observațiile făcute, una prezintă o importanță deosebită prin consecințele pe care le are şi anume cea referitoare la formarea, în locul axei neutre, prin apropierea golurilor, a unei zone neutre de înălțime 2 *a*. În diagrama din figura 12 se dă variația înălțimii $h' = \frac{2a}{\alpha H}$ (înălțimea relativă a zonei neutre), în funcție de K', parametrul de formă a montantului. Rezultă din această diagramă, modul cum descreşte h', o dată cu creşterea lui K' şi faptul că pentru $K' > 1$, înălțimea relativă a zonei neutre devine practic neglijabilă.

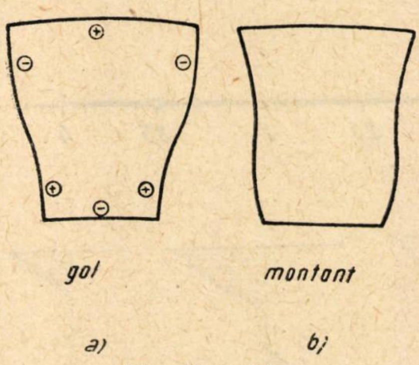


Fig. 11 *a* şi *b*

Este interesant de urmărit, în acest sens, modul cum evoluează diagramele de eforturi unitare normale în secțiunea verticală din axul montantului pentru cele 5 modele din figura 9 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*); a se vedea figura 13 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Dintre acestea, figura 13 *c*, *d*, *e*, prezintă diagrame de tip Navier, modificate prin apariția unor zone neutre înalte. În afară de importanța teoretică a unui asemenea fenomen, care poate fi provocat după necesitățile de cercetare prin introducerea unor goluri a căror înălțime să comande înălțimea zonei neutre, studiul are şi consecințe practice. Într-adevăr pe tablourile de izocromate în cazul $K' \leqslant 1$ (fig. 9 *c*, *d*, *e*) se observă că ordinul de bandă şi deci efortul unitar normal în fibra extremă în secțiunea transversală prin montant este superior ordinului de bandă şi deci efortului unitar normal în fibra extremă în secțiunea transversală prin dreptul golului, ceea ce este contrar aşteptărilor ; calculul în rezistenţa materialelor ne arată că în secţiunea cu gol, momentul de inerţie fiind mai mic, efortul unitar normal în fibra extremă este mai mare decît în secţiunea prin montant. Este deci un caz în care calculul prin metodele rezistenţei materialelor nu este acoperitor.

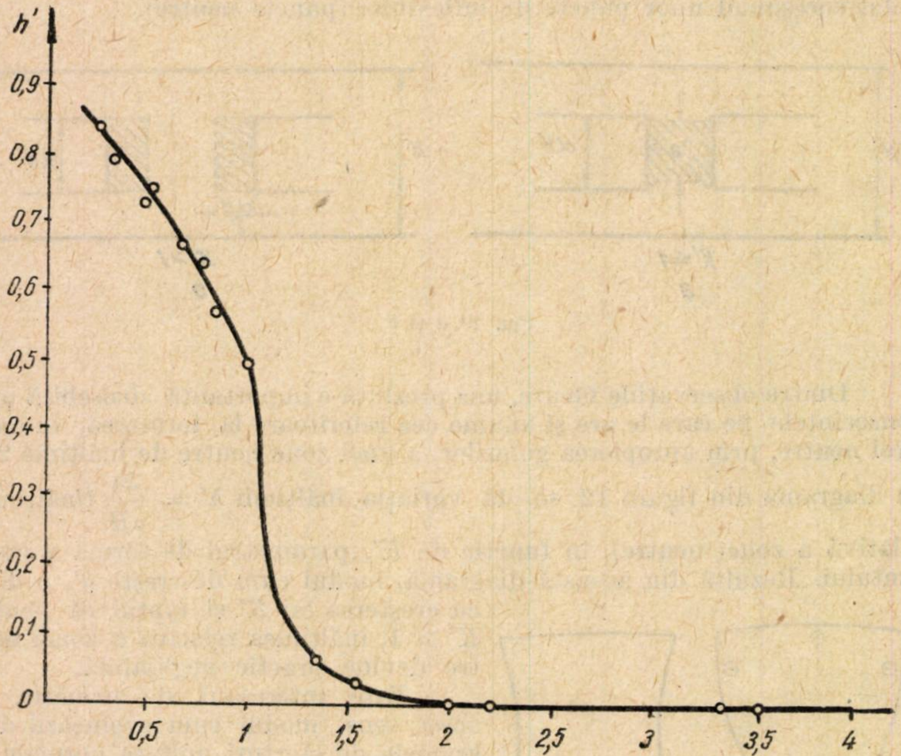


Fig. 12

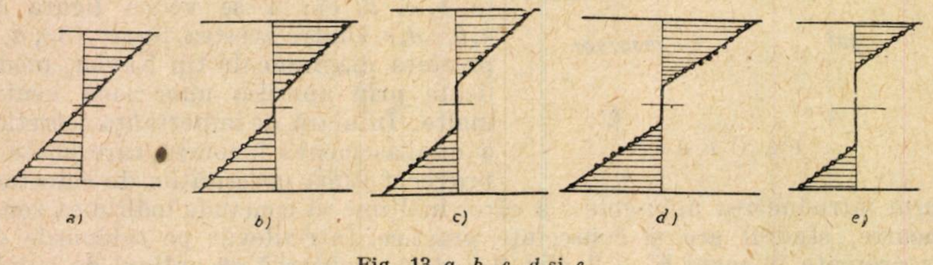

a) b) c) d) e)

Fig. 13 *a*, *b*, *c*, *d* şi *e*

5. Fiind vorba de o diagramă în mod practic liniară, se poate stabili destul de uşor o formulă de calcul a eforturilor unitare normale în secţiunea

cea mai solicitată prin montant, secțiune de formă dreptunghiulară, sau cu două axe de simetrie (fig. 14 *a*, *b*, *c*).

Luînd originea în centrul de greutate al secțiunii transversale, rezultă, pornind de la această diagramă liniară

$$\sigma = \pm\, t\,(y-a), \tag{1}$$

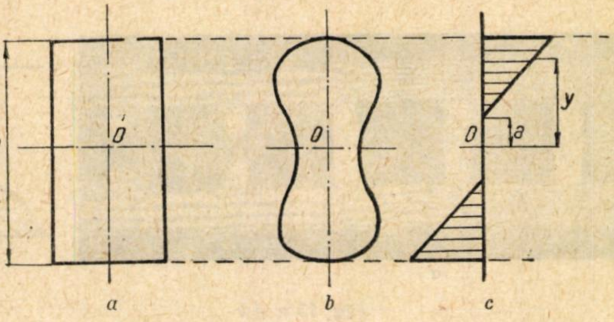


Fig. 14 *a*, *b* și *c*

unde $y \geqslant a > 0$ iar t este o constantă de proporționalitate pe care urmează să o determinăm. Ecuația de echilibru între momentul exterior M și momentul eforturilor unitare în raport cu axa orizontală, ce trece prin centrul de greutate al secțiunii, este

$$M = 2\int_{y=a}^{y=\frac{H}{2}} \sigma\, dA = 2\int_{y=a}^{y=\frac{H}{2}} t(y-a)\,y\,dA = t\int_{y=a}^{y=\frac{H}{2}} 2y^2 dA - t\int_{y=a}^{y=\frac{H}{2}} 2\,ay\,dA,$$

deci

$$M = t\,(I_0 - aS_0),$$

de unde :

$$t = \frac{M}{I_0 - aS_0}, \tag{2}$$

în care I_0 este momentul de inerție al secțiunii active în raport cu axa neutră, iar

S_0 este dublul momentului static al uneia din cele două jumătăți ale secțiunii active.

Introducînd valoarea lui t în (1), obținem :

$$\sigma = \pm\, \frac{M}{I_0 - aS_0}\,(y-a), \tag{3}$$

unde $y \geqslant a > 0$.

Expresia (3) poate fi considerată o generalizare a formulei lui Navier pentru încovoierea pură, deoarece cînd înălțimea a a zonei neutre devine nulă, căpătăm formula clasică $\sigma = \frac{M}{I} y$ unde I_0 a devenit I, iar ceilalți termeni care cuprind pe a s-au anulat.

Pentru a ne da seama de diferența ce se obține, vom aplica formula (3) în cazul grinzii din figura 9 *d*, avînd $K' = 0{,}83$; din diagrama din figura 12 rezultă $2a = 0{,}57\ h'$. Introducînd în cele două formule dimensiunile grinzii, rezultă, pentru un moment încovoietor unitar, că efortul unitar maxim în fibra extremă este cu cira 8% mai mare în cazul folosirii formulei lui Navier generalizate decît în cazul folosirii formulei clasice a lui Navier, ceea ce se confirmă prin încercările fotoelastice.

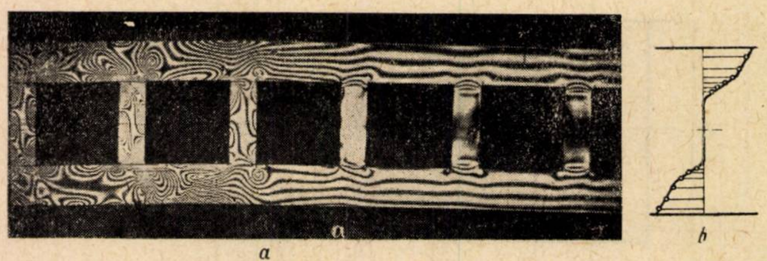

a *b*

Fig. 15 *a* și *b*

Explicația creșterii eforturilor unitare, în cazul existenței unei zone neutre de înălțime relativ mare, rezultă tocmai din faptul că o parte importantă a secțiunii nu este activă și deci echilibrarea momentului exterior trebuie obținută prin eforturi unitare distribuite pe o zonă mică și care pornesc de la valoarea zero.

6. În cazul în care avem, însă, de-a face cu montanți zvelți ($K' < 0{,}5$), înălțimea zonei inactive crește foarte mult ($h' > 0{,}75$) ; a se vedea tabloul de izocromate pentru o asemenea grindă precum și diagrama de eforturi corespunzătoare (fig. 15). În acest caz, diagramele de eforturi nu mai sînt liniare, și după cum se vede în figura 16 *a*, *b*, *c* ele pot fi reprezentate schematic prin două linii drepte. Apariția vîrfurilor A pe diagramă se datorește concentrărilor de tensiuni provocate de colțurile intrînde, relativ apropiate ale golurilor. În zona $A - B$ linia care reprezintă variația eforturilor unitare normale trece, dacă este prelungită, prin centrul de greutate al secțiunii. În zona $A\ C$, de înălțime $0{,}1\ H$,

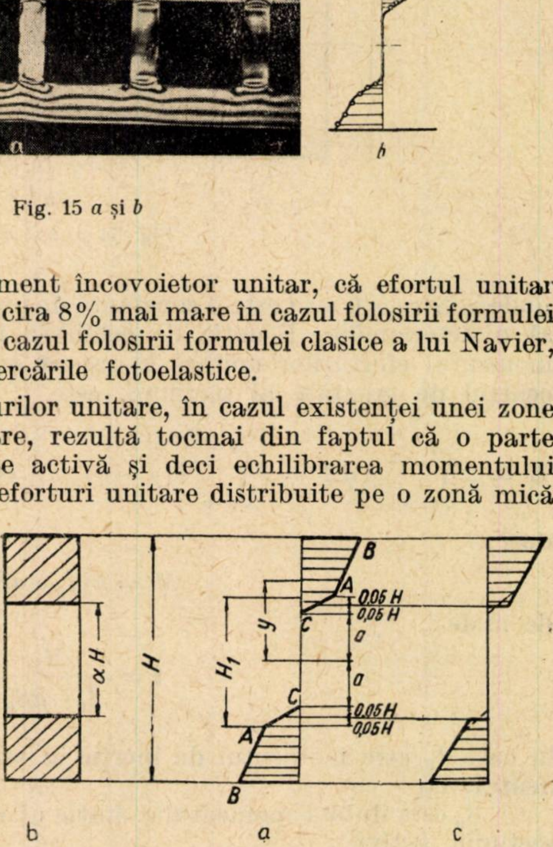


Fig. 16 *a*, *b* și *c*

constanta de proporționalitate $t_2 = \dfrac{\sigma}{y-a}$ a fost determinată prin încercări ca și cea din zona $A-B$: $t_1 = \dfrac{\sigma}{y}$. A rezultat că raportul lor

$$\xi = \frac{t_2}{t_1} \approx 3.$$

Dacă scriem ecuația de echilibru cu momentul exterior, obținem

$$M = 2\int_{\frac{H_1}{2}}^{\frac{H}{2}} t_1 y^2 dA + 2\int_{a}^{\frac{H_1}{2}} t_2 (y-a) y dA,$$

rezultă

$$M = t_1 I_1 + t_2 (I_2 - a S_2) = t_1 (I_1 + \xi I_2 - \xi a S_2),$$

de unde

$$t_1 = \frac{M}{I_1 + \xi I_2 - \xi a S_2},$$

și deci

$$\sigma = \pm \frac{M}{I_1 + \xi I_2 - \xi a S_2} y \qquad y \geqslant \frac{H_1}{2} > 0, \tag{4}$$

unde se observă că atunci cînd a devine nul, iar $\xi = 1$, obținem ecuația clasică a lui Navier. O aproximație destul de bună, în cazul $K' < 0{,}5$ se obține, observînd că zona $A\ C$ se întinde pe o înălțime de numai 0,1 H, simetric față de linia orizontală în prelungirea muchiilor golurilor. Rezultă că se poate lua ca diagramă de calcul, diagrama reprezentată în figura 16 *c*, ceea ce înseamnează utilizarea formulei lui Navier în cazul secțiunii cu gol simetric de înălțime αH. Eroarea care se face este de ordinul 2%—3% ceea ce este practic neglijabil.

7. Vom studia deformabilitatea grinzilor cu goluri la încovoiere pură pornind de la datele furnizate de încercările fotoelastice și aplicînd metoda încărcării fictive cu suprafețe de momente. Din punctul de vedere al deformabilității grinzii cu goluri, vom deosebi două categorii de grinzi : grinzi ai căror montanți au parametrul de formă $K' > 1$ și grinzi la care $K' \leqslant 1$.

Să ne ocupăm mai întîi de cazul $K' > 1$. După cum am arătat în paragraful 4, în acest caz, apar zonele nesolicitate prezentate în figura 10 *b*. De aceea, vom considera că golurile care micșorează rigiditatea grinzii sînt prelungite cu αH și deci că golurile au lungimea $(\alpha + \beta) H$, iar montanții au baza $\beta' H$ micșorată cu αH, adică au dimensiunea $(\beta' - \alpha) H$.

Așadar, dacă cele două momente de inerție sînt

$$I = \frac{H^3}{12} \text{ și } I' = \frac{H^3}{12} - \frac{\alpha^3 H^3}{12} = I(1-\alpha^3)$$

iar raportul lor este

$$\frac{I}{I(1-\alpha^3)}=\frac{1}{1-\alpha^3}, \tag{5}$$

rezultă că folosind pentru calculul deformațiilor metoda pomenită mai sus, diagramele de momente vor fi amplificate în zonele $(\alpha+\beta)\,H$ cu acest raport; în zonele $(\beta'-\alpha)\,H$, diagramele de momente vor rămîne nemodificate. Așadar, diagrama de încărcări fictive, cu suprafețe de momente, va avea forma din figura 17, în care ordonatele momentului constant M sînt amplificate în porțiunile $(\alpha+\beta)H$ cu raportul $\frac{1}{1-\alpha^3}$.

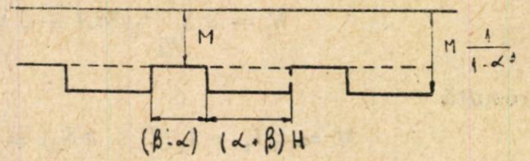


Fig. 17

Dacă notăm cu A_M, suprafața de momente așa cum rezultă din figura 17 și cu A_{MC}, suprafața de momente în cazul grinzii cu moment de inerție constant I, obținem că săgeata maximă a unei grinzi cu modul de elasticitate E și avînd deschiderea l, este

$$y_{\max}=\frac{1}{EI}\left[\frac{A_M}{2}\cdot\frac{l}{2}-\frac{A_M}{2}\cdot\frac{l}{4}\right]=\frac{A_M l}{8\,EI}. \tag{6}$$

Introducem, acum, noțiunea de modul de elasticitate echivalent (E_{ech}), determinat astfel încît, pentru o grindă fără goluri, de dimensiuni și solicitări egale, să obținem aceeași săgeată maximă. Vom avea

$$y_{\max}=\frac{A_{MC}l}{8\,E_{\text{ech}}I}. \tag{7}$$

Punînd condiția de egalitate a celor două săgeți maxime, vom obține o relație de legătură între modulul de elasticitate real și modulul de elasticitate echivalent al grinzii cu goluri, modul care o dată obținut, vom putea efectua cu ușurință calculul rigidității grinzilor cu goluri. Rezultă

$$\frac{A_M}{E}=\frac{A_{MC}}{E_{\text{ech}}} \quad \text{sau} \quad \frac{E_{\text{ech}}}{E}=\frac{A_{MC}}{A_M}$$

și cum $A_{MC}=M\cdot l$,

iar

$$A_M=Ml+Ml\left(\frac{1}{1-\alpha^3}-1\right)\frac{\beta+\alpha}{\beta+\beta'},$$

obținem

$$\frac{A_M}{A_{MC}} = 1 + \left(\frac{1}{1-\alpha^3} - 1\right)\frac{\beta+\alpha}{\beta+\beta'} = 1 + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}\cdot\frac{\alpha+\beta}{K'\alpha+\beta}$$

unde am notat $K' = \frac{\beta'}{\alpha}$ în care $K' > 1$.

Așadar, raportul căutat al modulelor de elasticitate va fi :

$$\frac{E_{\text{ech}}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}\cdot\frac{\alpha+\beta}{K'\alpha+\beta}}. \tag{8}$$

Au fost construite abace, așa cum se arată în figura 18 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, care dau valorile raportului $\frac{E_{\text{ech}}}{E}$ funcție de K', pentru diferite valori ale lui α și β. Cu ajutorul acestor abace, calculul modulului de elasticitate echivalent al grinzilor cu goluri și deci calculul săgeților acestor grinzi, datorite momentului încovoietor constant se poate efectua cu ușurință. Din abace, rezultă că micșorarea valorii modulului de elasticitate în raportul $\frac{E_{\text{ech}}}{E}$ este redusă, și anume pentru $\alpha \leqslant 0{,}3$,

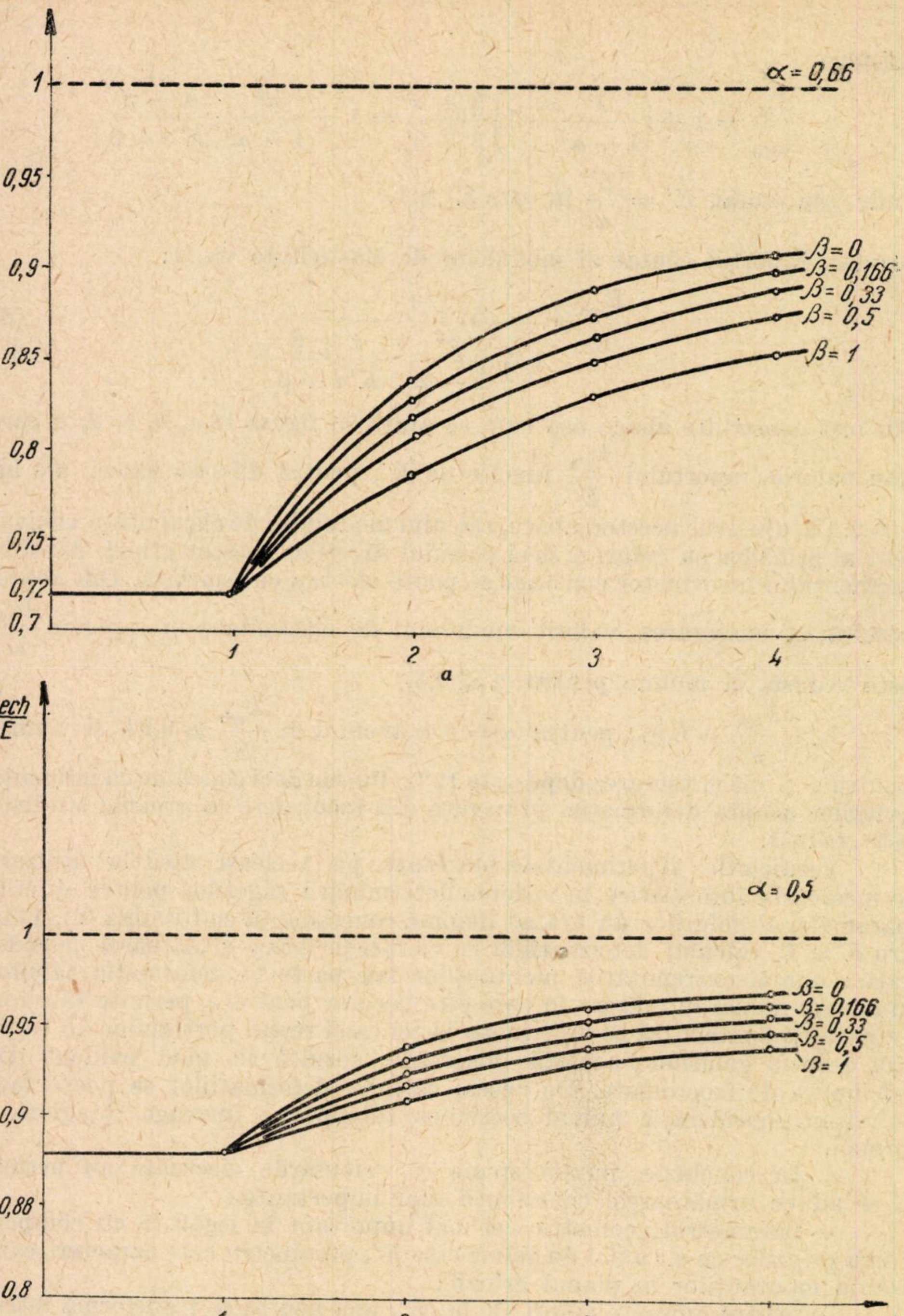
$1 > \frac{E_{\text{ech}}}{E} \geqslant 0{,}97$, pentru $\alpha = 0{,}4$ avem $1 > \frac{E_{\text{ech}}}{E} \geqslant 0{,}94$ și numai pentru $\alpha \geqslant 0{,}5$ micșorarea depășește 12%. Putem deci conchide că influența golurilor asupra deformației provenite din încovoiere la grinzile studiate este redusă.

Verificările experimentale efectuate pe aceleași modele utilizate la încercările fotoelastice, în vederea determinării săgeților pentru diferiți parametri ai golurilor au arătat deplină concordanță cu formula (6). Pentru $K' \leqslant 1$, calculul deformațiilor se va face pe baza următoarei considerații : numai extremitățile montanților iau parte la deformația tălpilor și anume numai în măsura în care este necesar pentru a permite tălpilor, în zona de contact, să se deformeze la fel ca și restul porțiunilor de talpă din dreptul golurilor; această observație rezultă în mod evident din tablourile de izocromate. De aceea, calculul deformațiilor se poate face luînd în considerație numai secțiunea tălpilor pe întreaga lungime a grinzii.

8. În concluzie, putem spune că cercetările efectuate au permis a se aduce următoarele contribuții mai importante :

— parametrul geometric cel mai important în legătură cu comportarea grinzilor cu șir axial de goluri este K', parametru care caracterizează forma montanților în planul grinzii ;

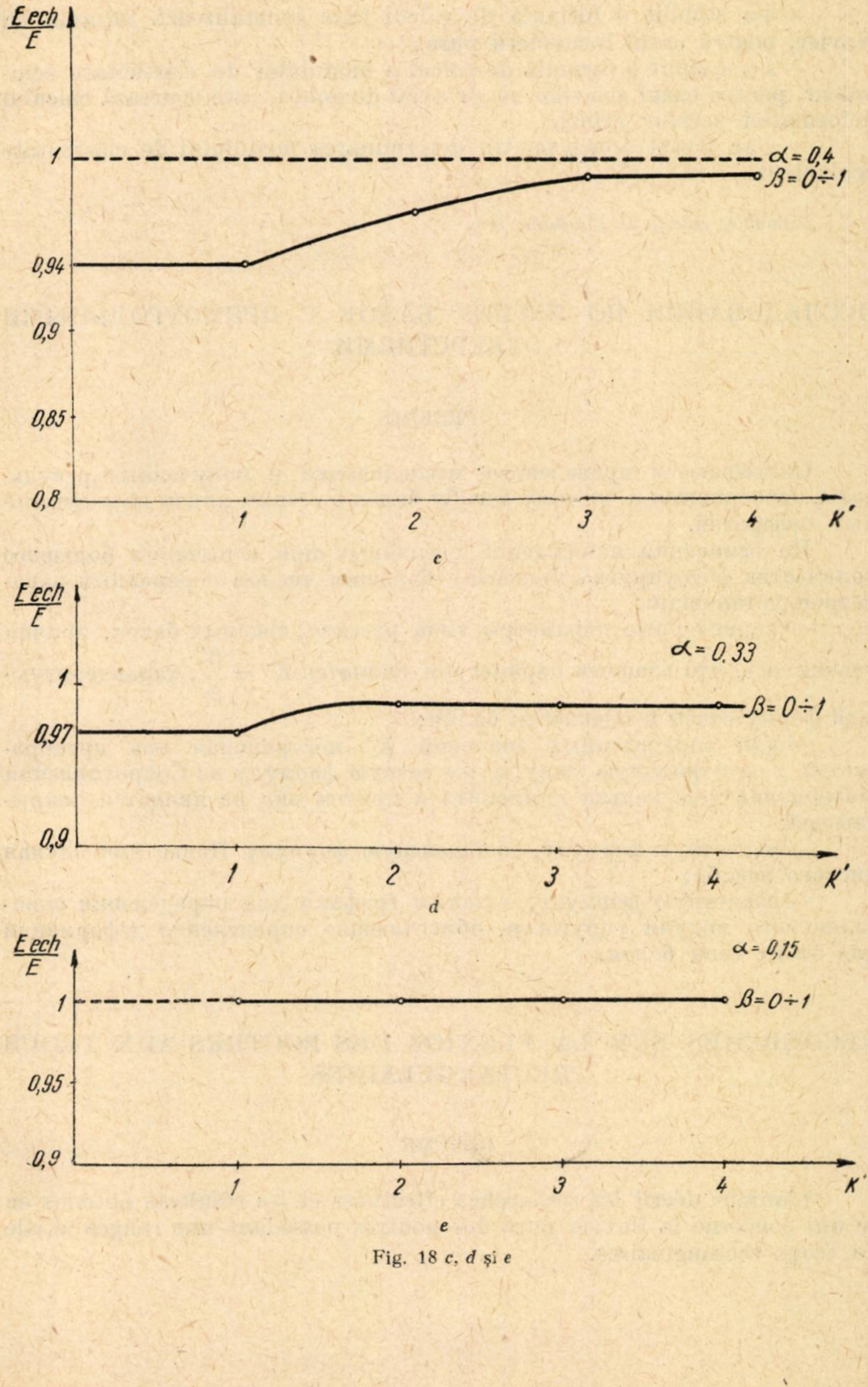
— pentru anumite valori ale lui K', axa neutră se transformă într-o zonă neutră, iar formula de calcul din rezistența materialelor nu se mai poate aplica și nici nu mai este acoperitoare ;



a

b

Fig. 18 a şi b



c

d

e

Fig. 18 *c*, *d* şi *e*

— s-a stabilit o formulă de calcul care generalizează formula lui Navier, pentru cazul încovoierii pure;

— s-a stabilit o formulă de calcul a modulului de elasticitate echivalent, pentru cazul grinzilor cu şir axial de goluri, care uşurează calculul deformaţiei acestor grinzi.

— s-au trasat abace pentru determinarea modulului de elasticitate echivalent.

Primită la redacţie la 23 aprilie 1960

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИЗГИБУ БАЛОК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

РЕЗЮМЕ

Описываются проведенные исследования и полученные результаты, относящиеся к чистому изгибу балок с осевым рядом прямоугольных отверстий.

На основании наблюдений, сделанных при испытании большого количества фотоупругих моделей с большим числом переменных параметров, установили:

— характерные параметры типа рассматриваемых балок, причем уточнилось, что главным параметром является $K' = \frac{\beta'}{\alpha}$, характеризующий форму стоек в плоскости балки;

— для определенных значений K' нейтральная ось преобразуется в нейтральную зону, а расчетную формулу из Сопротивления Материалов уже нельзя применить и притом она не является покрывающей;

— расчетную формулу, обобщающую формулу Навье для случая чистого изгиба;

— расчетную формулу, а также графики для определения эквивалентного модуля упругости, облегчающие определение деформаций для этого типа балок.

RECHERCHES SUR LA FLEXION DES POUTRES AUX TROUS RECTANGULAIRES

RÉSUMÉ

L'auteur décrit les recherches effectuées et les résultats obtenus en ce qui concerne la flexion pure des poutres possédant une rangée axiale de trous rectangulaires.

Les observations faites lors des essais sur un grand nombre de modèles photo-élastiques, possédant de nombreux paramètres variables, ont permis d'établir :

— les paramètres caractéristiques du type de poutres étudié, en précisant que le principal paramètre est $K' = \frac{\beta'}{\alpha}$, qui caractérise la forme des montants dans le plan de la poutre ;

— l'axe neutre, pour certaines valeurs de K', se transforme dans une zone neutre, avec la remarque que la formule de calcul fournie par la Résistance des matériaux ne peut plus être appliquée et, de plus, qu'elle ne couvre pas tous les cas ;

— une formule de calcul représentant une extension de la formule de Navier au cas de la flexion pure ;

— une formule de calcul ainsi que des abaques permettant de déterminer le module d'élasticité équivalent, ce qui facilite la détermination des déformations dans ce type de poutres.

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. **КАЛМАНОК**, *Практические методы расчета многоэтажных зданий на горизонтальные нагрузки* din culegerea de lucrări : *Вопросы расчета конструкции жилых и общественных зданий со сборными элементами.* Госстройиздат, Москва, 1958.
2. В. А. **МАРИН**, *К расчету общей прочности корпуса цельнометаллического вагона*: din culegerea de lucrări : *Расчет пространственных конструкций* (IV) sub redacţia prof. A.A. Umanski, Госстройиздат, Москва, 1958.
3. H. **BECK**, *Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel des Vierendeelträgers.* Der Bauingenieur, *21*, 31 (1956).
4. R. **KNAAK**, *Gedanken zum Leichtbau von Reisezugwagen, insbesondere im Gemischtbauweise Stahl-Leichtmetall.* VDI Zeitschrift, **99**, *32* (1957).
5. Г. И. **БЕРДИЧЕВСКИЙ**, Ю. Б. **ДМИТРИЕВ**, *Распределение напряжений вблизи отверстий в стенках предварительно напряженных железобетонных балок.* Бетон и железобетон, *2* (1960).
6. Н. И. **МУСХЕЛИШВИЛИ**, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1954.
7. Г. Н. **САВИН**, *Концентрация напряжений около отверстий.* ОГИЗ, Москва, 1951.
8. M. **ARCAN**, F. **STOENESCU**, R. **MIHAIL**, *Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate : Dinox F 110.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4* (1957).

STUDII

ELASTICITATE, PLASTICITATE, REZISTENȚA MATERIALELOR

REDUCEREA FORMALĂ A STĂRII DE TENSIUNE GLOBALĂ A ÎNVELITORILOR ELASTICE SUBȚIRI LA STAREA DE MOMENTE PURE CVASIINVARIANTĂ

DE

V. VISARION și C. STĂNESCU

Într-o lucrare anterioară [1] am introdus noțiunea de cvasiinvariant pentru cazul învelitorilor cu anizotropie de material și am demonstrat existența unei formulări cvasiinvariante complexe a ecuațiilor teoriei învelitorilor subțiri și a condițiilor la limită.

S-a arătat în aceeași lucrare, că sistemul de ecuații de echilibru în eforturi și momente și ecuațiile de continuitate a deformației, se reunesc într-un sistem formulat în eforturi și momente complexe, fiecare ecuație fiind cvasiinvariantă în analogia statico-geometrică [2]. Acest sistem este :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha})+\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta\alpha})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta}-AB\left(\frac{\widetilde{Q}_{\alpha}}{R_1'}-\frac{\widetilde{Q}_{\beta}}{R_{12}}\right)=0\,;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta})-\frac{\partial A}{\partial\beta}\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta\alpha}-AB\left(\frac{\widetilde{Q}_{\beta}}{R_2'}-\frac{\widetilde{Q}_{\alpha}}{R_{12}}\right)=0,\\
AB\left(\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha}}{R_1'}+\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta}}{R_2'}+\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta\alpha}-\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{R_{12}}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{Q}_{\alpha})+\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{Q}_{\beta})=0,\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta})+\frac{\partial A}{\partial\beta}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta\alpha}+AB\widetilde{Q}_{\beta}=0,\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha})-\frac{\partial A}{\partial\beta}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta\alpha})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta}-AB\widetilde{Q}_{\alpha}=0,\\
\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}+\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta\alpha}=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Acestui sistem i se ataşează ecuaţia suplimentară cvasiinvariantă

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}+\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta\alpha}=0. \tag{2}$$

După cum s-a arătat în lucrarea [1] legea lui Hooke se poate scrie sub forma a trei ecuaţii nediferenţiale cvasiinvariante care leagă eforturile şi momentele complexe. Aceste ecuaţii au fost numite de autori, ecuaţiile complementare ale formulării cvasiinvariante al teoriei învelitorilor subţiri elastice. Considerînd cazul învelitorilor izotrope, aceste ecuaţii complementare sînt

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha}&=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu^{2})}}(\widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta}-\mu\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_{\alpha}),\\ \widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta}&=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu^{2})}}(\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha}-\mu\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_{\beta}),\\ \widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}&=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu^{2})}}(\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}+\mu\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}).\end{aligned} \tag{3}$$

Tot în lucrarea [1] s-a demonstrat, în baza unei teoreme de existenţă şi unicitate, posibilitatea scrierii condiţiilor la limită sub formă complexă.

În cele ce urmează, vom arăta pe baza ecuaţiilor de mai sus că teoria învelitorilor elastice subţiri izotrope în eforturi şi momente se poate formula ca o stare numai cu momente cvasiinvariante, momentele acţionînd asupra unei *învelitori amembrane* [1]), a cărei suprafaţă mediană păstrează o geometrie ca şi suprafaţa mediană a învelitorii, dar avînd grosimea imaginară şi caracteristicile elastice modificate.

În acest scop se introduce notaţia

$$h_{*}=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu^{2})}}, \tag{4}$$

noua mărime h_* considerîndu-se a fi semigrosimea *învelitorii amembrane*. Dacă se mai introduc notaţiile

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha}&=-\frac{2Eh_{*}^{2}}{3(1-\mu^{2})}\chi_{2}^{*},\quad \widetilde{\mathfrak{N}}_{\beta}=-\frac{2Eh_{*}^{2}}{3(1-\mu^{2})}\chi_{1}^{*}\\ \widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}&=\frac{2Eh_{*}^{2}}{3(1-\mu^{2})}\tau^{*}\end{aligned} \tag{5}$$

şi se consideră drept coeficient al lui Poisson pentru *învelitoarea amembrană* mărimea[2])

$$\mu_{*}=-\mu^{-} \tag{6}$$

---

[1]) Denumirea este justificată de dispariţia formală în această formulare a eforturilor cvasiinvariante din planul tangent la suprafaţa mediană.

[2]) μ^{-} conjugă factorul pe care îl amplifică.

atunci ecuațiile complementare (3) capătă forma

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha}=-\frac{2Eh_{*}^{3}}{3(1-\mu_{*}^{2})}(\chi_{1}^{\star}+\mu_{*}\chi_{2}^{\star}),\ \widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta}=-\frac{2Eh_{*}^{3}}{3(1-\mu_{*}^{2})}(\chi_{2}^{\star}+\mu_{*}\chi_{1}^{\star})\\ \widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}=2Eh_{*}^{3}\frac{1}{1+\mu_{*}}\tau^{\star}.\end{gathered}\tag{7}$$

Aceste ecuații sînt identice, formal, cu ecuațiile lui Hooke care leagă momentele cu componentele de încovoiere ale deformației. Vom arăta că mărimile $\chi_1^{\star}$, $\chi_2^{\star}$ și $\tau^{\star}$ reprezintă efectiv componentele deformației de încovoiere a *învelitorii amembrane*, ceea ce justifică modul în care au fost notate.

Dacă se introduc relațiile (5) în primele trei ecuații din sistemul omogen (1), se obține

$$\begin{gathered}-\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\chi_{2}^{\star})+\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau^{\star}+\frac{\partial}{\partial\beta}(A\tau^{\star})+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\chi_{1}^{\star}-AB\left(\frac{\zeta_{2}^{\star}}{R_{1}'}+\frac{\zeta_{1}^{\star}}{R_{12}}\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\tau^{\star})+\frac{\partial A}{\partial\beta}\chi_{2}^{\star}-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\chi_{1}^{\star})+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau^{\star}+AB\left(\frac{\zeta_{1}^{\star}}{R_{2}'}+\frac{\zeta_{2}^{\star}}{R_{12}}\right)=0,\\ -AB\left(\frac{\chi_{2}^{\star}}{R_{1}'}+\frac{\chi_{1}^{\star}}{R_{2}'}+\frac{2\tau^{\star}}{R_{12}}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\zeta_{2}^{\star})-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\zeta_{1}^{\star})=0,\end{gathered}\tag{8}$$

dacă se adoptă următoarea lege a lui Hooke pentru eforturile tăietoare complexe

$$\begin{gathered}\widetilde{Q}_{\alpha}=\frac{2Eh_{*}^{2}}{3(1-\mu_{*}^{2})}\zeta_{2}^{\star},\\ \widetilde{Q}_{\beta}=-\frac{2Eh_{*}^{2}}{3(1-\mu_{*}^{2})}\zeta_{1}^{\star}.\end{gathered}\tag{9}$$

Dar sistemul astfel obținut (8) coincide ca formă cu ecuațiile de continuitate a deformației care leagă componentele deformației de încovoiere [3].

Analogia care a fost pusă în evidență justifică în acest mod, pe deplin, denumirea dată anterior celor trei mărimi $\chi_1^{\star}$, $\chi_2^{\star}$ și $\tau^{\star}$. De observat, că pentru *învelitoarea amembrană* există o lege a lui Hooke între eforturile tăetoare complexe și mărimile $\zeta_1^{\star}$, $\zeta_2^{\star}$, lege care nu apare în formularea clasică a teoriei învelitorilor subțiri, ca urmare a ipotezei Love-Kirchoff.

În consecință, în formularea stării de momente pure cvasiinvariante, urmează a se soluționa sistemul format din ecuația a patra și a cincea din sistemul (1), ca fiind ecuaţiile de echilibru numai în momente şi forţe tăietoare

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta})+\frac{\partial A}{\partial\beta}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta\alpha}+AB\widetilde{Q}_{\beta}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta})-\frac{\partial A}{\partial\beta}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}(A\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta\alpha})-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\widetilde{\mathfrak{M}}_{\beta}-AB\widetilde{Q}_{\alpha}=0, \end{aligned} \tag{10}$$

la care se ataşează ecuaţia suplimentară (2), ecuaţiile lui Hooke (7) şi ecuaţiile de continuitate a deformaţiei de încovoiere (8).

Condiţiile la limită se pot transcrie în mărimile specifice noii formulări, pornindu-se de la condiţiile la limită cvasiinvariante, aşa cum au fost deduse în lucrarea [1].

Această formulare aduce simplificări esenţiale în calcule datorită reducerii ordinului sistemului de ecuaţii şi a necunoscutelor. Pentru aceasta este util să se menţioneze anumite reguli de calcul cu mărimea μ_*.

Astfel, dacă λ este o mărime complexă arbitrară, atunci

$$i\mu_*\lambda = -\mu_* i\lambda$$

şi deci şi

$$h_*\mu_*\lambda = -\mu_* h_*\lambda$$

adică μ_* este anticomutativ în înmulţirea cu h_*. De asemenea rezultă

$$\mu_*^2 = \mu_*\mu_* = \mu^2.$$

Primită la redacţie la 12 martie 1960

ФОРМАЛЬНОЕ ПРИВЕДЕНИЕ СУММАРНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК К ЧИСТО МОМЕНТНОМУ КВАЗИИНВАРИАНТНОМУ СОСТОЯНИЮ

РЕЗЮМЕ

Исходя из квазиинвариантного формулирования теории оболочек, данного авторами в предыдущей работе, показывается, что теорию тонких упругих изотропных оболочек можно формулировать, как состояние только с квазиинвариантными моментами, причем последние действуют на ,,безмембранную оболочку'' мнимой толщины и с видоизмененными упругими характеристиками. Показывается, что и граничные условия можно выразить специфическими величинами, соответствующими новому формулированию.

RÉDUCTION FORMELLE DE L'ÉTAT DE TENSION GLOBALE DES VOILES ÉLASTIQUES MINCES À L'ÉTAT QUASI-INVARIANT DES MOMENTS PURS

RÉSUMÉ

En partant de l'énoncé quasi-invariant de la théorie des voiles, publié par les auteurs dans un travail antérieur, ceux-ci montrent que la théorie des voiles élastiques minces isotropes peut être énoncée comme un état ne comportant que des moments quasi-invariants, agissant sur une «voile amembrane» ayant une épaisseur imaginaire et des caractéristiques élastiques modifiées. En outre, ils montrent que les conditions aux limites aussi peuvent être transcrites dans les grandeurs spécifiques du nouvel énoncé.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Visarion, C. Stănescu, *Teoria cvasiinvarianţilor analogiei statico-geometrice pentru învelitorile anizotrope*. P.M.M. Moscova (sub tipar).
2. C. Stănescu, V. Visarion, *Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu anizotropie de material*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3* (1959).
3. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*. Гостехиздат, Москва, 1953.

STUDII

ELASTICITATE, PLASTICITATE, REZISTENȚA MATERIALELOR

CALCULUL ELASTO-DINAMIC AL TUBURILOR CILINDRICE CIRCULARE SOLICITATE AXIAL SIMETRIC

DE

FI. DINCĂ și N. BOICU

1. Linia pe care s-au dezvoltat cercetările în studiul tuburilor cilindrice circulare groase solicitate axial simetric de sarcini dinamice a urmărit linia dezvoltării cazului general al teoriei elasticității.

În cazul static s-a căutat ca pornindu-se de la ecuațiile generale ale teoriei elasticității scrise pentru acest caz în coordonate cilindrice, să se exprime funcțiile necunoscute (tensiuni sau deplasări) cu ajutorul unor funcții care să satisfacă ecuații diferențiale mai simple (prin funcții armonice biarmonice etc).

Diverse exprimări au fost date pentru cazul static de către Mitchel, Love, B. G. Galerkin, Grodțki, Marguerre, Cree, Vebel. Un alt aspect al acestei probleme, anume determinarea arbitrarelor astfel încît să fie îndeplinite condițiile a dat naștere unei bogate literaturi ca urmare a dificultăților de calcul. O soluție generală (care să satisfacă toate condițiile la limită) și operantă nu a fost dată. În problema statică au fost propuse diverse soluții care să satisfacă exact condițiile pe anumite suprafețe și aproximativ pe altele.

O linie asemănătoare a fost parcursă și în aspectul dinamic al aceleiași probleme, însă lucrările în acest domeniu sînt mult mai puține din cauza dificultăților mai mari.

În această lucrare se dă soluția problemei dinamice pentru un tub încărcat axial simetric.

2. Ecuațiile teoriei elasticității în deplasări, în coordonate cilindrice, pentru cazul încărcării axial simetrice a unui tub cilindric (fig. 1) sînt

$$\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ &(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+2\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

În aceste ecuaţii u este deplasarea radială, w deplasarea axială, λ şi μ constantele lui Lamé iar ρ este densitatea materialului.

Tensiunile se exprimă cu ajutorul legii lui Hooke şi sînt date de relaţiile

$$\begin{aligned} R_r &= \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \Phi_\theta &= \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\,\frac{u}{r}, \\ Z_z &= \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\,\frac{\partial w}{\partial z}, \\ R_z &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Condiţiile la limită ale problemei sînt

$$\begin{aligned} r = r_0 &: R_r = f_0(z, t);\ R_z = g_0(z, t), \\ r = r_1 &: R_r = f_1(z, t);\ R_z = g_1(z, t), \\ z = 0 &: Z_z = f_2(r, t);\ R_z = g_2(z, t), \\ z = l &: Z_z = f_3(r, t);\ R_z = g_3(z, t). \end{aligned} \tag{3}$$

Vom presupune că în momentul iniţial corpul este liber de tensiuni şi în repaus, în consecinţă: $u = \frac{\partial u}{\partial t} = w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ pt. $t = 0$.

3. Pentru rezolvarea problemei vom utiliza transformata Laplace. Fie deci

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_0^\infty u\,.\,e^{-pt}\,dt;\quad \bar{w} = \int_0^\infty w\,.\,e^{-pt}\,dt; \\ \bar{f}_0 &= \int_0^\infty f_0(z, t)\,e^{-pt}\,dt;\quad \bar{f}_1 = \int_0^\infty f_1(z,t)\,e^{-pt}\,dt, \\ &- - - - - - - ;\quad \bar{g}_3 = \int_0^\infty g_3(r, t)\,e^{-pt}\,dt. \end{aligned} \tag{4}$$

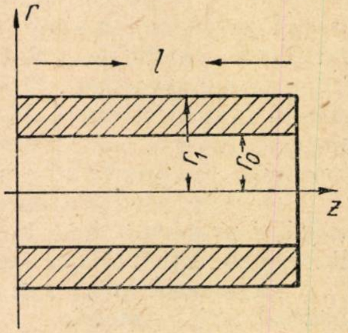


Fig. 1

Utilizînd aceste transformări şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale ecuaţiile (1) devin

$$\begin{aligned} c_1^2\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{u}}{r^2}\right) + c_2^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} + c_3^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r\partial z} &= p^2\bar{u}, \\ c_1^2\,\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2} + c_2^2\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right) + c_3^2\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) &= p^2\bar{w}. \end{aligned} \tag{5}$$

Relațiile (2) se scriu similar

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_r &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\overline{u}}{r} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right),\\
\overline{\Theta}_\theta &= \lambda\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\overline{u})}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\overline{u}}{r},\\
\overline{Z}_z &= \lambda\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\overline{u})}{\partial r} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial \overline{w}}{\partial z},\\
\overline{R}_z &= \mu\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial r}\right),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

și condițiile la limită (3) de asemenea

$$
\begin{aligned}
r = r_0 &: \overline{R}_r = \overline{f}_0(z, p)\,;\ \overline{R}_z = \overline{g}_0(z, p),\\
r = r_1 &: \overline{R}_r = \overline{f}_1(z, p)\,;\ \overline{R}_z = \overline{g}_1(z, p),\\
z = 0 &: \overline{Z}_z = \overline{f}_2(r, p)\,;\ \overline{R}_z = \overline{g}_2(r, p),\\
z = e &: \overline{Z}_z = \overline{f}_3(r,p)\,;\ \overline{R}_z = \overline{g}_3(r,p).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

În relațiile (5) c_1, c_2 și c_3 sînt

$$
c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\,;\quad c_2^2 = \frac{2\mu}{\rho}\,;\quad c_3^2 = \frac{\lambda}{\rho}\,. \tag{8}
$$

Problema s-a redus astfel la scrierea soluției sistemului (5) cu condițiile la limită (7) exprimate cu ajutorul relațiilor (3).

4. Pentru a scrie soluția generală a sistemului (5) de ecuații diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți variabili, vom recurge la metoda separării variabilelor. Pentru aceasta vom considera soluțiile de forma :

$$
\begin{aligned}
\overline{u} &= \alpha(r)\cos kz + \gamma(r)\sin kz\,,\\
\overline{w} &= \beta(r)\cos kz + \delta(r)\sin kz\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Introducînd deplasările $\overline{u}$ și $\overline{w}$ de mai sus în prima ecuație (5) și identificînd în raport cu z se găsesc relațiile (10) care leagă funcțiile α și β respectiv γ și δ

$$
\begin{aligned}
\beta' &= \frac{d\beta}{dr} = -\frac{c_1^2}{c_3^2 k}\left[\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{c_2^2 k^2 + p^2}{c_1^2}\right)\alpha\right],\\
\delta' &= \frac{d\delta}{dr} = \frac{c_1^2}{c_3^2 k}\left[\gamma'' + \frac{\gamma'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{c_2^2 k^2 + p^2}{c_1^2}\right)\gamma\right],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

iar din a doua ecuaţie (5) cu expresiile (9) rezultă

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{c_2^2}{p^2 + c_1^2 k^2}\left[\beta'' + \frac{\beta'}{r} - \frac{c_3^2 k}{c_2^2}\left(\alpha' + \frac{\alpha}{r}\right)\right], \\ \delta &= -\frac{c_2^2}{c_1^2 k^2 + p^2}\left[\delta'' + \frac{\delta'}{r} - \frac{c_3^2 k}{c_2^2}\left(\gamma' + \frac{\gamma}{r}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Înlocuind β', β'', δ' şi δ'' în relaţiile (11) cu expresiile care decurg din (10), rezultă pentru β şi δ expresiile

$$\begin{aligned} \beta &= C\left[\alpha''' + 2\frac{\alpha''}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right)\alpha' + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{\alpha}{r}\right], \\ \delta &= -C\left[\gamma''' + 2\frac{\gamma''}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right)\gamma' + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{\gamma}{r}\right], \end{aligned} \tag{12}$$

în care C şi D sînt constantele

$$C = -\frac{c_1^2 c_2^2}{c_3^2 k\,(p^2 + c_1^2 k^2)}; \quad D = -\frac{c_2^4 k^2 + c_2^2 p^2 - c_3^4 p^2}{c_1^2 c_2^2}. \tag{13}$$

Derivînd relaţiile (12) şi substituind expresiile β' şi δ' astfel obţinute în (10), după unele transformări se obţine atît pentru funcţia α cît şi pentru funcţia γ o aceeaşi ecuaţie diferenţială de forma

$$\alpha^{\mathrm{IV}} + 2\frac{\alpha'''}{r} + \left(A - \frac{3}{r^2}\right)\alpha'' + \left(A + \frac{3}{r^2}\right)\frac{\alpha'}{r} + \left(B - \frac{A}{r^2} - \frac{3}{r^4}\right)\alpha = 0, \tag{14}$$

în care prin A şi B s-au notat constantele

$$A = D + \frac{c_1^2}{C\,c_3^2 k}; \quad B = -\frac{c_1^2 k}{C\,c_3^2}. \tag{15}$$

Se arată uşor că ecuaţia (14) nu conţine soluţii străine. Înlocuind expresiile β, β', β'', date de (11) în ecuaţiile (5) se ajunge la condiţia (14) care este verificată prin ipoteză.

Se poate verifica echivalenţa dintre ecuaţia diferenţială (14) şi următorul „produs" de operatori diferenţiali de ordin doi

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}\right)\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr} + \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}\right)\alpha\right] = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Se arată ușor că cei doi operatori pot fi permutați, adică ecuația (14) este totuna și cu ecuația

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dr^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr}+\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)\alpha\right]=0\,. \tag{17}$$

Rezultă că ecuația (14) poate fi descompusă ca mai jos

$$\begin{gathered}\frac{d^2\alpha}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr}+\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)\alpha=0\,,\\ \frac{d^2\alpha}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr}+\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}\right)\alpha=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Amîndouă ecuațiile diferențiale (18) pot fi aduse la forma tipică a ecuației Bessel, substituind în prima pe r prin $\rho_1=\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r$ iar în a doua prin $\rho_2=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r$ astfel că pentru α se găsește soluția generală

$$\alpha=C_{1kp}\,J_1\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+C_{2k_p}\,J_1\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+$$
$$+\,C_{3kp}\,Y_1\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+C_{4kp}\,Y_1\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right). \tag{19}$$

În formula (19) funcțiile J_1 și Y_1 sînt funcțiile Bessel de ordinul întîi de speța I și a II-a. În cazul în care argumentele funcțiilor (19) sînt complexe, se vor utiliza și pentru coeficienții C_{kp} expresii complexe în care părțile reale și imaginare se vor corela prin condiția ca partea imaginară a funcției α să fie indentic nulă.

În mod analog se scrie funcția γ :

$$\gamma=K_{1kp}\,J_1\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+K_{2kp}\,J_1\left(\overline{\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+$$
$$+\,K_{3kp}\,Y_1\left(\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right)+K_{4kp}\,Y_1\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}}\,r\right). \tag{20}$$

Cu cele de pînă acum rezultă că deplasarea $\overline{u}$ se scrie în cazul general al problemei sub forma

$$\begin{aligned} \overline{u} = \sum_k \{ & [C_{1kp} J_1(\omega_1 r) + C_{2kp} J_1(\omega_2 r) + \\ & + C_{3kp} Y_1(\omega_1 r) + C_{4kp} Y_1(\omega_2 r)] \cos kz + \\ & + [K_{1kp} J_1(\omega_1 r) + K_{2kp} J_1(\omega_2 r) + \\ & + K_{3kp} Y_1(\omega_1 r) + K_{4kp} Y_1(\omega_2 r)] \sin kz \}. \end{aligned} \tag{21}$$

Constantele ω_1 și ω_2 sînt:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}\,; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} \tag{22}$$

iar deplasarea $\overline{w}$ pe baza expresiilor (9), (12) și (19) se poate scrie

$$\begin{aligned} \overline{w} = \sum_k \Bigg\{\Bigg\{ & C_{1kp}\Bigg[J_1'''(\omega_1 r) + 2\frac{J_1''(\omega_1 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_1 r) + \\ & + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_1(\omega_1 r)}{r}\Bigg] + C_{2kp}\Bigg[J_1'''(\omega_2 r) + 2\frac{J_1''(\omega_2 r)}{r} + \\ & + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_2 r) + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_1(\omega_2 r)}{r}\Bigg] + \\ & + C_{3kp}\Bigg[Y_1'''(\omega_1 r) + 2\frac{Y_1''(\omega_1 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_1 r) + \\ & + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{Y_1(\omega_1 r)}{r}\Bigg] + C_{4kp}\Bigg[Y_1'''(\omega_2 r) + 2\frac{Y_1''(\omega_2 r)}{r} + \\ & + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) Y_1'(\omega_2 r) + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{Y_1(\omega_2 r)}{r}\Bigg]\Bigg\} \sin kz + \\ + \Bigg\{ & K_{1kp}\Bigg[J_1'''(\omega_1 r) + 2\frac{J_1''(\omega_1 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_1 r) + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_1(\omega_1 r)}{r}\Bigg] + \\ & + K_{2kp} J_1'''(\omega_2 r) + 2\frac{J_1''(\omega_2 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_2 r) + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_1(\omega_2 r)}{r}\Bigg] + \\ & + K_{3kp}\Bigg[Y_1'''(\omega_1 r) + 2\frac{Y_1''(\omega_1 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) Y_1'(\omega_1 r) + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{Y_1(\omega_1 r)}{r}\Bigg] + \\ & + K_{4kp}\Bigg[Y_1'''(\omega_2 r) + 2\frac{Y_1''(\omega_2 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) Y_1'(\omega_2 r) + \\ & + \left(D + \frac{1}{r^2}\right)\frac{Y_1(\omega_2 r)}{r}\Bigg]\Bigg\} \cos kz \Bigg\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Funcția $\overline{w}$ poate fi exprimată mai simplu dacă ținem seama de relațiile între funcțiile Bessel:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(\omega r)}{dr} &= -\omega J_1(\omega r), \\ \frac{dJ_1(\omega r)}{dr} &= \omega J_0(\omega r) - \frac{J_1(\omega r)}{r}, \\ \frac{dY_0(\omega r)}{dr} &= -\omega Y_1(\omega r), \\ \frac{dY_1(\omega r)}{dr} &= \omega Y_1(\omega r) - \frac{(Y_1 \omega r)}{r}. \end{aligned} \tag{24}$$

Cu aceste relații se găsește

$$\begin{aligned} J_1'''(\omega_1 r) + 2\frac{J_1''(\omega_1 r)}{r} + \left(D - \frac{1}{r^2}\right) J_1'(\omega_1 r) + \\ + \left(D + \frac{1}{r^2}\right) \frac{J_1(\omega_1 r)}{r} = (-\omega_1^3 + D\,\omega_1)\, J_0(\omega_1 r) \end{aligned} \tag{25}$$

și alte trei expresii similare pentru $J_1(\omega_2 r)$, $Y_1(\omega_1 r)$ și $Y_1(\omega_2 r)$, astfel că deplasarea $\overline{w}$ poate fi exprimată ca mai jos

$$\begin{aligned} \overline{w} = \sum_k \{ [C'_{1kp} J_0(\omega_1 r) + C_{2kp} J_0(\omega_2 r) + \\ + C'_{3kp} Y_0(\omega,r) + C'_{4kp} Y_0(\omega_2 r)] \sin Kz + \\ + [K'_{1kp} J_0(\omega,r) + K'_{2kp} J_0(\omega_2 r) + K'_3 K_p Y_0(\omega_1 r) + \\ + K'_{4kp} Y_0(\omega_3 r)] \cos Kz]\}, \end{aligned} \tag{26}$$

unde constantele C'_{ikp} și K'_{ikp} sînt

$$\begin{aligned} C'_{1kp} &= \mathcal{A}\, C_{1kp}, & C'_{2kp} &= \mathcal{B}\, C_{2kp}, \\ C'_{3kp} &= \mathcal{A}\, C_{3kp}, & C'_{4kp} &= \mathcal{B}\, C_{4kp}, \\ K'_{1kp} &= \mathcal{A}\, K_{1kp}, & K'_{2kp} &= \mathcal{B}\, K_{2kp}, \\ K'_{3kp} &= \mathcal{A}\, K_{3kp}, & K'_{4kp} &= \mathcal{B}\, K_{4kp}, \\ & & \mathcal{A} &= -\omega_1^3 + D\,\omega, \\ & & \mathcal{B} &= -\omega_2^3 + D\,\omega_3. \end{aligned} \tag{27}$$

5. Soluția obținută permite rezolvarea completă a problemei în care se neglijează efectul capetelor.

În acest caz soluția se scrie ușor deoarece deplasările u și w sînt exprimate prin serii Fourier.

Ținînd seama de relațiile (27) se găsesc reprezentări sub forma unor serii care pe fețele interioare și exterioare ale cilindrului devin serii trigonometrice. Identificînd aceste serii trigonometrice cu cele date de condiţiile la limită (7) (şi luînd pe k de aceeaşi formă cu argumentul corespunzător în condiţiile la limită), se găseşte pentru coeficienţii C_{1kp}, C_{2kp}, C_{3kp} şi C_{4kp}, un sistem algebric liniar de patru ecuaţii şi un sistem corespunzător pentru coeficienţii K_{1kp}, K_{2kp}, K_{3kp} şi K_{4kp}.

Trecerea inversă în planul fizic se face cu formula de inversare

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{u}\, e^{pt}\, dp \; ; \quad w = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{w}\, e^{pt}\, dp \, . \tag{28}$$

Pentru exprimarea eforturilor se pot utiliza formule de inversare similare celor pentru deplasări (28) sau, o dată cunoscute deplasările u şi w cu ajutorul formulelor (22), eforturile pot fi calculate cu ajutorul legii lui Hooke (2).

6. Analogul dinamic al problemei lui Lamé[1]). În cazul în care fenomenul este plan ($w = 0$) ecuaţiile diferenţiale (1) de echilibru se reduc la una singură

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{29}$$

$\left(\text{s-a introdus notaţia } C_1 = a^2 = \dfrac{\lambda + 2\,u}{\rho}\right)$.

Condiţiile iniţiale rămîn aceleaşi, iar condiţiile la limită le presupunem de forma

$$(\lambda + 2\,u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} =$$

$$= \begin{cases} -P\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{2\tau}t\right) & r = r_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant z \, . \\ 0 & r = r_0 \quad t > z \\ 0 & r = r_1 \end{cases} \tag{30}$$

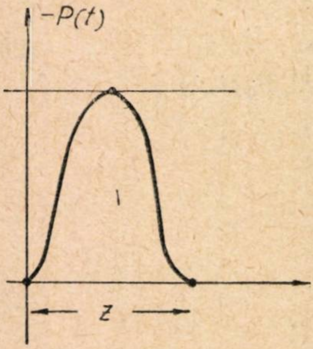


Fig. 2

adică presupunem că avem de-a face cu un cilindru circular solicitat uniform în lungul generatoarei suprafeţei $r = r_0$, de o forţă variabilă de tipul unui şoc ce acţionează în intervalul de timp $[0, \tau]$ (fig. 2). Considerînd transformata Laplace a funcţiei necunoscute şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale se obţine corespunzător lui (5) ecuaţia

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{p^2}{a^2}\right)\bar{u} = 0 \, , \tag{31}$$

---

[1]) Notaţiile utilizate în acest paragraf sînt cele din T. Snedon [7] deoarece pt. $z \to \infty$ cele două soluţii coincid.

iar condițiile la limită (30) devin

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\bar{u}}{dr} + \lambda\frac{\bar{u}}{r} = \begin{cases} -P\dfrac{\omega^2(1-e^{-p\tau})}{p(p^2+\omega^2)} & pt.\ r = r_0 \\ 0 & \text{pt. } r = r_1 \end{cases} \tag{32}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale ordinare dată în cazul general de expresiile (21) și (26) se reduce în acest caz la

$$\bar{u} = C\,I_1\left(\frac{pr}{a}\right) + D\,K_1\left(\frac{pr}{a}\right), \tag{33}$$

în care C și D sînt constante arbitrare iar I_1 și K_1 sînt funcții Bessel de speța I și speța a II-a de argument imaginar.

Ținînd seama de relațiile cunoscute

$$\begin{aligned} \xi . I_1'(\xi) + I_1(\xi) &= \xi\, I_0(\xi), \\ \xi K_1'(\xi) + K_1(\xi) &= -\xi\, K_0(\xi), \end{aligned} \tag{34}$$

se obține pentru determinarea constantelor C și D următorul sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} &C\left[I_1\left(\frac{pr}{a}\right) - \gamma\frac{pr_0}{a}I_0\left(\frac{pr_0}{a}\right)\right] + D\left[K_1\left(\frac{pr_0}{a}\right) + \gamma\frac{pr_0}{a}K_0\left(\frac{pr_0}{a}\right)\right] = \\ &\qquad = \frac{Pr_0}{2\mu}\,\frac{\omega^2(1-e^{-p\tau})}{p(p^2+\omega^2)} \\ &C\left[I_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) - \gamma\frac{pr_1}{a}I_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right] + D\left[K_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) + \gamma\frac{pr_1}{a}K_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right] = 0, \\ &\qquad \gamma = \frac{\lambda - 2\mu}{\mu}. \end{aligned} \tag{35}$$

Rezolvînd acest sistem și introducînd valorile găsite în (33) se obține pentru funcția $\bar{u}$ următoarea expresie :

$$\bar{u} = \frac{Pr_0}{2\mu}\,\frac{\omega^2(1-e^{-p\tau})F(p)}{p(p^2+\omega^2)G(p)}, \tag{36}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} F(p) = &\left[K_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) + \gamma\frac{pr_1}{a}K_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right]I_1\left(\frac{pr}{a}\right) - \\ &-\left[I_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) - \gamma\frac{pr_1}{a}I_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right]K_1\left(\frac{pr}{a}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

și

$$\begin{aligned} G(p) = & \left[I_1\left(\frac{pr_0}{a}\right) - \gamma \frac{pr_0}{a} I_0\left(\frac{pr_0}{a}\right)\right]\left[K_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) + \gamma \frac{pr_1}{a} K_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right] - \\ & - \left[I_1\left(\frac{pr_1}{a}\right) - \gamma \frac{pr_1}{a} I_0\left(\frac{pr_1}{a}\right)\right]\left[K_1\left(\frac{pr_0}{a}\right) + \gamma \frac{pr_0}{a} K_0\left(\frac{pr_0}{a}\right)\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Prin teorema de inversiune a lui Laplace se obține în definitiv

$$\frac{2\mu}{pr_0\,\omega^2}\, u = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}F(p)\,dp}{p\,(p^2+\omega^2)\,C_1(p)} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{p(t-z)}F(p)\,dp}{p(p^2+\omega^2)\,C_1(p)}\right]. \tag{39}$$

Atît prima cît și cea de-a doua integrală se calculează simplu aplicînd teorema reziduurilor față de un domeniu mărginit de dreapta $Rp = c$ și cercul cu centrul în origine a cărui rază tinde către infinit, parcurgînd șirul de valori

$$\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a}{r_1 - r_0} \tag{40}$$

(ales astfel încît circumferința să nu treacă prin polii funcției de sub semnul integrală)[1]).

Notînd prima integrală cu $\mathcal{J}$ avem conform teoremei lui Cauchy

$$\mathcal{J} = \sum_0^\infty R_J \tag{41}$$

Polii funcției de sub semnul integrală sînt

$$\{0,\ \pm i\,\omega,\ \pm i\,\alpha_s\ (s = 1,2,\ldots)\}$$

unde $i\alpha$ sînt zerourile funcției $G(p)$ despre care s-a demonstrat (7) că sînt simple și pur imaginare.

Cu notația

$$J(r) = J_1\left(\frac{\alpha_s r}{a}\right) - \gamma\frac{\alpha_s r}{a} J_0\left(\frac{\alpha_s r}{a}\right) \tag{42}$$

se obține pentru $\mathcal{J}$ următoarea expresie

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \frac{r_0}{\omega^2 r}\,\frac{r^2 + (2\gamma - 1)\,r_1^2}{(2\gamma-1)\,(r_1^2 - r_0^2)} - \frac{F(i\omega)}{\omega^2 G(i\omega)}\cos\omega + \\ & + 2\sum_{s=1}^\infty \frac{F(i\alpha_s)\,[\omega^2 - \alpha_s^2]^{-1} J(r_0)\,J(r_1)\cos\alpha_s t}{J(r_1)\left[\frac{\alpha_s^2\gamma^2 r_0^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right] - J(r_0)\left[\frac{\alpha_s^2\gamma^2 r_1^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right]} \end{aligned} \tag{43}$$

---

[1]) Trenter a demonstrat (a se vedea [7]) că condiția necesară și suficientă ca acest mod de integrare să fie aplicabil este îndeplinită.

Calculul celei de-a doua integrale (pe care o vom nota cu $\mathcal{J}_\tau$) se face asemănător ținînd seama că avem

$$\mathcal{J}_\tau = 0 \qquad \text{pt}\cdot t < \tau,$$
$$\mathcal{J}_\tau \neq 0 \qquad \text{pt}\cdot t > \tau. \tag{44}$$

Rămîne prin urmare de calculat $\mathcal{J}_\tau$ pt $t > \tau$. Avem prin considerații analoage

$$\mathcal{J}_\tau = \Sigma R'_J \qquad \text{pt}\cdot t > \tau \tag{45}$$

(condițiile de aplicabilitate ale modului de calcul precedent rămîn valabile și pentru acest caz).

Se obține

$$\mathcal{J}_\tau = \frac{r_0}{\omega^2 r} \frac{r^2 + (2\gamma - 1) r_1^2}{(2\gamma - 1)(r_1^2 - r_0^2)} - \frac{F(i\omega)}{\omega^2 G(i\omega)} \cos \omega + \tag{46}$$
$$+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F(i\alpha_s)\,(\omega^2 - \alpha_s^2)^{-1}\, J(r_0)\, J(r_1) \cos \alpha_s (t - \tau)}{J(r_1)\left[\frac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_0^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right] - J(r_0)\left[\frac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_1^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right]}.$$

Grupînd rezultatele se obține

$$\frac{2\mu}{Pr_0} u = \begin{cases} \dfrac{r_0}{r} \dfrac{r^2 + (2\gamma - 1) r_1^2}{(2\gamma - 1)(r_1^2 - r_0^2)} - \dfrac{F(i\omega)}{G(i\omega)} \cos \omega + \\ + 2 \displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \dfrac{F(i\alpha_s)\left[1 - \dfrac{\alpha_s^2}{\omega^2}\right]^{-1} J(r_0)\, J(r_1) \cos \alpha_s t}{J(r_1)\left[\dfrac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_2^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right] - J(r_0)\left[\dfrac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_1^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right]} \\ \text{pentru } 0 < r < \tau \\ 2 \displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \dfrac{F(i\alpha_s)\left[1 - \dfrac{\alpha_s^2}{\omega^2}\right]^{-1} J(r_0)\, J(r_1)\,[\cos \alpha_s t - \cos \alpha_s (t - \tau)]}{J(r_1)\left[\dfrac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_0^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right] - J(r_0)\left[\dfrac{\alpha_s^2 \gamma^2 r_1^2}{a^2} - 2\gamma + 1\right]} \\ \text{pentru } t > \tau \end{cases} \tag{47}$$

7. Asupra unei reprezentări simplificate a soluției. Pentru întrebuințarea în practică a expresiilor precedente, este util să se dea unele repre-

zentări simplificate pentru funcţiile $F(p)$ şi $G(p)$. Există următoarele identităţi :

$$\begin{aligned} I_0(i\xi) &= J_0(\xi), \\ I_1(i\xi) &= iJ_1(\xi), \\ K_0(i\xi) &= \frac{i\pi}{2}[J_0(\xi) + iY_0(\xi)], \\ K_1(i\xi) &= \frac{\pi}{2}[J_1(\xi) + iY_1(\xi)]. \end{aligned} \tag{48}$$

Ţinînd seama de ele se obţin pentru funcţiile F şi G următoarele expresii :

$$F(ix) = -\frac{\pi}{2}\left\{[Y_1(x_1) - \gamma x_1 Y_0(x_1)]J_1(x) - [J_1(x_1) - \gamma x_1 J_0(x_1)]Y(x_2)\right\} \tag{49}$$

$\left(\text{s-a notat } x = \frac{pr}{a};\quad x_1 = \frac{pr_1}{a};\quad x_0 = \frac{pr_0}{a,}\right)$

şi

$$G(ix) = -\frac{\pi}{2}\left\{[J_1(x_0) - \gamma x_0 J_0(x_0)][Y_1(x_1) - \gamma x_1 Y_0(x_1)] - [J_1(x_1) - \right.$$
$$\left. - \gamma x_1 J_0(x_1)][Y_1(x_0) - \gamma x_0 Y_0(x_0)]\right. . \tag{50}$$

Dacă x, x_0, $x_1 \ll 1$ atfel încît să avem cu o bună aproximaţie

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2}, \\ Y_1(x) &= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x}, \\ Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}\left(0.577 + ln\frac{x}{2}\right), \end{aligned} \tag{51}$$

se obţine

$$F(ix) = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x_1} - (1 - 2\gamma)\frac{r_1}{r} + \gamma\left(\frac{2\pi}{\tau a}\right)^2\left(0.577 + \ln\frac{\pi r_1}{\tau a}\right) rr_1,\right. \tag{52}$$

şi

$$G(ix) = \frac{1 - 2\gamma}{2}\left[\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_1}{r_0} + \gamma\left(\frac{2\pi}{\tau a}\right)^2 r_0 r_1 \ln\frac{r_1}{r_0}\right]\cdot \tag{53}$$

Se mai pune în evidenţă o altă formă de reprezentare a funcţiei $G(p)$ utilă pentru calculul zerourilor acestei funcţii. După cum s-a remarcat, acestea sînt de forma $i\alpha_s$. Făcînd schimbarea $p = ix$ problema revine la căutarea zerourilor reale şi pozitive ale funcţiei $G(ix)$. Primele zerouri (pînă la min. $x_0\, x_1 = 10$) vor trebui să fie obţinute grafic. Pentru min. $x_0,\ x_1 > 10$ se obţine ţinînd seama de următoarele expresii asimptotice :

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x + \sin x), \\ J_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\sin x - \cos x), \\ Y_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\sin x - \cos x), \\ Y_1(x) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x + \sin x). \end{aligned} \tag{54}$$

următoarele forme simplificate pentru F şi G :

$$\begin{aligned} F(ix) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 rr_1}}\left[\sin\frac{x(r-r_1)}{a} + 2\gamma\frac{x}{a}\cos\frac{x(r-r_1)}{a}\right], \\ G(ix) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 r_0 r_1}}\left[\gamma\frac{x}{a}(r_1-r_0)\cos\frac{x(r_1-r_0)}{a} - \right. \\ &\quad \left. -\left(1+\gamma^2\frac{x^2}{a^2}r_0 r_1\right)\sin\frac{x(r_1-r_0)}{a}\right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Prima expresie poate fi folosită în exprimarea termenilor de ordin superior în soluţie. Cea de-a doua poate fi utilizată pentru determinarea zerourilor funcţiei $G(p)$ la valori mari ale argumentului.

Din cele expuse anterior rezultă că pentru valori mai mari decît 10^{-4} ale lui τ şi grosimi uzuale ale pereţilor cilindrului termenul $F(i\omega)/G(i\omega)$ (ţinînd seama că pentru oţel de exemplu $a \simeq 5\ 10^5$ cm/s,)se poate scrie conform cu (52) şi (53) sub forma

$$\frac{r_0}{r}\ \frac{r^2(2\gamma-1)r_1^2}{(2\gamma-1)(r_1^2-r_0^2)}. \tag{56}$$

Dacă se ţine seama că făcînd abstracţie de factorul $\dfrac{1}{1-\dfrac{\alpha_s^2}{\omega^2}}$ rapoartele ce intră în termenii sumei infinite sînt comparabile cu unitatea atît în soluţia definită în $(0,\tau)$, cît şi în cea definită pentru $t > \tau$, rezultă că amplitudinea vibraţiilor respective privită ca funcţie de durata de acţiune a sarcinii depinde în mod esenţial de acest factor.

Pe baza primei observaţii soluţia se va scrie

$$\frac{2\mu}{Px_0}u = \begin{cases} \dfrac{r_0}{r}\,\dfrac{r^2 + (2\gamma - 1)\,r_1^2}{(2\gamma - 1)\,(r_1^2 - r_0^2)}\,(1 - \cos \omega t) + 2\Sigma & \\ & \text{pentru } 0 < t < \tau \\ 2\Sigma' & \text{pentru } t > \tau \end{cases} \tag{57}$$

[prin Σ şi Σ' s-au notat sumele infinite din (47)].

Aşa cum s-a remarcat influenţa celui de-al doilea termen în $(0,\tau)$ cît şi în efectul posterior (pentru $t > \tau$) depinde în mod esenţial de factorul

$$f(\tau) = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha_s^2}{\omega^2}}, \tag{58}$$

Reprezentarea grafică a funcţiei $f(\tau)$ este dată în figura 3. Eliminînd din raţionamente cazul în care $\tau = \dfrac{2\pi}{\alpha_s}$ (caz care a fost exclus în obţinerea soluţiei precedente) remarcăm faptul că valorile importante ale funcţiei $f(\tau)$ se găsesc în vecinătatea lui $\tau = \dfrac{2\pi}{\alpha_s}\cdot$ Un calcul simplu pune în evidenţă că α_s depinde liniar de a (viteza de propagare a undelor în materialul respectiv), adică

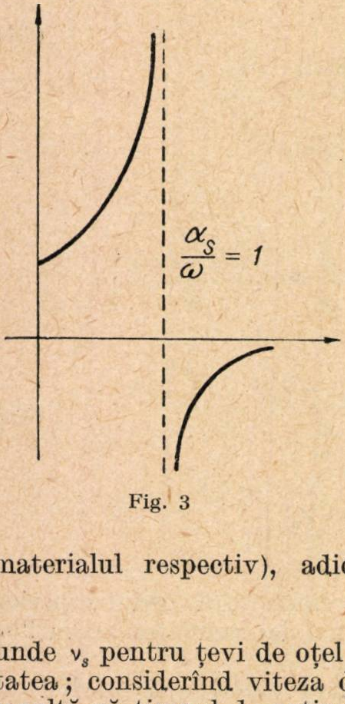


Fig. 3

$$\alpha_s = \nu_s\, a \tag{59}$$

unde ν_s pentru ţevi de oţel de dimensiuni uzuale este mai mare decît unitatea; considerînd viteza de propagare a undei cea specificată anterior, rezultă că timpul de acţiune a sarcinii necesar ca sumele infinite în cele două componente ale soluţiei să fie importante, este mult mai mic decît $10^{-4''}$. Prin urmare în cazul în care $\tau > 10^{-4}$ în condiţiile specificate, soluţia problemei va fi

$$\frac{2\mu}{pr_0}u = \begin{cases} \dfrac{r_0}{r}\,\dfrac{r^2 + (2\gamma - 1)\,r_1^2}{(2\gamma - 1)\,(r_1^2 - r_0^2)}\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{\tau}\,t\right), & \\ & \text{pentru } 0 < r < \tau \\ 0 & \text{pentru } t > \tau. \end{cases} \tag{60}$$

Prin urmare în acest caz deplasarea elastică este redată de un factor, corespunzător unei presiuni egală cu unitatea, aplicată static, înmulţit cu o funcţie de timp care este cea dată de legea de variaţie a încărcării.

8. Să considerăm un cilindru cu următoarele caracteristici:

$$r_0 - 0.38\ \text{cm}\,;\quad r_1 = 0{,}7\ \text{cm}\,;\quad E = 2{,}1 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\,;\quad G = 8.1 10^5\ \text{kg/cm}^2$$

$$\lambda = 8.1\ 10^5\ \text{kg/cm}\,;\ \mu = 8.1\ 10^5\ \text{kg/cm}^2\,;\ \gamma = 1{,}5\,;\ a = 5.529\ 10^5\ \text{cm/s} \qquad (61)$$

Coeficienții lui i pentru primele două rădăcini ale ecuației $G(p) = 0$ sînt

$$\alpha_1 = 1.89 \times 5.529\ 10^5$$

$$\alpha_2 = 10.06 \times 5.20\ 10^5, \qquad (62)$$

rezultă(conform notațiilor adoptate) că

$$\text{max.}\ (x,\ x_0,\ x_1) = 8.10^{-4}\ \text{pt.}\ \tau = 10^{-2},$$

$$\text{max.}\ (x,\ x_0,\ x_1) = 8.10^{-3}\ \text{pt.}\ \tau = 10^{-3}, \qquad (63)$$

$$\text{max.}\ (x,\ x_0,\ x_1) = 8.10^{-2}\ \text{pt.}\ \tau = 10^{-4}.$$

Rezultă conform formulelor (51)

$J_0(x) = 1$ cu o eroare mai mică în modul decît $\frac{x^2}{4}$,

$J_1(x) = \frac{x}{2}$ cu o eroare mai mică în modul decît $\frac{x^2}{16}$,

$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(0{,}577 + \ln\frac{x}{2}\right)$ primul termen neglijat este $\frac{x^2}{2}$

$Y_1(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x}$ termenul neglijat avînd ordinul de mărime $\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2}$,

în aceste condiții formula (60) este perfect valabilă.

Pentru $\tau = 10^{-4}$ rezultă $f(\tau) = 3\ 10^{-3}$

și influența sumei la valoarea maximă a lui u (care se obține pentru $t = \frac{\tau}{2}$) este de ordinul 3.10^{-4} adică neglijabilă în raport cu unitatea

$$u = \frac{Pr_0}{2\mu}\left\{1.16 - 0{,}0003\right\}. \qquad (64)$$

Din cele expuse rezultă că efecte dinamice propriu-zise (în afara efectului global dat de primul termen care indică o creștere a deformației similară cu încărcarea) nu apar pentru acest tip de solicitări, în cazul în care timpul de acțiune al sarcinii este mai mare decît 10^{-4}. Prin urmare pentru aceste tipuri de solicitări rămîne valabilă soluția statică a lui Lamé în care se ia presiunea maximă pe care o suportă țeava în $(0,\tau)$.

Primită la redacție la 2 aprilie 1960

УПРУГО-ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

РЕЗЮМЕ

В работе выписывается решение задачи круглой цилиндрической трубы под динамической осесимметрической нагрузкой. Применяя преобразование Лапласа авторы сводят задачу к написанию решения системы дифференциальных уравнений, что при помощи метода Фурье ведет к решению линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами четвертого порядка, общее решение которого выражается функциями Бесселя первого порядка первого и второго рода.

Рассматривается, в частности, случай, когда явление плоское, а нагружение производится в виде ударного давления на внутренней поверхности. Разделяется статический эффект от динамического и выявляется зависимость динамического эффекта от продолжительности действия нагрузки. Иллюстрируются теоретические результаты, полученные для случая стальной трубы заданных размеров.

CALCUL ÉLASTO-DYNAMIQUE DES TUBES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES SOLLICITÉS SYMÉTRIQUEMENT PAR RAPPORT À L'AXE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs donnent la solution du problème d'un tube cylindrique circulaire soumis à une sollicitation dynamique symétrique par rapport à l'axe. En utilisant la transformée de Laplace, le problème se réduit à écrire la solution d'un système d'équations différentielles qui, par la méthode de Fourier permet de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients variables du quatrième ordre, dont la solution générale s'exprime par des fonctions de Bessel du premier ordre, de la première et seconde espèce.

Les auteurs s'occupent tout spécialement du cas où le phénomène est plan et la sollicitation prend la forme d'un choc de pression sur la surface intérieure. Ils séparent les effets statique et dynamique et font ressortir la manière dont l'effet dynamique dépend de la durée pendant laquelle agit la charge. Ils appliquent les résultats théoriques obtenus au cas d'un tube d'acier de dimensions données.

BIBLIOGRAFIE

1. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *Bessel functions and their applications to physics.* Moscova, 1951.
2. Г. КОЛЬСКИЙ, *Волны напряжения в твердых телах.* Москва, 1955.
3. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, Курс *теории упругости*, Огизгостехиздат, 1947.
4. А. И. ЛУРЬЕ, *Пространственные задачи теории упругости.* Москва, 1955.
5. M. MIŞICU, *Corpuri tubulare circulare încărcate axial simetric în raport cu axul.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *1* (1950).
6. П. Ф. ПАРКОВИЧ, *Теория упругости.* Изд. Оборонгиз, 1939.
7. И. СНЕДОН, *Преобразования Фурье.* Москва, 1955.
8. Г. Н. ВАТСОН, *Теория бесселевых функций.* Москва, 1949.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

PARAMETRII REGIMULUI DE AŞCHIERE LA OŢELURILE CARBON OBIŞNUITE

DE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU

Parametrii regimului de aşchiere, au făcut şi continuă să facă şi în prezent obiectul multor studii, datorită complexităţii fenomenelor aşchierii şi importanţei lor practice, ceea ce face ca aceste probleme să fie mereu de actualitate.

Principalii parametri ai regimului de aşchiere sînt : adîncimea de tăiere, avansul sculei şi viteza de aşchiere. Relaţiile dintre aceşti parametri includ de obicei şi influenţa altor factori dictaţi în primul rînd de sculă, materialul de prelucrat şi durabilitate. Multitudinea elementelor care influenţează relaţiile dintre parametrii regimului de aşchiere şi modul în care-şi manifestă ei influenţa, au făcut ca această problemă să nu fie încă complet rezolvată. Tehnica creării de noi materiale de scule, ridică la rîndul ei mereu noi probleme. În acest fel se poate da o explicaţie existenţei numărului mare de cercetări ce abordează problema parametrilor regimului de aşchiere.

Un factor deosebit de important în cercetările de aşchiere, îl reprezintă proprietăţile metalelor prelucrate, care depind nemijlocit de compoziţia şi modul lor de elaborare. Din această cauză relaţiile obţinute în studiile parametrilor regimului de aşchiere nu pot căpăta o largă generalizare.

Lucrarea de faţă îşi propune ca pe baza experienţelor efectuate în cadrul Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', să facă un studiu asupra parametrilor ce influenţează regimurile de aşchiere pe strung a oţelurilor carbon obişnuite prelucrate la cald, produse în R.P.R., care fac obiectul STAS-ului 500—49.

Metodica experimentării a fost prezentată în alte lucrări [1], [2] şi pentru unitatea cercetărilor a fost menţinută aceeaşi. Amintim că studiile s-au făcut separat pe grupe de parametri şi criteriul de durabilitate a fost atingerea uzurii plafon $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm pe faţa de aşezare secundară.

Unul dintre scopurile studiilor de aşchiere a metalelor îl reprezintă determinarea regimurilor economice de prelucrare. Dintre diferitele tipuri de formule prezentate în literatura de specialitate a fost reținută formula de tipul:

$$v_T = \frac{C}{t^x s^y} K, \qquad (1)$$

unde s-a notat

v_T — viteza economică de așchiere pentru o durabilitate de T minute, m/min;
C — constantă funcție de materialul prelucrat;
K — coeficient global de corecție al vitezei;
t — adîncimea de tăiere, mm;
s — avansul, mm/rot;
x,y — exponenți, funcție de proprietățile materialului prelucrat.

Această formulă reflectă bine fenomenul așchierii într-un domeniu de variație al vitezei mărginit între limitele uzuale

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \leqslant 1{,}5. \qquad (2)$$

Experiențele au fost executate pe oțelurile OL 38, OL 42, OL 50, OL 60 și OL 70 (STAS 500—49). Proprietățile mecanice caracteristice ca rezistența de rupere la tracțiune și duritatea epruvetelor experimentale sînt trecute în tabela 1.

Tabela 1

Oțelul experimentat	σ_r (kgf/mm^2)			H_B (kgf/mm^2)		
	$\sigma_{t\,\min}$	$\sigma_{r\,\max}$	$\sigma_{r\,\mathrm{med}}$	$H_{B\,\min}$	$H_{B\,\max}$	$H_{B\,\mathrm{med}}$
OL 38	37,3	40,5	39,2	108	111	110
OL 42	44,6	47,5	46,5	117	131	123
OL 50	55,0	57,0	56,0	146	160	153
OL 60	63,0	68,5	66,6	167	183	175
OL 70	79,0	87,0	83,4	230	245	238

Din tabela 1 se observă o oarecare împrăștiere a rezultatelor care s-a constatat atît de la o bară la alta, cît și la aceeași bară de la centru spre periferie. Ținînd seama că această situație se regăsește curent în practică, interpretarea fenomenelor va fi dată în funcție de $\sigma_{r\,\mathrm{med}}$ și $H_{B\,\mathrm{med}}$, care reprezintă media tuturor determinărilor efectuate cu ocazia studiului prealabil al proprietăților mecanice a materialelor experimentate. Aceste determinări s-au făcut conform prescripțiilor standardizate respectiv în STAS 200—52 și STAS 165—58.

În cursul efectuării experiențelor au fost menținuți constanți parametrii geometrici optimi ai cuțitului de strung specifici fiecărui oțel, așa după cum este arătat într-o lucrare anterioară [3].

Pornind la interpretarea rezultatelor experimentale obținute, dintre care o parte au fost publicate [2], s-a ajuns la concluzia că în cazul oțelurilor carbon obișnuite prelucrate la cald se poate alege pentru constanta C din formula (1) valoarea

$$C = 100. \qquad (3)$$

Relaţia (3) este valabilă pentru oţelurile sus amintite, aşchiate pe strung cu cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice.

Prelucrabilitatea prin aşchiere a unui metal este influenţată de proprietăţile mecanice ale acestuia. Această influenţă este prinsă în formula (1) în mod multiplu. Astfel exponenţii x şi y care indică influenţa adîncimii de tăiere şi respectiv a avansului asupra vitezii economice de aşchiere, depind de proprietăţile mecanice caracteristice ale oţelului. Pentru domeniul $t = 0{,}1 - 5$ mm şi $s = 0{,}1 - 0{,}8$ mm/rot, legile de variaţie ale acestor exponenţi în funcţie de rezistenţa de rupere sînt date de expresiile (4) şi în figura 1

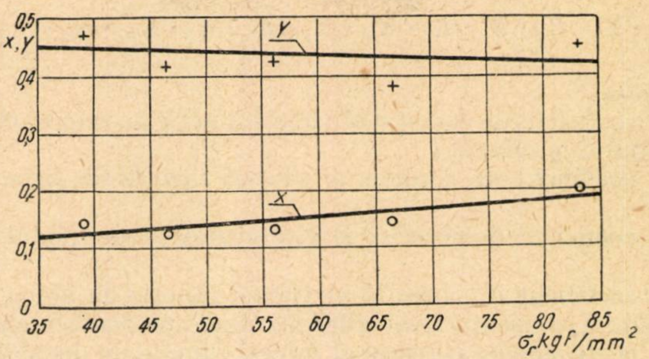


Fig. 1. — Variaţia exponenţilor x şi y din formula (1) în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune pentru oţelurile carbon obişnuite.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1{,}43.10^{-3}\,\sigma_r + 6{,}63.10^{-2}, \\ y &= -\,3{,}52.10^{-4}\,\sigma_r + 4{,}5.10^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Relaţiile (4) au fost obţinute prin metoda minimelor patrate, pe baza rezultatelor experimentale prezentate în tabela 2.

Tabela 2

Oţelul experimentat	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
σ_r (kgf/mm²)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
x	0,1425	0,1237	0,1362	0,1446	0,2012
y	0,4711	0,4176	0,4234	0,3826	0,4535

Pentru calcule aproximative, cu caracter mai cu seamă orientativ, se poate lucra cu valorile medii ale acestor exponenţi şi anume

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{med}} &= 0{,}15, \\ y_{\text{med}} &= 0{,}43. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Relațiile (3) ... (5) dau elementele de bază pentru calculul regimurilor economice cu ajutorul formulei (1).

Adaptarea pentru fiecare caz concret în parte a rezultatelor astfel obținute se face cu ajutorul coeficientului global de corecție al vitezei de așchiere, care are următoarea expresie :

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha_1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa_1} \cdot K_\lambda, \qquad (6)$$

unde s-a notat

K_1 — coeficient de corecție al vitezei funcție de proprietățile mecanice ale materialului prelucrat;

K_2 — coeficient de corecție al vitezei funcție de sistemul de răcire adoptat;

K_3 — coeficient de corecție al vitezei funcție de modul de ascuțire a cuțitului;

K_4 — coeficient de corecție al vitezei funcție de omogeneitatea metalului prelucrat, prezența straturilor ecruisate, prezența incluziunilor etc;

K_T — coeficient de corecție al vitezei funcție de durabilitatea economică aleasă a cuțitului;

K_m — coeficient de corecție al vitezei funcție de materialul plăcuței;

K_γ, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, K_λ — coeficienți de corecție ai vitezei funcție de valorile unghiurilor γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$ și λ.

În cele ce urmează se vor analiza diferiții coeficienți de corecție ai vitezei.

Influența proprietăților mecanice ale oțelului, așa după cum s-a mai amintit, este complexă și ea nu se rezumă doar la exponenții x și y, ci ea este prinsă și de coeficientul K_1 de corecție al vitezei. Coeficientul de corecție K_1 în lucrările precedente a fost considerat egal cu 1, înglobîndu-se astfel influența materialului prelucrat în valoarea constantei C. Acest lucru a fost posibil în cazul studierii izolate a fiecărui material în parte, deoarece oricare dintre aceste materiale puteau servi drept criteriu de comparație. Punîndu-se problema generalizării rezultatelor pe întreaga gamă de oțeluri carbon obișnuite, apare necesitatea evidențierii coeficientului K_1 în raport cu oțelurile. Pentru ușurința calculului s-a admis valoarea constantei $C = 100$, lăsînd în întregime, așa după cum este și normal, influența caracteristicilor mecanice ale materialului pe seama coeficientului K_1. Valorile acestui coeficient obținute în cadrul experiențelor făcute cu plăcuțe din carburi metalice sînt date în tabela 3.

Tabela 3

Oțelul experimentat	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
σ_r (kgf/mm²)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
K_1	1,0175	1,3820	1,3124	0,9843	0,8344

Legea care dă variaţia coeficientului K_1 de corecţie al vitezei în funcţie de rezistenţa oţelului este

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 6{,}6.10^{-5}\cdot\sigma_r^3 - 1{,}244.10^{-2}\cdot\sigma_r^2 + 7{,}475.10^{-1}\cdot\sigma_r - 13{,}128,\\ &\qquad\qquad\text{pentru } 35 < \sigma_r \leqslant 65 \text{ kgf/mm}^2,\\ K_1 &= 4{,}94.10^{-4}\cdot\sigma_r^2 - 8{,}3.10^{-2}\cdot\sigma_r + 4{,}316\\ &\qquad\qquad\text{pentru } 65 < \sigma_r \leqslant 85 \text{ kgf/mm}^2.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Reprezentarea grafică a rezultatelor experimentale şi a relaţiilor (7) obţinute prin interpolare, se află în figura 2.

Este de reţinut că variaţia coeficientului K_1 în funcţie de σ_r prezintă un maxim şi are aceeaşi alură cu cea a coeficientului similar din literatura sovietică de specialitate [4], dar diferit ca valoare.

Faptul că de la o anumită valoare, o dată cu scăderea rezistenţei scade şi valoarea coeficientului K_1, deci şi viteza de aşchiere, se poate explica prin accentuarea tendinţei oţelului de a adera de suprafeţele active ale sculei, dînd naştere la tensiuni mai mari pe suprafeţele de contact, ceea ce are ca efect o accelerare a uzurii sculei.

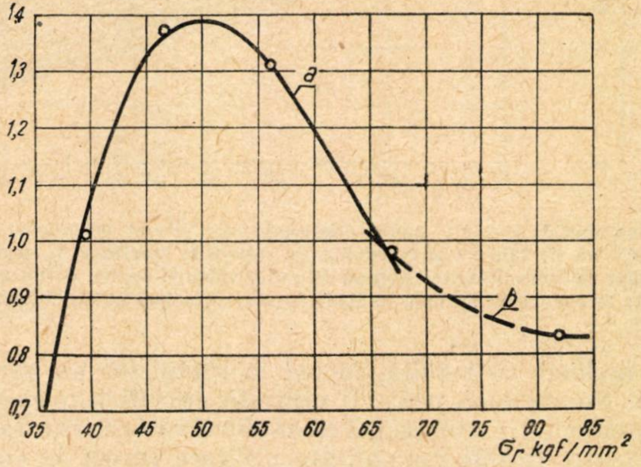


Fig. 2. — Variaţia coeficientului K_1 de corecţie al vitezei în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune pentru oţelurile carbon obişnuite. Curba *a* corespunde relaţiei (7) pentru $35 < \sigma_r \leqslant 65$ kgf/mm², iar curba *b* aceleaşi relaţii pentru $65 < \sigma_r \leqslant 85$ kgf/mm².

Cu ajutorul exponenţilor x_{med} şi y_{med} din relaţia (5) şi utilizînd relaţiile (7) pentru a prinde influenţa rezistenţei de rupere asupra regimurilor de prelucrare, s-a trasat nomograma de aşchiere din figura 3.

Pentru o adîncime de tăiere t şi un avans s, alese din motive tehnologice şi pentru o rezistenţă de rupere la tracţiune σ_r a piesei prelucrate, în nomogramă se poate determina cu ajutorul unor drepte viteza economică de așchiere v_{60}. În acest sens este atașată nomogramei o schemă în care se indică modul de lucru.

Din cauza utilizării relației (5), așa după cum s-a arătat mai înainte, această nomogramă introduce un grad de aproximație în ceea ce privește influența proprietăților mecanice ale materialului de prelucrat. Ca atare vitezele de așchiere ce rezultă, includ la rîndul lor un anumit grad de aproximație. Nomograma poate fi utilizată cu suficient succes în aplicațiile practice curente, mai cu seamă că de obicei variația turației la strunguri se face în trepte. Rațiile normalizate utilizate curent în construcția cutiilor de viteză a strungurilor, conduc la variații ale vitezei de așchiere mai mari decît cele ce provin din utilizarea formulei (5), respectiv a nomogramei, în locul formulei (4). Spre a se vedea comparativ rezultatele ce se obțin prin folosirea formulei (4) sau a formulei (5), se prezintă în tabela 4, atît valorile vitezelor v_{60} în aceste două cazuri, cît și abaterea procentuală față de utilizarea formulei (4).

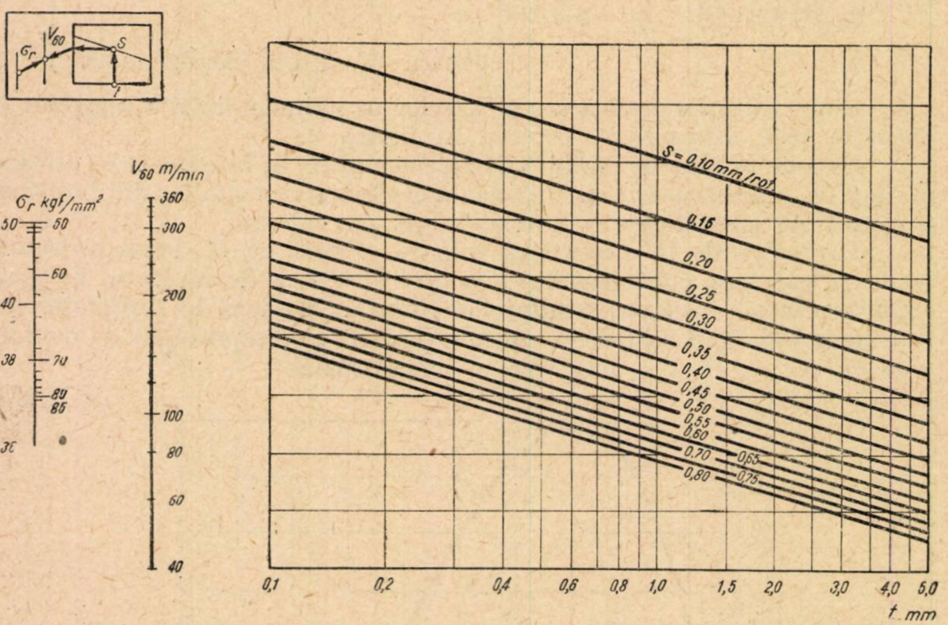


Fig. 3. — Nomogramă de așchiere pentru determinarea vitezei economice v_{60}, funcție de avansul s, adîncimea de tăiere t și rezistența de rupere la tracțiune σ_r, pentru așchierea pe strung a oțelurilor carbon obișnuite. Nomograma este valabilă pentru cuțite armate cu plăcuțe S_1, ascuțite la geometria optimă, unghiul de atac principal avînd valoarea $\varkappa = 45°$.

Nomograma este construită pentru cazul cînd ceilalți coeficienți de corecție ai vitezei au valoarea $K_2 = K_3 = K_4 = K_T = K_m = K_\gamma = K_\alpha = K_{\alpha_1} = K_\varkappa = K_{\varkappa_1} = K_\lambda = 1$. Analizarea acestor coeficienți de corecție se face în cele ce urmează.

Coeficientul K_2 de corecție al vitezei în funcție de sistemul de răcire adoptat ia valoarea $K_2 = 1$ pentru așchierile făcute fără răcire, care reprezintă cazul cel mai frecvent întîlnit la prelucrările cu plăcuţe din carburi metalice. Cînd se utilizează lichidele de răcire şi ungere, aşa după cum

Tabela 4

v_{60} m/min		$\sigma_r = 40$ kgf/mm^2			$\sigma_r = 60$ kgf/mm^2			$\sigma_r = 80$ kgf/mm^2		
		utilizînd formulele (4)	utilizînd formulele (5)	Δv%	utilizînd formulele (4)	utilizînd formulele (5)	Δv%	utilizînd formulele (4)	utilizînd formulele (5)	Δv%
$s = 0,25$ mm/rot	$t = 0,8$ mm	200,7	204,8	+2,04	223,7	223,9	+0,09	156,6	157,2	+0,38
	$t = 1,5$ mm	190,0	186,5	−1,84	203,3	203,9	+0,30	139,7	143,2	+2,51
	$t = 3,0$ mm	174,3	168,0	−3,61	183,0	183,7	+0,38	123,3	129,0	+4,62
$s = 0,60$ mm/rot	$t = 0,8$ mm	140,2	140,6	+0,29	153,7	153,7	0	108,2	107,9	−0,28
	$t = 1,5$ mm	129,7	128,0	−1,31	139,7	139,9	+0,14	96,6	98,3	+1,76
	$t = 3,0$ mm	119,0	107,6	−9,60	125,7	125,1	−0,48	85,2	88,5	+3,87

este cunoscut, se pot obţine performanţe superioare, situaţie pentru care $K_2 > 1$. Lichidele de răcire şi ungere pretind însă o atentă utilizare mai ales în cazul cuţitelor armate cu plăcuţe din carburi metalice.

În cadrul experienţelor efectuate, toate cuţitele au fost ascuţite în aceleaşi condiţii. S-au utilizat pietre de polizor din carbură de siliciu cu liant ceramic, duritate *I—b*, granulaţie 60. Cuţitele de strung nu au avut vîrful racordat şi nici nu li s-a făcut faţetă pe muchia tăietoare principală. Pentru acest caz $K_3 = 1$. Atunci cînd se face o finisare suprafeţelor ascuţite, asigurîndu-le o calitate superioară : $K_3 > 1$, deoarece se creează condiţii mai bune de frecare şi se îndepărtează rizurile, care sînt amorse de fisuri. Din contră, cînd se face o ascuţite ce are drept efect o calitate mai scăzută a suprafeţelor ascuţite, atunci $K_3 < 1$. Executînd racordarea vîrfului cuţitului şi faţetă pe muchia principală tăietoare, se obţine o creştere sensibilă a vitezei de aşchiere şi atunci $K_3 > 1$. Influenţa acestor parametri va face obiectul altor studii.

Pentru prelucrările pieselor la care s-au îndepărtat straturile ecruisate, incluziunile etc, coeficientul K_4 este egal cu 1. Prezenţa straturilor ecruisate, a scoriei, a incluziunilor etc., scad performanţele de aşchiere şi ca atare în aceste cazuri $K_4 < 1$.

Pentru confecţionarea cuţitelor de strung există un bogat sortiment de plăcuţe din carburi metalice a căror utilizare este indicată în cataloagele de specialitate. Urmărind aceste indicaţii şi studiind rezistenţa la uzură, s-a putut stabili o corespondenţă între plăcuţele sovietice şi cele germane, ca de exemplu între plăcuţele T15K6 şi S_1. Comparaţia între mai multe materiale de sculă care prezintă cel mai mare interes se face cu ajutorul vitezelor economice de aşchiere. În acest scop este folosit coeficientul K_m de corecţie al vitezei în funcţie de materialul sculei. Pe lîngă această utilizare, coeficientul K_m permite să se calculeze viteza economică de aşchiere în cazul folosirii uneia dintre plăcuţele între care se face comparația, atunci cînd se cunoaște viteza economică doar pentru cealaltă plăcuță. Este de menționat că materialul prelucrat și durabilitatea economică rămîn aceleași. Acest mod de lucru cu coeficientul K_m apare mai clar din relația lui de definiție care este

$$K_m = \frac{v_{TM_2}}{v_{TM_1}}, \tag{8}$$

unde s-a notat

v_{TM_1} — viteza economică de așchiere pentru o durabilitate $T_{\min}$, cu un material de scule M_1;

v_{TM_2} — viteza economică de așchiere pentru o durabilitate $T_{\min}$, cu un material de scule M_2.

Ținînd seama de relația (1) se vede că coeficientul K_m depinde atît de parametrii regimului de așchiere, cît și de proprietățile mecanice ale materialului de prelucrat. În mod general coeficientul K_m poate fi pus sub forma

$$K_m = C_m s^{m_1} \left(\frac{s}{t}\right)^{m_2}. \tag{9}$$

Din analiza rezultatelor comparative se vede că în cazul general, domeniul uzual al parametrilor regimului de așchiere se împarte în două zone : una în care se obține $K_m < 1$ unde sînt recomandabile cuțitele din materialul M_1 și alta în care $K_m > 1$ unde se dovedesc a fi recomandate sculele din material M_2. Aceste două domenii sînt despărțite de curba (10)

$$K_m = 1, \tag{10}$$

care corespunde unor viteze de așchiere egale. Împărțirea domeniului parametrilor regimului de așchiere în două zone după cum $K_m \lesseqgtr 1$, se datorește proprietăților plăcuțelor, ce provin din compoziția și modul lor de elaborare.

Experiențele de bază ale studiului de față au fost executate cu plăcuțe S_1 de fabricație Harith, pentru care s-a considerat $K_m = 1$. În același domeniu cu plăcuțele T15 K 6 s-au obținut sistematic $K_m > 1$, performanțele fiind însă sensibil apropiate.

Coeficienții de corecție ai vitezei funcție de durabilitatea economică aleasă și funcție de parametrii geometrici, urmăresc modificarea vitezei de așchiere atunci cînd se impune o altă durabilitate. Pentru a putea stabili acești coeficienți este necesar a se urmări relațiile ce există între viteză și durabilitate. Așa după cum se cunoaște această legătură se exprimă sub forma :

$$vT^n = C_1. \tag{11}$$

În alte lucrări [1], [2] s-a arătat că în cazul general, atît n cît și C_1 depind de viteză, avans și adîncime de tăiere. Domeniul durabilităților economice fiind însă limitat între 50—120 min, vitezele de așchiere corespunzătoare vor fi la rîndul lor și ele limitate. Ca atare se poate considera pe baza rezultatelor experimentale că n și C_1 devin independenti de viteză în acest domeniu. În plus, în lucrările [1], [2] s-a mai dovedit că pentru un oţel se poate considera cu suficient de bună aproximaţie în domeniul avansului $s = 0{,}1 - 0{,}8$ mm/rot şi a adîncimii de tăiere $t = 0{,}1 - 5$ mm, că exponentul n nu depinde de avans şi adîncimea de tăiere. Acest fapt a condus la determinarea valorilor n_{med} ca medie a valorilor obţinute la mai multe regimuri de lucru.

Făcînd experienţe la diferite regimuri pe fiecare oţel din cele enumerate mai înainte şi completînd în acest sens unele rezultate care au fost deja publicate [2], s-a ajuns la valorile lui n_{med} date în tabela 5.

Tabela 5

Oţelul experimentat	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
σ_r (kgf/mm²)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
n_{med}	0,234	0,225	0,224	0,220	0,203

În tabela 5 se vede că n_{med} variază cu proprietăţile mecanice ale oţelului prelucrat. Studiind această evoluţie s-a ajuns la determinarea legăturii dintre n_{med} şi rezistenţa de rupere la tracţiune

$$n_{\text{med}} = \frac{0{,}433}{\sigma_r^{0{,}167}} \qquad (12)$$

În figura 4 se prezintă grafic rezultatele experimentale şi relaţia (12).

Avînd determinate valorile lui n se pot calcula valorile coeficienţilor K_T, K_γ, K_α etc. Astfel coeficientul K_T de corecţie al vitezei funcţie de durabilitatea economică aleasă, pentru un anumit material prelucrat la acelaşi avans şi adîncime de tăiere, se defineşte cu ajutorul relaţiei (13) atunci cînd se ia drept etalon durabilitatea $T = 60$ min.

$$K_T = \left(\frac{60}{T}\right)^n. \qquad (13)$$

Se vede imediat că pentru $T = 60$ min se obţine $K_T = 1$.

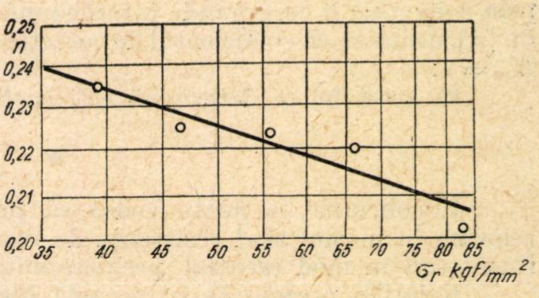


Fig. 4. — Variaţia exponentului n din relaţia (12) în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune pentru oţelurile carbon obişnuite.

Este de reţinut faptul că variaţiile mici ale lui n nu afectează sensibil valorile lui K_T. Din această cauză valorile coeficientului K_T se pot calcula cu ajutorul unui exponent determinat ca medie a valorilor prezentate în tabela 5 pentru toate oţelurile studiate. Astfel cu exponentul

$$n_{\text{MED}} = 0{,}22 \qquad (14)$$

s-au calculat valorile coeficientului K_T din tabela 6, pentru durabilităţile uzuale din intervalul 50—120 min.

Tabela 6

T(min)	50	60	70	80	90	100	110	120
K_T	1,04	1	0,97	0,94	0,91	0,89	0,87	0,86

În lucrări precedente, ca de pildă [3], s-a arătat că nerespectarea parametrilor geometrici optimi conduce la o uzură mai rapidă a sculelor şi ca urmare scade durabilitatea acestora. În cazul în care însă din diferite motive se utilizează cuţite ascuţite la o geometrie diferită de cea optimă şi se doreşte totuşi menţinerea aceleiaşi durabilităţi economice ca şi în cazul folosirii parametrilor geometrici optimi, se impune modificarea vitezei de aşchiere. Pentru aceasta se utilizează coeficienţii de corecţie ai vitezei în funcţie de parametrii geometrici ai cuţitului de strung. Ei se calculează cu relaţia

$$K_i = (\tau_i)^n \qquad (i = \gamma,\ \alpha,\ \alpha_1 \text{ etc}), \tag{15}$$

unde τ_i reprezintă coeficienţii de corecţie ai durabilităţii a căror definiţie şi tratare este dată în lucrarea [3].

Este de reţinut că pentru valorile optime ale parametrilor geometrici, coeficienţii de corecţie K_i ai vitezei au valoarea $K_i = 1$.

În particular, pentru unghiul de atac principal $\varkappa = 90°$, coeficientul de corecţie al vitezei are valorile $K_\varkappa = 0{,}80 \ldots 0{,}97$ după cum rezistenţa de rupere variază între $\sigma_r = 35 \ldots 85$ kgf/mm². Deoarece unghiul $\varkappa = 45°$ prin convenţie îi corespunde întotdeauna $\tau_\varkappa = 1$, aşa după cum s-a arătat în [3], urmează că coeficientul de corecţie al vitezei pentru acest caz va fi $K_\varkappa = 1$.

În acest fel se determină toţi coeficienţii de corecţie ai vitezei.

★

În concluzie, se poate vedea că proprietăţile mecanice, dintre care relevăm în primul rînd rezistenţa de rupere la tracţiune şi duritatea, influenţează în mod esenţial prelucrabilitatea prin aşchiere a unui metal.

Relaţiile prezentate în această lucrare, care se bazează pe cîteva mii de determinări, avînd caracter de generalitate, permit să se stabilească valorile vitezei economice de aşchiere şi să se calculeze coeficienţii de corecţie ai vitezei pentru cazurile care prezintă interes. Rezultatele pun în evidenţă legătura ce există între parametrii regimului de aşchiere şi proprietăţile mecanice ale oţelurilor romîneşti studiate. Dintre aceste proprietăţi s-a pus accentul pe rezistenţa de rupere la tracţiune, care este o mărime utilizată chiar în STAS 500—49 pentru caracterizarea oţelurilor. În cazul în care se cunoaşte doar duritatea Brinell H_B, spre a se utiliza datele din această lucrare se poate folosi relaţia empirică cunoscută ce dă legătura dintre duritate şi rezistenţa de rupere la tracţiune

$$\sigma_r \approx 0{,}36\ H_B. \qquad (16)$$

De asemenea, în acelaşi scop mai poate fi utilizată şi relaţia ce se stabileşte pe baza rezultatelor medii prezentate în tabela 1,

$$\sigma_r = 0{,}34\ H_B + 3{,}81. \qquad (17)$$

Utilizînd relaţiile prezentate în lucrarea de faţă pentru oţeluri romîneşti, se pot face comparaţii între vitezele economice ce rezultă din aplicarea lor şi din folosirea formulelor şi rezultatelor obţinute în străinătate [4], [5] pentru oţelurile respective cu proprietăţi mecanice similare. În acest sens în tabela 7 sînt date cîteva exemple alese în mod arbitrar.

Tabela 7

Oţelul	s (mm/rot)	t (mm)	v_{60} (m/min)		
			Î.M.A. (nomogramă) plăcuţă S_1	U.R.S.S. [4] plăcuţe T15K6	R.D.G. [5] plăcuţă S_1
OL 38	0,25	1,5	177	262	—
	0,60	1,5	121	262	—
OL 42	0,25	1,0	248	342	270
	0,25	5,0	195	256	243
OL 50	0,25	3,0	202	212	238
	0,50	5,0	139	201	184
	0,80	1,5	136	211	~190
OL 60	0,25	5,0	140	157	207
	0,60	1,5	115	194	~185
OL 70	0,50	3,0	95	111	150
	0,50	5,0	88	101	140
	0,80	5,0	72	85	~115

Valorile din tabela 7 obţinute cu formulele sovietice şi germane[1]) corespund unor cuţite cu vîrful racordat, pe cînd cele ce rezultă din aplicarea formulelor din lucrarea de faţă corespund unor cuţite cu vîrful neracordat. Unghiurile de degajare ale cuţitelor de strung au avut de asemenea mărimi diferite în cazul stabilirii formulelor comparate mai dinainte. Aceste deosebiri legate de forma cuţitului motivează doar parţial deosebirile dintre mărimile vitezelor de aşchiere. Cauza esenţială care explică diferenţierile ce rezultă din aplicarea formulelor obţinute în diferite ţări, constă în proprietăţile metalelor, ce provin din compoziţia chimică şi modul lor de elaborare, specifice minereurilor ce stau la bază şi a tehnologiei de fabricaţie.

---

[1]) Mărimile vitezelor de aşchiere date de [5] nu urmăresc direct realizarea unei durabilităţi de $T = 60$ min, acest lucru rezultînd din tabele numai în unele cazuri, cînd nu se poate atinge întreaga putere de antrenare a strungului.

Cele prezentate în lucrarea de faţă au rolul de a demonstra necesitatea atît a cercetării parametrilor regimului de aşchiere, cît şi a aplicării în practică a rezultatelor acestor cercetări în vederea obţinerii unei înalte productivităţi în prelucrările prin aşchiere.

Primită la redacţie la 24 martie 1960

ПАРАМЕТРЫ РЕЖИМА РЕЗАНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе представлены результаты, полученные при резании на токарном станке румынских обыкновенных углеродистых сталей, широко применяющихся в машиностроении. Опыты были проведены с резцами, оснащенными пластинками из твердых сплавов, с оптимальной геометрией заточки.

Изучаются соотношения между параметрами режима резания и приходят к соотношениям общего характера для исследуемой группы сталей. В работе выявляется влияние механических свойств материалов на режимы обработки резанием на токарном станке.

Результаты приводятся в легко доступной форме, полезной и для практических применений.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Изменение показателей степени x и y в формуле (1) в зависимости от сопротивления разрыву для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 2. — Изменение поправочного коэффициента скорости K_1 в зависимости от сопротивления разрыву для обыкновенных углеродистых сталей. Кривая *a* соответствует соотношению (7) при $35 < \sigma_r \leqslant 65$ кг/мм², а кривая *b* — тому же соотношению при $65 < \sigma_r \leqslant 85$ кг/мм².

Рис. 3. — Номограмма резания для определения экономичной скорости v_{60} в зависимости от подачи s, глубины резания t и сопротивления разрыву σ_r для резания на токарном станке обыкновенных углеродистых сталей. Номограмма справедлива для резцов, оснащенных пластинками S_1 с оптимальной геометрией заточки, причем значение главного угла атаки $\varkappa = 45°$.

Рис. 4. — Изменение показателя степени n в соотношении (12) в зависимости от сопротивления разрыву для обыкновенных углеродистых сталей.

PARAMÈTRES DU RÉGIME DE COUPE DANS LE CAS DES ACIERS AU CARBONE

RÉSUMÉ

Le travail présente les résultats obtenus au tournage des aciers au carbone roumains, qui sont largement utilisés dans la construction des machines. Les expériences ont été effectuées avec des outils à base de carbures métalliques, affûtés aux valeurs optima des angles de coupe.

Les auteurs étudient les relations existant entre les paramètres du régime de coupe et en déduisent des relations ayant un caractère général pour le groupe d'aciers étudiés. Ils mettent en évidence l'influence des propriétés mécaniques des matériaux sur les régimes de tournage.

Les résultats sont présentés sous une forme accessible et se prêtent aux applications pratiques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Variation des exposants x et y de la formule (1) en fonction de la résistance à la rupture par traction des aciers au carbone.

Fig. 2. — Variation du coefficient de correction K_1 de la vitesse en fonction de la résistance à la rupture par traction des aciers au carbone ordinaires. La courbe *a* correspond à la relation (7) lorsque $35 < \sigma_r \leqslant 65$ kgf/mm^2 et la courbe *b* à la même relation lorsque $65 < \sigma_r \leqslant 85$ kgf/mm^2.

Fig. 3. — Nomogramme de coupe permettant de déterminer la vitesse économique v_{60}, en fonction de l'avance s, la profondeur de coupe t et la résistance à la rupture par traction σ_r, dans le cas du tournage des aciers au carbone. Le nomogramme est valable pour les outils à base de carbures métalliques S_1 affûtés aux valeurs optima des angles de coupe, l'angle d'attaque principal ayant la valeur $\varkappa = 45^\circ$.

Fig. 4. — Variation de l'exposant n dans la relation (12) en fonction de la résistance à la rupture par traction des aciers au carbone.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, M. Calciu, N. Pascu, *Despre regimul optim de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII** *3*, 915 (1957).
2. M. Popov, I. Mitrică, E. Deciu, *Asupra regimurilor optime cu aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe minerale ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*, 219 (1959).
3. M. Popov, I. Mitrică, E. Deciu, *Rezistenţa la uzură a sculei în funcţie de parametrii geometrici ai acesteia.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI** (1960).
4. * * *, *Машиностроение*, VII, Машгиз, Москва, 1947.
5. * * *, *Richtwerte fur wirtschaftliche Zerspanung.* Drehen. Verlag Technik, Berlin, 1952.
6. A. G. Worthing, J. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.

STUDII

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

POSIBILITĂȚI DE CLASIFICARE A TIPURILOR DE SOL ȘI DE DETERMINARE A EFECTELOR LUCRĂRILOR CU AJUTORUL UNOR MĂRIMI FIZICO-MECANICE. I

DE

C. I. FLORESCU [1]) și M. VASILESCU [2])

Importanța influenței factorilor fizico-mecanici ai solului asupra producției agricole a fost subliniată în ultimii ani de numeroși oameni de știință [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Pentru măsurarea variațiilor acestor factori s-au elaborat unele metode, majoritatea lor fiind aplicabile în condiții de laborator. Pentru măsurarea acestor factori în condiții de cîmp se cunosc puține metode și rezultate.

Căutîndu-se o metodă de măsurare a variațiilor factorilor fizico-mecanici ai solului, aplicabilă în condiții de cîmp, s-au executat unele cercetări asupra rezistenței opuse de sol la penetrarea sa, ajungîndu-se la rezultate ce s-au publicat anterior [10], [11], [12], [13], [14].

Importanța problemei precum și complexitatea acestor studii au atras atenția unui număr mare de cercetători. Studierea diverselor aspecte ale acestei probleme se face de către un colectiv mai larg ce cuprinde atît membri ai corpului didactic din învățămîntul superior, cît și cercetători de la diverse institute ale Academiei R.P.R. și ai Ministerului Agriculturii.

Aspectele problemei, referitoare la rezistența opusă de sol la lucrările de bază în condiții naturale se studiază în colaborare cu prof. M. Modiga, lector St. Căproiu, asist. D. Țîrcovnicu, de la Facultatea de mecanizarea agriculturii din Craiova.

Aceleași aspecte în condiții de laborator se studiază în colaborare cu prof. N. Ulcenko dela Institutul agronomic ,,Nicolae Bălcescu'' din București și ing. A. Canarache de la I.C.A.R. Aspectele referitoare la efectele fizico-mecanice ale lucrărilor culturilor din vii se studiază în colaborare cu ing. N. Băjescu de la I.C.A.R., şi ing. I. Alexandrescu de la I.C.H.V.

---

[1]) I.C.A.R.

[2]) Ministerul Agriculturii.

În cele ce urmează se redau aspecte ale variaţiilor factorilor fizico-mecanici ai solului, puse în evidenţă prin măsurători penetrometrice, făcute la staţiunea experimentală „Murfatlar" reg. Constanţa, în anii 1958 şi 1959.

Măsurătorile penetrometrice s-au executat pe trei parcele alăturate uniforme ca aspect exterior, plantate cu viţă de vie pe rod de mai mulţi ani. Pe aceste parcele s-au aplicat metode diferite de lucrări ale viţei de vie.

Pe prima parcelă, constituind varianta I, s-au aplicat lucrările clasice pentru cultura viţei de vie. Pe a doua parcelă, constituind varianta a II-a, în plus s-a condus artificial umiditatea solului, iar pe a treia parcelă, constituind varianta a III-a, în plus s-a întrerupt contactul direct dintre sol şi atmosferă cu ajutorul unui strat din materiale izolante.

Măsurătorile s-au executat de fiecare dată după aceeaşi schemă şi în aceeaşi zi pe toate variantele.

Pe fiecare variantă, la fiecare măsurătoare, s-au executat cîte două grupaje de penetrări, pentru fiecare grupaj executîndu-se cîte 10 măsurători.

Grupajele s-au plasat pe două intervale alăturate pe porţiuni de teren cît mai uniform ca relief, aspect macroscopic ş.a.

S-a utilizat penetrograful tip IMA-II, a cărui descriere şi funcţionare s-a publicat anterior.

Penetrările s-au executat pînă la adîncimi mai mari de 50 cm, prelucrîndu-se însă datele numai pînă la adîncimea de 50 cm, pe intervale de 10 mm.

Pentru a se mări precizia de prelucrare a penetrogramelor şi a se scurta timpul de lucru pentru interpretarea celor 30 000 de înregistrări rezultate la aceste măsurători, s-a folosit metoda M (Z, N), care constă în general din următoarele:

În funcţie de caracteristicile penetrografului cu care se lucrează: greutatea şi cursa berbecului, greutatea părţii mobile, forma şi secţiunea maximă a vîrfului de penetrare, precum şi pe baza formulelor menţionate în lucrările publicate, se alcătuieşte un tabel al valorilor rezistenţelor specifice la penetrare — *kp* —, în funcţie de adîncimea la care pătrunde penetrograful după fiecare lovitură.

Penetrogramele ce se obţin cu penetrograful IMA-II redau adîncimile de pătrundere succesive, corespunzătoare fiecărei lovituri.

Pentru eşalonarea acestei valori pe intervale a cîte 10 mm, s-a considerat diferenţa între adîncimea la care s-a ajuns cu un număr n de lovituri şi adîncimea la care s-a ajuns cu $n-1$ lovituri; valoarea rezistenţei specifice la penetrare — *kp* — corespunzătoare adîncimii penetrografului cu diferenţa respectivă, se citeşte în tabelă şi se consemnează într-o fişă cu o liniatură reprezentativă a intervalelor de 10 mm propuse. Datele calendaristice pentru executarea măsurătorilor penetrometrice au fost stabilite în funcţie de succesiunea principalelor lucrări necesare realizării procesului de producţie.

Tabela 1

Nr. crt.	Lucrarea	Indici	Varianta I	Varianta II	Varianta III
1	Arătură adîncă de toamnă	A_0[1])	—	10.XI	10.XI
				30.X	
2	Arătură de primăvară	A_1	26.V	15.IV	15.IV
			7.V	3.IV ; 8.IV	3.IV ; 11.V
3	Prășitul mecanizat	A_2	26.VI ; 21.VII	27.V ; 13.VI ; 28.VI ; 7.VII ; 15.VII ; 15.VIII	27.V ; 13.VI
			10.V ; 30.VI ; 29.VII	11.V ; 22.V ; 18.VI ; 8.VII ; 17.VII ; 30.VII ; 15.VIII ; 12.X	
4	Prășitul manual	A_3	30.VI ; 22.VI 30.VII	31.V ; 13.VI ; 30.VI ; 18.VII ; 16.VII ; 5.VIII ; 14.VIII	31.V ; 13.VI
				11.V ; 29.V ; 18.VI ; 9.VII ; 20.VII ; 4.VIII ; 17.VIII	
5	Săpat pe rînduri	A_4	31.V		
					4.IV
6	Săpat și făcut rigole	A_5	—	6.V	6.V
				5.IV	6.IV
7	Ușurat dezgropatul	B_0	—	3.III	3.III
			—	13.III	13.III
8	Dezgropatul	B_1	29.IV	4.III	4.III
			22.IV	14.III	14.III
9	Tăiat	B_2	6.V	18.III	18.III
			6.V		
10	Arăcit	B_3	12.V	—	—
11	Arcuit	B_4	13.V	8.IV	8.IV
			12.V		
12	Administrat îngrășăminte chimice	B_5	—	19.VI	—
			—	30.IV	—
13	Strîns ripca	B_6	28.III	28.III	28.III
14	Legat	B_7	2.VI ; 19.VI 18.VII ; 14.VIII	27.V ; 18.VI ; 15.VII ; 14.VIII	27.V ; 19.VI ; 15.VII ; 14.VIII
			2.VI ; 16.VI ; 19.VII ; 10.VIII		
15	Stropit-prăfuit	B_8	19.VI	2.VI ; 19.VI ; 26.VI ; 11.VII ; 21.VIII ; 5.IX	2.VI ; 4.VI ; 19.VI ; 26.VI ; 11.VII. ; 21.VIII ; 5.IX
			20.VI		

---

[1] Anul 1958.
Anul 1959.

Tabela 1 (continuare)

Nr. crt.	Lucrarea	Indici	Varianta		
			I	II	III
16	Ciupit lăstari	B_9	—	20.V ; 5.VI	5.VI
17	Irigat	B_{10}	—	25.VI ;10.VII ; 24.VII ; 26.VIII	—
			—	9.III ; 29.IV ; 27.VII ; 27.VIII	—
18	Trasat rigole	B_{11}	—	20.XI	
19	Instituirea stratului izolator şi ridicarea sa	B_{12}	—	—	31.V ; 10.XI
			—	—	15.V
20	Recoltat	B_{13}	9.X	10.X	10.X
			3.X	15.X	
21	Îngropat	B_{14}	13.XI	13.XI	13.XI
			13.X	24.X	

În tabela 1 sînt prezentate lucrările executate pe toate variantele, datele calendaristice şi indicii atribuiţi.

În tabela 2 sînt redate rezultatele procentuale ale analizei umidităţii din sol la datele şi pe locurile pe care s-au executat măsurătorile penetrometrice.

În figurile 1—11 se prezintă rezultatele măsurătorilor rezistenţei la penetrare pe verticală în kg/cm², la prima variantă, pentru anii 1958 şi 1959.

În anul 1958 măsurătorile rezistenţei la penetrare s-au executat în următoarea ordine a lucrărilor : $B_1B_2 - K_p - B_3B_4A_1A_4B_7B_7B_8A_2A_3 - - K_p - B_7A_2A_3B_9 - K_p - K_p - B_{13} - K_p - B_{13} - K_p - B_{14} - K_p$. În anul 1959 s-a căutat să se menţină aceeaşi ordine.

Se constată din grafice că cele două grupaje de măsurători ale variantei I prezintă aluri asemănătoare.

Situaţia iniţială are următorul aspect : de la 0 cm la 30 cm rezistenţa la penetrare variază în limite apropiate : 3,7. . . 4,5 kg/cm². De la această adîncime rezistenţa la penetrare creşte repede la valori cuprinse între 7,5. . . 10 kg/cm², pînă la adîncimea măsurată de 50 cm.

Trecerea între prima şi a doua zonă se face brusc, pe o distanţă de numai 4 cm.

La a doua măsurătoare (fig. 2—13—24) se constată o uniformizare a rezistenţei la penetrare pe adîncimea 0. . .50 cm, valorile înregistrate fiind aproape constante pe toată adîncimea măsurată.

La următoarele măsurători (fig. 3 şi 4) se constată o creştere a rezistenţei la penetrare în stratul de la 0 cm la 30 cm, prezentînd un maximum între 12. . .14 cm adîncime. Între 30. . . 50 cm urmează o creştere continuă uşoară.

Tabela 2

Data	Adîncimea în cm	1958			Data	1959		
		Umiditatea în %				Umiditatea în %		
		Varianta				Varianta		
		I	II	III		I	II	III
9.V	0–10	24,1	25,0	23,8	10.III	21,7	23,2	23,1
	10–20	23,8	24,4	23,6		21,3	23,0	22,6
	20–30	23,2	24,6	21,8		20,8	22,3	22,1
	30–40	21,7	23,9	21,2		20,3	21,7	21,5
	40–50	21,6	23,1	20,1		20,3	21,1	20,6
	50–60	20,0	21,7	20,1		20,0	20,4	20,1
3.VII	0–10	21,8	25,3	22,3	14.V	17,7	21,7	19,6
	10–20	21,8	24,5	21,6		17,4	21,5	18,9
	20–30	21,5	24,2	21,0		17,1	20,7	17,6
	30–40	21,2	23,0	21,2		16,0	19,5	17,3
	40–50	20,0	21,7	20,5		16,0	19,1	17,2
	50–60	19,0	19,8	19,8		14,0	17,1	16,6
14.VIII	0–10	16,1	21,6	19	7.VII	15,4	24,4	25,2
	10–20	16,1	21,6	22,0		18,4	23,2	24,0
	20–30	16,6	20,5	19,5		18,5	22,2	23,0
	30–40	17,4	20,0	19,3		18,5	21,8	22,0
	40–50	16,1	20,1	19,3		16,7	20,5	21,0
	50–60	15,5	19,6	19,6		15,3	19,4	19,7
2.X	0–10	14,2	17,2	14,4	14.VIII	10,8	20,7	21,0
	10–20	14,6	18,0	15,2		12,9	23,5	22,6
	20–30	14,6	18,3	15,4		19,5	24,5	20,6
	30–40	14,1	19,1	14,6		21,0	24,1	20,8
	40–50	14,0	17,1	13,8		20,0	23,4	19,6
	50–60	12,7	16,7	13,8		19,7	21,8	19,6
29.X	0–10	16,4	17,7	18,2	28.X	11,9	16,3	17,3
	10–20	16,1	18,8	19,6		13,0	16,2	16,9
	20–30	17,3	21,8	23,5		16,2	17,1	17,5
	30–40	17,3	22,0	22,1		16,1	17,1	17,3
	40–50	15,1	20,5	20,4		14,0	17,0	16,9
	50–60	14,0	19,5	18,2		11,9	15,1	16,4
20.XI	0–10	16,2	22,2	19,9				
	10–20	16,0	22,0	22,1				
	20–30	12,7	22,2	19,4				
	30–40	12,6	21,0	19,7				
	40–50	12,8	17,4	17,5				
	50–60	12,8	17,3	13,9				

Aceeaşi alură se prezintă în figurile 8, 9 şi 10 la măsurătorile executate în anul 1959.

La sfîrşitul ciclului de lucrări în anul 1958 se constată o mare împrăştiere a rezultatelor (fig. 6) şi o creştere a rezistenţei la penetrare pe toată adîncimea măsurată, aceeaşi situaţie remarcîndu-se şi în anul 1959 (fig. 11).

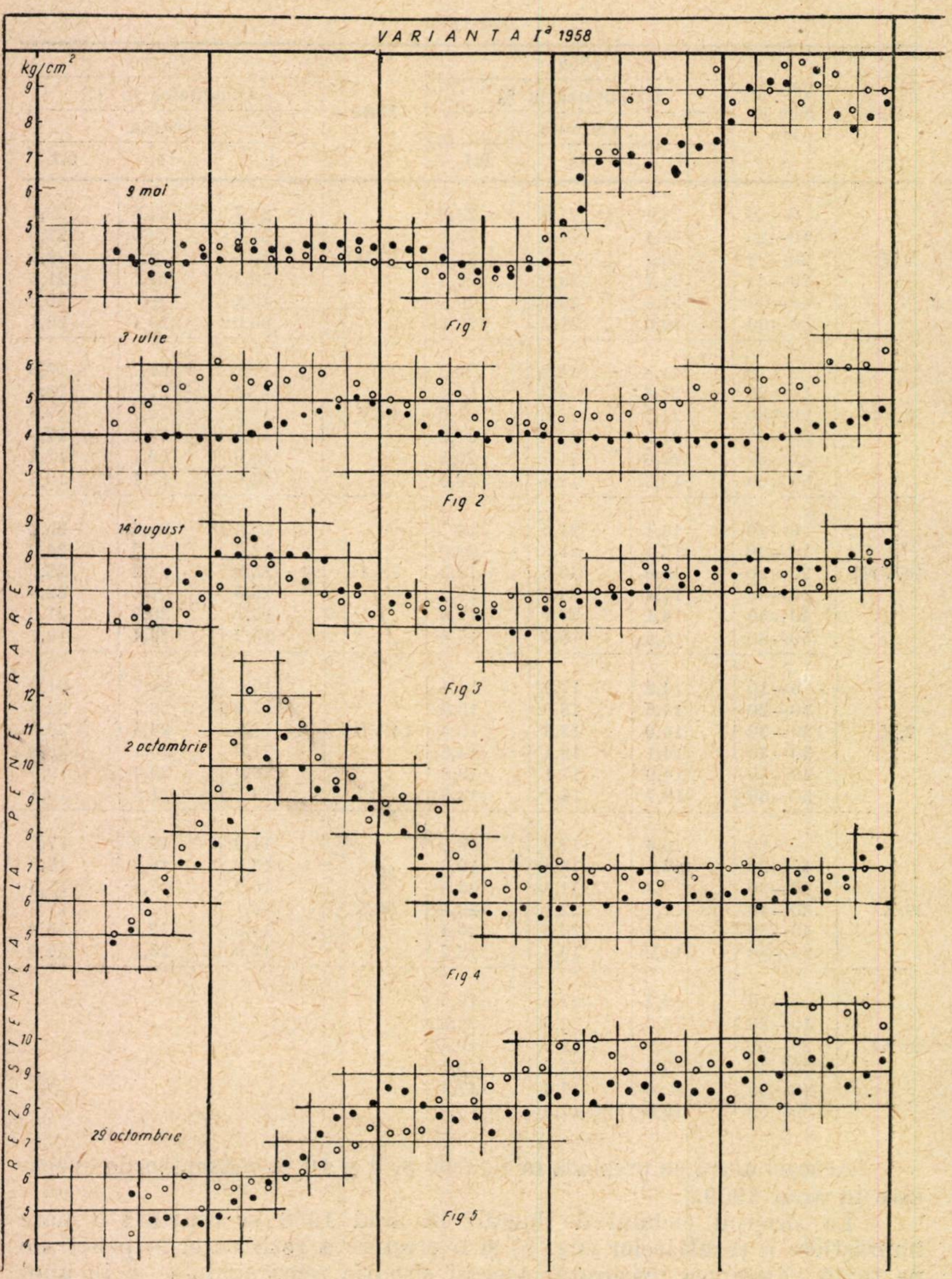

VARIANTA I^a 1958
kg/cm²
REZISTENTA LA PENETRARE
9 mai
Fig 1
3 iulie
Fig 2
14 august
Fig 3
2 octombrie
Fig 4
29 octombrie
Fig 5
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Fig. 1—5

În general, alurile curbelor de variație obținute în cei doi ani pe varianta I, prezintă aspecte asemănătoare, cu toate că situația inițială în anul 1959 (fig. 7) a fost diferită față de situația inițială a anului 1958 (fig. 1).

Considerînd domeniul de variație al datelor obținute la fiecare măsurătoare, pe întreaga adîncime măsurată, în anul 1958 se constată o variație în limite mai largi, față de variația înregistrată în anul 1959.

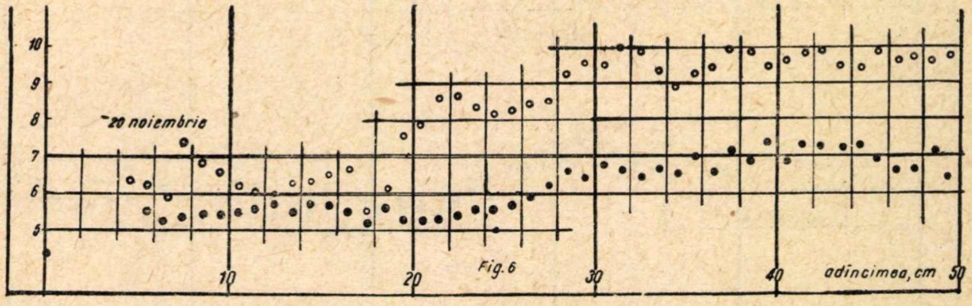


Fig. 6

Valorile înregistrate în anul 1958 sînt cuprinse — în general — între 3,0. . .11 kg/cm^2 ; pentru prima măsurătoare variind între 3,5. . .10 kg/cm^2, iar pentru următoarele între : 4. . .6 ; 6. . .8 ; 6. . .11 ; 7. . .11 și 5. . .10 kg/cm^2.

Valorile înregistrate în anul 1959 — în general — se grupează între 4. . .9 kg/cm^2, variind pentru prima măsurătoare între 4. . .7 kg/cm^2, iar pentru următoarele între 4. . .7 ; 4. . .6 ; 6. . .9 și 6 . . .9 kg/cm^2.

În figurile 12—22 se prezintă variația pe verticală, de la 0 la 50 cm adîncime a rezistenței la penetrare pentru varianta a II-a.

În anul 1958, pe această variantă, măsurătorile rezistenței la penetrare s-au executat în următoarea ordine a lucrărilor : $B_0B_1B_2B_6B_4A_1A_5 - K_p - B_9A_2B_7A_3B_8B_9A_2A_3B_7B_8B_5B_{10}B_8A_3 - K_p - A_2A_3B_{10}B_8B_7A_2A_3$ $B_{10}A_2A_3A_2B_7 - K_p - B_8B_{10}B_8 - K_p - B_{13} - K_p - A_0\,B_{14} - K_p$.

În anul 1959 s-a căutat să se mențină aceeași ordine.

La această variantă se constată că valorile rezistenței la penetrare pentru cele două grupaje de penetrări prezintă o mai mare concordanță între ele, față de varianta I.

Situația inițială (fig. 12) prezintă următorul aspect : între 0. . .30 cm valorile rezistenței la penetrare sînt strîns grupate în jurul a 4 kg/cm^2, urmată de o creștere accentuată de la 30 la 50 cm adîncime, la valori între 5,5. . .8 kg/cm^2.

În figura 13 — la cea de-a doua măsurătoare din anul 1958 — pe toată adîncimea măsurată, valorile rezistenței la penetrare sînt cuprinse între 3. . .4 kg/cm^2, constatîndu-se o reducere simțitoare a rezistenței la penetrare la adîncimea 30. . .50 cm, față de prima măsurătoare.

Din figurile 14 — 16 se constată o creștere sub o formă de maxim a rezistenței la penetrare între 15. . .22 cm adîncime, valorile absolute ale acestei creșteri fiind mai reduse ca la varianta I.

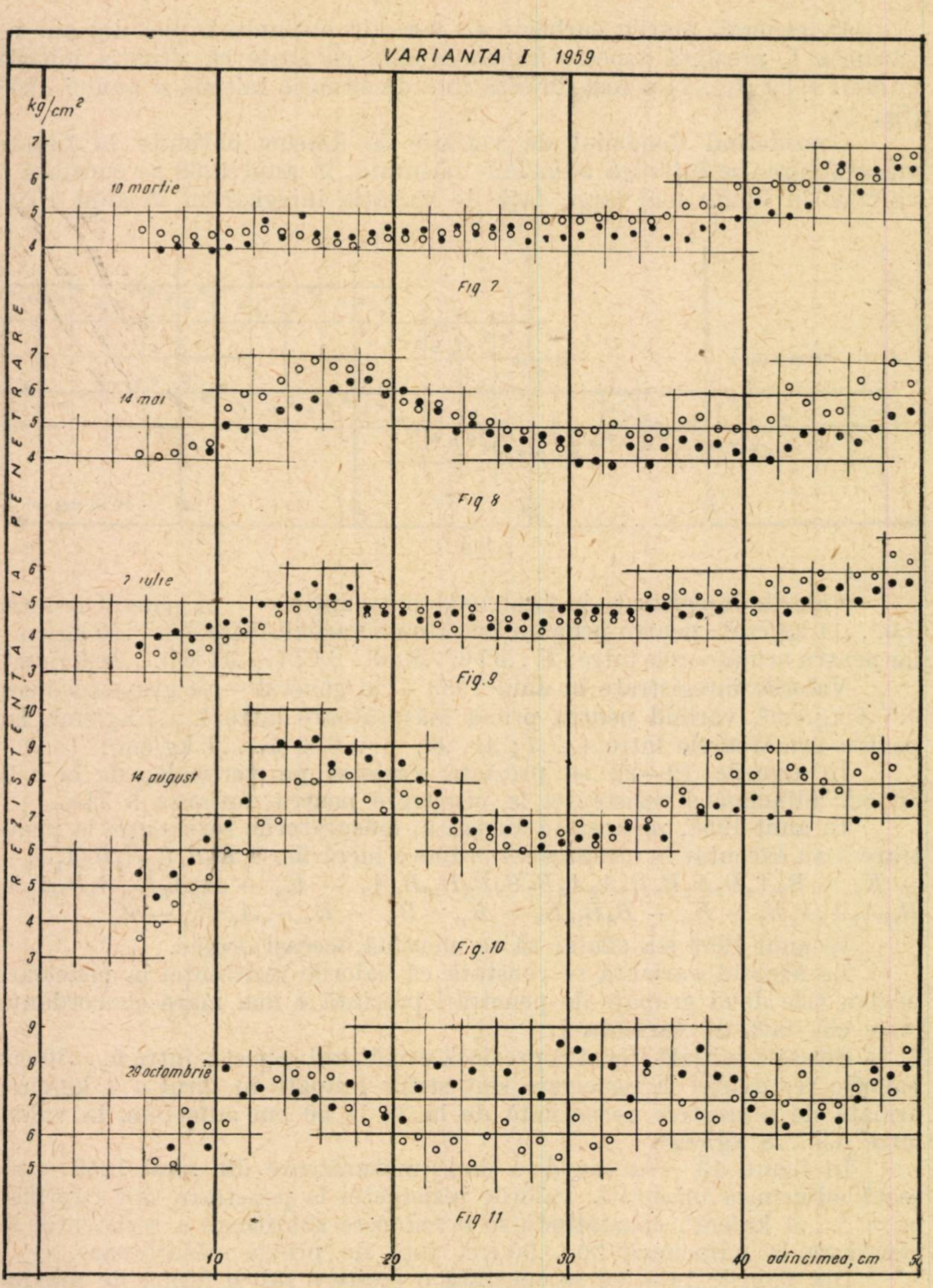

VARIANTA I 1959
kg/cm²
REZISTENTA LA PENETRARE
10 martie
7
6
5
4
Fig 7
14 mai
7
6
5
4
Fig 8
7 iulie
6
5
4
3
Fig.9
14 august
10
9
8
7
6
5
4
3
Fig.10
29 octombrie
9
8
7
6
5
Fig 11
10
20
30
40
adîncimea, cm
50

Fig. 7—11

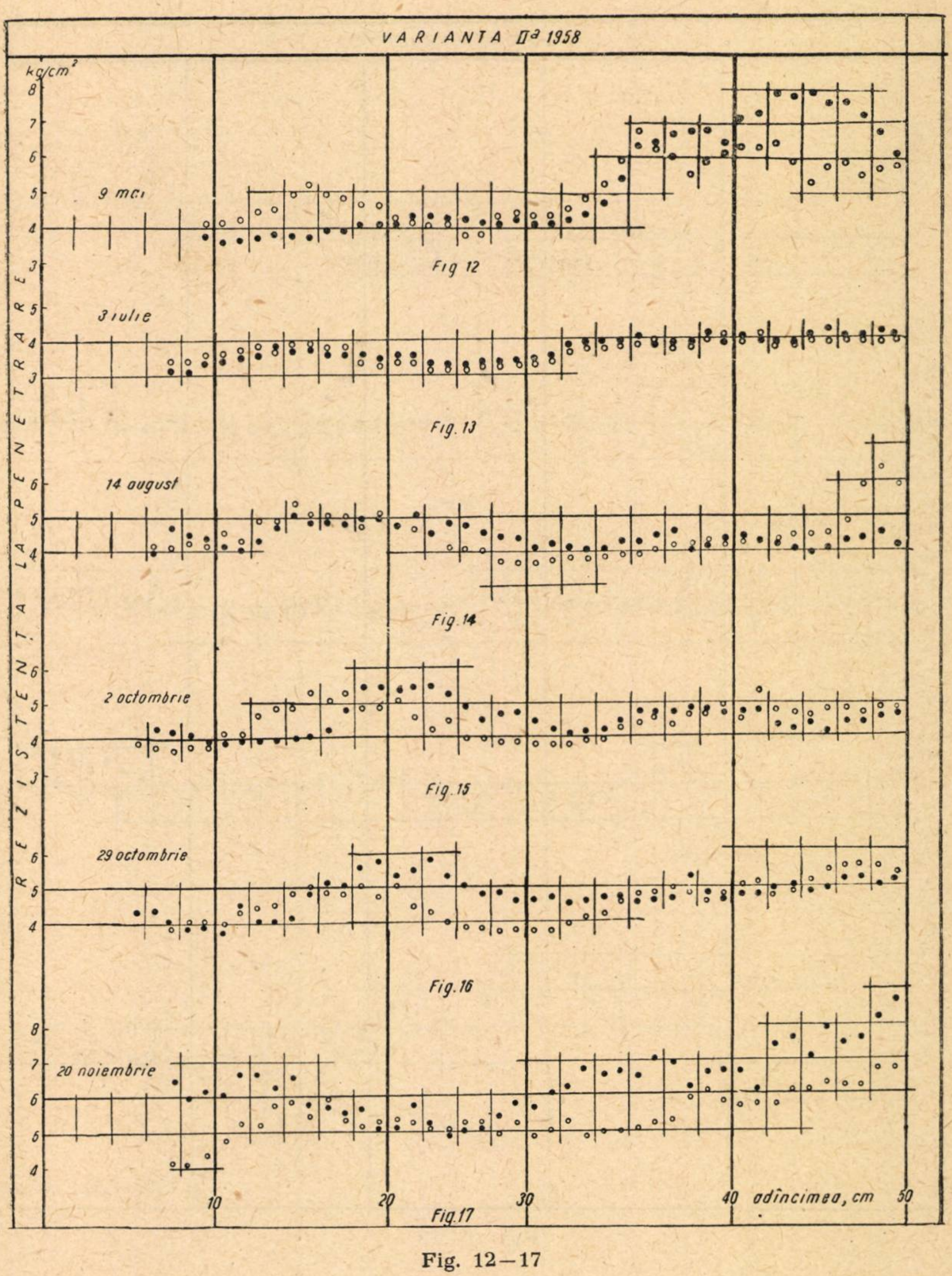

VARIANTA IIa 1958
kg/cm²
REZISTENTA LA PENETRARE
9 mai
Fig 12
3 iulie
Fig. 13
14 august
Fig. 14
2 octombrie
Fig. 15
29 octombrie
Fig. 16
20 noiembrie
Fig. 17
8
7
6
5
4
3
10
20
30
40
50
adîncimea, cm

Fig. 12—17

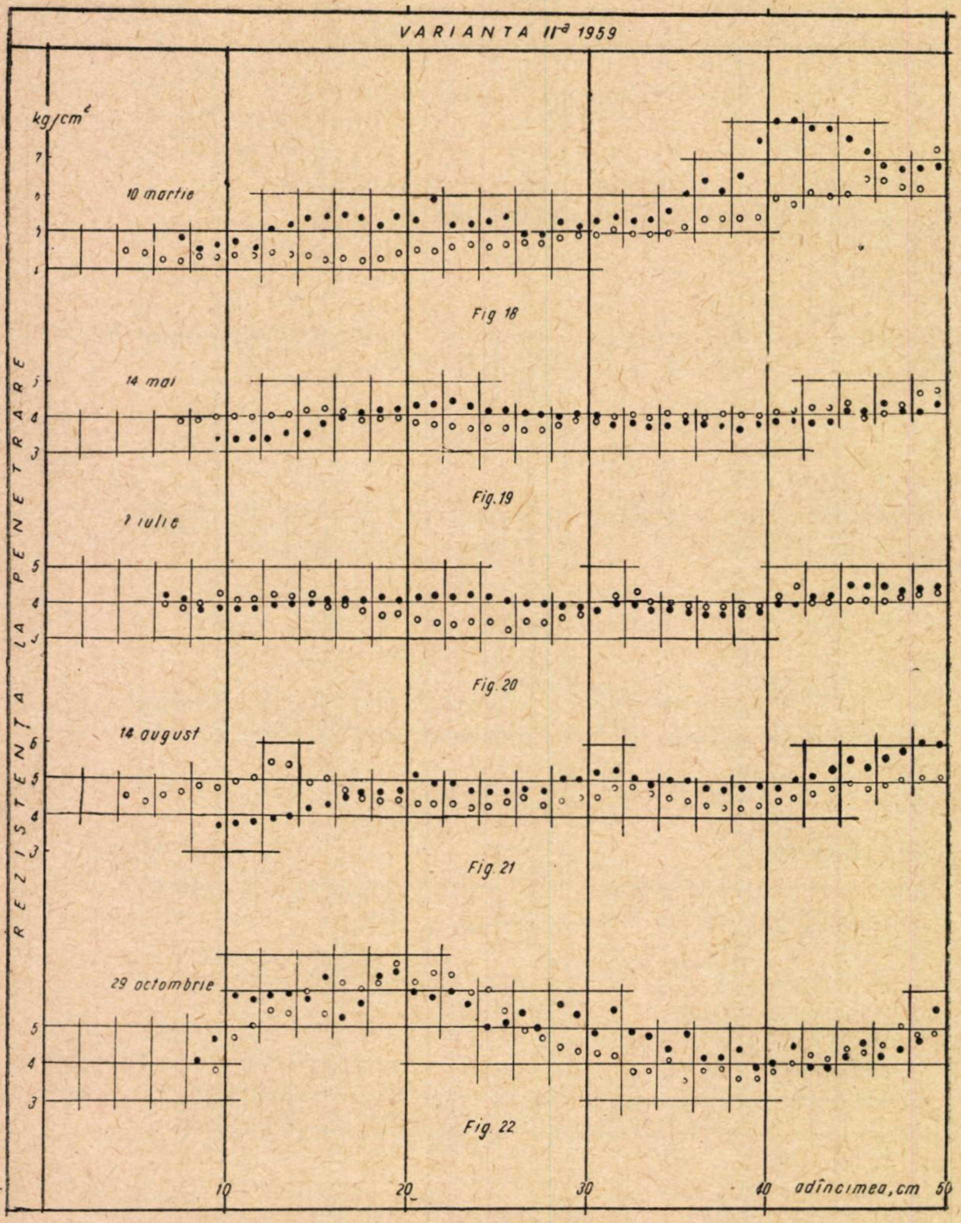

VARIANTA IIa 1959
kg/cm²
7
6
5
4
10 martie
Fig 18
5
4
3
14 mai
Fig. 19
5
4
3
7 iulie
Fig. 20
6
5
4
3
14 august
Fig. 21
29 octombrie
5
4
3
Fig. 22
REZISTENTA LA PENETRARE
10
20
30
40
adîncimea, cm
50

Fig. 18–22

După încheierea ciclului de lucrări se constată şi la această variantă o creştere a rezistenţei la penetrare şi aceeaşi mare împrăştiere a valorilor înregistrate.

Domeniul de variaţie al valorilor rezistenţei la penetrare în anul 1958 este mai larg, faţă de al anului 1959, valorile înregistrate fiind mai grupate în general, faţă de varianta I, în ambii ani.

În anul 1958 variaţia valorilor înregistrate în general este cuprinsă între 3,5...8 kg/cm², la prima măsurătoare variind între 3,5...8 kg/cm², iar pentru următoarele între 4...5 ; 3,5...5 ; 3,5...5,5 ; 3,7...5,7 şi 4...8 kg/cm².

Valorile înregistrate în anul 1959 se grupează, în general între 4...8 kg/cm², variind pentru prima măsurătoare între 4...6,5 kg/cm², iar pentru următoarele între 3,5...4,5 ; 3,4...4,5 ; 3,7...5,5 şi 4,5...8 kg/cm².

La varianta a III-a, în anul 1958, măsurătorile penetrometrice s-au intercalat în modul următor în ciclul lucrărilor : $B_0B_1B_2B_6B_4A_1A_5 - K_p - A_2B_7A_3B_{12}B_8B_9A_2A_3B_7B_8B_8B_9 - K_p - B_8B_7B_7 - K_p - B_8B_8 - K_p - B_{13} - K_p - A_0B_{14} - K_p$ — căutîndu-se a se respecta aceeași ordine și în anul 1959.

Din figura 23 se constată că situaţia iniţială este similară celor din variantele I şi a II-a.

De la 0 cm la 30 cm este cuprinsă între limitele 3,7...4,5 kg/cm², urmată de o creştere accentuată a valorilor 7...8,5 kg/cm² între 30 şi 50 cm adîncime.

La a doua măsurătoare se constată că şi la variantele I şi a II-a aceeaşi reducere a rezistenţei la penetrare pe toată adîncimea măsurată, variind în acest caz între 3,3... 4,4 kg/cm², între adîncimile 30...50 cm nemaiînregistrîndu-se valorile puse în evidenţă la primele măsurători (fig. 24).

În figurile 25 şi 26 se constată aceeaşi creştere a rezistenţei la penetrare sub forma unui maxim în jurul adîncimii de 15 cm.

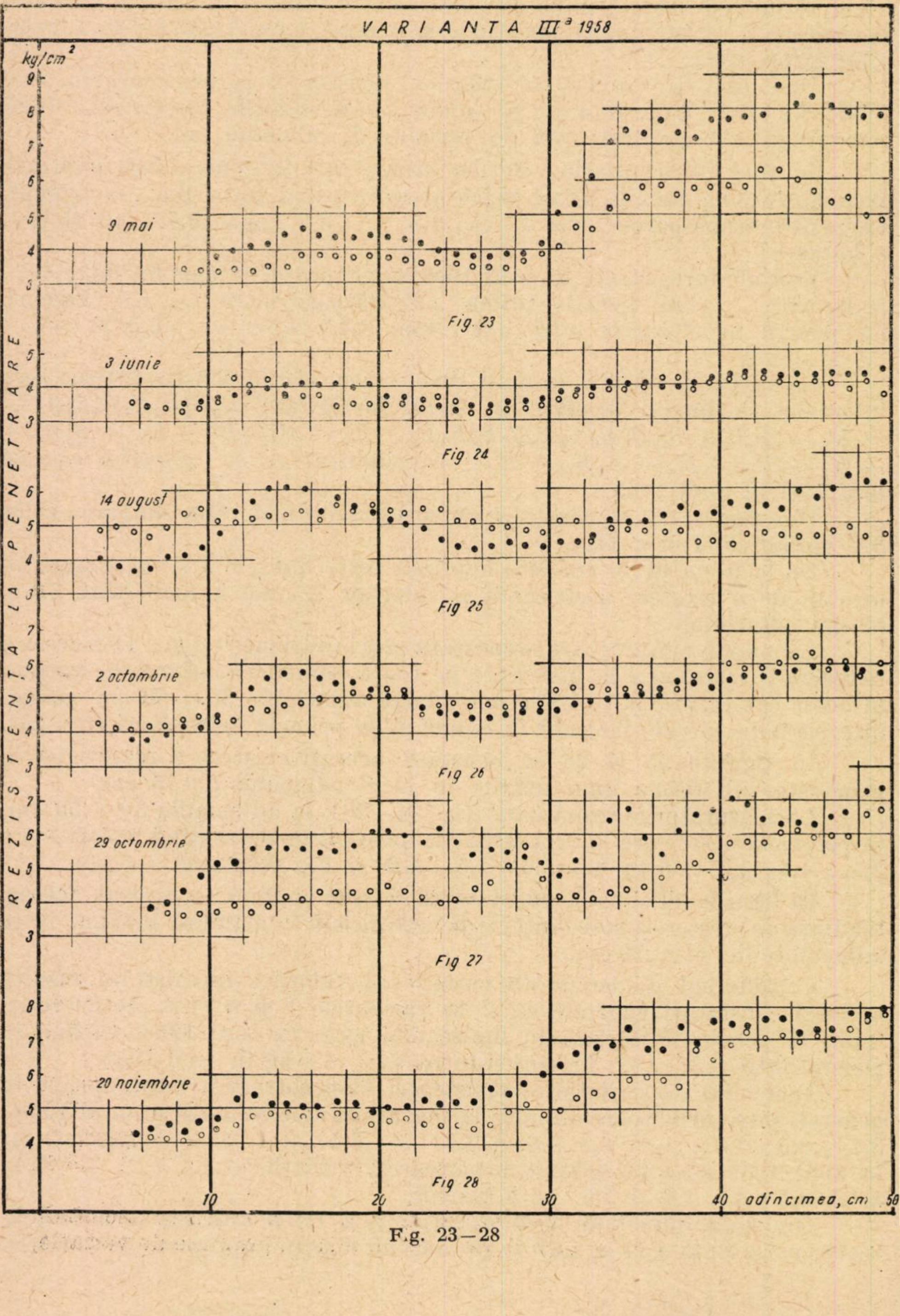
La măsurătorile următoare (fig. 24—28), la adîncimile 30...50 cm, se constată o creştere a rezistenţei la penetrare, prezentînd valori între 3,5...4,5 ; 4,5... 6,4 ; 4,5...6 ; 4,5...6,5 şi 5...8 kg/cm².

În figurile 30 şi 32 se constată că şi în anul 1959 s-a sesizat aceeaşi tendinţă de creştere a rezistenţei la penetrare sub forma unui maxim, între adîncimile de 14...20 cm.

Considerînd domeniul de variaţie al valorilor înregistrate rezultă aceleaşi constatări generale ca şi la variantele I şi a II-a. Astfel rezistenţa la penetrare variază în limite mai largi în anul 1958, variind în general între 3,3... 8,5 kg/cm² şi între 3,4...6,4 kg în anul 1959.

Domeniul de variaţie al rezistenţei la penetrare a fost cuprins, în general, între următoarele limite la măsurătorile executate în anul 1958 : 3,7...8,5 ; 3,3...4,4 ; 3,6...6,4 ; 3,8...6 ; 3,5...6,7 şi 4..8 kg/cm², iar în anul 1959 s-au înregistrat următoarele variaţii : 3,4...5,2 ; 4...6,4 ; 3,4...4,4 ; 4,5...7 şi 3,5...6,4 kg/cm².

Din acest punct de vedere varianta a III-a este foarte asemănătoare cu varianta a II-a, ambele prezentînd domenii apropiate de variaţie,


VARIANTA III^a 1958
kg/cm²
REZISTENTA LA PENETRARE
9 mai
Fig. 23
3 iunie
Fig. 24
14 august
Fig 25
2 octombrie
Fig 26
29 octombrie
Fig 27
20 noiembrie
Fig 28
10
20
30
40
adîncimea, cm
50

F.g. 23–28

fiind în același timp deosebite de varianta I prin reducerea domeniului de variație.

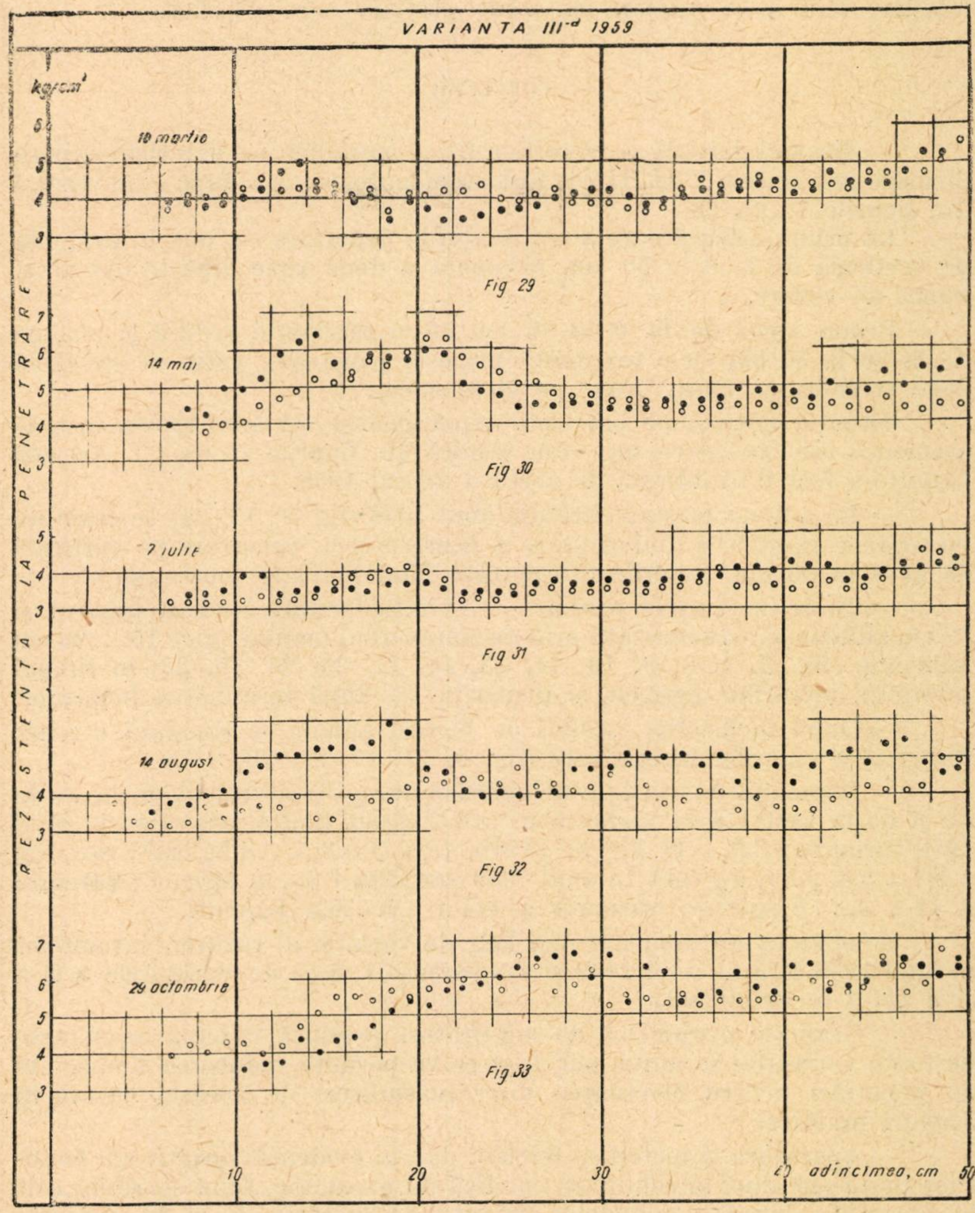


Fig. 29—33

Alura curbelor grupajelor de măsurători prezintă o bună asemănare pe toate variantele în ambii ani.

Această constatare conduce la concluzia că pentru măsurători penetrometrice executate în scopuri practice se va putea reduce numărul penetrărilor, fără a se micşora cu mult precizia măsurătorilor.

CONCLUZII

— Situaţia iniţială a factorilor fizico-mecanici pe parcelele experimentale (variantele I, II, III) a fost asemănătoare, aşa după cum rezultă din figurile 1, 12, 23.

La prima măsurătoare a rezistenţei la penetrare s-a pus în evidenţă pe verticală de la 0 la 50 cm, existenţa a două zone diferite din acest punct de vedere.

Prima zonă de la 0 la 30 cm cu o rezistenţă redusă şi a doua de la 30 la 50 cm cu o rezistenţă mare la penetrare. Între aceste două zone trecerea se făcea brusc pe circa 4 cm.

Situaţia iniţială pe parcelele experimentale în anul 1959 a fost de asemenea asemănătoare, aşa cum rezultă din figurile 7, 18, 29. Această situaţie a fost însă diferită de aceea a anului 1958.

— La a doua măsurătoare din anul 1958 (fig. 2, 13, 24) se constată pe toate variantele o uniformizare a rezistenţei la penetrare pe verticală de la 0 la 50 cm, valorile înregistrate fiind aproape constante.

— Toate variantele prezintă o variaţie anuală, ciclică, între 0 şi 30 cm adîncime, caracterizată prin formarea unui maxim între 15. . .20 cm adîncime (fig. 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 25, 26, 30, 32) în timpul sezonului lucrărilor agricole şi dispariţia sa după terminarea lucrărilor.

— După încheierea ciclului de lucrări anuale se constată o mare dispersie a valorilor înregistrate (fig. 6, 11, 17, 22, 28, 33).

— Domeniul de variaţie al valorilor înregistrate diferă de la an la an şi de la variantă la variantă în următoarele limite generale : în anul 1958 varianta I 3,0. . .11 kg/cm^2 ; varianta a II-a 3,5. . .8 kg/cm^2 ; varianta a III-a 3,3. . .8,5 kg/cm^2. În anul 1959 varianta I 4. . .9 kg/cm^2 ; varianta a II-a 4. . . 8 kg/cm^2 ; varianta a III-a 3,4. . .6,4 kg/cm^2.

Se observă un domeniu mai larg de variaţie al tuturor variantelor în anul 1958 faţă de anul 1959 şi a variantei I, faţă de variantele a II-a şi a III-a în ambii ani.

— Graficele grupajelor de măsurători prezintă o bună asemănare pe toate variantele în ambii ani, fapt ce va permite reducerea numărului de penetrări pentru efectuarea unor măsurători de această natură în scopuri practice.

— Aparatura şi metodica folosită pun în evidenţă variaţii ale factorilor fizico-mecanici ai solului în condiţii de producţie, fiind sensibilă atît la variaţiile datorite metodelor diferite de lucrări, cît şi la variaţiile anuale datorite factorilor climatici.

— Continuarea şi extinderea acestor studii va permite elaborarea unor metode practice de măsurare a rezistenţei solului la penetrare, avînd un volum redus de penetrări şi calcule, ceea ce va permite cunoaşterea şi conducerea practică a variaţiilor factorilor fizico-mecanici ai solului în vederea obţinerii unor producţii mărite.

Primită la redacţie la 16 mai 1960

ВОЗМОЖНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ ТИПОВ ГРУНТОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТОВ РАБОТ ПРИ ПОМОЩИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. I

РЕЗЮМЕ

Проведенные исследования имели целью сравнительное экспериментирование классических методов обработки грунта и некоторых новых методов работы для получения повышенного производства.

Нашему коллективу было поручено изучить физико-механические эффекты применения этих методов.

Для этой цели на площадке с одинаковыми начальными условиями были применены три варианта обработки грунта, эффекты которых были выявлены путем измерения сопротивления внедрению.

Опыты были проведены в период 1958—1959 годов и включают более 30.000 записей.

После обработки полученных данных обнаружилось, что в каждом экспериментальном варианте были зарегистрированы одни и те же значения для использованных отборных объемов.

— в каждом экспериментальном варианте физико-механические эффекты обработки грунта представляют характерную таблицу, сохраняющуюся в течение лет проведения экспериментов.

— на основании этих результатов представляется возможным проведение системы работ, в результате которой можно получить желаемый физико-механический эффект.

— полученные результаты подтверждают чувствительность аппаратуры и применяемой методики.

POSSIBILITÉS DE CLASSIFIER LES TYPES DE SOL ET DE DÉTERMINER LES EFFETS DES TRAVAUX AU MOYEN DE CERTAINES GRANDEURS PHYSICO-MÉCANIQUES. I

RÉSUMÉ

Les recherches ont été effectuées afin de permettre une comparaison expérimentale entre certaines méthodes classiques pour le travail du sol et certaines nouvelles méthodes de travail, en vue d'obtenir des productions plus élevées.

Les auteurs et leur groupe de travail ont étudié les effets physico-mécaniques de l'application de ces méthodes.

A cette fin, ils ont appliqué, sur un terrain possédant partout les mêmes conditions initiales, trois variantes de travail du sol, dont les effets ont été mis en évidence par la mesure de la résistance à la pénétration.

Les expériences, faites pendant les années 1958—1959, ont fourni un total de 30.000 enregistrements.

L'examen des données obtenues ont permis de constater que, dans chacune des variantes expérimentales, les valeurs enregistrées ont été les mêmes dans les volumes de sélection utilisés.

Dans chacune des variantes expérimentales, les effets physico-mécaniques des travaux du sol présentent un tableau caractéristique, qui se maintient durant les années d'expérience.

En vertu de ces résultats on peut élaborer un système de travaux permettant d'obtenir l'effet physico-mécanique voulu.

Les résultats obtenus confirment la sensibilité des appareils et de la méthodique employés.

BIBLIOGRAFIE

1. П. У. Бахтин, *Динамика физико-механических свойств почв в связи с вопросами их обработки.* Труды Почв. Инст. XIV, Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.
2. R. Bainer, R. A. Kepner, E. L. Barger, *Principles of farm machinery.* Edit. J. Wiley and Sons, New York, 1955.
3. А. Н. Зеленин, *Физические основы теории резания грунтов.* Издат. Акад. Наук СССР, Москва, 1950.
4. M. N. Letoşnev, *Maşini agricole.* Ed. Agrosilvică, Bucureşti, 1959.
5. C. Popovici, M. Tatarlă, I. Lungu, A. Canarache, *Cercetări în vederea modificării STAS a 1962-50 privitor la plugurile de tracţiune animală.* Referat, 1959.
6. A. Canarache, *Date preliminare asupra relaţiilor dintre compactitatea şi umiditatea solului.* Comunicare Inst. Agronomic „N. Bălcescu", Bucureşti, 1956.
7. — *Rezistenţa la arat şi umiditatea optimă pentru efectuarea arăturilor pe solul brun-roşcat de pădure de la Moara Domnească şi pe cernoziomul castaniu de la Mărculeşti. Probleme de Pedologie.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1958.
8. — *Contribuţii la studiul coeziunii solului.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, Comunicările Academiei R.P.R., *7* (1960).
9. I. Drăgan, *Folosirea hărţilor texturale ale solului pentru organizarea ştiinţifică a muncilor agricole.* Bucureşti, Rev. GOSTAT—SMT, *3* (1956).
10. C. Florescu, M. Vasilescu, *Penetrograf dinamic pentru sol cu acţionare manuală, tip IMA II.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
11. — *Cercetări asupra rezistenţei la penetrare a solului.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
12. — *Măsurarea prin metode indirecte a rezistenţei solului la lucrările agricole mecanizate.* Rev. Mecanizarea şi electrificarea agriculturii, **IV**, *4* (1959).
13. — *O metodă de măsurare a rezistenţei solului în vederea calculului organelor maşinilor agricole.* Rev. Metalurgia şi Construcţia de Maşini, *12* (1959).
14. M. Modiga, S. Căproiu, D. Ţircovnicu, C. Florescu şi colab., *Studii comparative pe mai multe tipuri de sol, în condiţii naturale, pentru determinarea rezistenţei la tăiere în plan vertical.* Comunicare Inst. Agron. „T. Vladimirescu" Craiova. Sesiunea ştiinţifică, febr. 1959.

STUDII

AEROMECANICĂ

ASUPRA SCURGERII GAZELOR PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

T. OROVEANU

1. STABILIREA ECUAŢIEI PROBLEMEI

Scurgerea gazelor prin medii poroase cu permeabilitatea variabilă a fost puţin studiată pînă în prezent, deşi prezintă un interes practic destul de mare, deoarece tratarea matematică este foarte dificilă, în special în cazul în care scurgerea este nestaţionară. Se ştie de altfel că în această ultimă situaţie, chiar pentru problema simplă a scurgerii printr-un mediu poros cu permeabilitate constantă, se ajunge la o ecuaţie neliniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea [3], [11]. În cele ce urmează, vom considera la început problema de care ne ocupăm sub aspectul ei cel mai general, referindu-ne deci la scurgerea nestaţionară a unui gaz printr-un mediu poros neomogen şi anizotrop.

Punctul de plecare îl constituie ecuaţia de continuitate [1])

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = -m\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{1}$$

în care m este porozitatea, ρ masa specifică a gazului, iar v_i reprezintă componentele vitezei de filtrare. Dacă admitem că scurgerea gazului se efectuează în condiţiile de valabilitate a legii lui Darcy, putem introduce forma generalizată a acesteia

$$v_i = \frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Funcţia φ are expresia

$$\varphi = -(p + U), \tag{3}$$

---

[1]) Pentru simplificare, am utilizat în această lucrare convenţia indicelui de sumare.

p fiind presiunea şi U potenţialul forţelor exterioare; k_{ij} sînt componentele tensorului permeabilitate, funcţie de coordonatele x_i, iar μ, viscozitatea dinamică a gazului.

În felul acesta, ecuaţia (1) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = - m \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{4}$$

Revenind la expresia lui φ, remarcăm faptul că forţele exterioare sînt reprezentate prin greutatea proprie a gazului, care poate fi neglijată în problemele pe care le studiem. În ceea ce priveşte posibilitatea de a se utiliza legea lui Darcy în cazul scurgerii gazelor prin medii poroase, există unele obiecţii [4], asupra cărora nu vom insista, deoarece vom admite că sînt realizate condiţiile necesare pentru ca această lege să poată fi aplicată.

Dacă ţinem seama de observaţia referitoare la funcţia φ, obţinem din (4) ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = m \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{5}$$

Mai departe, este necesar să introducem ecuaţia de stare a gazului; considerînd gazul perfect, această ecuaţie poate fi pusă sub forma [3]

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n. \tag{6}$$

Eliminînd masa specifică ρ din (5) cu ajutorul relaţiei precedente, găsim

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}\right) = (n+1)\, m \frac{\partial p^n}{\partial t}. \tag{7}$$

Este uşor de constatat că, dacă se neglijează variaţia viscozităţi gazului şi se presupune mediul poros omogen şi izotrop, se ajunge la ecuaţia cunoscută din literatura de specialitate.

În ceea ce priveşte viscozitatea gazului, aceasta variază atît cu presiunea cît şi cu temperatura. Constatările practice arată însă că în cazul zăcămintelor de gaze, procesul de scurgere poate fi considerat izotermic. Putem pune deci $n = 1$ şi ecuaţia (7) devine

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x_j}\right) = 2m \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{8}$$

O simplificare destul de importantă se obţine dacă variaţia în funcţie de presiune a viscozităţii gazului nu este prea accentuată. Într-adevăr, ecuaţia (7) se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}\right) - k_{ij} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \frac{\partial (\log \mu)}{\partial x_i} = (n+1)\, m\mu \frac{\partial p^n}{\partial t}, \tag{9}$$

iar dacă nici diferențele de presiune nu sînt prea mari, așa cum se întîmplă de altfel în cazurile reale, putem neglija termenii care conțin derivatele logaritmului natural al viscozității, ajungînd astfel la ecuația simplificată

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}\right)=(n+1)\,m\mu\,\frac{\partial p^n}{\partial t}, \tag{10}$$

precum și la aceea corespunzătoare pentru cazul evoluției izotermice ($n=1$).

Toate ecuațiile precedente au fost stabilite în ipoteza că gazul este perfect. În realitate, dacă ne menținem în cadrul scurgerii izotermice, ecuația de stare are forma

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{Z}\,\frac{p}{p_0}, \tag{11}$$

în care Z este factorul de abatere, variabil cu presiunea. Prin înlocuirea masei specifice ρ cu expresia precedentă în (5), se ajunge, după calcule simple, la ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\mu Z}\,k_{ij}\,\frac{\partial p^2}{\partial x_j}\right)=\frac{2m}{Z}\left[\frac{\partial p}{\partial t}-p\,\frac{\partial(\log Z)}{\partial t}\right]. \tag{12}$$

Dacă mediul poros este omogen și izotrop, regăsim ecuația dată în [3], [11].

Ecuațiile (7), (8) și (12) respectiv aceea simplificată (10) pe care le-am stabilit, nu sînt accesibile metodelor actuale de rezolvare.

În cele ce urmează, vom presupune deci că mediul poros este izotrop însă neomogen, permeabilitatea k fiind un scalar funcție de punct. În acest caz, ecuația (7) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}\right)=(n+1)\,m\,\frac{\partial p^n}{\partial t}, \tag{13}$$

respectiv, dacă introducem aproximația utilizată mai înainte

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}\right)=(n+1)\,m\mu\,\frac{\partial p^n}{\partial t}. \tag{14}$$

Particularizarea pentru cazul scurgerii izotermice se face imediat. Referindu-ne la aceasta, ecuația scurgerii unui gaz real (12) devine

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{\mu Z}\,\frac{\partial p^2}{\partial x_i}\right)=\frac{2m}{Z}\left[\frac{\partial p}{\partial t}-p\,\frac{\partial(\log Z)}{\partial t}\right]. \tag{15}$$

2. CONSIDERAȚII ASUPRA SCURGERII STAȚIONARE

Dacă scurgerea este staționară, rezultă în ecuații simplificări destul de importante care fac problema mai ușor accesibilă din punct de vedere matematic.

Astfel, atunci cînd fenomenul depinde de o singură variabilă spațială, se poate da soluția exactă a problemei. Pentru scurgerea liniară, ecuația are forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{\mu}\frac{dp^{n+1}}{dx}\right)=0, \tag{16}$$

iar pentru aceea plan-radială

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{k}{\mu}r\frac{dp^{n+1}}{dr}\right)=0, \tag{17}$$

bineînțeles în ipoteza că permeabilitatea este de asemenea funcție numai de variabila spațială respectivă. Considerînd cazul unui gaz real, în scurgere izotermică, obținem ecuații asemănătoare. Nu insistăm însă asupra acestor probleme, deoarece ele au fost rezolvate cu mai mult timp în urmă de către B. B. Lapuk [11]. Desigur că găsirea efectivă a soluțiilor depinde de forma funcțiilor $\mu(p)$, $k(x)$ respectiv $k(r)$, iar pentru gazele reale și de aceea a funcției $Z(p)$, dar eventualele dificultăți de calcul pot fi ușor ocolite de exemplu prin utilizarea metodelor de integrare grafică.

Cu totul altfel se prezintă situația atunci cînd scurgerea nu mai depinde de o singură variabilă spațială. În cazul general, avem ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,3) \tag{18}$$

și dacă facem schimbarea de funcție

$$\psi=\int_{p_0}^{p}\frac{p^n}{\mu}\,dp, \tag{19}$$

obținem, în loc de (18),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,3). \tag{20}$$

Pentru ca schimbarea de funcție (19) să fie posibilă, este suficient ca raportul $\frac{p^n}{\mu}$ să fie o funcție continuă de p în intervalul închis (p_0, p), condiție care este realizată. Tot la ecuația (20) se ajunge și pentru scurgerea izotermică a gazelor reale, cu ajutorul schimbării de funcție

$$\psi=\int_{p_0}^{p}\frac{p}{\mu Z}\,dp, \tag{21}$$

deoarece și raportul $\frac{p}{\mu Z}$ este o funcție continuă de p într-un interval închis (p_0, p).

Rezultatul obținut este destul de important, deoarece reduce problema la aceea a scurgerii staționare a unui fluid incompresibil printr-un mediu poros neomogen.

Astfel, dacă punem

$$\Psi = k^{\frac{1}{2}}\psi, \tag{22}$$

ajungem la ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i \partial x_i} \Psi = 0 \tag{23}$$

şi se observă că, atunci cînd funcţia $k^{\frac{1}{2}}$ este o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i \partial x_i} \pm g(x_i)\, k^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{24}$$

în care $g(x_i)$ este o funcţie de coordonatele spaţiale x_i, Ψ rezultă dintr-o ecuaţie de aceeaşi formă şi anume

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} \pm g(x_i)\, \Psi = 0. \tag{25}$$

Condiţiile la limită pentru funcţia Ψ pot fi găsite cu uşurinţă din (19) şi (22) dacă sînt cunoscute acelea pentru presiune precum şi dacă se dă funcţia $k^{\frac{1}{2}}$.

Cazul particular cel mai simplu se realizează atunci cînd funcţia $k^{\frac{1}{2}}$ este armonică, Ψ fiind prin urmare tot armonică. De asemenea, pot fi luate în considerare şi alte ecuaţii eliptice a căror rezolvare nu este legată de dificultăţi prea mari, cum ar fi, de exemplu, ecuaţia lui Helmholtz.

Mai interesantă pentru aplicaţii ni se pare posibilitatea de a se găsi soluţii aproximative ale ecuaţiei (23) pentru legi date de variaţie a permeabilităţii. Dacă observăm că această ecuaţie se mai poate scrie

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)\Psi = 0 \tag{26}$$

şi admitem că permeabilitatea variază între limite destul de apropiate, putem neglija derivatele acestei funcţii în (26), ajungînd astfel la ecuaţia aproximativă

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \tag{27}$$

Pentru aceste medii poroase cu neomogenitate redusă, aşa cum le-am numit într-o lucrare anterioară [9], problema se reduce deci, în cadrul aproximaţiei adoptate, la determinarea unei funcţii armonice. Obţinem în felul acesta o primă clasă de soluţii aproximative.

Mai departe, vom observa că ecuaţia (20) se poate pune sub forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial (\log k)}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \tag{28}$$

fapt care ne permite să ajungem la alte soluții aproximative, tot în ipoteza că funcția k are o variație lentă, marginea ei superioară și cea inferioară în domeniul considerat fiind destul de apropiate. De asemenea, vom mai admite că permeabilitatea nu atinge ambele ei valori extreme într-un domeniu suficient de mic din jurul fiecărui punct al mediului poros. Ținînd seama și de faptul că avem peste tot $k > 0$, aceste ipoteze sînt satisfăcute în și mai mare măsură de funcția log k. Sîntem conduși astfel la ideea de a considera derivatele acestei funcții ca avînd valori constante

$$\frac{\partial(\log k)}{\partial x_i} \approx n_i, \tag{29}$$

ajungînd așadar la ecuația

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_i} + n_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0. \tag{30}$$

Dacă domeniul în care se produce scurgerea este situat în întregime la distanță finită, putem lua pentru constantele n_i valorile medii ale derivatelor $\frac{\partial(\log k)}{\partial x_i}$, așa cum am făcut într-o altă lucrare [10].

Mai departe, cu ajutorul schimbării de funcție

$$\Phi = \psi e^{\frac{1}{2}n_i x_i}, \tag{31}$$

obținem ecuația

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \alpha^2\Phi = 0, \tag{32}$$

în care

$$\alpha^2 = \frac{1}{4} n_i n_i . \tag{33}$$

Ecuația (32) poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor, condițiile la limită găsindu-se din (19) sau (21) și (31) dacă sînt date acelea pentru presiune și, bineînțeles, legea de variație a permeabilității. Nu insistăm asupra amănuntelor, deoarece problemele corespunzătoare pentru fluidele incompresibile au fost tratate de noi în lucrarea citată. O dată găsită funcția ψ, relațiile (19) sau (21) ne permit să determinăm variația presiunii și toate celelalte mărimi care prezintă interes în studiul problemei.

2.1. *Soluții exacte obținute prin separarea variabilelor*. În anumite cazuri, dacă legea de variație a permeabilității o permite, pot fi găsite soluții exacte aplicîndu-se metoda binecunoscută a separării variabilelor. Pentru simplificare, vom considera numai mișcarea plană, ecuația (20) scriindu-se deci

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{34}$$

Dacă admitem că funcția k este de forma

$$k = k_1(x_1)\, k_2(x_2), \tag{35}$$

rezultă după calcule simple

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dx_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{dx_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0. \tag{36}$$

Punînd mai departe

$$\psi = X_1(x_1)\, X_2(x_2), \tag{37}$$

obținem cu ușurință ecuațiile

$$\frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dx_1}\frac{dX_1}{dx_1} + \lambda_n^2 X_1 = 0 \tag{38}$$

și

$$\frac{d^2 X_2}{dx_2^2} + \frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{dx_2}\frac{dX_2}{dx_2} - \lambda_n^2 X_2 = 0, \tag{39}$$

λ_n^2 fiind constanta de separare.

Rezolvarea efectivă a ecuațiilor (38) și (39) depinde de forma funcțiilor

$$\frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dx_1} = \frac{d(\log k_1)}{dx_1}, \quad \frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{dx_2} = \frac{d(\log k_2)}{dx_2}. \tag{40}$$

Cazul cel mai simplu se prezintă atunci cînd funcțiile (40) se reduc la constante și prin urmare ecuațiile (38) și (39) sînt cu coeficienți constanți. Observăm însă că în această situație avem

$$k_1 = c_1 e^{n_1 x_1}, \quad k_2 = c_2 e^{n_2 x_2}, \tag{41}$$

c_1, c_2, n_1, n_2 fiind constante. Rezultă deci

$$k = k_0 e^{n_1 x_1 + n_2 x_2}, \tag{42}$$

cu $k_0 = c_1 c_2$. Ecuația (34) este deci de forma (30) și pentru găsirea soluțiilor este mai indicat să se utilizeze metoda care conduce la ecuația (32), rezolvabilă la rîndul ei prin separarea variabilelor.

În general, putem admite că funcțiile (40) sînt analitice în toate punctele domeniului în care se produce scurgerea. Cu această ipoteză, soluțiile generale ale ecuațiilor (38) și (39) sînt și ele analitice. Rezolvarea se face, după cum se știe, căutînd pentru fiecare ecuație două soluții liniar independente, sub formă de serii Taylor. În prealabil, este necesar să se dezvolte în serie funcțiile (40); toate dezvoltările se efectuează în jurul unui punct convenabil ales, de exemplu originea axelor de coordonate, pe care o putem situa totdeauna în interiorul domeniului considerat. Pentru fiecare ecuație, soluția generală este o combinație liniară a celor două soluții independente găsite.

Prin metoda separării variabilelor pot fi obținute soluții și pentru ecuația (23) care, în cazul scurgerii plane devine

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2} \right) \Psi = 0. \tag{43}$$

Dacă avem

$$\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2} + [\beta^2 + f_1(x_1) + f_2(x_2)]\, k^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{44}$$

unde β^2 este o constantă, rezultă

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + [\beta^2 + f(x_1) + f_2(x_2)]\, \Psi = 0, \tag{45}$$

amîndouă aceste ecuații putînd fi rezolvate prin metoda menționată. Astfel, dacă punem

$$\Psi = \xi_1 (x_1)\, \xi_2 (x_2), \tag{46}$$

găsim, după cîteva calcule

$$\frac{d^2 \xi_1}{dx_1^2} + [\lambda_n^2 + f_1 (x_1)]\, \xi_1 = 0 \tag{47}$$

și

$$\frac{d^2 \xi_2}{dx_2^2} + [\beta^2 - \lambda_n^2 + f_2 (x_2)]\, \xi_2 = 0, \tag{48}$$

λ_n^2 fiind, ca și mai înainte, constanta de separare.

Ca și pentru ecuațiile (38) și (39) găsirea efectivă a soluțiilor depinde de forma funcțiilor care apar în coeficienți, în cazul de față $f_1 (x_1)$ și $f_2 (x_2)$. S-ar putea lua în considerare anumite expresii simple pentru $f_1 (x_1)$ și $f_2 (x_2)$, care să ușureze rezolvarea ecuațiilor (47) și (48), dar scopul principal al lucrării de față este de a examina numai posibilitățile de rezolvare a problemelor. În dezvoltarea ulterioară a acestui studiu, vor fi avute în vedere și anumite cazuri particulare de interes practic. Semnalăm însă de pe acum faptul că, lăsînd la o parte unele legi simple de variație a permeabilității, pentru care ecuațiile diferențiale se rezolvă destul de ușor, metoda separării variabilelor conduce în general la calcule complicate. Importanța practică este de asemenea destul de limitată, deoarece posibilitatea de a reprezenta legea de variație a permeabilității sub forma unui produs sau a unei sume de funcții de o singură variabilă nu se întîlnește decît rar în cazurile practice.

3. STUDIUL SCURGERII NESTAŢIONARE

Vom mai examina, în cadrul acestei lucrări, problema scurgerii nestaţionare a unui gaz printr-un mediu poros neomogen, tot sub aspectele ei generale. Pe lîngă dificultăţile semnalate cu ocazia cercetării scurgerii staţionare, mai apar aci şi altele, datorite în primul rînd faptului că ecuaţia diferenţială a problemei este neliniară.

Mărginindu-ne la cazul unui gaz perfect, vom observa că, de obicei, liniarizarea ecuaţiei diferenţiale pentru mediile poroase omogene se face fără a se ţine seama de variaţia viscozităţii cu presiunea. Menţionăm astfel liniarizarea propusă de L. S. Leibenzon [6] sau aceea utilizată de B. B. Lapuk [11]. În cele ce urmează, vom recurge la un procedeu analog cu acela introdus de I. A. Ciarnîi [2] şi folosit ulterior de A. Houpeurt [4] care constă în înlocuirea ecuaţiei de stare a gazului cu aceea a unui lichid compresibil, într-un anumit interval de variaţie a presiunii.

Dacă admitem pentru simplificare, că scurgerea este izotermică ($n = 1$), fapt care corespunde destul de bine cu realitatea, putem scrie ecuaţia (13) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{\mu} p \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = m \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{49}$$

Cu schimbarea de funcţie [1])

$$\varpi = \int_0^p \frac{dp}{\mu}, \tag{50}$$

obţinem din (49)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(kp \frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\right) = m\mu \frac{\partial \varpi}{\partial t}. \tag{51}$$

Pentru viscozitatea μ care apare în membrul al doilea al acestei ecuaţii, vom considera o variaţie liniară cu presiunea, de forma

$$\mu = ap + b, \tag{52}$$

care aproximează destul de bine variaţia reală. Avem deci

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(kp \frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\right) = m\,(ap + b) \frac{\partial \varpi}{\partial t}, \tag{53}$$

iar în loc de (50) putem scrie

$$\varpi = \left(\frac{1}{\mu}\right)_m p, \tag{54}$$

---

[1]) În această schimbare de funcţie şi în toate calculele ce urmează, presiunea atmosferică se consideră egală cu zero, aproximaţia care se introduce astfel fiind fără însemnătate, deoarece fenomenul de scurgere se petrece la presiuni mari.

$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ fiind valoarea medie a funcției $\frac{1}{\mu}$ în intervalul $(0, p)$. Evident $\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ este de asemenea o funcție de presiune și pentru a putea liniariza ecuația de care ne ocupăm, trebuie să recurgem la o aproximație. Vom considera astfel intervalul $(0, p_{\max})$, $p_{\max}$ fiind presiunea maximă din mediul poros și vom lua valoarea medie a funcției $\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ în acest interval. Ecuația (53) devine astfel

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\varpi\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}\right) = m\left[a\varpi + b\left(\frac{1}{\mu}\right)_m\right]\frac{\partial\varpi}{\partial t}. \tag{55}$$

Mai departe, introducem funcția

$$f = \beta e^{\alpha\varpi} \tag{56}$$

α și β urmînd a fi determinați astfel încît să avem

$$f \approx \varpi. \tag{57}$$

Scriind ecuația (55) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(kf\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}\right) = m\left[af\frac{\partial\varpi}{\partial t} + b\left(\frac{1}{\mu}\right)_m\frac{\partial f}{\partial t}\right], \tag{58}$$

rezultă după calcule simple

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = m\left[a + \alpha b\left(\frac{1}{\mu}\right)_m\right]\frac{\partial f}{\partial t} \tag{59}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \varkappa m\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{60}$$

unde am introdus notația

$$\varkappa = a + \alpha b\left(\frac{1}{\mu}\right)_m. \tag{61}$$

Pentru justificarea aproximațiilor, am considerat un exemplu numeric, luînd ca punct de plecare variația viscozității metanului cu presiunea, la temperatura $t = 75°$C. Valorile viscozității pentru diferite presiuni, luate din [7] precum și acelea ale raportului $\frac{1}{\mu}$ sînt date în tabela 1.

Tabela 1

$p_{\mathrm{kg/cm^2}}$	0	26,2	46,6	67	101,1	135,1	203,1	271,2	339,2
$10^4\,\mu$ cP	125	133	139	145	159	175	207	236	261
$\frac{1}{\mu}$	80	75,19	71,94	68,97	62,89	57,14	48,31	42,37	38,31

Dacă aproximăm variaţia viscozităţii cu presiunea prin relaţia

$$10^4\mu = 0{,}4\,p + 125,$$

se constată cu uşurinţă că eroarea maximă este de ordinul 5% faţă de valorile exacte; cu cît presiunea este mai mare, cu atît eroarea devine mai mică. Astfel, pentru $p = 135{,}1$ kg/cm² eroarea este de 2,31% şi se micşorează şi mai mult dacă se consideră presiuni mai mari.

Funcţia ϖ se calculează prin integrare grafică; în tabela 2 sînt date valorile astfel determinate.

Tabela 2

$p_{\text{kg/cm}^2}$	0	20	40	60	80	100	120	140	160
ϖ	0	1 565	3 060	4 493	5 866	7 168	8 398	9 566	10 674
$p_{\text{kg/cm}^2}$	180	200	220	240	260	280	300	320	340
ϖ	11 725	12 724	13 673	14 584	15 465	16 314	17 139	17 934	18 704

Folosind curba experimentală de variaţie a viscozităţii cu presiunea, se poate construi curba de variaţie a funcţiei $\frac{1}{\mu}$ respectiv $\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$. Valorile acestei ultime funcţii sînt indicate în tabela 3.

Tabela 3

$p_{\text{kg/cm}^2}$	0	20	40	60	80	100	120	140	160
$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$	80	78,15	76,90	75,10	73,50	71,75	69,90	68,24	66,64
$p_{\text{kg/cm}^2}$	180	200	220	240	260	280	300	320	340
$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$	65,07	63,58	62,13	60,79	59,49	58,28	57,14	56,05	55,02

Cu aceste valori, obţinem pentru intervalul de presiuni considerat

$$\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)_m\right]_{\text{mediu}} = 66{,}44$$

şi compararea cu tabela 3 ne arată că, pentru o gamă destul de largă de presiuni, eroarea rezultată în ecuaţie prin introducerea valorii constante de mai sus este mică. În orice caz, chiar dacă ne referim la întregul interval posibil de variaţie a presiunii, eroarea este mai mică decît aceea care se face admiţîndu-se de la început viscozitatea constantă.

În ceea ce privește funcția f, constantele α și β se calculează cu ajutorul formulelor [1]

$$\alpha = \frac{\log \dfrac{\varpi_2}{\varpi_1}}{\varpi_2 - \varpi_1}, \qquad \beta = \frac{\alpha(\varpi_2^2 - \varpi_1^2)}{2(e^{\alpha\varpi_2} - e^{\alpha\varpi_1})}, \tag{62}$$

ϖ_1 și ϖ_2 fiind valorile funcției ϖ corespunzătoare presiunilor p_1 și p_2 care reprezintă marginea inferioară, respectiv cea superioară a unui anumit interval de presiuni. Este evident că dacă p_1 și p_2 sînt apropiate ca valoare, intervalul respectiv fiind deci mic, aproximația este foarte bună. Dar chiar dacă se alege un interval mai mare de presiune, rezultă aproximații destul de acceptabile. Cu titlul de exemplu, dăm în tabela 4 valorile funcției ϖ și cele corespunzătoare ale funcției f, intervalul de aproximare fiind cuprins între $p_1 = 100$ kg/cm² și $p_2 = 300$ kg/cm²,

Tabela 4

p kg/cm²	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
ϖ	7 168	8 398	9 566	10 674	11 725	12 724	13 673	14 584	15 465	16 314	17 139
f	7 619,4	8 484,4	9 359,9	10 351,6	11 346,5	12 382,5	13 455,2	14 586,6	15 733,3	16 946,8	18 214,6

Se constată că eroarea maximă este de 6,28% față de valoarea exactă, la marginea superioară a intervalului de presiuni considerat.

Dacă intervalul de aproximare este mai restrîns, eroarea se micșorează mult. Tot pentru exemplificare, dăm în tabela 5 rezultatele obținute pentru o variație a presiunii, între $p_1 = 200$ kg/cm² și $p_2 = 300$ kg/cm².

Tabela 5

p kg/cm²	200	220	240	260	280	300
ϖ	12 724	13 673	14 584	15 465	16 314	17 139
f	12 816,7	13 663,3	14 530,8	15 420,7	16 331,3	17 266,2

În acest caz, eroarea maximă este de 0,74% față de valoarea exactă, tot la marginea superioară a intervalului de presiune. Aproximația introdusă este deci bine justificată, iar dacă se consideră intervale mai restrînse de variație a presiunii, precizia rezultatelor practic nu este afectată.

La concluzii asemănătoare se ajunge atunci cînd se pleacă de la curbele de variație ale viscozității gazului cu presiunea, pentru alte temperaturi.

Prin urmare, studiul problemei de care ne ocupăm se poate întreprinde luînd ca punct de plecare ecuația liniarizată (60).

Mai apare însă o altă dificultate și anume faptul că, în afară de permeabilitatea k, porozitatea m poate fi variabilă de la un punct la altul.

Pînă în prezent, problema stabilirii unei relații între porozitate și permeabilitate nu a fost soluționată satisfăcător. Pentru a ne apropia de realitate, pare deci că este necesar să considerăm permeabilitatea și porozitatea ca două funcții de punct independente.

În literatura de specialitate, există indicații asupra unor relații între permeabilitate și porozitate, valabile cu anumite restricții. În tratarea problemei care face obiectul acestui studiu, existența unei astfel de relații nu prezintă un interes deosebit și vom lăsa prin urmare la o parte, de la început, acest aspect care este destul de discutabil.

3.1. *Cazul scurgerii liniare.* În situația cea mai simplă, fenomenul de scurgere depinde de o singură variabilă spațială x și dacă permeabilitatea este de asemenea funcție numai de x, ecuația (60) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \varkappa m\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{63}$$

Soluțiile de forma

$$f = f_1(x) + f_2(t) \tag{64}$$

pot fi găsite cu ușurință. Acest caz a fost considerat de A. Houpeurt [5] pentru problema scurgerii liniare a unui lichid compresibil printr-un mediu poros neomogen, care conduce la o ecuație de aceeași formă cu (63). Considerăm deci că nu mai este necesar să intrăm în amănunte.

Vom examina însă mai de aproape posibilitatea de a se găsi soluții sub formă de produs. În acest scop vom presupune că pentru presiune avem condiția inițială

$$t = 0, \quad p = p_i, \tag{65}$$

p_i fiind o constantă și condițiile la limită

$$x = 0 \quad , \quad p = p_s \quad ; \quad x = l \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{66}$$

presiunea p_s avînd de asemenea o valoare constantă.

Dacă ținem seama de relațiile (50) și (56), este ușor de constatat că funcția f trebuie să satisfacă aceleași condiții ca și presiunea. Din motive care vor apare evidente mai departe, introducem funcția

$$F(x, t) = f(x, t) - f_s \tag{67}$$

unde f_s este valoarea constantă a lui $f(x, t)$ pentru $x = 0$. Condiția inițială pentru funcția F este

$$t = 0 \quad , \quad F = F_i = f_i - f_s, \tag{68}$$

iar condițiile la limită

$$x = 0 \quad , \quad F = 0 \quad ; \quad x = l \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{69}$$

Ecuația (63) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial F}{\partial x}\right) = \varkappa m \frac{\partial F}{\partial t} \tag{70}$$

și pentru soluțiile sub formă de produs

$$F_n = F_{1n}(x) F_{2n}(t) \tag{71}$$

separarea variabilelor conduce la ecuațiile

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dF_{1n}}{dx}\right) + \lambda_n^2 \, m \, F_{1n} = 0 \tag{72}$$

și

$$\frac{dF_{2n}}{dt} + \frac{\lambda_n^2}{\varkappa} F_{2n} = 0 . \tag{73}$$

Soluția ecuației (73) se găsește cu ușurință și are forma

$$F_{2n} = C_{2n} \, e^{-\frac{\lambda_n^2}{\varkappa} t}, \tag{74}$$

în timp ce pentru ecuația (72) avem de rezolvat o problemă Sturm-Liouville. Într-adevăr, funcția F_{1n} satisface condițiile

$$x = 0 \quad , \quad F_{1n} = 0 \quad ; \quad x = l, \quad \frac{dF_{1n}}{dx} = 0. \tag{75}$$

Cu ajutorul schimbării de funcție și de variabilă [8]

$$y_n = (km)^{\frac{1}{4}} F_{1n} \quad , \quad \xi = \frac{1}{I}\int_0^x \sqrt{\frac{m}{k}}\, dx \quad , \quad I = \frac{1}{\pi}\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\, dx, \tag{76}$$

aducem ecuația (72) la forma normală a lui Liouville

$$\frac{d^2 y_n}{d\xi^2} + [\nu_n^2 - g(\xi)]\, y_n = 0, \tag{77}$$

în care

$$\nu_n^2 = I_n^2 \lambda_n^2 \quad , \quad g(\xi) = (km)^{-\frac{1}{4}} \frac{d^2 (km)^{\frac{1}{4}}}{d\xi^2} \, . \tag{78}$$

După cum se știe, pentru ca schimbarea (76) să fie posibilă, este necesar ca funcția $\frac{d\,(\log k)}{dx}$ să aibă derivata de ordinul întîi continuă, iar funcția $\frac{m}{k}$ derivata de ordinul al doilea continuă, condiții pe care le presupunem îndeplinite.

Este ușor de observat că domeniul de variație al noii variabile ξ este $(0, \pi)$.

Scriind ecuația (77) sub forma

$$\frac{d^2 y_n}{d\xi^2} + \nu_n^2 y_n = g(\xi)\, y_n \tag{79}$$

și considerînd-o ca pe o ecuație neomogenă, soluția se poate pune sub forma

$$y_n(\xi) = A_{1n} \sin(\nu_n \xi) + B_{1n} \cos(\nu_n \xi) + \\ + \frac{1}{\nu_n} \int_0^{\xi} \sin[\nu_n(\xi - \tau)]\, g(\tau)\, y_n(\tau)\, d\tau. \tag{80}$$

În felul acesta, am obținut o ecuație integrală de tip Volterra neomogenă de specia a doua. Ceea ce ni se pare interesant de remarcat, în primul rînd, în legătură cu această ecuație, este faptul că, dacă permeabilitatea și porozitatea variază între limite destul de apropiate și variația acestor mărimi este suficient de lentă, funcția $g(\xi)$ definită prin (78) poate fi neglijată, ajungîndu-se astfel la soluția aproximativă

$$y_n(\xi) \approx A_{1n} \sin(\nu_n \xi) + B_{1n} \cos(\nu_n \xi). \tag{81}$$

Din prima relație (76) și din prima condiție la limită (75) rezultă

$$F_{1n} \approx A_{1n} (km)^{-\frac{1}{4}} \sin(\nu_n \xi) \tag{82}$$

pentru determinarea valorilor proprii ν_n urmînd să utilizăm a doua condiție (75). Avem astfel

$$\frac{dF_{1n}}{dx} = \frac{dF_{1n}}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} \approx \frac{A_{1n}}{I}\left[\nu_n (km)^{-\frac{1}{4}} \cos(\nu_n \xi) + \frac{d\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{d\xi} \sin(\nu_n \xi)\right] \sqrt{\frac{m}{k}}\, ; \tag{83}$$

și dacă facem uz din nou de ipoteza de mai sus referitoare la variația permeabilității și a porozității, putem neglija derivata $\frac{d\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{d\xi}$ obținînd

$$\frac{dF_{1n}}{dx} \approx \frac{A_{1n}}{I}\left[\nu_n (km)^{-\frac{1}{4}} \cos(\nu_n \xi)\right] \sqrt{\frac{m}{k}}\, . \tag{84}$$

Pentru ca această derivată să se anuleze atunci cînd $x = l$, respectiv $\xi = \pi$ este necesar ca

$$\nu_n = \frac{2n+1}{2} \quad (n = 0,\ 1, 2, 3, \ldots). \tag{85}$$

Prin urmare

$$F_{1n} = A_{1n}\,(km)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) \tag{86}$$

şi

$$F(\xi, t) = (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2\varkappa}t}, \tag{87}$$

iar pentru determinarea constantelor D_n recurgem la condiţia iniţială (68). În acest scop scriem

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \delta_{nq} \sin q\xi \tag{88}$$

coeficienţii δ_{nq} ai seriei Fourier avînd expresia

$$\delta_{nq} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) \sin q\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} - q\right)\pi}{2(n-q)+1} - \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} + q\right)\pi}{2(n+q)+1.}\right]. \tag{89}$$

Pe de altă parte, pentru $t = 0$, formula (87) ne dă, în combinaţie cu (88)

$$F_i\,(km)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) = \sum_{q=n}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_n\, \delta_{nq}\right) \sin q\xi. \tag{90}$$

Deoarece F_i este o constantă, dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $(km)^{\frac{1}{4}}$ ne permite să calculăm, prin identificare, coeficienţii D_n. Fără a intra în amănunte, menţionăm numai că se obţine un sistem infinit de ecuaţii algebrice liniare, cu necunoscutele D_n. O dată acestea determinate, găsim cu uşurinţă

$$\varpi = \frac{1}{\alpha}\log\left[\frac{1}{\beta}(km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\xi\right) e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2\varkappa}t} + e^{\alpha\varpi_s}\right] \tag{91}$$

şi apoi presiunea p, cu ajutorul curbei $\varpi\,(p)$ construită pe baza relaţiei (50).

Soluția aproximativă devine exactă atunci cînd produsul km este o constantă, situație care se poate obține prin admiterea unor legi particulare de variație a mărimilor k și m.

Se observă, de asemenea, că aproximația introdusă devine din ce în ce mai bună, cu cît n crește.

În cazul în care este necesară o precizie mai mare, se poate recurge la rezolvarea ecuației integrale (80) printr-o metodă cunoscută [12].

3.2. *Cazul scurgerii plan-radiale.* Dacă fenomenul de mișcare este plan-radial, ecuația (60) devine

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \varkappa m \frac{\partial f}{\partial t}\cdot \tag{92}$$

Presupunînd condiția inițială

$$t = 0 \quad , \quad f = f_i \tag{93}$$

și condițiile la limită

$$r = r_s \quad , \quad f = f_s \quad ; \quad r = r_c, \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \tag{94}$$

putem introduce și aci funcția

$$F(r, t) = f(r, t) - f_s \tag{95}$$

pentru care condițiile inițiale și la limită rezultă imediat. Căutarea soluțiilor sub formă de produs de funcții de o singură variabilă ne conduce la ecuațiile

$$\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dF_{1n}}{dr}\right) + \lambda_n^2 mr F_{1n} = 0 \tag{96}$$

și

$$\frac{dF_{2n}}{dt} + \frac{\lambda_n^2}{\varkappa} F_{2n} = 0. \tag{97}$$

A doua dintre aceste ecuații este de aceeași formă cu (73); în ceea ce privește prima ecuație, schimbarea de funcție și de variabilă

$$y_n = (kmr^2)^{\frac{1}{4}} F_{1n} \quad , \quad \xi = \frac{1}{I}\int_{r_s}^{r}\sqrt{\frac{m}{k}}\,dr \quad , \quad I = \frac{1}{\pi}\int_{r_s}^{r_c}\sqrt{\frac{m}{k}}\,dr, \tag{98}$$

ne conduce tot la ecuația (77). Considerațiile precedente asupra rezolvării problemei pot fi extinse deci și în acest caz.

4. CONCLUZII

În studiul pe care l-am întreprins, am căutat să punem în evidență posibilitățile de rezolvare a problemei scurgerii gazelor prin medii poroase cu permeabilitatea variabilă. Atît pentru cazul mișcării staționare, cît şi pentru acela mai complex al mişcării nestaţionare, am indicat în special metode de rezolvare aproximativă, care pot fi aplicate atunci cînd atît variaţia permeabilităţii cît şi aceea a porozităţii îndeplinesc anumite condiţii despre care am vorbit mai înainte. Am schiţat de asemenea şi procedee pentru rezolvarea exactă a anumitor probleme, care conduc însă la calcule destul de complicate. Am căutat să ţinem seama şi de proprietăţile reale ale gazelor şi îndeosebi de variaţia viscozităţii, care este destul de importantă. Nu am luat în considerare abaterea de la legea gazelor perfecte dar, după cum se ştie [3], influenţa acesteia este mai mică decît aceea a variaţiei viscozităţii.

Primită la redacţie la 9 mai 1960

О ТЕЧЕНИИ ГАЗОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

РЕЗЮМЕ

В работе устанавливается прежде всего дифференциальное уравнение течения газа в неоднородной анизотропной пористой среде при предположении произвольного термодинамического развития процесса, причем учитывается то, что вязкость газа является переменной величиной. В случае изотермического развития находится также уравнение для газов, неподчиняющихся закону идеальных газов. Результаты применяются, в частности, для случая пористой изотропной, но неоднородной среды. Затем рассматривается случай стационарного течения и настаивается на возможности нахождения некоторых приближенных решений. Переходя далее к изучению нестационарного изотермического течения, автор выполняет линеаризацию уравнения при помощи известного способа и рассматривает случай одномерного течения. Показывается, что при определенных граничных условиях приходим к задаче Штурма-Лиувилля, причем дается приближенное решение последней, а также указания о способе точного решения. Показывается, что плоско-радиальное течение можно рассматривать аналогичным образом.

SUR L'ÉCOULEMENT DES GAZ À TRAVERS DES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

En considérant l'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux non homogène et anisotrope, on établit l'équation différentielle du problème dans l'hypothèse d'une évolution thermodynamique quelconque et en tenant compte du fait que la viscosité du gaz est variable.

Dans le cas de l'évolution isothermique, on trouve de la même façon l'équation dans le cas des gaz n'obéissant pas à la loi des gaz parfaits. On donne ensuite les formes particulières que prennent ces équations lorsque le milieu poreux est isotrope et non homogène. On étudie d'abord l'écoulement permanent, en insistant sur les possibilités d'obtenir une solution approximative. En passant ensuite à l'étude de l'écoulement non permanent isothermique, on applique l'un des procédés connus pour obtenir une équation linéaire et l'on étudie le cas de l'écoulement unidimensionnel. On montre que, pour certaines conditions aux limites, on aboutit à un problème de Sturm-Liouville dont on donne la solution approximative de même que des indications sur les possibilités de trouver la solution exacte. On montre enfin que l'écoulement plan-radial peut être traité de la même manière.

BIBLIOGRAFIE

1. АРАВИН В. И., НУМЕРОВ С. Н., *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.* ГИТТЛ, Москва, 1953, 393—397.
2. ЧАРНЫЙ И. А., *О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности.* Известия Академии Наук СССР, ОТН, 6, 829—838 (1951).
3. CRISTEA N., *Hidraulica subterană.* I. Ed. Tehnică, București, 1956, 77—80 și 284—285.
4. HOUPEURT A., *Sur l'écoulement des gaz dans les milieux poreux.* Institut Français du Pétrole, Projet de recherche n° 32—04, Publication restreinte n° 3176, Mars 4—13, 15—26 (1959).
5. — *Possibilités de résolution analytique des problèmes d'écoulements liquides dans les milieux poreux à caractéristiques variables.* Revue de l'Institut Français du Pétrole et annales des combustibles liquides, *4/5*, 549—559 (1959).
6. ЛЕЙБЕНЗОН Л. С., *Нефтепромысловая механика.* Часть II, Горгеонефтеиздат, 1934.
7. *** *Manualul inginerului petrolist 44*, Ed. tehnică, București, 1955, 275.
8. MORSE PH., FESHBACH H., *Methods of Theoretical Physics.* I. Mac Graw-Hill, New-York, 1953, 739—743.
9. OROVEANU T., *Einige Betrachtungen über die Strömung inkompressibler Flüssigkeiten durch nichthomogene poröse Medien.* Revue de mécanique appliquée, **III**, *4*, 463—479 (1958).
10. — *Näherungsmethode zur Untersuchung des Zuflusses nach Bohrungen in porösen nicht homogenen Medien.* Revue de mécanique appliquée, **IV**, *2*, 279—300 (1959).
11. SCELKACEV N. V., LAPUK B. B., *Hidraulica subterană.* Ed. tehnică, București, 1953, 198—201, 450—451, 458.
12. SCHMEIDLER W., *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1955, 243—254.

STUDII

AEROMECANICĂ

UTILIZAREA PROFILELOR TIP DE VITEZE PENTRU DETERMINAREA CALITATIVĂ A UNOR CARACTERISTICI ALE SCURGERII TURBULENTE ANIZOTROPE

DE

ŞT. N. SĂVULESCU

1. În consideraţiile ce vor fi expuse în această lucrare, prin turbulenţă anizotropă se va înţelege totdeauna mişcarea turbulentă suprapusă unui profil de viteze medii, cu alte cuvinte prezenţa unei distribuţii a mărimilor medii şi a celor fluctuante cu gradient transversal important faţă de direcţia generală a scurgerii. Astfel de mişcări se întîlnesc în scurgerile din stratul limită turbulent, din conducte precum şi în jeturile de turbulenţă liberă. La seara locală, mişcarea nu are izotropie şi global este neomogenă.

Importanţa studiului turbulenţei anizotrope este fundamentală atît din punct de vedere teoretic, cît şi aplicativ. În ciuda unor tentative teoretice foarte frumoase (a se vedea trimiterile din lucrarea [1]), lipseşte încă un model fizic simplu care să conducă la o tratare matematică accesibilă posibilităţilor de calcul actuale. De aceea există în prezent un număr imens de rezultate experimentale care înfăţişează diverse aspecte şi care trebuie interpretate pentru a urmări unele trăsături comune ce pot furniza căi noi de dezvoltare şi studiu.

În lucrarea de faţă s-a încercat o astfel de sistematizare a unor rezultate experimentale, în ceea ce priveşte legătura dintre distribuţia vitezelor medii şi distribuţia vitezelor de pulsaţie (valori medii patratice), considerîndu-se că prezintă interes în stadiul actual al problemei unele observaţii generale de structură pentru astfel de distribuţii. De asemenea se expune o tentativă de interpretare fizică a mecanismului turbulent realizat prin interdependenţa dintre valori medii cu distribuţie dată (sau impusă de condiţii la limită) şi perturbaţii statistic organizate.

2. Vom considera ca direcţie a scurgerii axa Ox şi transversal axa normală Oy. Domeniul ce ne interesează, admis spre simplificare plan,

este mărginit de axa Ox şi o frontieră exterioară $\delta\,(t, x)$. O mărime $f\,(x, y, t)$ va avea valoarea la perete $f_w\,(t, x)$ valoarea la frontieră $f_e\,(t, x)$ (pe $\delta\,(t, x)$), şi valoarea adimensională $f_a = \frac{f - f_w}{f_e - f_w}\cdot$ Vom nota $\eta_a = \eta_0 = \frac{y}{\delta}\cdot$ Considerăm transformarea de măsură transversală realizată prin expresia

$$\eta = \frac{\int_0^y f_a\,dy}{\int_0^\delta f_a\,dy}, \tag{1}$$

pe care am utilizat-o, în cazul $f = \rho u$, în lucrările anterioare, ca [2]. Să observăm că valorile f_e şi f_w sînt date, sau independente de natura intimă a scurgerii, ele fiind impuse drept condiţii exterioare ce trebuie satisfăcute oricare ar fi mecanismul intern al mişcării. Aceasta face ca întregul domeniu, pe axa transversală Oy să se comporte continuu în timpul mişcării, adică să existe, la scara locală a mărimilor fluctuante dominante, o puternică interdependenţă între diversele părţi (sau straturi ale domeniului). Deci vom admite că nu există *regiuni* independente, cu mişcări şi structură proprie, ci întreg ansamblul se realizează prin acţiunea reciprocă de schimb energetic dintre aceste părţi, definite prin dimensiunea lor esenţială Δy. Această dimensiune, considerată ca o măsură a unităţii dinamice cu structură individualizată de mişcare turbulentă, poate avea toate valorile de la cea maximă — adică ordinul de mărime δ — pînă la cea minimă Δ_m — adică ordinul de mărime al vîrtejurilor mici ce transmit energia de agitaţie turbulentă direct prin disipaţie în căldură.

Pentru $x = \text{const.}$, mărimea $f\,(y, t)$ va avea un ansamblu de valori instantanee pentru fiecare partiţie Δy considerată. Mărimea medie $\bar{f}$ este furnizată de procesul de mediere propriu aparatului de măsurat, un parametru important fiind evident partiţia Δy corespunzătoare aparatului. Dacă vom considera o mediere în timp pentru o mişcare cvasi-staţionară realizată pentru anumite partiţii Δy, vom obţine curba de repartiţie a mărimii adimensionale medii $f_a\,(\eta_0)$. În cazul în care fluctuaţiile sînt mici faţă de $\bar{f}$ curba de repartiţie de mai sus reprezintă sursa de energie pe care se suprapune mişcarea fluctuantă. Curba de repartiţie $\bar{f}_a\,(\eta_0)$ variază evident între $\bar{f}_{a_w} = 0$ $(\eta_0 = 0)$ şi $\bar{f}_{a_e} = 1$ $(\eta_0 = 1)$, şi dacă $\frac{f_e - f_w}{\delta}$ este mare, atunci, în general, valoarea $f\,(y_1)$ corespunzătoare unui strat oarecare va diferi puternic de valoarea $f\,(y_2)$ a stratului vecin, vom avea deci importanţi gradienţi transversali ai acestei mărimi. Aceşti gradienţi influenţează direct producerea de turbulenţă care se consumă în disipaţie, convecţie şi difuzie a energiilor de fluctuaţie corespunzătoare, toate aceste mărimi variind cu y şi creînd anizotropia turbulenţei. Dacă am avea $f_e = f_w$, o dată cu dispariţia gradienţilor, turbulenţa ar deveni izotropică, fără frecare, energia cinetică de agitaţie trecînd direct în disipaţie în mod uniform în toate straturile Δy. Mecanismul prin care energia cinetică se transferă de la unităţi mari de turbulenţă, treptat, la unităţile cele mai mici, în cazul turbulenţei izotropice şi omogene, conduce la determinarea acestor unităţi în mod independent de poziţia lor în spaţiu.

3. Vom presupune în consideraţiile de faţă că, în cazul turbulenţei anizotrope, unităţile individualizate de turbulenţă depind de poziţia lor în spaţiu, respectiv de distanţa y, precum şi de cantitatea de energie medie corespunzătoare poziţiilor. În acest mod mecanismul agitaţiei turbulente se complică, adică forma de transfer a energiei cinetice mai cuprinde şi interacţiunea dintre aceste unităţi în plus faţă de turbulenţa izotropică. În mod schematic, deci, putem spune că energia de agitaţie se transformă în căldură prin ierarhia unităţilor ca şi în turbulenţa izotropică, dar că în cursul acestui proces unităţile diferite ca poziţie schimbă între ele cantităţi de energie care le modifică neîncetat ordinul de mărime respectiv şi deci, automat, modul de interacţiune, astfel că procesul continuă indefinit într-un număr extrem de mare de realizări.

Se pune imediat întrebarea : există o medie sau o limită de probabilitate a numeroaselor moduri de interacţiune, adică de producere de turbulenţă ca urmare a diferenţei dintre unităţile individualizate de turbulenţă? Din punct de vedere fizic, după cum admitem o limită a procesului de transfer al energiei turbulente în cazul izotropic, tot astfel pare plauzibil să credem că există o distribuţie ideală a unităţilor turbulente ce poartă cea mai mare parte a energiei cinetice, astfel că transferul de energie dintre ele sau producere de turbulenţă, să fie minimă. Cum construim o astfel de distribuţie limită pentru producere minimă de turbulenţă? O primă idee, ca o aproximaţie grosolană, este aceea de a alătura distribuţiei $\overline{f}_a(\eta_0)$ o distribuţie f_a^* care să repartizeze egal energiile în spaţiul cu gradienţi puternici ai acestei energii, adică să realizeze corespondenţa.

$$\text{distrib. } f_a^* \to \text{distrib. } \eta_0. \tag{2}$$

Este clar că vom realiza pe $f_a^*(\eta)$ cu ajutorul transformării (1), astfel că distribuţia $f_a^*(\eta)$ reprezintă pentru $f_a(\eta_0)$ repartiţia egală a energiilor $f_a(\eta_0)$ pe spaţiul transversal $0 < \eta_0 \leqslant 1$. Această repartiţie reprezintă media pe care o realizează interacţiunile dintre unităţile turbulente ce-şi transmit energie cinetică sub forma producerii de turbulenţă, datorită diferenţelor de cantitate de energie şi poziţia în spaţiu a acestor unităţi.

Aşadar, transversal pe scurgerea generală, pot exista în fluidul în mişcare turbulentă două medii ale energiei ; una obişnuită, rezultat direct al cantităţii de energie prezentă în scurgerea respectivă şi cealaltă datorită interacţiunilor dintre unităţile turbulente. În cazurile practice aparatul de măsură obişnuit, tub Pitot, al mărimilor medii, nu sesizează diferenţa, întrucît energia turbulentă de agitaţie e mică, cîteva procente din cantitatea de energie totală. În schimb, anemometrul cu fir cald nu sesizează nici una din medii, ci tocmai diferenţa lor, care este deci dată de relaţia

$$f_a' = K \cdot |\overline{f}_a - f_a^*|, \qquad f_a' = \text{valoare medie patratică.} \tag{3}$$

În acest mod vom obţine distribuţia energiei de fluctuaţie turbulentă transversal pe curent, funcţie de η_0. Constanta K depinde de un număr mare de parametri, între care principalii sînt numărul Reynolds, turbulenţa curentului exterior, o măsură a distribuţiei mărimei $\overline{f_a}$ care poate fi $\int_0^1 \overline{f_a} d\eta_0$ şi numărul $\mathcal{R}_e$ al aparatului. În lucrarea de faţă, care sistematizează şi explică unele rezultate experimentale, nu se va da nici o determinare teoretică pentru K, dar se va indica valoarea lui în exemplele arătate. Ca ordin de mărime, el va reprezenta ordinul de mărime al fluctuaţiei energiei turbulente faţă de mişcarea medie, adică în jurul cîtorva procente.

Trebuie să remarcăm că putem construi media interacţiunilor unităţilor turbulente, luînd în general

$$\eta_s = \frac{\int_0^y f_a^s dy}{\int_0^\delta f_a^s dy}, \tag{4}$$

unde s real şi $\int_0^\delta f_a^s\, dy$ are sens. Aceste medii pot prezenta toate un interes teoretic, însă din punct de vedere energetic se impun valorile $s = \pm 1$. Aceste două valori arată că cele două distribuţii medii prezente într-o mişcare turbulentă anizotropă, date de un aparat cu înregistrare mare faţă de scara turbulenţei, adică distribuţia medie a cantităţii de energie şi distribuţia medie a procesului de interacţiune a unităţilor turbulente sînt legate prin relaţia (1).

Dacă natura procesului turbulent al mişcării considerate este astfel încît media dată de aparat să reprezinte chiar pe $\overline{f}_a^*$, atunci repartiţia energiei de agitaţie turbulentă f'_a va fi dată de

$$f'_a = K_1 \cdot | \overline{f}_a^{**} - \overline{f}_a |, \tag{5}$$

unde $f^{**}(\eta)$ este repartiţia lui f_a dată de

$$\eta = \frac{\int_0^{\eta_0} \frac{1}{f_a} d\eta_0}{\int_0^1 \frac{1}{f_a} d\eta_0}, \tag{6}$$

adică $s = -1$. Dacă media reprezintă, prin natura procesului de interacţiune, chiar pe $\overline{f}_a$, atunci avem formula (3) şi deci $s = 1$. Care ar putea fi o indicaţie a naturii procesului turbulent în privinţa mediei existente în datele aparatului de valori medii? Să remarcăm că există două situaţii ideale în care orice repartiţie dată de (4) este identică cu ea însăşi, adică producerea de turbulenţă e nulă. Este vorba de cazul $f_a \equiv 1$, turbulenţă izotropică, şi de cazul $f_a \equiv 0$, adică fluidul în repaus absolut — pentru ambele situaţii punîndu-se $f'_a = 0$.

Calitativ vorbind, posibilităţile scurgerii la scară obişnuită sau condiţiile la limită impuse curentului general determină în mare parte tendinţa către una sau cealaltă din aceste distribuţii ideale, în care producerea de turbulenţă atinge minimul absolut, adică este nulă. Astfel, pentru turbulenţa la perete, cu condiţii la limită riguros cerute pe de o parte de aderenţa la perete şi pe de altă parte de viteza curentului general la o oarecare distanţă, de la care turbulenţa este cu bună aproximaţie izotropică, absența peretelui ar determina un curent general cu $f_a \equiv 1$, astfel că se poate admite că media interacțiunilor turbulente se realizează prin tinderea către $s = 1$.

În turbulența liberă, situația este complet schimbată. Fie că se consideră un jet, o dîră sau scurgerea peste un prag, avem în permanență prezența celor două medii ale interacțiunilor, adică $s = \pm 1$. Într-adevăr, jetul central are situația ideală $\bar{f}_a \equiv 1$, iar mediul înconjurător $\bar{f}_a \equiv 0$; dîra are $\bar{f}_a \equiv 0$ pentru golul teoretic creat în urma obstacolului și $\bar{f}_a \equiv 1$ pentru prezența scurgerii generale în care se află obstacolul, iar scurgerea peste un prag este perfect asemănătoare dîrei din acest punct de vedere. Prezența ambelor distribuții ideale face ca media interacțiunilor să fie rezultatul tendinței către ambele distribuții, cu o probabilitate variind după raportul pe care-l au cele două distribuții medii ideale în crearea repartiției medii de energie. Astfel, pentru un jet, imediat după ieșire predomină $\bar{f}_a \equiv 1$ în jetul central și turbulența apare la marginea jetului, unde porțiunea de distribuție $\bar{f}_a = 1$ și $\bar{f}_a = 0$ (mediul înconjurător) sînt aproximativ egale, astfel că media interațiunilor va tinde către $s = 1$ în porțiunea centrală și spre $s = -1$ în spre margine. La o distanță oarecare de ieșire, acolo unde jetul s-a lărgit astfel că jetul central inițial ($\bar{f}_a = 1$) ar reprezenta o porțiune mică din repartiția energiei medii, media interacțiunilor tinde în mod clar către $s = -1$, repartiția cerută de distribuția medie ideală $\bar{f}_a = 0$, prezentă aproape pe toată lărgimea jetului. Aceste considerații de interpretare rezultă limpede din examinarea figurilor 5 (*a*, *b*, *c*). În orice caz, turbulența liberă se deosebește fundamental din punctul nostru de vedere de turbulența la perete, iar intermitența fenomenului precum și faptul că *eddy viscosity* ε, în sensul lui Bousinesq este aproape constantă, atestă mai mult această interpretare.

Într-un sens mai general, se poate admite că mărimea s ia un șir de valori distincte $\pm s_1, \pm s_2, \pm s_3, \ldots \pm s_i$, cărora le corespund transformările

$$\eta_{s_i} = \frac{\int_0^y f_a^{s_i}\, dy}{\int_0^\delta f_a^{s_i}\, dy}. \tag{7}$$

Acestei tranformări îi corespunde o distribuție $f^{\star}_{a_{s_i}}$, astfel că fluctuația respectivă este

$$f'_{a_{s_i}} = K_{s_i} \,|\, \bar{f}_a - \bar{f}^{\star}_{a_{s_i}} \,|, \tag{8}$$

care reprezintă fluctuația datorită unei anumite frecvențe în spectrul de turbulență. În acest mod avem

$$f'_a = \int |\, \bar{f}_a - \bar{f}^{\star}_{a_{s_i}} \,| \cdot K_{s_i}, \tag{9}$$

unde integrala are sensul lui Lebesgue, K_{s_i} reprezentînd probabilitatea contribuției diferenței $|f_a - f^{\star}_{a_{s_i}}|$, adică o măsură a contribuției mediei interacţiunilor turbulente $f^{*}_{as_i}$ corespunzătoare acelei frecvenţe din spectru. În consideraţiile precedente ne-am oprit însă la două valori limitative $s = \pm 1$ care erau legate fizic mai direct de distribuţia mărimilor medii şi care dau profilele tip, cu ajutorul cărora putem examina, ca într-o similitudine de structură, cîteva aspecte ale mişcării turbulente cu frecare.

4. Vom arăta acum cîteva exemple rezultate din prelucrarea datelor experimentale.

A. TURBULENŢĂ LA PERETE

În figura 1 sînt arătate distribuţiile de energie medie şi energie de fluctuaţie turbulentă în stratul limită din apropierea desprinderii [3]; în condiţiile cele mai apropiate de interpretarea dată în această lucrare. Se observă pe de-o parte concordanţa perfectă între curba dedusă pe consideraţii teoretice şi rezultatele experimentale, iar pe de altă parte constanta K, care în fond reprezintă o măsură a probabilităţii distribuţiei E^{*}_{a} ca limită a interacţiunilor unităţilor turbulente, urmăreşte chiar direct diferenţa $| E_a - E^{*}_{a} |$. În acest sens sînt de comparat diagramele a şi c unde diferenţa între cele două distribuţii este de cîteva ori mai mare, în timp ce constanta K a crescut doar cu cca 25%. Spre marginea stratului limită, acolo unde teoretic fluctuaţia turbulentă se anulează, deosebirile există,

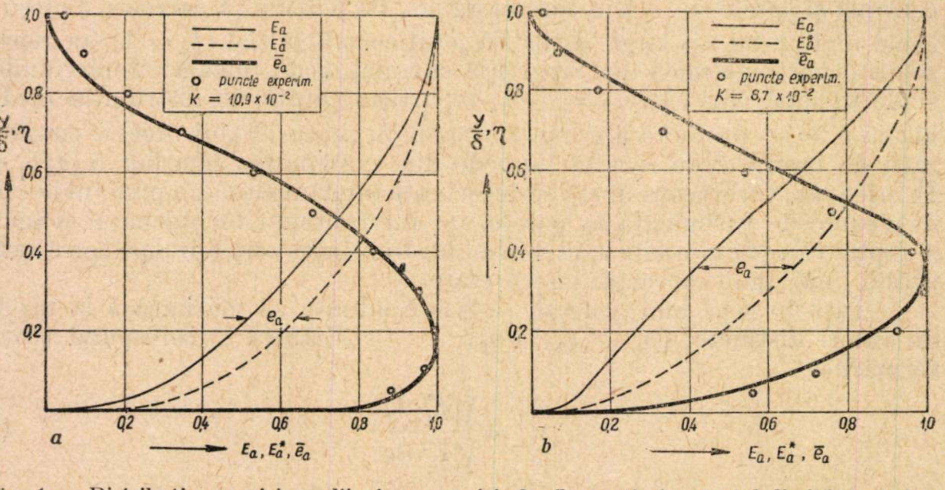
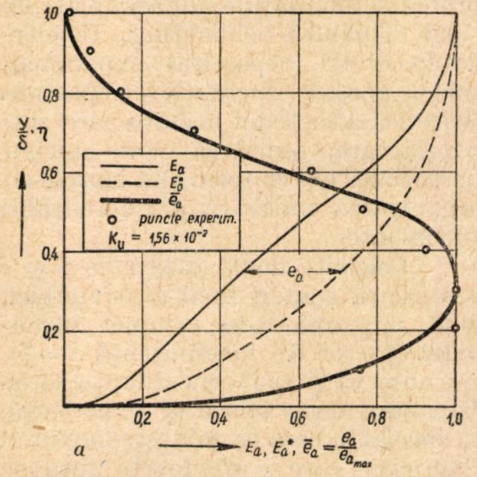


Fig. 1. — Distribuţia energiei medii şi a energiei de fluctuaţie în stratul limită turbulent de pe un profil în diverse puncte ale corzii c [3]. Diagrama (a) corespunde punctului $\frac{x}{c} = 0{,}75$; grosimea stratului limită $\delta = 85$ mm; viteza curentului exterior $u_e = 46$ m/sec. Diagrama (b) $\frac{x}{c} = 0{,}85$, $\delta = 133$ mm, $u_e = 37$ m/s. Diagrama (c) $\frac{x}{c} = 0{,}9$, $\delta = 178$ mm, $u_e = 35$ m/s.

însă în cazul de mai sus gradul de turbulență al curentului exterior a fost destul de mic (1%), astfel că distribuțiile din interiorul stratului limită urmăresc suficient de bine organizarea statistică pe care am presupus-o în considerațiile de mai înainte.

De asemenea, în experiențele personale pe care le-am efectuat, privind distribuția energiei medii și a energiei de fluctuație $\overline{u'^2}$ în stratul limită de pe un profil de aripă, se observă concordanța satisfăcătoare între alura curbei teoretice și datele experimentale în figura 2. Este posibil ca expresia completă a energiei de agitație turbulentă $2q^2 = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ să ducă la un acord și mai bun cu rezultatul teoretic. În orice caz, pentru acest tip de turbulență din stratul limită, alura distribuției energiei de fluctuație turbulentă urmează destul de fidel interpretarea teoretică propusă și acest lucru se poate ușor remarca din gama destul de mare a distribuțiilor energiei medii din diagramele 2 *a*, *b*, *c*.



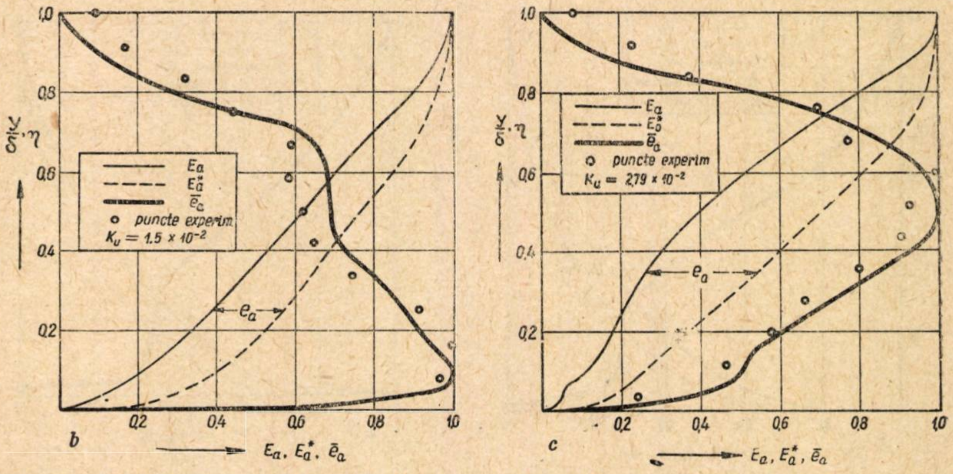


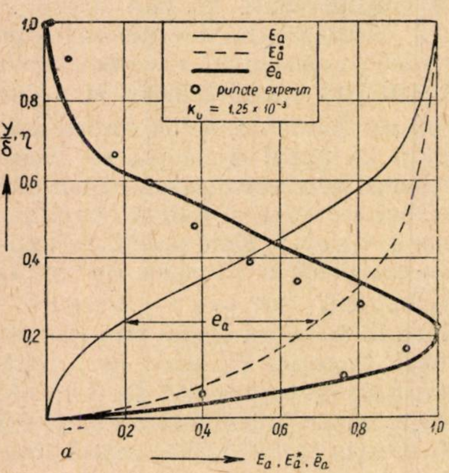
Fig. 2. — Distribuția energiei medii și a energiei turbulente a fluctuației u' în stratul limită de pe un profil de aripă. Viteza curentului exterior $u_e = 13$ m/s, grosimea stratului

$$\delta \simeq 18 \text{ mm } (a); \quad \delta \simeq 21 \text{ mm } (b); \quad \delta \simeq 45 \text{ mm } (c), \quad E_a = \frac{p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - p_w}{p_e + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)_e - p_w},$$

iar punctele experimentale reprezintă $\dfrac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$

În figura 3 sînt arătate exemple din cazul tranziţiei de la stratul limită laminar la cel turbulent pe o placă plană [4]. Prima diagramă *a* reprezintă începutul tranziţiei (factorul de intermitenţă $\gamma = 0$), cînd probabil fluctuaţiile sînt apropiate de tipul Tollmien-Schlichting. Concordanţa dintre repartiţia experimentală a acestor fluctuaţii şi repartiţia teoretică a metodei noastre pare surprinzătoare, ştiind că teoria micilor perturbaţii are cu totul altă bază decît organizarea statistică a fluctuaţiilor turbulente.

Celelalte două diagrame *b* şi *c* reprezintă stadiul final al tranziţiei, cînd mişcarea este complet turbulentă (factor de intermitenţă $\gamma=1$). Se observă şi aici concordanţa satisfăcătoare între teorie şi experienţă, în special în ceea ce priveşte maximul fluctuaţiei care se află foarte aproape de perete $\frac{y}{\delta} = 0{,}01$, repartiţia acestei energii de fluctuaţie prezentînd un vîrf caracteristic lîngă perete, în marcantă opoziţie cu alura diagramelor din figura 1 *a*, *b*, *c*, unde maximul se situează spre $\frac{y}{\delta} = 0{,}2 \div 0{,}4$.



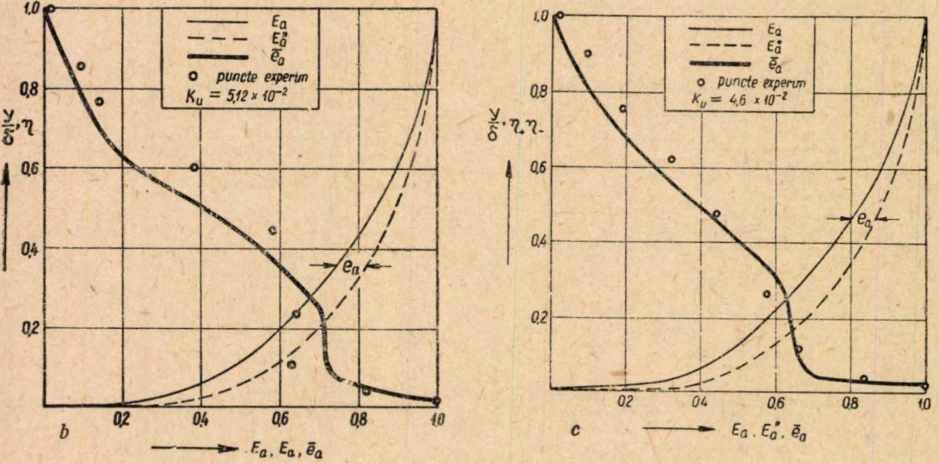
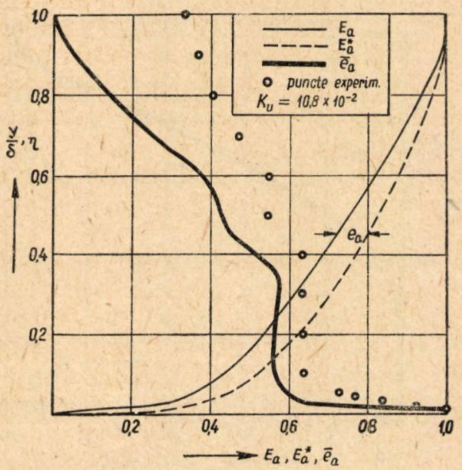


Fig. 3. — Distribuţia energiei medii şi energiei turbulente a fluctuaţiei în stratul limită de pe o placă plană în cazul tranziţiei. Diagrama (*a*) corespunde începutului tranziţiei (factor de intermitenţă $\gamma = 0$), iar diagramele (*b*) ($\gamma = 0{,}97$) şi (*c*) ($\gamma = 1$) aparţin perioadei finale [4].

În acelaşi sens sînt reprezentate în diagramele figurii 4 repartiţiile energiei medii şi ale energiei de fluctuaţie turbulentă dintr-un canal fără gradient de presiune longitudinal [5] şi cu un uşor gradient [6]. Vîrful caracteristic din apropierea peretelui se menţine, ca şi alura generală a repartiţiei, însă deosebirile apar marcante spre centrul canalului. Explicaţia în interpretarea acestei lucrări este următoarea : stratul limită are o frontieră liberă şi cele două medii, care sînt formal transformate de scară reciproce, se realizează prin variaţia distanţei frontierei faţă de perete, în timp ce la distanţa din semiînălţimea unui canal distanţa dintre frontieră este aproximativ fixă, aşa că variaţiile de distribuţie de energie se realizează printr-o variaţie importantă a vitezei din centrul canalului, unde gradul de turbulenţă e destul de ridicat. În acest mod, acest tip de turbulenţă se îndepărtează de modelul teoretic propus aici, însă fundamental rămîne acelaşi, interacţiunea dintre unităţile turbulente dînd ca limită aprox. transformata distribuţiei energiei medii.



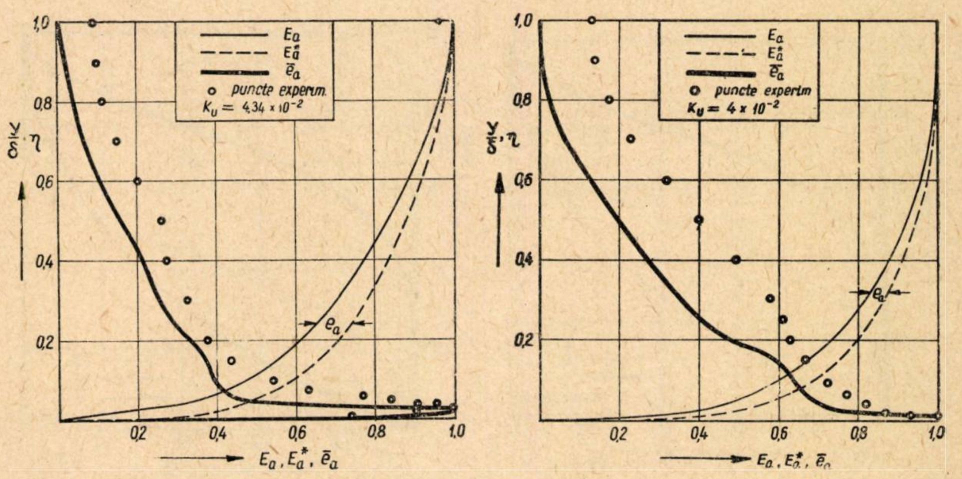


Fig. 4. — Distribuţia energiei medii şi a energiei de fluctuaţie a componentei u' în canale. Diagrama (*a*) corespunde numărului Reynolds $\mathcal{R}e = 3,14 \times 10^4$ şi a unei evazări a pereţilor canalului $\alpha = 1°$ [6] diagrama (*b*) are $\mathcal{R}e = 1,23 \times 10^4$, $\alpha = 0°$, iar diagrama (*c*) are $\mathcal{R}e = 6,16 \times 10^4$, $\alpha = 0°$ [5].

B. TURBULENŢA LIBERĂ

În sfîrşit, diagramele din figura 5 arată distribuţia în cazul turbulenţei libere. Aşa cum s-a arătat anterior, caracterul deosebit al acestor distribuţii din punct de vedere al obţinerii unei limite în probabilitate a interacţiunilor turbulente este dat de tendinţa către cele două situaţii ideale, absenţa oricărui curent şi prezenţa unui curent uniform. În diagrama *a*

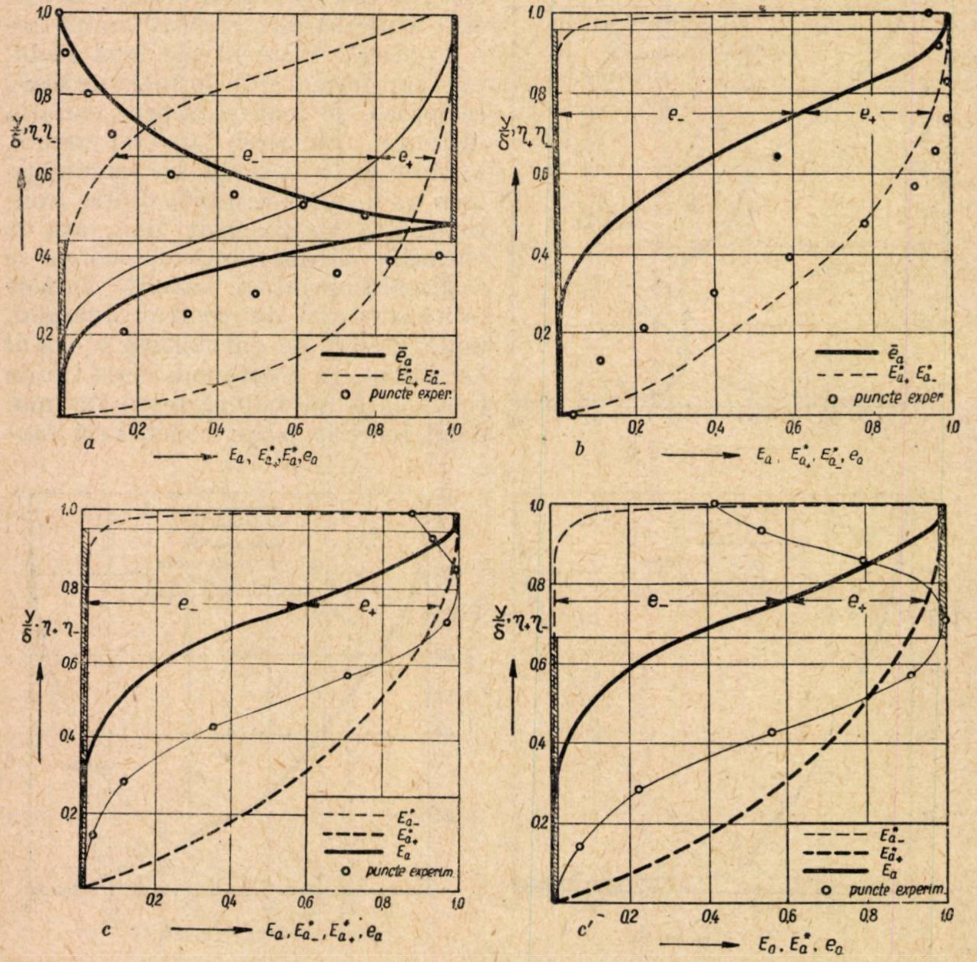


Fig. 5. — Distribuţia energiei medii E_a şi a energiei de fluctuaţie turbulente a componentei u' în cazul turbulenţei libere. Diagrama (*a*) reprezintă cazul scurgerii turbulente puţin după trecerea unui prag [7], diagrama (*b*) cazul dîrei din spatele unui cilindru circular [1] iar diagramele (*c*, *c'*) cazul unui jet plan în două situaţii : foarte aproape de ieşire (diagrama *c*) şi departe în aval (diagrama *c'*) [8] .

este reprezentată scurgerea în avalul unui prag [7], imediat după trecerea pragului. S-a admis că organizarea statistică a fluctuaţiilor este simetrică faţă de planul orizontal determinat de înălţimea pragului : deasupra ar fi curentul perfect uniform, iar dedesubt absenţa oricărui curent. Numărul Reynolds al scurgerii determină un amestec turbulent în care avem o distribuţie de energie medie şi o distribuţie de energie de fluctuaţie, ambele racordînd cele două medii ideale existente : prezenţa curentului uniform şi absenţa oricărui curent. Transformatele energiei medii care să se apropie de aceste medii sînt construite simetric faţă de planul nivelului pragului prin expresia (1), y avînd originea o dată sub acest plan şi a doua oară deasupra, acolo unde sînt frontierele de interacţiune, adică turbulenţa devine izotropică. Diferenţa $| f_a - f_a^* |$ este afectată de o probabilitate care poate fi luată într-o primă aproximaţie, egală cu unitatea pentru porţiunea în care f_e^*se apropie de media ideală respectivă şi nulă, în cealaltă porţiune de distribuţia unde predomină cealaltă medie ideală. Se observă că prin această interpretare concordanţa dintre rezultatele experimentale şi cele teoretice e statisfăcătoare — deşi acest tip de turbulenţă e deosebit destul de mult prin caracterul intermitent al mişcării de modelul teoretic propus.

În diagramele b şi c sînt reprezentate respectiv scurgerile turbulente dintr-o dîră [1] şi un jet plan [8]. Esenţial avem prezenţa celor două medii ideale în proporţii diferite pe toată întinderea distribuţiei. Departe de obstacol, distribuţia mişcării turbulente se întinde transversal pe o distanţă în care urma ideală a obstacolului—adică absenţa oricărei mişcări — ocupă o mică porţiune faţă de porţiunea mare unde predomină media ideală a prezenţei curentului uniform. La jet, la mari distanţe, lucrurile sînt analoge, jetul central care reprezintă curentul uniform de lărgime egală — ideal — cu orificiul de ieşire, fiind mic faţă de restul distribuţiei, unde intervine amestecul turbulent cu atmosfera liniştită. Mai aproape de ieşire proporţia celor două medii este cam de acelaşi ordin de mărime — ceea ce se observă limpede din diagrama (C'). Transformatele repartiţiei energiei medii sînt realizate cu ajutorul formulei (4) în care $s = \pm 1$, întrucît transformata cu $s = -1$ se apropie mult de media ideală predominantă. Pentru a avea o idee asupra repartiţiei energiei de agitaţie turbulentă ar trebui să scriem

$$e \simeq P_+ e_+ + P_- \cdot e_- , \tag{10}$$

unde

$$e_+ = | E_a - E^*_{a+} | , \; e_- = | E_a - E^*_{a-} |$$

semnele + şi — corespunzînd transformării (4) pentru $s = +1$, respectiv $s = -1$. Cantităţile P_+ şi P_- reprezintă probabilităţile ca aceste diferenţe să dea o măsură a fluctuaţiilor de energie. În stadiul actual al interpretării calitative din această lucrare nu sînt făcute nici un fel de consideraţii asupra determinării acestei probabilităţi, iar admiterea unei variaţii empirice ar însemna întoarcerea spre teorii semi-empirice de turbulenţă. Se poate spune cu certitudine doar că predominanta unei medii ideale ca cea dată de transformarea (4) pentru $s = -1$ indică o repartiţie a energiei de fluctuaţie în care în formula (10) joacă rolul principal (însă trebuie corectată totuşi cu termenul ($P_+ \cdot e_+$)— după cum se observă în diagramele b şi c. În diagrama (C') cei doi termeni ai formulei (10) intră într-o altă proporţie astfel că deosebirea de repartiţie a energiei fluctuante e marcantă faţă de diagramele b şi c — lucru care se remarcă uşor prin situarea maximului fluctuaţiei. În orice caz, după cum am mai spus, intermitenţa fenomenului scoate acest tip de turbulenţă din cadrul consideraţiilor teoretice limitative ale modelului de turbulenţă cu grad de intermitenţă $= 1$ şi cu frontieră cu grad de turbulenţă nulă— de care se apropie turbulenţa stratului limită.

În diagramele de mai înainte s-a folosit o reprezentare particulară, pentru a marca alura curbei. S-a indicat prin $\overline{l}_a$ expresia

$$\bar{e}_a = \frac{E_a - E_a^*}{|E_a - E_a^*|_{\max}} \tag{11}$$

unde

$$E_n\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{p + \frac{\rho}{2}u^2 - p_w}{p_e + \frac{\rho}{2}u_e^2 - p_w} \simeq \frac{u^2}{u_e^2}, \text{ iar } E_a^*$$

este transformată cu ajutorul relaţiei (1). Punctele experimentale reprezintă $\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$ sau $\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{|\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}|_{\max}}$ (fig. 1). Aceste maxime, atît experimentale cît şi grafice, sînt susceptibile de erori. Dar exemplele arătate vor să sublinieze doar faptul că alura calitativă a curbelor este în afară de erorile experimentale, deoarece între diagramele 3 *b* şi 1 *c* diferenţa este extrem de mare. Maximul uneia se studiază la $\frac{y}{\delta} = 0{,}02$ iar al celeilalte la $\frac{y}{\delta} = 0{,}4$ adică în raport de ordinul 20, ceea ce e în afara oricăror erori experimentale. De asemenea, acolo unde datele experimentale n-au fost complete s-au utilizat doar raportul $\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$ în loc de $\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{|\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}|_{\max}}$, pentru că teoretic $\overline{v'^2}$ şi $\overline{w'^2}$ urmează, ca ordin de mărime, alura curbei $\overline{u'^2}$ şi în general, practic, sînt mai mici, aşa că raportul $\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$ serveşte drept o indicaţie sigură pentru comportarea repartiţiei de energie fluctuantă.

5. Se poate face un studiu exact şi simplu al variaţiei acestor curbe de repartiţie a mărimilor fluctuante legate de repartiţia mărimilor medii, utilizînd distribuţiile particulare — profilele tip

$$f_a = \eta_0^n. \tag{12}$$

Cu transformarea (1) obţinem $\eta_s = \eta_0^{1+ns}$ şi deci

$$f_a^* = \eta_s^{\frac{n}{1+ns}} \to \eta_0^{\frac{n}{1+ns}}. \tag{13}$$

De aci rezultă fluctuaţia

$$f'_a = K \cdot | \eta_0^n - \eta_0^{\frac{n}{1+ns}} | \tag{14}$$

care are maximul în punctul

$$\eta_{0_M} = (1 + sn)^{-\frac{1+sn}{sn^2}} = \left\{(1 + sn)^{-\frac{1+sn}{sn}}\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

şi valoarea maximului

$$f'_{a_M} = Ksn\ (1 + sn)^{-\frac{1+ns}{sn}} = Ksn\ \eta_{0_M}^n. \tag{16}$$

Găsim deci

$$\frac{f'_a}{f'_{a_M}} = \frac{1}{sn} \cdot \left(\frac{\eta_0}{\eta_{0_M}}\right)^n \cdot \left| 1 - \eta_0^{-\frac{sn^2}{1+sn}} \right|, \tag{17}$$

expresia valabilă pentru $sn > -1$ şi depinzînd de parametrii n, s. Bineînţeles că aceste expresii nu modelează perfect toate cazurile întîlnite în practică, însă ele indică de exemplu variaţia sensibilă a poziţiei maximului: pentru $n = \frac{1}{3{,}5}$, $s = 1$ avem $\eta_{0_M} = 0{,}0186$ în timp ce pentru $n = 1$, $s = 1$ obţinem $\eta_{0_M} = 0{,}25$ sau pentru $n = 2$, $s = 1$ găsim $\eta_{0_M} = 0{,}439$.

CONCLUZII

Aşa cum am arătat la început scopul lucrării de faţă a constat în încercarea de interpretare statistică a unor serii de observaţii asupra rezultatelor experimentale privind distribuţia energiei medii şi a energiei de fluctuaţie turbulentă în scurgerile turbulente cu frecare. Din exemplele expuse pare reală ipoteza că interacţiunea unităţilor turbulente, care poartă cea mai mare parte a energiei cinetice, tinde să realizeze o distribuţie a energiei medii în care producerea de turbulenţă să fie minimă, adică există tendinţa spre izotropie. Or, izotropia este posibilă doar atunci cînd curentul este perfect uniform sau cînd viteza medie e nulă peste tot, în timp ce prezenţa pereţilor sau a frontierelor cu domenii de viteze diferite impune o distribuţie a energiei medii cu variaţie importantă. Această contradicţie fizică se rezolvă prin realizarea unei distribuţii statistice care faţă de distribuţia impusă de condiţiile la limită să reprezinte o situaţie ideală, adică să repartizeze uniform energia medie pe intervalul în care ea variază. Am presupus că această distribuţie statistică este dată de transformarea (1), astfel că repartiţia $f_a^*(\eta_0)$ este transformata repartiţiei $f_a(\eta_0)$ şi că diferenţa dintre aceste două repartiţii este o măsură a energiei de fluctuaţie turbulentă. O astfel de interpretare statistică a mecanismului agitației turbulente la scara unităților turbulente mari, adică a frecvențelor joase, conduce la următoarele concluzii, pe care le vom dezvolta doar calitativ, rămînînd pentru mai tîrziu transpunerea lor în forme matematice corecte :

a) Fluctuațiile turbulente din scurgerea turbulentă cu frecare, adică variațiile de energie a unităților turbulente individualizate ca poziție în spațiu și ca mărime, admit o organizare statistică limitativă, dată de transformata repartiției energiei medii cu ajutorul formulei (1). În acest sens o distribuție cu condiții la limite impuse nu mai poate fi tratată prin ipoteze locale (asupra lui τ, de exemplu), ci întreg ansamblul tinde către o limită în probabilitate a interacțiunilor părților componente.

b) Mișcarea laminară reprezintă o soluție a ecuației Navier-Stokes în care distribuția energiei nu este afectată de nici o interacțiune pînă la scara agitației moleculare. Cu aceleași condiții la limită, mișcarea turbulentă, rezultată din suprapunerea unor perturbații peste mișcarea laminară, trebuie să conducă în cele din urmă la organizarea statistică a schimburilor energetice astfel ca producerea de turbulență să fie minimă pentru energia repartizată inițial laminar. Într-adevăr, dacă se face transformata repartiției energiei mișcării laminare de pe o placă plană (diagrama 3 *a*) sau o conductă, această transformată reprezintă o soluție asimptotică de organizare statistică a perturbațiilor suprapuse mișcării laminare. Cu mici deosebiri în acest mod simplu obținem distribuția energiei medii în scurgerea turbulentă. Să remarcăm că influența gradienților de presiune longitudinală, a rugozității, a compresibilității și a numărului Reynolds se manifestă asupra acestei organizări statistice a perturbațiilor într-un mod ce rămîne de cercetat. Ceea ce putem spune cu certitudine în cadrul ipotezei din această lucrare este că, avînd aceleași condiții la limită și o existență fizică stabilă, repartiția energiei în mișcare laminară admite perturbații turbulente care conduc la o nouă repartiție a energiei rezultată prin transformarea de scară dată de formula (1).

c) Conform ipotezei de mai sus putem stabili calitativ influența compresibilității asupra distribuției energiei de fluctuație turbulentă din stratul limită de pe o placă izolată termic, în modul următor. Pentru numărul Prandtl unitar și variația liniară a viscozității cu temperatura se cunosc distribuțiile energiei cinetice $\rho_a u_{a_e}^2$ din stratul limită laminar de pe o placă plană izolată termic [9]. Transformînd aceste distribuții cu ajutorul relației (1) se obțin distribuțiile limită corespunzătoare din cazul stratului limită turbulent, de asemenea pe o placă izolată termic cu număr Prandtl unitar și variația liniară a viscozității cu temperatura. Aceste distribuții sînt arătate în figura 6 și lor le putem aplica legea pentru aflarea repartiției energiei de fluctuație turbulentă. Transformînd distribuțiile $\rho_a u_{a_e}^2$ obținem distribuțiile limită $(\rho_a u_{a_e}^2)^\star$ și deci fluctuațiile

$$(\rho_a u_a^2)' = K\cdot|(\rho_a u_{a_e}^2)^\star - (\rho_a u_{a_e}^2)|, \tag{18}$$

a căror repartiție este indicată în figura 6. Pentru $M = 5$ se observă cu totul altă alură decît pentru $M = 0$, unde acest tip de variație e verificat experimental în numeroase cazuri. Este posibil ca numărul Prandtl real și legea reală de variație a vîscozității cu temperatura să conducă chiar la determinarea influenței compresibilității asupra distribuției medii a energiei în stratul limită turbulent pe o placă plană și de asemenea să se poată stabili influența transferului de căldură.

d) În aceeași ordine de idei ne propunem să stabilim distribuția energiei medii turbulente și deci și a fluctuației într-o scurgere Couette. Pentru aceasta remarcăm că absența peretelui mobil ar duce la distribuția ideală $u_a \equiv 0$, adică repaus, în timp ce absența peretelui fix ar arăta tendința spre o distribuție uniformă, ideală $u_a \equiv 1$. Cele două distribuții care se apropie de aceste medii ideale sînt realizate de transformările (1) aplicate distribuției laminare. Vom lua $s = 1$ pentru distribuția limită corespunzătoare mediei ideale $u_a \equiv 1$ și $s < 0$, nedeterminat deocamdată, pentru tendința către $u_a \equiv 0$, întrucît $s = -1$ nu respectă condițiile la limită. Distribuția de energie medie laminară este $U^2_{a_e} = \eta_0^2$ unde $\eta_0 = \dfrac{y}{h}$, h fiind distanța dintre cei doi pereți, iar y se măsoară de la peretele fix. Distribuția energiei medii turbulente este o combinație a celor două distribuții limită, cu probabilitățile respective P_+ și P_-, astfel că $P_+ + P_- = 1$.

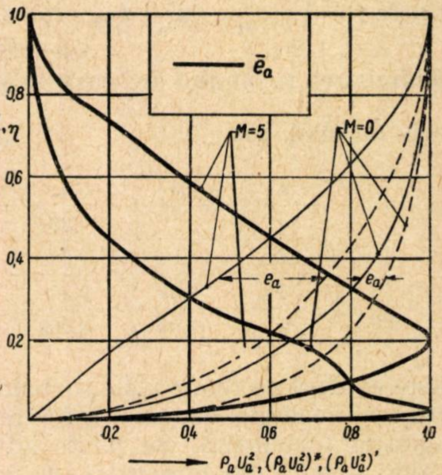


Fig. 6.—Distribuțiile energiei cinetice medii și a energiei de fluctuație turbulente în stratul limită turbulent pe o placă plană, izolată termic, deduse teoretic din distribuția energiei medii a scurgerii laminare cu $P_r = 1$, $\omega = 1$.

Transformata lui $u^2_{a_e} = \eta_0^2$ este $(u^2_{a_e})^\star = \eta_0^{\frac{2}{3}}$ pentru $s = 1$ și $(u^2_{a_e})^{\star\star} = \eta_0^{\frac{1}{1+2s}}$ pentru $s < 0$. Vom avea deci

$$u^2_{a_t} = P_+ \cdot \eta_0^{\frac{2}{3}} + P_- \eta_0^{\frac{2}{1+2s}}, \qquad s < 0 .$$

Cum continuitatea trebuie respectată în medie, vom avea

$$\int_0^{\prime} u_{at}\, d\eta_0 = \int_0^{\prime} u_{ae}\, d\eta_0 = \frac{1}{2},$$

astfel că, scriind

$$u_{a_t} \simeq \eta^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} P_- \cdot (\eta^a - 1) - \frac{1}{8} P_-^2 (\eta^a - 1) \right\},$$

unde $a = \dfrac{4(1-s)}{3(1+2s)}$ obținem

$$P_- = \frac{6(2+a)}{8+3a}\left[\sqrt{1+\frac{2(4+3a)(8+3a)}{27a(2+a)}}-1\right].$$

Dacă $q = \int_0^1 | u^2_{a_t} - u^2_{a_e} | d\eta_0$ reprezintă modificarea energiei cinetice prin schimbarea regimului de scurgere și dacă $-\frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 0$ putem alcătui tabela de mai jos

s	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0
a		9,33	4,33	2,67	1,83	1,33
P_-	0,58	0,65	0,725	0,805	0,9	1
P_+	0,42	0,35	0,275	0,195	0,1	0
q	0,081	0,063	0,047	0,03	0,016	0

Este evident că fluctuațiile turbulente vor realiza o mișcare medie în care creșterea energiei cinetice să fie minimă, însă suficientă pentru a întreține agitația turbulentă. Se poate admite că mișcarea medie aparține unei valori a lui s din intervalul $(0, -0{,}5)$ o anumită perioadă de timp și că aceste perioade sînt distribuite gaussian de exemplu, pe acest interval, valorile mici ale perioadei de timp corespunzînd situațiilor extreme: $s = 0$ mișcare laminară, energie de agitație nulă, $s = -0{,}5$ energie de agitație maximă.

Întrucît $s = -0{,}5$ dă un profil care nu poate exista fizic, vom lua o valoare extrem de apropiată care să respecte condițiile la limită. Vom lua $s = -0{,}499$, astfel că profilul corespunzător $u_{a_t} = 0{,}58\,\eta^{10^3} + 0{,}42\eta^{\frac{2}{3}}$ este indicat pe figura 7. Vom considera mai simplu că distribuția energiei medii realizată de fluctuațiile turbulente este chiar media aritmetică a distribuțiilor extreme $s = 0$ și $s = -0{,}499$. Obținem astfel distribuția energiei medii turbulente din figura 7 în scurgerea Couette. În mod obișnuit, obținem apoi și distribuția energiei de fluctuație turbulentă.

Se remarcă, din modul cum am dedus caracteristicele mișcării turbulente pentru scurgerea Couette, că nu există în mod necesar o simetrie a mișcării față de semidistanța dintre pereți și că se pare că frecarea este mai mare spre peretele mobil. Ar exista deci tendința de a frîna mișcarea peretelui mobil față de peretele fix, adică tendința spre uniformizarea mișcării. De asemenea am dedus distanța energiei de fluctuație turbulentă, considerînd doar transformata $(u^2_{a_t})^*$ pentru $s = 1$, cînd, de fapt, trebuie luată în considerare și tendința spre media ideală $u_a \equiv 0$. Însă intermitența fenomenului, cauzată tocmai de prezența celor două medii ideale, exclude posibilitatea determinării exacte a transformatei pentru $s < 0$, aşa că distribuţia indicată pe figura 7 arată doar că energia de agitaţie turbulentă trebuie să fie maximă spre centru şi că păstrează această valoare aproximativ pe spaţiul 0,2 *h*. Ar fi deosebit de interesant de verificat aceste determinări calitative prin experienţe concludente.

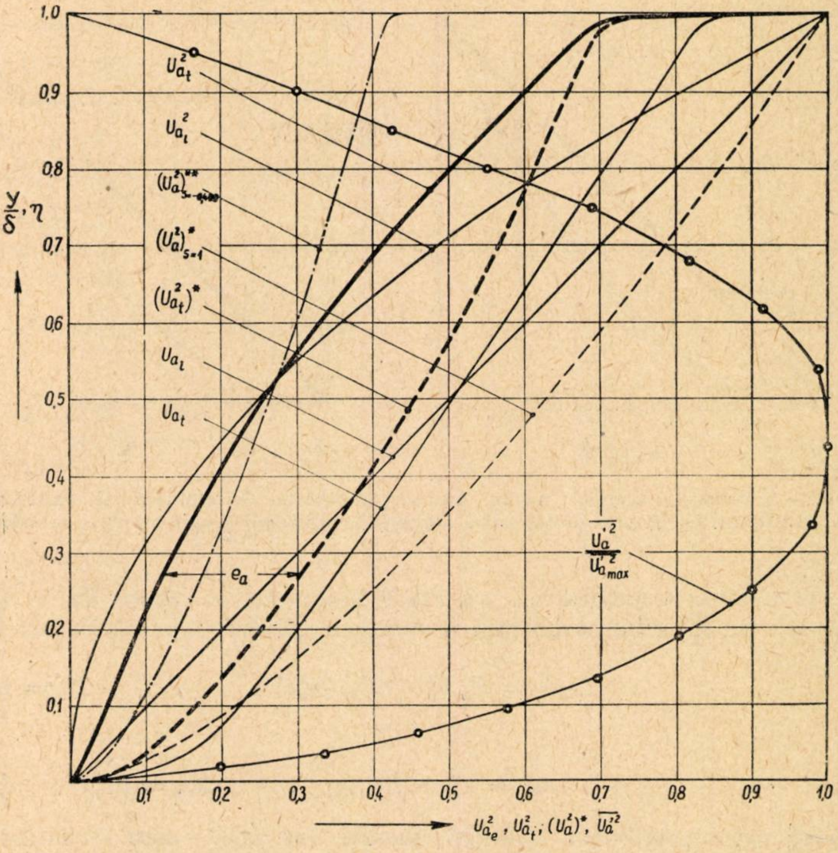


Fig. 7. — Distribuţii de energie medie în mişcarea laminară şi în cea turbulentă, transformatele acestor distribuţii, profilele de viteză medie laminară şi turbulentă, distribuţia energiei de fluctuaţie turbulentă în scurgerea Couette.

e) Un alt fenomen care se poate explica în sensul celor arătate în această lucrare este amortizarea turbulenţei de perturbaţie în spatele unor turbulizatoare introduse în stratul limită. Pentru aceasta să considerăm în figura 8, două repartiţii de energie medie, liniare, perturbate de un turbulizator, astfel că profilul energiei medii modificat se prezintă odată cu perturbaţia în spre frontiera externă (diagr. *b*) şi apoi cu perturbaţia în spre perete, (diagr. *a*) perturbaţiile fiind egale. Transformatele lor succesive arată calitativ următorul lucru : în timp ce perturbaţia situată spre perete se *amortizează* rapid (diagr. *a*) în repartiţia limită a interacţiunilor unităţilor turbulente, perturbaţia situată în spre frontieră externă se amplifică la început (diagr. *b*) şi numai după aceea tinde să descrească încet, adică distribuţia limită a interacţiunilor turbulente *păstrează* mult timp perturbaţia introdusă iniţial. Această observaţie corespunde studiilor experimentale [10].

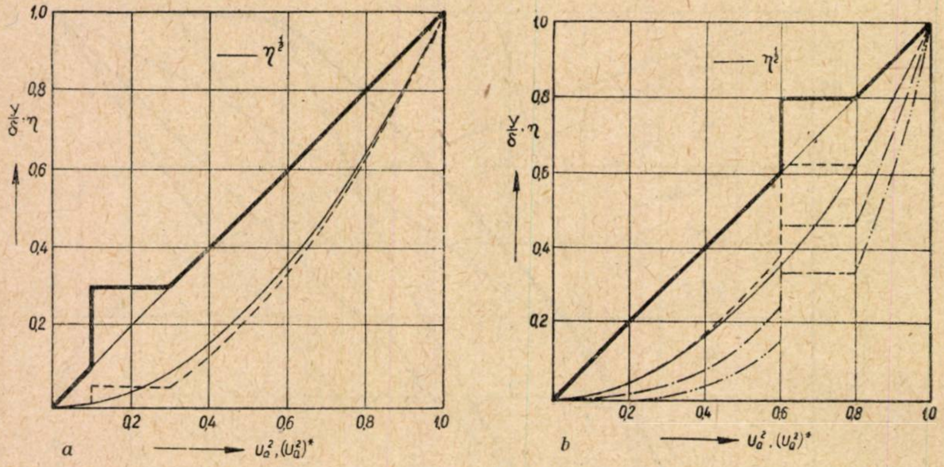


Fig. 8. — Distribuţia energiei medii, cu o perturbaţie determinată şi transformatele acestei distribuţii. Localizarea perturbaţiei, aproape de perete (*a*) şi spre frontiera exterioară (b).

O evaluare cantitativă a acestor fenomene se poate da în modul următor : fie distribuţia iniţială a energiei cinetice exprimată sub forma

$$u^2 = P_0 u_0^2 + P_1 \cdot (u_0^2)^\star \quad , \quad P_0 + P_1 = 1$$

sau

$$u^2 = u_0^2 + P_1 \Delta_{10} \quad , \quad \Delta_{10} = (u_0^2)^\star - u_0^2$$

unde u_0^2 este distribuţia energiei medii, iar $(u_0^2)^\star$ este transformată cu ajutorul relaţiei (1). Introducînd o perturbaţie finită a mărimilor medii vom avea

$$u_p^2 = P_{0_p} u_{0_p}^2 + P_{1_p} (u_{0_p}^2)^\star \quad , \quad P_{0_p} + P_{1_p} = 1$$

sau

$$u_p^2 = u_{0_p}^2 + P_{1_p} \Delta_{10_p} \quad , \quad \Delta_{10_p} = (u_{0_p}^2)^\star - u_{0_p}^2$$

unde indicele *p* înseamnă perturbat.

Fluctuaţia de energie turbulentă întreţinută de condiţiile exterioare ale mişcării corespunde lui u^2, u_0^2 fiind distribuţia energiei medii impusă de soluţia scurgerii respective neperturbate. Fluctuaţia de energie turbulentă în situaţia perturbată corespunde lui U_p^2. Diferenţa algebrică a acestor cantități de energie trebuie să se amortizeze, întrucît nu este susținută de nici o condiție externă. Avem deci cantitatea

$$\Delta_p = \int_0^1 | u_p^2 - u^2 | \, d\eta = \int_0^1 | (P_{0_p} u_{0_p}^2 - P_0 u_0^2) + (P_{1_p} (u_{0_p})^\star = - P_1 (u_0^2)^\star) | \, d\eta$$

evident mai mare în cazul în care perturbația este situată spre frontiera exterioară. În exemplul nostru, luînd spre simplificare $P_1 \simeq P_{1_p}$ obținem $P_0 \simeq P_{0_p}$

$$\Delta_p = P_0 \int_0^1 | \eta - u_0^2 | \, d\eta + P_1 \int_0^1 | \eta^{\frac{1}{2}} - (u_{0_p}^2)^\star | \, d\eta = P_0 \cdot 0{,}02,$$

în cazul diagramei *a* și

$$\Delta_p = P_0 \int_0^1 | \eta - u_0^2 | \, d\eta + P_1 \int_0^1 | \eta^{\frac{1}{2}} - (u_{0_p}^2)^\star | \, d\eta = P_0 \cdot 0{,}02 + P_1 \cdot 0{,}02,$$

în cazul diagramei *b*. Aceste cantități trebuie distruse în evoluția ulterioară a scurgerii, în mare măsură prin disipație directă, întrucît nu sînt susținute de condițiile exterioare impuse mișcării. Dacă presupunem că această amortizare se petrece izotropic, adică avem

$$\frac{\Delta_p}{\int_0^1 u_{0_p}^2 d\eta} = \left[A \left(\frac{x}{\lambda} \right) + B \right]^{-1}$$

și că rata amortizării este aceeași în ambele situații, rezultă o distanță mai mare pentru amortizarea perturbației situate aproape de frontiera externă.

f) Rezumînd cele de mai sus, putem spune că energia fluidului în mișcarea turbulentă anizotropă se poate pune sub forma generală

$$E_1 = P_0 E_0 + P_1 (E_0)^\star + P_2 (E_0)^{\star\star} + \ldots, \quad \sum_0^\infty P_i = 1\,, \tag{19}$$

sau

$$E = E_0 + \sum_1^\infty P_i e_{i0}\,, \qquad e_{i0} = (E_0)^\star - E_0\,, \ldots$$

unde $E = p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, $E^\star$ este transformata lui E cu ajutorul relației (1), iar P_i sînt probabilități ca fluctuația să aparțină unui profil tip $E^\star$. Acest profil tip reprezintă distribuția limită a interacțiunilor unităților turbulente care poartă cea mai mare parte a energiei cinetice și are deci o semnificație fizică precisă. Este posibil ca utilizarea expresiei (19) să ducă la rezultante interesante în tratarea ecuațiilor de mișcare Navier-Stokes.

Primită la redacție la 12 mai 1960

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТИПОВЫХ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ КАЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор излагает ряд соображений о физическом смысле преобразования

$$\eta = \frac{\int_0^y f_a^s \, dy}{\int_0^\delta f_a^s \, dy},$$

где $f_a = \dfrac{f - f_w}{f_e - f_w}$, $f = p + \dfrac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, s—*real*.

Из произведенных в ряде опытов наблюдений вытекает, что существует интересная связь между профилем средней энергии и распределением турбулентной флюктуирующей энергии. Эта связь выявляется приведенным выше преобразованием.

Делается допущение, что распределение средней энергии, осуществленное вышеуказанным преобразованием, по масштабу представляет линейное распределение взаимодействий турбулентных единиц, носящих наибольшую часть кинетической энергии так, чтобы создание турбулентности было минимально. Разность двух распределений является мерой турбулентной флюктуирующей энергии. Интерпретируются многочисленные экспериментальные данные о турбулентности вблизи стенок, свободной турбулентности и даются некоторые применения в свете гипотезы ограничительного статистического образования флюктуаций энергии при турбулентности с трением.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Распределение средней и флюктуирующей энергии в турбулентном пограничном слое на профиле в различных точках хорды c [3]. Диаграмма (a) соответствует точке $\dfrac{x}{c} = 0{,}75$; толщина пограничного слоя $\delta = 85$ мм, скорость внешнего потока $u_e = 46$ м/сек. Диаграмма (b) построена при $\dfrac{x}{c} = 0{,}85$, $\delta = 133$ мм, $u_e = 37$ м/сек. Диаграмма (c) при $\dfrac{x}{c} = 0{,}9$, $\delta = 178$ мм, $u_e = 35$ м/сек.

Рис. 2. — Распределение средней и турбулентной энергии флюктуации u' в пограничном слое на крыльевом профиле. Скорость внешнего потока $u_e = 13$ м/сек, толщина слоя $\delta \simeq 18$ мм (a); $\delta \simeq 21$ мм (b); $\delta \simeq 45$ мм (c),

$$E_a = \frac{P + \dfrac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - P_w}{P_e + \dfrac{\rho}{2}(u^2 + v^3 + w^2)_e - P_w},$$

а экспериментальные точки представляют:

$$\frac{\overline{u'^2}}{|u'^2|_{\max}}\,.$$

Рис. 3. — Распределение средней энергии и турбулентной энергии флюктуации в пограничном слое на плоской пластинке при переходе. Диаграмма (*a*) соответствует началу перехода (коэффициент прерывания $\gamma = 0$), а диаграммы (*b*) ($\gamma = 0{,}97$) и (*c*) ($\gamma = 1$) соответствуют конечному периоду [4].

Рис. 4. — Распределение средней и флюктуирующей энергии, составляющей u' в каналах. Диаграмма (*a*) соответствует числу Рейнольдса $\mathcal{R}e = 3{,}14 \times 10^4$ и расширению стенок канала $\alpha = 1°$ [6], диаграмма (*b*) построена при $\mathcal{R}e = 1{,}23 \times 10^4$, $\alpha = 0°$, а диаграмма (*c*) — при $\mathcal{R}e = 6{,}16 \times 10^5$, $\alpha = 0$ [5].

Рис. 5. — Распределение средней энергии E_a и турбулентной флюктуирующей энергии, составляющей u' при свободной турбулентности. Диаграмма (*a*) представляет случай турбулентного течения немного после перехода порога [7], диаграмма (*b*) — случай следа за круглым цилиндром [1], а диаграммы (*c*, *c'*) — случай плоской струи в двух состояниях: очень близко к выходу (диаграмма *c*) и далеко вниз по течению (диаграмма *c'*) [8].

Рис. 6. — Распределения средней кинетической энергии и турбулентной флюктуирующей энергии в турбулентном пограничном слое на плоской термоизолированной пластинке, выведенные теоретически из распределения средней энергии ламинарного течения при $P_r = 1$, $\omega = 1$.

Рис. 7. — Распределения средней энергии при ламинарном и турбулентном движениях, преобразованные этих распределений, профили средней ламинарной и турбулентной скоростей, распределение турбулентной флюктуирующей энергии при течении Куетта.

Рис. 8. — Распределение средней энергии при определенном возмущении и преобразованные этого распределения. Локализация возмущения вблизи стенки (*a*) и по направлению к внешней границе (*b*).

UTILISATION DES PROFILS DE VITESSE TYPE POUR L'ÉVALUATION QUALITATIVE DE CERTAINES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT ANISOTROPE

RÉSUMÉ

Dans ce travail l'auteur expose plusieurs considérations sur la signification physique de la transformation

$$\eta = \frac{\int_0^y f_a^s\,dy}{\int_0^\delta f_a^s\,dy}$$

où

$$f_a = \frac{f - f_w}{f_e - f_w}\,, \quad f = p + \frac{\rho}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2)\,, \quad s \text{ réel.}$$

Les observations faites sur une série d'expériences montrent l'existence d'une liaison intéressante entre le profil de l'énergie moyenne et la distribution de l'énergie de fluctuation turbulente. Cette liaison est mise en évidence par la transformation ci-dessus.

L'auteur propose l'hypothèse que la distribution de l'énergie moyenne obtenue par la transformation ci-dessus de l'échelle représente une répartition limite des interactions entre les unités turbulentes qui possèdent la plupart de l'énergie cinétique, correspondant à la production de la turbulence minimum. La différence entre les 2 distributions représente la mesure de l'énergie de fluctuation turbulente. L'auteur interprète un grand nombre de données expérimentales concernant la turbulence près de la paroi et la turbulence libre, et indique quelques applications dans le sens de l'hypothèse de l'organisation statistique limitative des fluctuations d'énergie dans la turbulence accompagnée de frottement.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Distribution de l'énergie moyenne et de l'énergie de fluctuation dans la couche limite turbulente sur un profil en divers points de la corde c [3]. Le diagramme (a) correspond au point $\frac{x}{c} = 0{,}75$; l'épaisseur de la couche limite $\delta = 85$ mm ; la vitesse du courant extérieur $u_e = 46$ m/s. Diagramme (b) $\frac{x}{c} = 0{,}85$, $\delta = 133$ mm, $u_e = 37$ m/s. Diagramme (c) $\frac{x}{c} = 0{,}9$, $\delta = 178$ mm, $u_e = 35$ m/s.

Fig. 2. — Distributions de l'énergie moyenne et de l'énergie turbulente de la fluctuation u' dans la couche limite sur un profil d'aile. La vitesse du courant extérieur $u_e = 13$ m/s, l'épaisseur de la couche $\delta \simeq 18$ mm (a) ; $\delta \simeq 21$ mm (b) ; $\delta = 45$ mm (c) ;

$$E_a = \frac{p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - p_w}{p_e + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)_e - p_w}$$

et les points expérimentaux représentent : $\frac{\overline{u'^2}}{|u'^2|_{max}}$

Fig. 3. — Distributions de l'énergie moyenne et de l'énergie turbulente de la fluctuation dans la couche limite sur une plaque plane dans le cas d'une transition. Le diagramme (a) correspond au début de la transition (facteur d'intermittence $\gamma = 0$), et les diagrammes (b) ($\gamma = 0{,}97$) et (c) ($\gamma = 1$) appartiennent à la période finale [4].

Fig. 4. — Distributions de l'énergie moyenne et de l'énergie de fluctuation de la composante u' dans les canaux. Le diagramme (a) correspond au nombre de Reynolds $\mathcal{R}e = 3{,}14 \times 10^4$ et à un évasement des parois du canal $\alpha = 1°$ [6] ; dans le diagramme (b), $\mathcal{R}e = 1{,}23 \times 10^4$, $\alpha = 0°$; et dans le diagramme (c), $\mathcal{R}e = 6{,}16 \times 10^4$, $\alpha = 0°$ [5].

Fig. 5. — Distributions de l'énergie moyenne E_a et de l'énergie de fluctuation turbulente de la composante u' dans le cas de la turbulence libre. Le diagramme (a) représente l'écoulement turbulent juste après le passage d'un seuil [7] ; le diagramme (b) la trace derrière un cylindre circulaire [1] ; le diagramme (c) un jet plan tout près de la sortie, et le diagramme (c') le même jet au loin en aval [8].

Fig. 6. — Distributions de l'énergie cinétique moyenne et de l'énergie de fluctuation turbulente dans la couche limite turbulente sur une plaque plane, thermiquement isolée, déduites, théoriquement, de la distribution de l'énergie moyenne de l'écoulement laminaire, lorsque $P_r = 1$, $\omega = 1$.

Fig. 7. — Distributions de l'énergie moyenne dans le mouvement laminaire et dans le mouvement turbulent, transformées de ces distributions, profils des vitesses moyennes laminaire et turbulente, distribution de l'énergie de fluctuation turbulente dans l'écoulement de Couette.

Fig. 8. — Distribution de l'énergie moyenne dans le cas d'une perturbation déterminée et les transformées de cette distribution. Localisation de la perturbation : (a) au voisinage de la paroi, et (b) vers la frontière extérieure.

BIBLIOGRAFIE

1. I. O. HINZE, *Turbulence*. McGraw-Hill Book Company New York, Toronto, London, 1959.
2. Şt. N. SAVULESCU *Sur une détermination des caractéristiques de la couche limite par l'utilisation de certains profils de vitesses et de températures*, RMA, *2* (1957).
3. H. L. DRYDEN, *Recent Advances in the Mechanism of Boundary-Layer Flow*. Adv. in Appl. Mech., II (1948).
4. G. B. SCHUBAUER, P. S. KLEBANOV *Contributions on the Mechanism of Boundary-Layer Transition*, NACA, Rep. *1289* (1956).
5. J. LAUFER, *Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel*, NACA, Rept. *1053* (1951).
6. J. RUETENIK, S. CORRSIN, *Equilibrium Turbulent Flow in a slightly divergent Channel*, 50 Jahre Grenszchichtforschung (1955).
7. I. TANI, *Experimental Investigation of flow separation over o step*. Grenzschichtforschung-Symposium, Freiburg, 1957.
8. D.P. MILLER, E. W. COMMINGS, *Static pressure Distributions in the free turbulent jet*, Journal Fluid Mech., *3* (1957).
9. ЛОИТЯНСКИЙ, Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва, 1959.
10. F. H. CLAUSER, *The Turbulent Boundary-Layer*. Advances in Appl. Mech., IV (1955).

AEROMECANICĂ

TRADUCTOR CAPACITIV DE FOARTE MICĂ INERȚIE PENTRU DETECTAREA UNDELOR DE ŞOC

DE

E. PROCOPOVICI

1. Detectarea undelor de şoc produse cu ajutorul tubului de şoc este o problemă importantă atît pentru măsurarea presiunilor cît şi pentru măsurarea vitezelor de propagare.

În afara unor metode speciale [1], [3], pentru măsurarea vitezelor de propagare se foloseşte metoda măsurării intervalului de timp între două semnale generate la trecerea undei de şoc în dreptul a două repere, aşezate la distanță cunoscută. În funcția de detector de undă se folosesc traductori de diferite tipuri (de presiune, de temperatură, ionici etc. [2], [3], [4], [5], [6]. Condițiile impuse acestor traductori, asupra gabaritului, caracteristicilor dinamice, caracteristicilor termice etc. sînt deosebit de grele. Condiția ca traductorul să aibă un timp de răspuns foarte scurt (de ordinul microsecundei) pentru a putea urmări variații foarte rapide, s-a determinat în parte, renunțarea la traductorii cu inerție mecanică. În ultimul timp, sînt folosiți tot mai mult traductorii de temperatură a căror inerție termică a putut fi coborîtă în măsură satisfăcătoare [1][1]).

În cele ce urmează se face o analiză sumară a condițiilor în care lucrează traductorii ce au funcția de detector de undă de şoc. Se analizează mai în detaliu traductorii de presiune capacitivi, propunîndu-se un nou tip de traductor ce realizează un timp de răspuns foarte scurt.

2. Un traductor poate fi reprezentat prin schema arătată în figura 1. Caracteristica este suprafața activă A prin care se transmite efectul presiunii (Δp) sau al temperaturii (Δt) etc.

Acțiunea acestora are ca rezultat modificarea unui parametru electric (capacitate ΔC) sau rezistență (ΔR) etc.).

---

[1]) Traductorii de temperatură sînt realizaţi din pelicule foarte subţiri de metal a căror rezistenţă electrică variază cu temperatura.

Timpul de răspuns al traductorului va depinde în mod evident de orientarea suprafeței active. Astfel dacă traductorul este atacat frontal de unda de şoc (fig. 2 *a*) acesta va fi minim. O astfel de aşezare nu este însă posibilă, deoarece traductorul ar perturba scurgerea. Din acest motiv traductorii folosiți pentru detectarea undelor se montează cu suprafața activă paralelă la scurgerea supersonică. În cazul cînd unda mătură suprafața activă (fig. 2 *b*) va apare o întîrziere ce depinde de dimensiunea suprafeței active pe direcția de propagare.

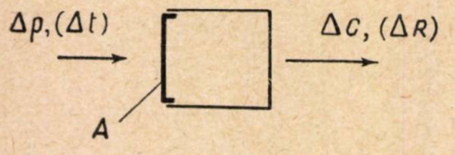


Fig. 1

$$\tau_g = m\frac{b}{c}, \qquad (1)$$

în care : b — dimensiunea suprafeței active pe direcția de propagare,

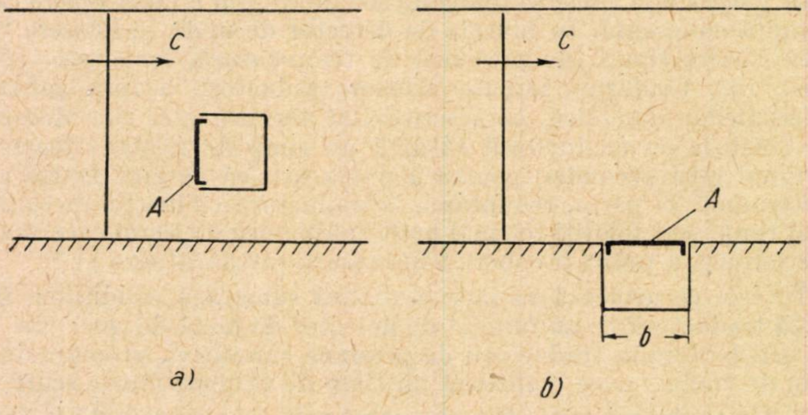
c — viteza undei de şoc,

m — un coeficient ce depinde de puterea de separație a sistemului de măsură.

Cealaltă dimensiune a suprafeței active este limitată numai de gradul de planeitate a undei de şoc.

Traductorii de presiune reprezintă sisteme dinamice de ordinul II pentru care timpul de răspuns τ_r poate fi determinat din figura 3.

$$\tau_r = \alpha/\omega_0. \qquad (2)$$



a) b)

Fig. 2

În cazul traductorilor de temperatură [3], [1] ce se pot reprezenta prin sisteme de ordinul I timpul în care temperatura difuzează complet în stratul activ al traductorului, este dat de relația

$$\tau_d = \frac{\rho c}{K}\delta^2, \qquad (3)$$

în care : ρ — masa specifică,
c — căldura specifică,
k — conductibilitatea termică,
δ — grosimea stratului de metal.

Efectul variaţiilor de temperatură care în cazul undelor de şoc, pot avea valori importante trebuie luat în consideraţie şi în cazul traductoarelor de presiune. Temperatura poate modifica constantele fizice ale materialului introducînd erori sau chiar distrugînd traductorul. Eliminarea acestui neajuns se poate face fie cu ajutorul materialelor termoizolante fie mărindu-se inerţia termică a suprafeţei active. În amîndouă cazurile frecvenţa proprie a sistemului este influenţată defavorabil.

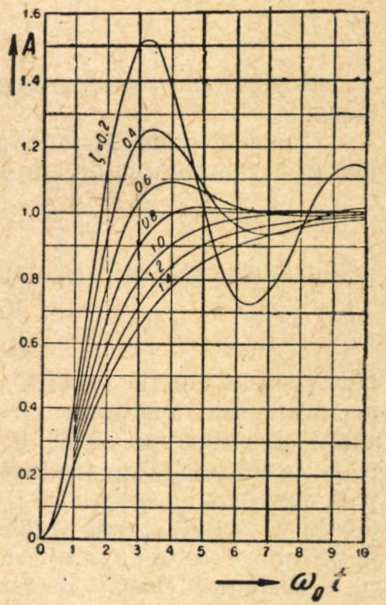
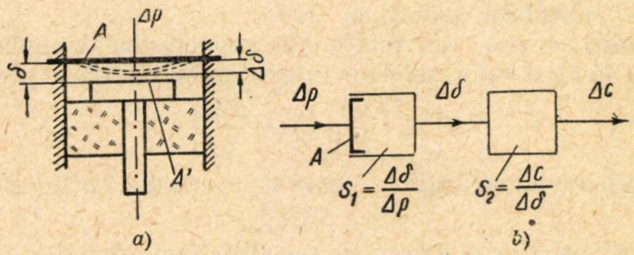


Fig. 3

Forma clasică a unui traductor de presiune este arătat în figura 4 *a*. O membrană elastică cu o suprafaţă activă A se deformează sub efectul presiunii (Δp) realizînd o deplasare ($\Delta\delta$). Aceasta la rîndul ei se transformă într-o variaţie de capacitate (ΔC), membrana apropiindu-se de o armătură fixă de suprafaţă A' ($A' < A$). În figura 4 *b* se dă schema funcţională a traductorului. Primul bloc corespunde sistemului mecanic (membrana) cel de-al II-lea sistemului electric (capacitatea). Primul sistem este caracterizat de sensibilitatea şi frecvenţa proprie corespunzătoare modului fundamental de vibraţie definite mai jos :


Δp
A
δ
Δδ
A'
Δp
A
$S_1 = \frac{\Delta\delta}{\Delta p}$
Δδ
$S_2 = \frac{\Delta C}{\Delta\delta}$
ΔC

a) *b*)

Fig. 4

$$S_1 = \frac{\Delta S}{\Delta p} = \frac{A}{K}, \tag{4}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \tag{5}$$

în care A — suprafaţa activă (suprafaţa membranei),
K — constanta elastică a membranei,
M — masa echivalentă a membranei,
ω_0 — pulsaţia proprie.

Din ecuaţiile (4) şi (5) se poate scrie produsul

$$S_1\,\omega_0^2 = \frac{A}{M}\,. \tag{6}$$

Acesta poate fi considerat ca o mărime ce caracterizează calitatea sistemului mecanic.

Dacă efectele dinamice parazite (vibraţii, şocuri) echivalează cu o deplasare a membranei de amplitudine δ_p, puterea de separaţie se poate scrie

$$P = \frac{S_1}{\vartheta_p}\,. \tag{7}$$

Din ecuaţiile (2), (4), (5), (7) se poate forma următoarea relaţie :

$$\frac{M}{A} = \frac{\tau_r}{P\delta_p}\cdot\frac{1}{(2\pi\alpha)^2}\,. \tag{8}$$

Din această relaţie rezultă că principala caracteristică de care depind performanţele traductorului este masa pe unitate de suprafaţă activă, astfel că reducerea cifrei M/A este principalul mijloc pentru îmbunătăţirea performanţelor traductorului. Mărindu-se rigiditatea membranelor prin curbarea acestora [8] s-a putut ridica frecvenţa proprie pînă la 50 kc/s. Traductorul realizat avînd însă un gabarit relativ mare Ø 20 mm × 70 mm, $b = 8$ mm [8].

Sistemul electric constă dintr-o capacitate plan paralelă a cărei valoare este dată de relaţia :

$$C = \frac{e A'}{\delta}, \tag{9}$$

în care e — constanta dielectrică,
δ — interstiţiul între armături,
A' — suprafaţa armăturii fixe.

După cum se vede din relaţia (9) capacitatea depinde neliniar de variaţia lui δ. Pentru valori mici ale interstiţiului relaţia se poate liniariza :

$$C \cong \frac{e A'}{\delta}\left(1 - \frac{\Delta\delta}{\delta}\right)\cdot \tag{10}$$

Eroarea datorită neliniarităţii se poate uşor calcula obţinîndu-se expresia

$$\varepsilon \cong (\Delta\delta/\delta)^2, \tag{11}$$

cu care se poate calcula $\Delta\,\delta$ max. pe care îl putem admite la o eroare dată.

Sensibilitatea S_2 a sistemului electric va fi

$$S_2 = \frac{\Delta C}{\Delta\delta} = \frac{C}{\delta}, \tag{12}$$

iar pentru traductor în întregime sensibilitatea va fi dată de relaţia

$$S = S_1\cdot S_2 = \frac{A}{K}\cdot\frac{C}{\delta}\,. \tag{13}$$

3. Din ecuaţia (8) s-a tras concluzia că pentru a îmbunătăţi performanţa dinamică a traductorilor de presiune, trebuie redusă masa pe unitate de suprafaţă. Reducerea masei atrage însă reducerea rigidităţii membranei, astfel că frecvenţa proprie nu creşte decît foarte puţin iar plaja de presiuni suportate de traductori se restrînge mult. Pentru obţinerea unor frecvenţe proprii mai ridicate s-a căutat o soluţie prin care constanta elastică a sistemului să nu mai fie dependentă de masa de unitate de suprafaţă.

Soluţia constă în a transfera funcţia de suport elastic mediului dielectric. Astfel se propune un traductor arătat schematic în figura 5.

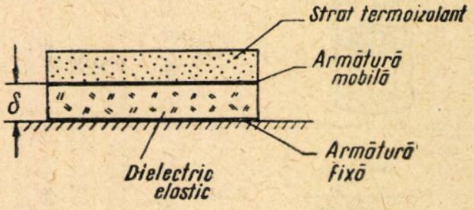


Fig. 5

Armătura mobilă este compusă dintr-un strat fin de metal de cîţiva microni grosime (eventual termoizolant) depus pe un dielectric elastic ce se comprimă sub efectul presiunii. Comprimarea dielectricului apropie cele două armături realizînd variaţia de capacitate[1]). Pentru acest traductor frecvenţa proprie ce corespunde modului fundamental este dată de expresia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E/\delta}{M_m + \frac{1}{3} M_d}}, \qquad (14)$$

în care : E — modulul de elasticitate al dielectricului,
δ — grosimea dielectricului,
M_m — masa stratului de metal,
M_d — masa dielectricului.

Folosind ca dielectric elastic o peliculă de mică de 50 microni şi o peliculă de aluminiu de doi microni se poate obţine o frecvenţă proprie de 0,7 Mc/s ceea ce este de 10 ori frecvenţa proprie maximă obţinută cu traductorii de tip clasic.

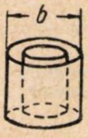
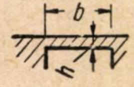
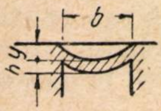
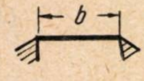
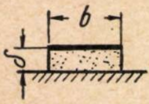
În tabela 1 se compară caracteristicile traductorului propus cu caracteristicile traductorilor de tip clasic cunoscuţi din literatură. Comparaţia se face pe baza unor mărimi adimensionale. Se poate vedea că tipul de traductor propus oferă cele mai bune caracteristici dinamice.

Într-o primă fază s-a realizat un traductor ce este arătat în figura 6. Armătura mobilă este constituită de o peliculă de aluminiu fixată pe un suport dielectric. Astfel de traductori sînt folosiţi ca detectori de undă de şoc într-o instalaţie de măsurare a vitezei de propagare a undelor de şoc ce a fost elaborată la I.M.A. [9]. În scopul verificării timpului de răspuns dat de aceşti traductori s-au făcut studii experimentale. Acestea au constat în oscilografierea semnalului dat de traductor sub acţiunea undei de şoc.

---

[1]) A se vedea anexa.

Tabela 1

Tipul de traductor	$S_1 \frac{E}{b}$	$\frac{M_e}{M}$	$\frac{\omega_0}{C_0} b$	$\frac{p_{\max}}{\sigma_{\max}}$	Observații
	$0{,}25 \frac{b^3}{h}$	1	2	$2 \frac{h}{b}$	cuplaj acustic defavorabil
	$0{,}011 \frac{b^3}{h^3}$	0,6	$12{,}2 \frac{h}{b}$	$\frac{4}{3}\left(\frac{h}{b}\right)^2$	construcție simplă
	$0{,}0058 \frac{b}{h} \frac{b}{y}$	$\frac{1}{6}$	$16 \frac{y}{b}$	$16 \frac{y}{b} \frac{h}{b}$	frecvență proprie ridicată
	$0{,}13 \frac{E}{\varepsilon} \frac{b}{h}$	0,7	$4{,}8 \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}$	—	sensibilitate mare
	$\frac{\delta}{b}$	< 1	$\frac{b}{\delta}$	~ 1	frecvență proprie ridicată

Notații : $S_1 = A/K$ — sensibilitatea,
$C_0 = \sqrt{E/\rho}$ — viteza sunetului în material,
b — dimensiunea traductorului,
h — grosimea membranei sau a diafragmei,
y — săgeata diafragmei curbe,
ε — deformația specifică,
σ — efortul unitar,
M_e/M — raportul masei echivalente, la masa totală.

În acest scop s-a realizat montajul din figura 7, în care traductorul a fost montat într-un circuit electronic special [10]. Tensiunea de ieșire a circuitului este amplificată într-un amplificator de bandă largă (10 Hz.-4 M Hz.) și aplicată plăcilor deflectoare ale unui tub catodic. Pentru obținerea unei tensiuni rapide de baleiaj, s-a folosit tensiunea dată de un circuit integrator la a cărui intrare s-a aplicat o tensiune în treaptă. Aceasta se obține cu ajutorul unei baterii ce este conectată brusc la circuitul integrator cu ajutorul unui contactor cu membrană, acționat de o undă de şoc derivată pe un canal de lungime reglabilă. Prin reglarea lungimii canalului se obţine întîrzierea necesară semnalului dat de traductor, faţă de momentul declanşării bazei de timp. Pentru fotografierea fenomenului în bune condiţii, spotul luminos este aprins pentru un interval de timp determinat, sincron cu declanşarea bazei de timp. Aceasta se obţine cu ajutorul unui impuls dreptunghiular generat de un generator de impulsuri comandat. Comanda generatorului se realizează cu un impuls obţinut prin diferenţierea tensiunii în treaptă.

În figura 8 se arată rezultatele obţinute, care după efectuarea calibrării în timp, arată că acest tip de traductor are un timp de răspuns de 3,5 μ s. Acest timp de răspuns este comparabil cu timpul necesar undei de şoc să parcurgă dimensiunea *b* a suprafeţei active a traductorului şi este cu totul suficient pentru a asigura funcţionarea în bune condiţiuni a aparaturii de măsurat viteza de propagare a undelor în tubul de şoc. Din fotooscilogramele realizate se observă că frontul semnalului este precedat de un front cu pantă mică. Explicaţia apariţiei acestui front constă probabil în faptul că armătura caldă a traductorului are dimensiunea *b* mare în raport cu armătura rece, astfel încît

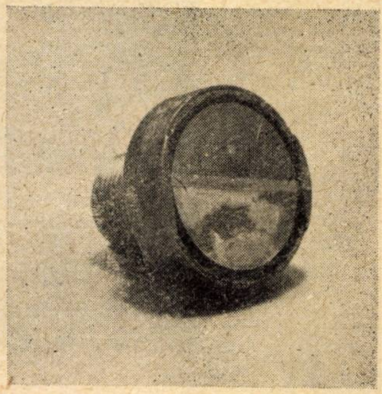


Fig. 6

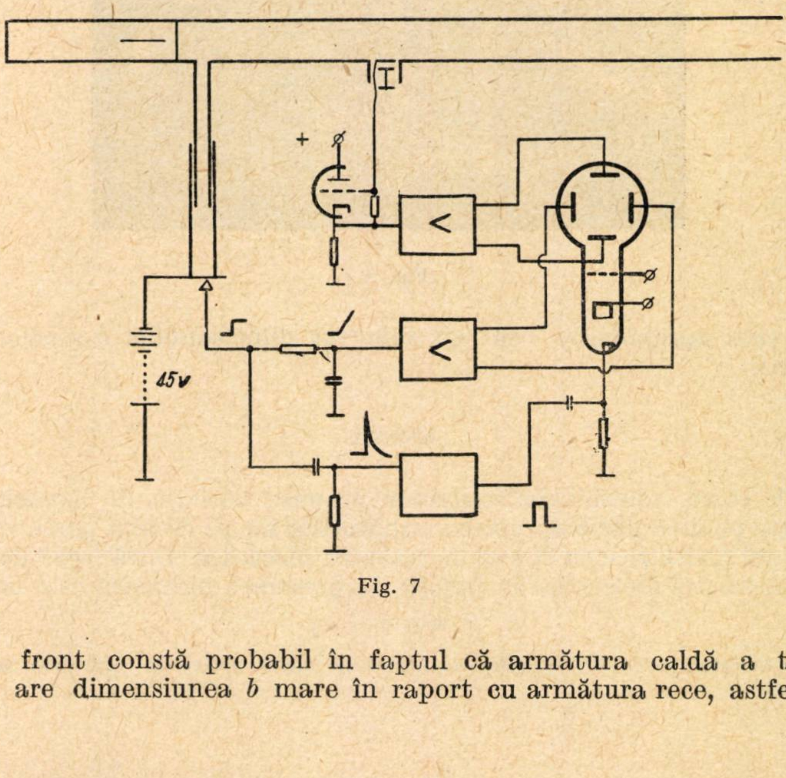


Fig. 7

unda de şoc acţionează direct asupra dielectricului. În sprijinul acestei explicaţii este faptul că raportul timpilor corespunzători celor două pante este aproximativ egal cu raportul dimensiunilor *b* a celor două armături.

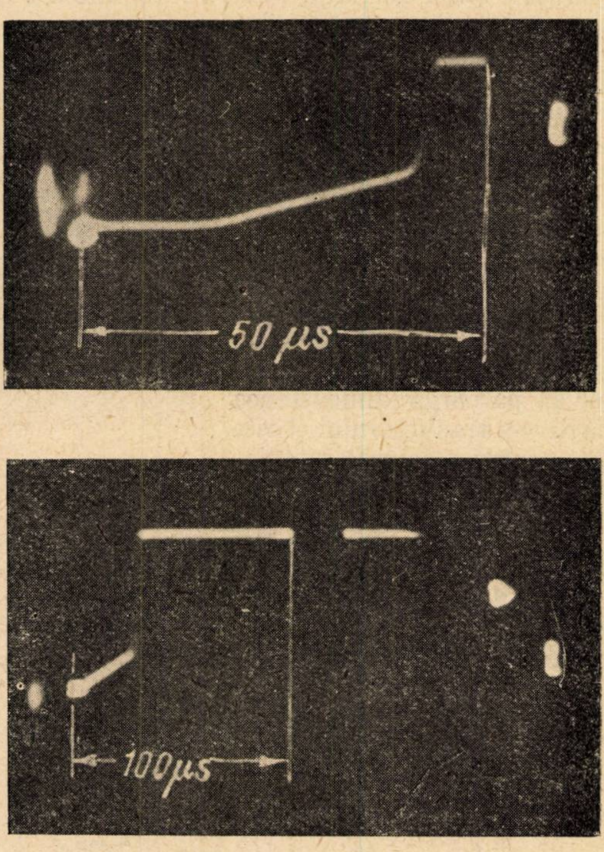


Fig. 8

ANEXĂ

În cazul schemei de traductor propuse variaţia de capacitate se datoreşte pe de-o parte apropierii armăturilor iar pe de altă parte variaţiei constantei dielectrice cu starea de tensiune mecanică. Dacă legea de variaţie a constantei dielectrice în funcţie de presiunea mecanică este liniară¹).

$$e = \eta \sigma + e_0 .$$

---

¹) Cercetări efectuate de autor au arătat că multe materiale dielectrice manifestă acest efect.

Considerînd că materialul are modulul de elasticitate E şi grosimea de repaus δ_0 poate fi pus sub forma:

$$e = \eta E (1 - \delta/\delta_0) + e_0.$$

Introducînd în (9) se obţine

$$C = \frac{\eta EA}{\delta} + \frac{e_0 A}{\delta} + \frac{\eta EA}{\delta_0}.$$

Sensibilitatea $S_2 = \frac{\Delta C}{\Delta \delta}$ va fi în acest caz

$$S_2 = -\frac{C_0 + C\eta}{\delta}$$

unde

$$C\eta = \frac{\eta EA}{\delta}; \quad C_0 = \frac{e_0 A}{\delta}.$$

Se vede că în acest caz sensibilitatea se majorează cu termenul $C\eta$.

Primită la redacţie la 30 decembrie 1959.

ЕМКОСТНЫЙ ДАТЧИК ОЧЕНЬ МАЛОЙ ИНЕРЦИИ ДЛЯ УЛАВЛИВАНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

РЕЗЮМЕ

Анализируются емкостные датчики для улавливания ударных волн в газах с точки зрения их показателей качества. Предлагается и описывается новый тип емкостного датчика, а также показываются экспериментальные результаты, полученные с этим типом датчика в ударной трубе.

TRADUCTEUR CAPACITIF À TRÈS PETITE INERTIE POUR LA DÉTECTION DES ONDES DE CHOC

RÉSUMÉ

L'auteur fait l'analyse des traducteurs capacitifs pour la détection des ondes de choc dans les gaz, du point de vue des performances possibles. Il propose et donne la description d'un nouveau type de traducteur capacitif, en exposant les résultats expérimentaux obtenus avec ce nouveau traducteur, utilisé dans un tube à chocs.

BIBLIOGRAFIE

1. I. S. **Hey**, **Pinson** J. T., **Smith** P. G., *A Radio Method Of Determining the Velocioty of a Shock Wave*. Nature, **179**, *4571*, 1184–1185, June 8 (1957).
2. **Willmarth**, W. W., *Small Barium Titanate Transducer for Aerodynamic or Acoustic Pressure Measurements*. Rev. Sci. Inst., **29**, *3*, 218, March (1958).
3. **Gordon Hall** J., *Shock tubes*. Institute of Aerophysics University of Toronto. UTIA Review, *12*, May (1958).
4. **Blackman** V., *Vibrational Relaxation in Oxygen and Nitrogen*. Jour. Fluid Mech., **1**, Part. I, May (1956).
5. **Dosanjh** D. S., *Use of Hot-Wire Anemometer as a Triggering and Timing Device for Wawe Phenomena in Shock tube*. Rev. Sci. Instr., **26**, *1*, 65–70, Ian. (1955).
6. **Lenable** D., *Positive Ion Oscilloscope Trigger for Schockes in Low-Density Gases*. Rev. Sci. Instr., **26**, *7*, 729 July (1955).
7. **Henshall** B.D., **Schultz** D. L., *Some Notes on the Use of Resistance thermometers for the Measurement of Heat Transfer Rates in Shock Tubes*. A.R.C. Tehnical Report C.P., *408*.
8. **Li** Y. T., *High-frequency pressure indicators for aerodynamic Problems*. NACA. T.N. *3042*.
9. **Iakab** I., **Zaharescu** A., *Metodă de măsurarea vitezei de propagare a undelor de şoc*, prezentată la Sesiunea Şt. jubiliară IMA, iulie (1960).
10. **Procopovici** E., *Măsurarea vibraţiilor şi şocurilor mecanice cu traductori capacitivi*. I.M.A., 1959.

NOTE

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI GEOMETRICE A AXELOR PRINCIPALE DE INERȚIE

DE

L. GUŞEF[1]

După o teoremă cunoscută în mecanică, axul central principal de inerţie al unei figuri plane este axul său principal de inerție pentru oricare din punctele sale.

Această teoremă indică direct axele principale de inerţie ale unei figuri date, relative la poli aparţinînd cel puţin la una din axele principale centrale de inerţie.

Prezenta lucrare tratează problema axelor principale de inerţie relative la poli care nu aparţin la nici una din axele principale centrale de inerţie. Corolarul constituie o metodă geometrică simplă pentru construcţia lor.

Fie (F) o figură plană oarecare, avînd un centru de greutate Oet axe principale centrale de inerţie unice ox, oy, indicate în aşa fel încît $I_x > I_y$; I_x şi I_y indicînd momentele de inerţie ale lui (F), în raport cu aceste axe. În raport cu figura, vom introduce definiţiile următoare:

Sistemul de coordonate eliptice E (μ_ξ, μ_η) în care se transformă sistemul ortogonal XOY, prin ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} - 1 = 0 \qquad (\mu \neq -a^2, \quad \mu \neq -b^2) \qquad (1)$$

se numeşte sistem de coordonate de inerţie E_I pentru (F) dacă

$$a^2 = \frac{I_x}{F}\,;\; b^2 = \frac{I_y}{F} \qquad (a^2 > b^2)$$

unde F reprezintă aria figurii (F).

---

[1] R. P. Bulgaria.

Curbele trecînd prin punctul M (x, y) determinate prin (1) se vor numi curbe coordonate de inerţie a lui (F) relative la polul M.

Prin fiecare din poli trec deci două curbe: elipsă şi hiperbolă, avînd aceleaşi focare $C_1\,(0, -\sqrt{a^2 - b^2})$ şi $C_2\,(0, +\sqrt{a^2 - b^2})$ independente de M. Prin urmare sistemul E este ortogonal.

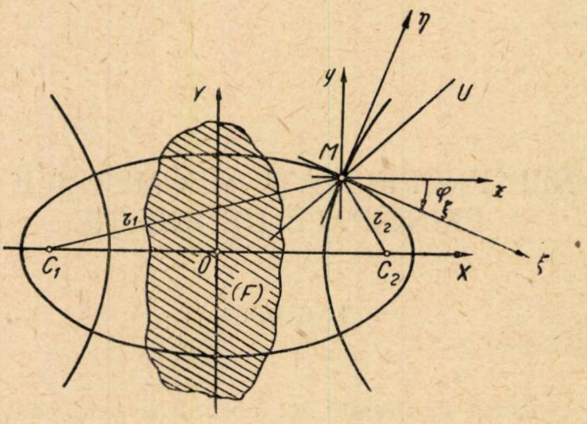


Fig. 1

Cele două puncte C_1 şi C_2 care sînt caracteristice pentru figura (F) vor fi numite focare de inerţie.

Vom stabili teorema următoare:

Direcţiile curbelor coordonate de inerţie, trecînd printr-un pol dat, sînt direcţiile axelor principale de inerţie a figurii relative la polul considerat.

Fie M (x, y) un pol arbitrar, în care $x \neq 0$, $y \neq 0$. Momentele de inerţie şi momentul centrifugal în raport cu axele ortogonale MX şi MY (fig. 1) au valorile:

$$I_{x\mu\nu} = xyF \neq 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} I_{\mu x} = I_x + y^2F = F(a^2 + y^2), \\ I_{\mu\nu} = I_y + x^2F = F(b^2 + x^2). \end{cases} \tag{3}$$

Atunci unghiurile $\varphi_{\xi,\eta}$, pe care le fac axele principale de inerţie a lui (F) relativ la polul M, cu axa ox sînt determinate de către relaţia

$$\mathrm{tg}\varphi_{\xi,\eta} = I_{\mu x} - I_{\xi\eta} = \frac{I_{x\mu\nu}}{I_{\mu\nu} - I_{\xi\eta}} \tag{4}$$

în care

$$I_{\xi,\eta} = \frac{(I_{\mu x} + I_{\mu\nu}) \pm \sqrt{(I_{\mu x} - I_{\mu\nu})^2 + 4I_{x\mu\nu}^2}}{2} \tag{5}$$

sînt momentele principale de inerție ale lui (F) relative la M, adică soluțiile ecuației :

$$I^2 - (I_{\mu x} + I_{\mu})\, I + (I_{\mu x}\, I_{\mu y} - I^2_{x\mu y}) = 0,$$

sau

$$(I_{\mu x} - I)\,(I_{\mu y} - I) - I^2_{x\mu y} = 0. \tag{6}$$

Să punem $\rho^2 = \tau^2 - \mu$ notînd $\rho^2 = \dfrac{I}{F}$

$$\tau^2 = x^2 + y^2.$$

Avînd în vedere (2) și (3) prin (6) se obține cu ușurință

$$\psi(x, y) \equiv (a^2 + \mu)\,(b^2 + \mu) - x^2(b^2 + \mu) - y^2(a^2 + \mu) = 0, \tag{7}$$

unde, dacă admitem că $\mu = -a^2$ $(\mu = -b^2)$ găsim imediat $x \neq 0$ $(y = 0)$. Ca urmare a supozițiilor pe care le-am făcut la începutul expunerii noastre, rezultă că $\mu \neq -a^2$ și $\mu \neq -b^2$, astfel că ecuația precedentă poate fi scrisă după cum urmează :

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} - 1 = 0. \tag{8}$$

Analog cu ajutorul relației (4) obținem

$$\operatorname{tg}(\varphi + q_1 \pi) = \frac{a^2 + \mu}{b^2 + \mu} \cdot \frac{y}{x} \qquad (q_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

La fiecare pol M (perechi de numere reale $-x$, y) corespunde o pereche de numere reale μ_ξ și μ_η ai căror indici pot fi așezați întotdeauna astfel încît

$$-a^2 < \mu_\xi < -b^2 < \mu_\eta < +\infty.$$

Cunoscînd μ_ξ, μ_η se obține

$$I_{\xi,\eta} = F(\tau^2 - \mu_{\xi,\eta}). \tag{10}$$

Direcțiile axelor principale de inerție sînt determinate prin formula (9).

Astfel, prin (8) se realizează o transformare a sistemului XOY într-un sistem de coordonate de inerție. Curbele coordonate de inerție, trecînd prin M (μ_ξ, μ_η) sînt

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu_\xi} + \frac{y^2}{b^2 + \mu_\xi} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{\alpha_\xi^2} - \frac{y^2}{\beta_\xi^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu_\eta} + \frac{y^2}{b^2 + \mu_\eta} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{\alpha_\eta^2} + \frac{y^2}{\beta_\eta^2} = 1 \tag{11}$$

(elipse și hiperbole ale căror focare coincid cu focarele de inerție din figură).

Să determinăm direcțiile curbelor coordonate în M.

Prin (8) avem

$$\operatorname{tg}(\theta + q_2\pi) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{b^2+\mu}{a^2+\mu}\cdot\frac{x}{y} \qquad (q_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

și comparînd această relație cu (9) obținem

$$t(\varphi + q_1\pi)\cdot\operatorname{tg}(\theta + q_2\pi) = -1,$$

de unde

$$\varphi + q_1\pi = \theta + q_2\pi + (2q_3+1)\frac{\pi}{2} \qquad (q_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

adică

$$\varphi = \theta + (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pentru fiecare valoare a lui k, unghiul φ determină o direcție unică. Dacă $k = 0$, avem

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

și pentru că sistemul E este ortogonal

$$\varphi_\xi = \theta_\eta, \quad \varphi_\eta = \theta_\xi.$$

Deci : direcția θ_η a curbelor coordonate eliptice determină direcția φ_ξ a axelor principale de inerție ale lui (F) în raport cu care momentul de inerție este cel mai mare și direcția θ_ξ a curbelor coordonate iperbolice determină direcția φ_η a axelor principale de inerție a lui (F) în raport cu care momentul său de inerție este cel mai mic.

Corolarul 1. Pentru fiecare figură plană există doi poli, avînd proprietatea următoare : toate axele trecînd prin fiecare din ei, sînt axe principale de inerție ale figurii în raport cu care momentul de inerție este întotdeauna egal cu momentul de inerție al figurii în raport cu axa care trece prin cei doi poli.

Notăm $\overline{C_1M} = \tau_1$ și $\overline{C_2\,M} = \tau_2$ unde C_1 și C_2 sînt focare de inerție a lui (F). Atunci pentru curbele (11) trecînd prin M pe lîngă

$$\alpha_\xi^2 = a^2 + \mu_\xi,$$

$$\alpha_\eta^2 = a^2 + \mu_\eta,$$

există dependențele

$$4\alpha_\xi^2 = (\tau_1 - \tau_2)^2,$$

$$4\alpha_\eta^2 = (\tau_1 + \tau_2)^2,$$

în aşa fel încît

$$\alpha_\eta^2 - \alpha_\xi^2 = \tau_1 \cdot \tau_2 \text{ sau } \rho_\xi^2 - \rho_\eta^2 = \tau_1 \cdot \tau_2 \text{ adică}$$

$$I_\xi - I_\eta = F \cdot \tau_1 \cdot \tau_2. \qquad (12)$$

Din această ultimă ecuaţie se vede că locul geometric al polilor, a căror diferenţă a momentelor principale de inerţie ale figurii, este constantă, reprezintă curba lui Kassini avînd ca focare — focarele de inerţie C_1 şi C_2.

Fie acuma U, un ax oarecare, trecînd prin M.

Avem

$$I_\eta \leqslant I_u \leqslant I_\xi$$

şi rezultă că egalitatea $I_\eta = I_u = I_\xi$,
este posibilă numai dacă $\tau_1 = 0$ sau $\tau_2 = 0$ adică atunci cînd $M \equiv C_1$ sau $M \equiv C_2$.

Deci : pentru fiecare figură există poli, la care toate axele sînt principale, ei fiind focare de inerţie ale figurii. Aceşti poli sînt unici.

Pentru polii $M = C_{1,2}$ vom avea :

$y = 0$ şi $x^2 = a^2 - b^2 \neq 0$ aşa încît prin (7) vom obţine

$\mu_\xi = -b^2$, $\mu_\eta = x^2 - a^2 = -b^2$ adică $\mu_\zeta = \mu_\eta$.

Urmează de aici că

$$\rho_\xi^2 = \rho_\eta^2 = a^2 \quad \text{sau} \quad I_\eta = I_u = I_\xi = I_x.$$

Afirmaţia este dovedită.

Corolarul 2. Într-un pol dat, direcţia axului principal de inerţie în raport cu care momentul principal de inerţie a lui (F) este cel mai mare (cel mai mic) este bisectoarea unghiului exterior (interior) format de dreptele trecînd prin pol şi prin cele două focare de inerţie ale figurii.

Avînd în vedere (11), este suficient să menţionăm proprietăţile cunoscute ale elipsei şi hiperbolei în geometria analitică. Tangenta elipsei (hiperbolă) într-un punct dat este bisectoarea unghiului exterior (interior) format de dreptele trecînd prin acest punct şi prin focare.

Această observaţie face ca afirmaţia să fie evidentă.

Am obţinut astfel un rezultat care ne permite, cunoscînd focarele de inerţie ale figurii, de a trasa în mod geometric axele principale de inerţie relative unui pol oarecare ($x \neq 0$, $y \neq 0$).

Afirmaţiile precedente pot fi extinse (generalizate) pentru polii M ai axului OX şi M ai axului OY de asemenea.

În ecuaţia (8) pentru polul M (x, y) presupunerea că $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, era capitală. Fie acum M (x, y) un pol cu coordonatele $y = 0$ şi $x = 0$. Atunci din ecuaţia

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ y \neq 0}} \psi(x, y) \equiv (a^2 + \mu)(b^2 + \mu - y^2) = 0,$$

vom avea $\mu_\xi = -a^2$ şi $\mu_\eta = -b^2 + y^2 > -b^2$ în aşa fel încît curbele coordonate de inerţie, trecînd prin M, vor fi :

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{\alpha_\eta^2} + \frac{y^2}{\beta_\eta^2} = 1.$$

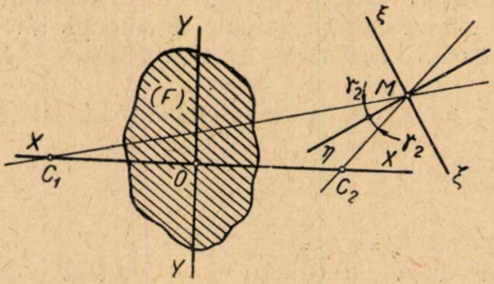


Fig. 2

Este evident că pentru sistemele E, axa Oy este un element limită al curbelor coordonate pentru poli M $(x - 0,\ y = 0)$.

Analog

dacă $|x| > \sqrt{a^2 - b^2}$ şi $y \to 0$ curbele coordonate de inerţie, sînt :

$$\begin{cases} y = 0 \\ |x| > \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{\alpha_\eta^2} + \frac{y^2}{\beta_\eta^2} = 1,$$

dacă $|x| < \sqrt{a^2 - b^2}$ şi $y \to 0$ curbele coordonate de inerţie sînt

$$\begin{cases} y = 0 \\ |x| < \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{\alpha_\xi^2} - \frac{y^2}{\beta_\xi^2} = 1,$$

dacă $x \to 0$ şi $y \to 0$ curbele coordonate de inerţie sînt

$$\begin{cases} y = 0 \\ |x| < \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad x = 0.$$

În consecinţă, pentru fiecare pol M $(x \neq \sqrt{a^2 - b^2},\ y \to 0)$ părţi ale axei OX sînt elemente limită ale curbelor coordonate în sistemele E.

Vom adăuga deci curbelor coordonate de inerţie după (1) elementele lor limită şi axele OX şi OY. Atunci este evident că şi pentru polii axelor principale centrale de inerţie toate afirmaţiile sînt juste. Fac excepţie numai focarele C_1 şi C_2 ale căror curbe coordonate de inerţie sînt în general nedeterminate.

Dar, este posibil, după corolarul 1 să se determine axele principale de inerţie relative la punctele C_1 şi C_2 în aşa fel, ca concluziile să fie juste şi pentru aceşti poli.

Ca axe principale de inerţie ale lui (F) relative la focarele sale, vom lua axul OX şi dreapta trecînd prin focar, paralelă axei coordonate OY.

În încheiere, observăm că dacă $I_x = I_y$ ($a^2 = b^2$, $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$) se obţine, în special un caz în care sistemul coordonat cartezian XOY se transformă într-un sistem polar. În acest caz adeverirea acestei concluzii se verifică imediat.

Primită la redacţie la 16 decembrie 1959

ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается задача главных осей инерции плоской фигуры относительно полюсов, не принадлежащих ни одной из главных центральных осей инерции.

Пользуясь понятием о координатной кривой инерции фигуры относительно заданного полюса, доказывается, что направления координатных кривых инерции, проходящие через заданный полюс, являются главными осями инерции относительно рассматриваемого полюса.

На основании некоторого геометрического свойства показывается, что направления главных осей инерции получаются при помощи простого графического построения.

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE DES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur traite le problème des axes principaux d'inertie d'une figure plane, par rapport aux pôles n'appartenant à aucun des axes principaux centraux d'inertie.

En se servant de la notion de courbe coordonnée d'inertie de la figure par rapport à un pôle donné, il démontre que les directions des courbes coordonnées d'inertie, qui passent par un pôle, sont les directions des axes principaux d'inertie par rapport au pôle considéré.

En vertu d'une propriété géométrique, l'auteur montre que les directions des axes principaux d'inertie peuvent être obtenues au moyen d'une construction graphique simple.

BIBLIOGRAFIE

1. APPELL P., DAUTHEVILLE S., *Précis de mécanique rationnelle*, 1924, 357.
2. JOUCOFFSKI N. E., *Mécanique rationnelle*, 1952, 560.

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

CONGRESUL UNIONAL DE MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

MOSCOVA, 27 IANUARIE – 3 FEBRUARIE 1960

DE

ELIE CARAFOLI şi TIBERIU HACKER

Între 27 ianuarie şi 3 februarie 1960 a avut loc la Moscova primul Congres Unional de Mecanică Teoretică şi Aplicată, organizat de Secţia de Ştiinţe Tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., Institutul de Mecanică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi de universitatea Lomonosov.

Acest eveniment ştiinţific din capitala Uniunii Sovietice, prin amploarea sa, prin numărul mare de comunicări prezentate şi prin actualitatea problemelor tratate, se situează printre cele mai mari şi mai interesante congrese pe plan mondial.

Însemnătatea cu totul deosebită a Congresului este reliefată şi de participarea foarte numeroasă a oamenilor de ştiinţă sovietici. S-au întîlnit la acest Congres cîteva mii de delegaţi de pe întreg întinsul ţării. Au fost reprezentate, pe lîngă marile centre ştiinţifice, ca Moscova, Leningrad, Kiev, Harkov şi cercuri ştiinţifice din oraşe mai mici şi îndepărtate cum sînt : Berdiansk, Nalcik, Peonii, Saransk, Cimkent, Cernăuţi etc. Au fost astfel prezente peste 50 de centre, dintre care 10 din Asia. Această largă participare dovedeşte dezvoltarea şi importanţa care se acordă activităţii de cercetare în U.R.S.S.

De asemenea, o altă trăsătură ce trebuie subliniată este larga participare a tinerilor cercetători. Se poate aprecia că, din numărul total al comunicărilor prezentate, circa 35% au aparţinut tinerelor cadre. Nivelul acestor comunicări, felul de tratare, problemele atacate, s-au dovedit a fi interesante şi valoroase.

Semnalăm în mod special participarea unor oameni de ştiinţă bine cunoscuţi în toată lumea, membri ai Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., specialişti de renume mondial, care s-au ilustrat în diferite domenii ale mecanicii aplicate ca : I. I. Artobolevski, N.H. Arutiunian, A.A. Dorodniţîn, S.A. Hristianovici, A.A. Iliuşin, M.V. Keldîş, M.A. Lavrentiev, N.I. Musheli̦şvili, A.A. Nikolski, I.N. Rabotnov, L.I. Sedov sau a profesorilor S.V. Falkovici, F.I. Frankl, A.L. Goldenveizer, G.V. Kamenkov, L.G. Loiţianski, A.I. Lurie, S.G. Mihlin, P.I. Polubarinova-Kocina, H.A. Rahmatulin, V.V. Rumeanţev ş.a.

Au participat de asemenea şi oaspeţi străini, figuri reprezentative ale vieţii ştiinţifice internaţionale ca : Kuo Iun-Huai (R.P. Chineză), Acad. W. Olzsak (R.P.P.) M. Roy, secretarul general al Uniunii Internaţionale de Mecanică Aplicată, şi J. Kravtchenko (Franţa), W.T. Koiter

(Olanda), J. Kurzweil, J. Brilla, J. Drásky (R.S.C.), A. Ferri, J. P. Den Hartog, W. D. Hayes, N.J. Hoff, H.W. Liepmann, W. Prager, N.J. Sokolnikoff (S.U.A.), B. Dolapciev (R.P.B.), E. Schimke (R.F.G.) etc.

Participanţii romîni au fost : acad. Elie Carafoli, prof. Caius Iacob, membru corespondent al Academiei R.P.R., ing. Tiberiu Hacker, şef de laborator la Institutul de mecanică aplicată. Se găsea la Moscova de asemenea şi conf. Tr. Demian.

Lucrările congresului s-au desfăşurat în cadrul a trei secţii, fiecare avînd un număr de subsecţii :

I. *Secţia de mecanică generală şi aplicată*, prezidată de M. V. Keldîş, cu următoarele subsecţii :

I. — 1. Mecanica analitică şi teoria stabilităţii mişcării,
I. — 2. Teoria giroscopului, oscilaţii, reglaj,
I. — 3. Teoria mecanismelor şi maşinilor.

II. — *Secţia de mecanică a lichidelor şi gazelor*, prezidată de L. I. Sedov, cu subsecţiile :

II. — 1. Hidromecanica generală,
II. — 2. Aerodinamica şi dinamica gazelor,
II. — 3. Magneto-hidrodinamica şi teoria mişcărilor nestaţionare a gazelor,
II. — 4. Mişcarea fluidelor vîscoase, strat limită, turbulenţă, transmisie de căldură,
II. — 5. Mişcarea fluidelor în medii poroase,
II. — 6. Hidrodinamica aplicată.

III. — *Secţia mecanicii corpurilor solide*, prezidată de N. I. Mushelişvili, cu subsecţiile :

III. — 1. Teoria elasticităţii,
III. — 2. Teoria plasticităţii şi fluajului,
III. — 3. Teoria plăcilor şi a învelitorilor,
III. — 4. Probleme de dinamică,
III. — 5. Mecanica solului,
III. — 6. Mecanica construcţiilor,
III. — 7. Reologie.

După cum se vede, tematica congresului a fost foarte variată şi complexă.

Impresionant este şi numărul comunicărilor prezentate, peste 660 lucrări, în care au fost concretizate rezultatele cercetărilor desfăşurate în vederea rezolvării celor mai diferite probleme de mecanică teoretică şi aplicată, ridicate de dezvoltarea impetuoasă a ştiinţei şi tehnicii noi.

Comunicările au oglindit, pe de-o parte preocupările cercetătorilor teoreticieni pentru dezvoltarea ramurii ştiinţifice respective, prin atacarea unor probleme fundamentale, de importanţă principială, generală, iar pe de altă parte atenţia deosebită pe care o acordă ştiinţa sovietică rezolvării celor mai noi şi complicate probleme puse de tehnică.

Pentru exemplificarea celor spuse amintim că, pe lîngă numeroase comunicări de mecanică teoretică (circa 15), dintre care cităm comunicarea prof. A.I. Lurie din Leningrad, expunînd o teorie a mişcărilor relative sub aspect general, considerîndu-se ca necunoscute atît mişcarea relativă cît şi cea de transport, şi comunicarea lui F.R. Gantmacher asupra structurii transformărilor canonice în dinamică, s-au tratat şi chestiuni de mecanică aplicată, cum ar fi teoria giroscopului cu aplicaţiile sale, expusă de A.I. Işlinski, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., sau comunicarea lui V.S. Novoselov asupra mişcării sistemelor giroscopice nelineare, sau încă cea a lui V.M. Matrosov despre stabilitatea stabilizatorilor giroscopici.

Vom trece în revistă foarte pe scurt principalele preocupări ştiinţifice ce s-au putut desprinde din comunicările prezentate în cele trei secţii ale congresului.

★

I. Mergînd pe linia adîncirii unor cercetări cu un obiectiv practic foarte precis şi imediat, o întreagă subsecţie din cadrul secţiei I a fost rezervată problemelor de teoria mecanismelor şi maşinilor. În această subsecţie majoritatea comunicărilor s-au încadrat în trei domenii mari: teoria cinematică şi geometrică a mecanismelor, probleme dinamice şi de stabilitate ale mecanismelor, teoria lubrificaţiei din punct de vedere mecanic.

În ceea ce priveşte teoria geometrică şi cinematica mecanismelor, s-au detaşat ca probleme moderne, de actualitate, aceea a sintezei cinematice aproximative şi sinteza mecanismelor spaţiale. În legătură cu prima problemă se pot cita: comunicarea lui N.I. Levitski asupra sintezei aproximative a mecanismelor articulate cu două grade de libertate, comunicările lui I.L. Gheronimus şi S.A. Cerkudinov în legătură cu utilizarea în problemele de sinteza mecanismelor a curbelor lui Burmester etc.

De probleme dinamice şi de stabilitate a mecanismelor s-au ocupat mai multe comunicări. În primul rînd, trebuie amintită comunicarea de sinteză a lui I.I. Artobolevski (*Problemele fundamentale ale dinamicii mecanismelor*), în care expune rezultatele mai importante obţinute în acest domeniu în ultimii 5—10 ani.

Comunicările din domeniul mecanicii lubrificaţiei prezentate la această subsecţie aveau drept obiect în special probleme de stabilitate a fusului în lagărul cu lubrifiant (comunicarea lui A.T. Poleţki) sau probleme complexe de vibraţie a fusului în stratul de lubrifiant (comunicarea lui A.G. Burgviţ asupra determinării frecvenţei proprii de oscilaţie a fusului în stratul de lubrifiant).

Celelalte două subsecţii, aceea de mecanica analitică şi teoria stabilităţii mişcării, precum şi aceea de giroscopie, vibraţii şi reglaj, le vom analiza împreună, deoarece problemele se întrepătrund: în prima fiind expuse comunicări asupra stabilităţii unor sisteme reglate (comunicările lui V.A. Iakubovici, I.A. Riabov, M.T. Kuklaşeva şi M. Iataev, A.K. Bedelbaev, A.M. Liotov), iar în a doua lucrări privind reglajul, vibraţiile şi teoria giroscopului sub aspectul stabilităţii (ex. N.N. Krasovski, M.L. Bîhovski, A.P. Proskuriakov şi alţii).

Un loc important în lucrările secţiei de mecanica generală şi aplicată l-au ocupat diferitele probleme de stabilitatea mişcării, comenzi şi reglaj automat, precum şi teoria nelineară a oscilaţiilor. Şi aici, prin alegerea problematicii, congresul s-a dovedit a merge pe linia celor mai actuale şi moderne preocupări.

Şi în aceste domenii, lucrările de pură teorie, din domeniul teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, erau completate cu comunicări privind diverse aspecte aplicative.

Au fost consacrate un număr impresionant de comunicări (aproape 30) teoriei matematice a stabilităţii mişcării. Acest lucru, de altfel era şi de aşteptat întru cît se ştie că în U.R.S.S. există astăzi cea mai puternică şcoală de teoria stabilităţii din întreaga lume.

Importanţa cercetărilor în acest domeniu a fost de altfel relevată de curînd de acad. A.N. Nesmeianov, Preşedintele Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S., cu ocazia decernării premiului Lenin pe 1960, postmortem, lui N.G. Cetaev, unul din organizatorii congresului, considerat ca întemeietor al şcolii sovietice care studiază teoria stabilităţii.

Dintre lucrările teoretice de stabilitatea mişcării, amintim doar cîteva: N. N. Krasovski a prezentat o comunicare de sinteză asupra metodei a II-a a lui Liapunov, una din cele mai fecunde metode din acest domeniu al teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare: S.K. Persidski a demonstrat cîteva teoreme bazate pe această metodă cu indicarea prin evaluări şi a limitelor respective de aplicabilitate.

Legat de necesitatea considerării unor probleme nelineare, de necesitatea determinării în multe cazuri a naturii frontierelor de stabilitate, precum şi de abordarea unor cazuri mai largi de perturbaţii iniţiale, s-a reluat studierea, în formulări noi, a problemei cazurilor critice. Acestei probleme i-au fost consacrate comunicări interesante ca aceea a lui G.V. Kamenkov, S.N. Şimanov, N.G. Bulgakov, şi ale altora.

Au fost prezentate lucrări tratînd probleme speciale de stabilitate, ca problema ultrastabilităţii la modelarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare implicite (comunicarea lui M.L. Bîhovski), a existenţei şi stabilităţii soluţiilor periodice ale ecuaţiilor cu diferenţe finite etc. Tot aici este de amintit şi comunicarea lui Iaroslav Kurzweil (R. S. Cehoslovacă) asupra stabilităţii în legătură cu funcţiile generalizate.

Considerarea sistemelor comandate şi reglate, mai precis, întîrzierea ce apare atît în funcţionarea aparatelor automate, cît şi în răspunsul maşinii, a făcut necesară studierea pe plan teoretic a proprietăţilor soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale de o formă specială, denumite în literatura romînească, ecuaţii cu argument întîrziat.

Astfel. S.N. Şimanov a cercetat stabilitatea mişcărilor descrise de sisteme cu întîrziere în anumite cazuri critice. Lui I.A. Riabov îi aparţine o interesantă punere a problemei liniare a stabilizării automate a avionului, prin utilizarea întîrzierii sistemului automat de control drept parametru mic.

Dintre numeroasele comunicări asupra stabilităţii reglajului automat, cităm comunicarea lui N.N. Krasovski, care utilizează metoda funcţiilor V., într-o problemă de reglaj optimal în cazul unor perturbaţii întîmplătoare, dînd condiţiile necesare de optimum pentru acţiunea de control şi făcînd legătura cu teoria stabilităţii.

Problema reglajului optimal a fost prezentată şi în alte comunicări ale congresului.

În domeniul controlului automat, relevăm comunicarea lui A. M. Liotov asupra problemei stabilizării automate a mişcării fugoide a avionului la aterizare şi decolare ; drept „glisadă" în aceste evoluţii din apropierea solului se consideră razele emise de o instalaţie radio. Este interesant de remarcat că fenomenul se modelează cu ajutorul unor ecuaţii diferenţiale depinzînd explicit de timp, definite, în cazul aterizării, pe un interval finit de timp.

Un număr însemnat de comunicări ale acestei secţii au fost consacrate teoriei vibraţiilor şi în special teoriei neliniare şi cvasiliniare.

Precum se ştie, teoria neliniară a vibraţiilor încă n-a căpătat nici pînă azi o soluţionare general valabilă, clasică. Dacă problema a fost rezolvată în anumite cazuri particulare (ex. metoda lui Van der Pol), dacă există gata elaborat un aparat matematic riguros, adecvat unor fenomene vibratorii, neliniare (ex. metodele lui Poincaré şi Liapunov), totuşi acestea nu epuizează toate cazurile de interes practic. Pentru acest motiv, găsirea unor metode cît mai generale, pentru rezolvarea problemelor neliniare de vibraţii puse de fizică, de practică, a rămas încă actuală şi şcoli întregi în toată lumea se ocupă de aceasta. Astfel, sînt cunoscute lucrările lui Andronov, Vitt şi Haikin, Pontreaghin, Dorodniţîn, Tihonov, Krîlov, Bogoliubov etc. din U.R.S.S., Minovski şi Lefschetz din S.U.A., Sansone şi Conti din Italia, Haiasi din Japonia etc.

Imensa majoritate (cca. 70—80%) dintre comunicările consacrate teoriei vibraţiilor, aveau ca obiect probleme neliniare sau cvasilineare.

În comunicarea lor de sinteză (metode analitice în teoria vibraţiilor neliniare), N.N. Bogoliubov şi I.A. Mitropolski s-au oprit în special asupra metodei asimptotice elaborate de N.M. Krîlov şi N.N. Bogoliubov, extins asupra cercetării sistemelor vibratorii cu parametrii variabili şi asupra unor tipuri de vibraţii de relaxare şi puternic neliniare. P.M. Senik (Lvov) a prezentat o comunicare consacrată problemei inverse a acestei metode asimptotice.

★

II. În cadrul Secţiei a II-a, mecanica lichidelor şi gazelor, s-a prezentat un număr foarte mare de comunicări, tratînd probleme deosebit de interesante şi actuale.

Pentru a ilustra cele spuse, vom aminti cîteva dintre aceste comunicări, care chiar numai prin titlu sînt semnificative.

Astfel, L.G. Loiţianski a prezentat *Teoria semiempirică a interacţiunilor proceselor de schimb molecular şi molar în mişcarea turbulentă a fluidelor*, în care, pe baza generalizării ipotezelor locale asupra mişcării fluidului în regim de trecere, se stabilesc noi formule pentru frecare şi transferul de căldură. Rezultatele cîtorva calcule după noua teorie diferă de cele ale teoriei lui Kármán.

O altă comunicare interesantă este aceea a lui V.V. Struminski : *Starea actuală a problemelor scurgerii supersonice*. Sînt prezentate o serie de rezultate de comparaţie între teorie şi experienţă sau de soluţii asupra posibilităţilor teoriei liniare şi limitele ei de aplicabilitate. Autorul reuşeşte că cuprindă un cîmp larg de probleme ce se pun în prezent în studiul scurgerilor supersonice. Alte cîteva comunicări cu caracter de sinteză ca *Unde neliniare* de N.N. Moiseev, *Mişcarea nestaţionară în teoria filtraţiei* de P.I. Polubarinova-Kocina, *Asupra teoriei construirii modelelor mecanice ale mediului continuu* de L.I. Sedov, au fost prezentate de asemenea în şedinţele plenare.

Comunicările prezentate în cadrul subsecţiilor au în general un caracter de aprofundare a unor probleme speciale. Astfel, putem aminti printre altele, comunicările : *Teoria jeturilor de fluid ideal* de N.I. Gurevici în care se arată că această problemă a fost reluată în ultimii 20—30 de ani, tratîndu-se probleme legate de considerarea greutăţii fluidului sau mişcării nestaţionare, *Apariţia şi dezvoltarea cavitaţiei*, sau *Scurgerea cu formarea cavitaţiei* de L.A. Epstein, respectiv G.V. Logvinovici. În cîteva din comunicările prezentate au fost studiate probleme de stabilitate a scurgerii fluidelor vîscoase, scurgeri vîscoase în prezenţa reacţiilor chimice, vibraţiile lichidelor în vase, unde pe suprafaţa lichidelor grele, scurgeri de gaze şi lichide relativiste etc. Trebuiesc amintite cercetările efectuate în vederea elaborării sau adaptării unor metode matematice, pentru rezolvarea problemelor de hidrodinamică şi aerodinamică, ca metoda micului parametru în calculul rezistenţei de undă, metoda reţelelor etc.

În privinţa lucrărilor consacrate problemelor de aerodinamică, se remarcă tematica modernă a acestora. Pentru ilustrare este suficient să amintim cîteva dintre acestea ca de exemplu : *Mişcarea nestaţionară a aripii de dimensiuni finite într-un mediu compresibil* aparţinînd cunoscutei cercetătoare E.A. Krasilscikova. Pe baza ipotezei micilor perturbaţii se obţine potenţialul de viteze pentru toate tipurile de mişcări nestaţionare (cu viteze subsonice şi supersonice) ale aripii cu formă în plan arbitrară (însă simetrică) *Problema directă în teoria curenţilor transonici* de F.I. Frankl, în care se tratează două exemple : *a*) scurgerea plan paralelă în ajutajul Laval cu pereţi daţi, cu viteză aproape sonică în secţiunea îngustă, şi *b*) scurgerea simetrică în jurul unui profil simetric cu viteză subsonică la infinit şi supersonică local.

De asemenea vom cita lucrarea *Mişcarea plană transonică a gazelor* a lui S.V. Falkovici în care se dau soluţii exacte pentru o serie de probleme, ca scurgerea în jurul unui profil aflat sub unghi de atac în curent sonic etc.

O altă comunicare interesantă este *Interferenţa aripii plane de mică alungire cu fuzelajul şi gondolele de la capete* prezentată de V.V. Keldîş, în care se întrebuinţează metoda transformărilor conforme (aproximativă în cazul general şi exactă în anumite cazuri particulare) a secţiunii transversale a aripii.

S-au prezentat de asemenea comunicări asupra mişcărilor conice fără simetrie axială, sau curenţi conici nelineari ca de exemplu : *Calculul cîtorva scurgeri conice fără simetrie axială* de P.I. Ciuşkin şi V. V. Scenikov sau *Scurgeri conice neliniare de gaze*, de B.M. Bulah.

Alte lucrări au ca obiect studiul unor probleme deosebit de actuale cum sînt cele privind mişcările hipersonice. Dintre acestea, vom cita comunicarea lui A.A. Nikolski, *Asupra curenţilor* *de gaze în ajutaje hipersonice* şi lucrarea lui V.V. Sîcev, *Scurgerea spaţială hipersonică în jurul corpurilor subţiri la mari unghiuri de atac.*

De asemenea, au fost prezentate comunicări privind teoria şi experimentarea unor ejectoare şi a tubului de şoc cu acţiune periodică.

Se remarcă în mod deosebit atenţia care se acordă cercetărilor de magneto-hidrodinamică, reflectată prin numărul mare de comunicări prezentate în cadrul subsecţiei „Magneto-hidrodinamică şi teoria mişcărilor nestaţionare a gazelor". Vom menţiona numai cîteva dintre ele:

Astfel G.S. Goliţin, A.G. Kulikowski şi K.P. Staniukovici au prezentat o lucrare de sinteză în care sînt expuse principalele probleme de magneto-hidrodinamică şi aplicaţiile ei în tehnică şi astrofizică. O serie de alte comunicări sînt consacrate rezolvării unor probleme speciale ale magneto-hidrodinamicii, ca de exemplu: scurgeri unidimensionale, plane, sau axial simetrice de lichide şi gaze în cîmpuri magnetice etc.

Interesante sînt comunicările cu caracter experimental din domeniul magneto-hidrodinamicii dintre care menţionăm *Agregat cu plasmă fierbinte şi unele cercetări experimentale asupra cîtorva fenomene magneto-hidrodinamice,* de A.M. Kostîlev, V.N. Pelevin, şi A.A. Porotnikov sau *Încercări de accelerare a maselor gazoase ionizate prin forţe electrodinamice într-un agregat special* de E.P. Vaulin, N.A. Cesnekov, M.F. Sirokov. Aceste comunicări sînt edificatoare asupra direcţiei cercetărilor în acest domeniu.

★

III. În şedinţele plenare ale secţiei a III-a s-au ţinut comunicări de sinteză în profilul a 5 subsecţii. Astfel, comunicarea lui N.I. Mushelişvili şi I. N. Vekua a avut ca obiect utilizarea teoriei funcţiilor analitice în diferitele domenii ale teoriei elasticităţii precum şi eficacitatea şi generalitatea metodelor bazate pe aceasta. Comunicările de sinteză ale lui I.N. Rabotnov şi A.A. Iliuşin s-au încadrat în tematica subsecţiei a II-a, primul dînd o trecere în revistă a fenomenelor fizice reunite sub denumirea generică de fluaj, precum şi a unor domenii de aplicaţie practică a teoriei. Comunicarea lui A.L. Goldenveizer, *Dezvoltarea teoriei învelitorilor elastice subţiri* a prezentat realizările mai importante în teoria liniară a echilibrului static al învelitorilor elastice izotrope, în teoria neliniară a invelitorilor elastice subţiri, inclusiv teoria stabilităţii şi dinamicii învelitorilor şi teoria învelitorilor compuse din straturi şi constructiv anizotrope. Accentul se pune pe discutarea metodelor aproximative. Comunicarea prezentată de H.A. Rahmatulin, *Propagarea perturbaţiilor în mediile continue,* este o trecere în revistă a principalelor lucrări, în special teoretice, asupra propagării vibraţiilor într-un mediu elastic ideal în aproximaţie liniară, în medii neliniar-elastice, elasto-plastice şi elasto-vîsco-plastice. În sfîrşit, V.A. Florin a prezentat o comunicare de sinteză asupra stadiului actual al mecanicii solurilor şi asupra problemelor care se pun în acest domeniu.

La secţia a III-a a congresului au fost prezentate comunicări din teoria elasticităţii, tratînd probleme din domeniul liniar şi neliniar. Astfel, o serie de comunicări au fost consacrate problemelor axial simetrice a teoriei elasticităţii, precum şi anumitor dependenţe, care există între soluţiile acestor probleme şi problemele plane ale teoriei elasticităţii.

Problema funcţiilor de tensiune şi a deplasărilor în teoria spaţială a elasticităţii a fost abordată într-un număr apreciabil de lucrări. Pe linia utilizării acestora la soluţionarea unor probleme concrete s-au dat metode de determinarea lor sub formă de polinoame întregi, precum şi noi forme a soluţiei generale a problemelor spaţiale a teoriei elasticităţii, care se exprimă prin funcţii armonice.

În cadrul congresului au fost comunicate lucrări care abordează diferite probleme dinamice ale termoelasticităţii, precum şi probleme de contact.

Teoria elasticităţii corpurilor anizotrope a făcut obiectul unor numeroase comunicări, din care semnalăm o lucrare a lui I.I. Goldenblat, care se ocupă cu teoria deformaţiilor finite a corpurilor anizotrope, precum şi comunicarea lui G.F. Mandjavidze, care aplică cunoscutele rezultate obţinute de şcoala matematică gruzină în rezolvarea problemei Hilbert la anumite probleme din teoria plană a elasticităţii corpurilor anizotrope. Soluţionarea ecuaţiilor dinamice a teoriei elasticităţii corpurilor anizotrope a fost abordată în lucrarea lui S. Kaliski, autorul reuşind să dea o nouă metodă în ipoteza că corpul se găseşte într-un cîmp magnetic.

În cadrul aceleiaşi secţii, numeroase comunicări au tratat aplicarea diferitelor metode matematice la soluţionarea problemelor teoriei elasticităţii.

Astfel pe linia utilizării metodelor directe în fizica matematică, S.G. Mihlin s-a ocupat într-o comunicare de metodele variaţionale în teoria elasticităţii.

Aplicaţiile ecuaţiilor integrale au făcut obiectul comunicărilor prezentate de D.I. Şerman şi G.I. Popov, primul privind problemele statistice ale teoriei elasticităţii, iar al doilea ocupîndu-se cu aplicarea unor noi metode la soluţionarea problemelor de contact.

În domeniul teoriei plasticităţii şi a fluajului s-au prezentat comunicări privind generalizarea teoriei scurgerii plastice şi cercetarea plasticităţii materialelor la solicitări compuse. Au fost prezentate comunicări privind probleme de contact, din care cităm comunicarea lui V.I. Boiko asupra problemei lui Hertz în cazul apariţiei unor zone interioare de plasticitate, precum şi aceea a lui N.H. Arutiunian asupra problemei plane de contact a fluajului.

În subsecţia a 3-a au fost prezentate comunicări din domeniul plăcilor şi invelitorilor. Au fost abordate probleme din domeniul liniar şi neliniar, al metodelor de integrare asimptotică al teoriei stabilităţii, precum şi din teoria învelitorilor de grosime medie. S-au considerat atît învelitorile cu izotropie de material cît şi cele anizotrope (anizotropia fiind datorită fie materialului, fie structurii).

O altă subsecţie a congresului a fost consacrată mecanicii construcţiilor. În această privinţă prof. A.A. Umanski, bine cunoscut prin teoria pe care a elaborat-o asupra răsucirii împiedicate a barelor de profil închis, a prezentat o comunicare privind metoda analogiilor şi modelării în problemele de bare şi construcţii cu pereţi subţiri. Metodele generale de soluţionare a problemelor neliniare ale mecanicii construcţiilor au format obiectul comunicării lui L.N. Stavraki. M.I. Leonov a tratat problema generalizării teoriei răsucirii barelor cu pereţi subţiri.

O întreagă subsecţie a fost consacrată unuia din cele mai moderne domenii ale mecanicii corpurilor deformabile, reologiei. Menţionăm aici comunicările prezentate în colaborare de M.P. Volarovici privind : cercetarea proprietăţilor elasto-plastice a unor medii poroase prin metoda impulsurilor prin ultrasunete; cinematica şi dinamica procesului de scurgere vîsco-plastică a sistemelor de dispersie în jurul unor corpuri; şi problema plană a mişcării unui mediu vîscoplastic între două plane, care formează un unghi ascuţit.

★

La Congresul unional de Mecanică Teoretică şi Aplicată membrii delegaţiei noastre au prezentat comunicări, care au fost primite cu interes de către cercetătorii sovietici.

Astfel, prof. E. Carafoli a prezentat, în colaborare cu Adriana Năstase, o comunicare privind rezistenţa minimă a aripilor trapezoidale în curent supersonic, prof. Caius Iacob a expus o comunicare asupra scurgerilor compresibile subsonice în jurul obstacolelor de formă dată, iar T. Hacker, şef de laborator la Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., a prezentat o comunicare asupra stabilităţii avioanelor cu decolare verticală.

De asemenea a fost prezentată lucrarea *Profilarea camelor sinusoidale şi cosinusoidale printr-o curbă generatoare* de prof. D. Tutunaru şi conf. Tr. Demian.

Alte lucrări romîneşti au fost reţinute cu interes, dar nu au putut fi expuse personal de autorii lor.

Astfel, a fost înregistrată şi primită cu interes comunicarea prof. Şt. Bălan, V. Petcu şi S. Răutu, *Domeniul de folosire a cromoplasticităţii*, iar M. Arcan şi M. Tannenbaum au trimis comunicarea *Modelarea fotoelastică a grinzilor fier-beton în stadiul de fisurare* care a fost expusă de colegii sovietici.

CONCLUZII

Enumerarea succintă a unor domenii de cercetare, ca aceea de mai sus, nu epuizează nici pe departe tematica celor 3 secţii ale Congresului. Acest lucru este uşor de înţeles, dacă se ţine seamă de numărul mare de peste 660 comunicări ţinute.

De asemenea, spaţiul restrîns al unui articol de revistă nu ne permite să ne oprim asupra altor aspecte ale lucrărilor Congresului, care ne-au furnizat preţioase învăţăminte. Unul din aceste aspecte este, de exemplu, modul impecabil în care au fost organizate lucrările şi care au permis desfăşurarea în cele mai bune şi confortabile condiţii tehnice şi strict conform planului şi orarului stabilit a acestei complexe manifestări ştiinţifice.

Congresul a însemnat pentru noi o verificare a activităţii noastre de pînă atunci, a orientării cercetărilor de mecanică de la noi.

Astfel, am putut constata că principalele probleme studiate în Institutul de mecanică aplicată se încadrează în linia generală de preocupări ale ştiinţei sovietice.

Dar rezultatul cel mai important al participării noastre la această mare manifestare ştiinţifică constă în avantajele pe care le-am avut prin urmărirea lucrărilor ei. În afară de faptul că acestea ne-au oferit gata sintetizat stadiul actual şi direcţiile principale de dezvoltare a cercetărilor de mecanică aplicată, dar ele ne-au furnizat şi un strălucit model de legare a cercetărilor fundamentale din domeniul mecanicii cu cele mai importante aplicaţii practice, de punere a rezultatelor cercetărilor în slujba promovării tehnicii noi. Într-adevăr, realizările epocale ale tehnicii sovietice în toate compartimentele ei, de la automatizarea proceselor tehnologice pînă la zborurile cosmice, au devenit posibile numai în urma aplicării rezultatelor ştiinţifice cele mai noi, de care, cel puţin parţial, am putut lua cunoştinţă şi noi cu ocazia Congresului de mecanică. Pe de altă parte, lucru care a ieşit de asemenea deosebit de clar, o muncă ştiinţifică de atari proporţii, cu un potenţial atît de ridicat, utilizînd o bază materială atît de bogată, nu poate fi concepută fără un scop social, fără necesitatea rezolvării unor probleme de mare importanţă, care, în ultimă instanţă, să ducă la dezvoltarea în ritm accelerat a vieţii materiale.

Aplicarea învăţămintelor dobîndite cu ocazia participării noastre la lucrările primului Congres de mecanică teoretică şi aplicată va duce, sîntem convinşi, la îmbunătăţirea muncii noastre ştiinţifice şi a organizării propriilor noastre cercetări din Institutul de mecanică aplicată.

CONSFĂTUIREA

„ASUPRA TEHNICII AŞCHIERII METALELOR ŞI TEHNICII RODAJULUI"

Pe linia directivelor Congresului al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn şi a Hotărîrii Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn şi a Consiliului de Miniştri cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producţiei, Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R. organizează în colaborare cu Ministerul Industriei Grele, consfătuirea *„Asupra tehnicii aşchierii metalelor şi tehnicii rodajului"*.

Această consfătuire are scopul de a intensifica strîngerea legăturilor dintre cercetarea ştiinţifică şi producţie.

La consfătuire sînt invitaţi a lua parte, la un amplu şi util schimb de experienţă, specialişti din întreprinderi, institute de învăţămînt superior şi institute de cercetări.

Tematica consfătuirii se referă la probleme de cinematica şi dinamica aşchierii, metode moderne de prelucrare, utilizarea materialelor noi de scule, regimuri economice de prelucrare; operaţia de rodaj ca etapă finală de prelucrare a suprafeţelor în frecare şi influenţa sa asupra comportării ulterioare a diferitelor agregate mecanice, reducerea timpului de rodaj prin folosirea de noi metode şi importanţa economică a aplicării acestora pentru industria constructoare de maşini etc.

Consfătuirea va avea loc la 15—17 decembrie 1960 în Bucureşti.

RECENZII

AL. GHOERGHIU, *Statica construcțiilor*, vol. I. *Structuri static determinate*, Ed. tehnică, București, 1960, 544 p.

Una din problemele esențiale în proiectarea construcțiilor este alegerea unor sisteme de rezistență concepute rațional și dimensionate judicios, cu ajutorul metodelor mecanicii construcțiilor. Statica construcțiilor este una din ramurile mecanicii construcțiilor care se ocupă cu determinarea eforturilor și a pozițiilor deformate, pe care le produce acțiunea sarcinilor exterioare la acele sisteme de rezistență ale construcțiilor care — prin schematizare — se pot reduce la structuri alcătuite din bare.

Problemele staticii construcțiilor formează o disciplină bine închegată, cu metode de calcul verificate de experiență și devenite clasice, unde contribuțiile noi se referă în special la diferite sistematizări de calcul și nu la chestiuni fundamentale. Volumul prezentat de autor depășește cu mult nivelul unui curs de facultate atît prin cuprinsul său bogat și variat cît și prin valoroasele contribuții personale referitoare la metode generale de calcul.

Volumul întîi al lucrării este dedicat structurilor static determinate, urmînd ca volumul următor să cuprindă rezolvarea structurilor static nedeterminate, în stadiul de comportare elastică a materialului (un capitol ocupîndu-se de stadiul elasto-plastic și de capacitatea portantă a structurilor).

După ce se fac cîteva considerații cu caracter general în capitolul I, se trece în capitolul II la aplicarea condițiilor de echilibru static pentru structuri plane. Se introduc astfel noțiunile de efort pe secțiune și de linie de influență și se arată cum se pot construi diagramele corespunzătoare pe diferite căi, insistîndu-se asupra posibilităților de calcul grafic.

Capitolul III este dedicat utilizării principiului deplasărilor virtuale. Se arată modul de a obține diagramele de eforturi și epurele de deplasări cu ajutorul acestui principiu, aplicîndu-se metodele de calcul la unele structuri static determinate. Menționăm cu această ocazie interpretarea condiției de echilibru prin intermediul epurei deplasărilor cu ajutorul pîrghiei lui Jukowski.

În capitolele IV și V se studiază grinzile drepte static determinate precum și structurile static determinate alcătuite din bare drepte. Se arată posibilitățile de determinare pe cale analitică și pe cale grafică a diagramelor de eforturi și a liniilor de influență a diferitelor eforturi pentru diferite structuri. Un paragraf special este consacrat determinării eforturilor maxime.

Capitolul VI cuprinde problema arcelor static determinate : arce cu o articulație și un reazem simplu și arce cu trei articulații. Se prezintă problema diagramelor de eforturi și a liniilor de influență. În ultimul paragraf se fac unele considerații în legătură cu structuri mixte, alcătuite din lanțuri de bare articulate.

Capitolele VII şi VIII se ocupă de structuri articulate plane static determinate. După ce se dau metodele generale de rezolvare se trece la studiul structurilor articulate simple supuse la sarcini fixe. Determinarea eforturilor şi liniilor de influenţă corespunzătoare la diferite bare se face în mai multe moduri, insistîndu-se în special asupra metodelor bazate pe principiul deplasărilor virtuale. Un paragraf este destinat structurilor articulate cu sistem K de diagonale iar ultimul paragraf cuprinde structurile articulate în formă de arc cu trei articulaţii.

În capitolul IX se studiază structurile spaţiale static determinate. Se dau diferite modalităţi de construire a unor asemenea structuri, insistîndu-se asupra condiţiilor de indeformabilitate geometrică şi de determinare statică. Un paragraf este destinat grinzilor plane încărcate normal pe planul lor.

Capitolul X cuprinde studiile personale ale autorului cu privire la utilizarea sistemelor conjugate. Diferitele analogii particulare cunoscute, cum este analogia grinzilor conjugate (O. Mohr) sau analogia coloanei constituie cazuri particulare ale unei metode generale de calcul La baza metodei stă analogia statică a corelaţiei geometrice dintre deplasările infinit mici care caracterizează o poziţie deplasată ; aceste corelaţii devin corelaţii statice, astfel că studiul geometric se înlocuieşte printr-un studiu static. În felul acesta se pot construi cu uşurinţă liniile de influenţă la structuri static determinate.

Expunerea materialului, foarte clară şi sistematică, este făcută într-un stil propriu autorului. Metodele de calcul prezentate, sistematizarea rezultatelor pentru diferite structuri sînt însoţite de numeroase exemple. În felul acesta se pot scoate în evidenţă concluziile principale ce rezultă pentru alcătuirea raţională şi economică a structurilor de rezistenţă a construcţiilor. Pe de altă parte, lucrarea nu este alcătuită dintr-o sumă de probleme izolate, aşa cum se întîmplă adesea în legătură cu această disciplină ci dintr-un material bine închegat în care există un fir conducător; pe această linie remarcăm că s-a insistat asupra problemelor mai importante, chestiunile cu caracter secundar şi de interes mai limitat fiind lăsate de o parte.

În felul acesta cartea prof Al. Gheorghiu este deosebit de utilă atît pentru studenţii facultăţilor de construcţii cît şi pentru inginerii constructori proiectanţi sau executanţi.

P. P. Teodorescu

---

* * * *Trudî Sektora Matematiki i Mehaniki Akademii Nauk Kazahskoi SSR, 1958 T. I.* (Lucrările sectorului de matematică şi mecanică al Academiei de Ştiinţe a R.S.S. Kazahe, 1958 T. I).

Volumul are un caracter jubiliar fiind dedicat aniversării a 10 ani de la organizarea sectorului de matematică şi mecanică al Academiei de Ştiinţe a R.S.S. Kazahe. Articolele pe care le conţine oglindesc activitatea ştiinţifică multilaterală a sectorului de matematică şi mecanică al Academiei de Ştiinţe din R.S.S. Kazahă şi orientarea ei.

Deosebit de interesant este articolul care deschide volumul, scris de O. A. Jantîcov şi intitulat *Matematica în Kazahstan în anii puterii sovietice*. În acest articol, care reprezintă o privire de ansamblu asupra direcţiilor de cercetare în matematică şi mecanică în R. S. S. Kazahă, se arată că domeniul principal de lucru al matematicienilor din Kazahstan îl reprezintă teoria stabilităţii după Liapunov ; această direcţie de studiu s-a dezvoltat la Alma-Ata după 1940 în primul rînd datorită lui K. P. Persidskii, unul din cei mai buni specialişti sovietici în domeniul teoriei stabilităţii. În teoria stabilităţii matematicienii din Kazahstan au adus contribuţii în ce priveşte teoremele de nestabilitate, teoria stabilităţii în raport cu perturbaţii permanente, teoria stabilităţii numerelor caracteristice. O problemă în care s-a lucrat aproape numai la Alma-Ata este aceea a extinderii rezultatelor teoriei stabilităţii la cazul sistemelor infinite de ecuaţii diferenţiale. În ultimii ani se studiază problemele de stabilitate pentru sisteme de ecuaţii în spaţii vectoriale normate şi probleme de stabilitate la sistemele de reglare automată. În articol sînt arătate şi rezultatele obţinute în alte domenii ale matematicii : teoria funcţiilor de variabilă complexă, geometria diferenţială în mare, teoria analitică a numerelor, teoria maşinilor de calcul. În domeniul mecanicii, lucrările se referă în primul rînd la mecanica mediilor continue. Sînt scoase în evidenţă lucrările lui I. D. Molinkov care au mare importanţă pentru teoria mineritului. Articolul de ansamblu al lui O. A. Jantîkov se încheie cu o bibliografie conţinînd 114 titluri, care constituie un element preţios pentru cunoaşterea activităţii matematice din Kazahstan.

Oglindind orientarea activităţii matematice din Kazahstan, cea mai mare parte a articolelor din volum aparţin teoriei stabilităţii. Articolul semnat R. V. Kudakova pune în evidenţă unele proprietăţi legate de stabilitatea într-un interval finit de timp definită de G. V. Kamenkov şi studiată în lucrările acestora şi ale lui A. A. Lebedev. V. Harasabal în articolul *Despre stabilitatea sistemelor liniare de ordinul al doilea* obţine criterii efective de stabilitate asimptotică pentru sisteme liniare de ordinul al doilea cu coeficient variabil prin construirea unei funcţii Liapunov formă patratică. Pentru ecuaţia particulară $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \left(1 + q\cos\frac{2t}{\mu}\right)x = 0, \quad q < 1$

se capătă condiţia $a > -\frac{q}{\mu}\cdot\dfrac{3\sin\frac{2t}{\mu} + 2\sin\frac{2t}{\mu}\cos\frac{2t}{\mu}}{1 + \cos\frac{2t}{\mu}}$

care este sigur verificată pentru $a > \frac{3q}{\mu}$.

Acelaşi autor studiază într-un alt articol numerele caracteristice ale sistemelor liniare de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi variabili, arătînd că aceste numere caracteristice pot fi evaluate cu ajutorul valorilor proprii ale matricii sistemelor (simetrizată).

În articolul lui A. K. Bedelbaer, *Unele criterii de distingere a porţiunilor periculoase şi nepericuloase ale frontierei domeniului de stabilitate pentru o clasă de sisteme de reglare automată* se aplică la un sistem de reglare automată adus la forma canonică a lui A.I. Lurie un procedeu de studiere a stabilităţii în cazurile critice datorat lui I. G. Malkin. Metoda se dovedeşte foarte efectivă şi relativ simplă. În articolul *Asupra stabilităţii mişcărilor nestaţionare ale unor clase de sisteme de reglare automată* A. K. Bedelbaer consideră sisteme de forma $\dot{\eta}_s = \sum b_{sk}(t)\,\eta_k + \eta_s(t)\,\xi$, $\dot{\xi} = f(\sigma)$; $\sigma = \sum j_s(t)\,\eta_s - \xi$ în care nou este faptul că în locul coeficienţilor constanţi se consideră coeficienţi variabili, depinzînd de t. Sistemul se aduce la forma $\dot{\eta}_s = \sum p_{sk}(t)\,\eta_k - \eta_s(t)\,\sigma$, $\dot{\sigma} = \sum p_k(t)\eta_k - \rho(t)\,\sigma - f(\sigma)$;- Se presupune soluţia banală a sistemului $\dot{\eta}_s = \sum p_{sk}(t)\,\eta_k$ uniform asimptotic stabilă, se construieşte pentru acest sistem o funcţie Liapunov Q formă patratică apoi se alege pentru sistemul iniţial o funcţie Liapunov de forma $v = Q + \frac{1}{2}\sigma^2$. Condiţia de stabilitate se obţine cerînd ca $-[\dot{v} + \sigma f(\sigma)]$ să fie pozitiv definită, ceea ce conduce la o singură inegalitate. Aceeaşi idee se aplică şi în alte ipoteze relative la matricea $P = (p_{ij})$ de exemplu din $P(t) = C$ sau $P(t) = C + \mu\,Q(t)$, C fiind o matrice hurwitziană.

Articolul lui O. A. Jantîkov, *Despre o ecuaţie diferenţială liniară cu derivate parţiale de ordinul întîi cu o mulţime numărabilă de variabile independente şi conţinînd o mulţime numărabilă* *de parametri* conține extinderea teoremelor fundamentale de existență, unicitate și derivare în raport cu parametrii la sisteme infinite de ecuații diferențiale ordinare, conținînd o infinitate de parametri. Se studiază apoi ecuația cu derivate parțiale extinzîndu-se la acest caz rezultatele cunoscute din cazul unui număr finit de variabile și parametri. La probleme de acest fel se ajunge în legătură cu problema extinderii rezultatelor din teoria stabilității la cazul sistemelor cu o infinitate de necunoscute.

Cîteva articole sînt dedicate obținerii condițiilor de stabilitate în diverse probleme de mecanică. Astfel, în articolul *Asupra stabilității rotației unui corp solid greu cu punct fix în cazul lui D. N. Goriacev — S. A. Ceaplîghin* de M. P. Guliaev și M. O. Șibaev se dau condiții efective de stabilitate a soluției $p = \omega = \text{const.}, q = r = 0, \gamma = 1, \gamma' = \gamma'' = 0$ care descrie rotația permanentă a corpului în jurul verticalei (axa — Ox) în cazul cînd $A = B = 4\,C$ și centrul de greutate al corpului este situat în planul ecuatorial al elipsoidului de inerție corespunzător punctului fix. Dacă $\left(\frac{ac}{Mg}, 0{,}0\right)$ sînt coordonatele centrului de greutate se arată că pentru $a > 0$ mișcarea este stabilă iar pentru $a < 0$ nestabilă. În articolul lui M. P. Guliaev, *Asupra procesiilor regulate dinamice posibile ale unui solid cu punct fix* se analizează condiția necesară de existență a procesiilor regulate. Se obțin precesiile regulate cunoscute în cazurile lui Euler și Lagrange. Se studiază apoi existența precesiilor regulate în cazul corpurilor dinamic nesimetrice și se determină precesia unică existentă în acest caz, demonstrîndu-se că e stabilă în sensul lui Liapunov. Același autor studiază în alt articol secțiunile circulare ale elipsoizilor reciproci de inerție.

Volumul mai conține un articol de M. V. Pentkovski, *Asupra evaluării erorii calculului pe baza nomogramelor cu puncte aliniate și asupra celei mai bune transformări a lor*, două articole ale lui I. Ia. Akușskii, *Asupra rezolubilității cu ajutorul unui ciclu operațional neomogen* și *Asupra rezolubilității unei probleme de calcul pentru o matrice triunghiulară*, două articole de geometrie diferențială în mare (V. V. Streltov, *Evaluări ale lungimii unei curbe pe o suprafață de diametru dat* și P. I. Tokarev, *Rețele geodezice care nu sînt determinate de unghiul rețelei*), un articol de teorie analitică a numerelor (B. M. Urazbaev, *Evaluarea asimptotică a unei sume aritmetice*). Toate aceste articole oglindesc preocupările multilaterale ale matematicienilor din Kazahstan.

Mecanica aplicată este reprezentată prin două articole ale lui V. P. Arceașnikov. Primul intitulat *Calculul tensiunilor în stîlpii de siguranță dintre camere în cazul cînd sînt lăsate grinzile de susținere a tavanului și podelei* conține o generalizare a unei lucrări anterioare în care este tratat cazul stîlpilor de siguranță fără grinzi de susținere a tavanului și podelei. Din punct de vedere matematic în lucrarea anterioară se rezolva o problemă de teoria plasticității plane cu condiția de plasticitate de forma $|\tau_{nt}| = \sigma_n \operatorname{tg} \psi$ (ψ fiind unghiul de frecare dintre stîlpi și mediul de sprijin). În articolul de față se generalizează tocmai condiția de plasticitate sub forma $\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \rho + K$ ceea ce corespunde cazului cînd stîlpii de siguranță se sprijină pe grinzi în tavan și planșeu. Se dă un exemplu concret de calcul dus pînă la capăt pentru $\rho = 45^\circ$ (ρ fiind unghiul de frecare) în aceleași condiții la limită pe caracteristici ca și în articolul precedent. Al doilea articol, intitulat *Asupra problemei determinării presiunii susținerii galeriei orizontale* conține o generalizare a formulelor prof. S. S. Davîdov. Se face presupunerea, mai conformă cu realitatea, că suprafețele de alunecare în rocile de deasupra galeriilor orizontale nu sînt verticale ci înclinate cu un unghi de $\pm (\pi/4 - \rho/2)$ unde ρ este unghiul de frecare. În cazul cînd se consideră că suprafețele de alunecare sînt plane, se dă în cadrul unei teorii elementare a problemei o formulă explicită pentru calcularea presiunii σ_x presupusă verticală și uniform distribuită pe orizontală.

A. Halanay și *D. Drăghicescu*

В. М. ТОНЧАРОВ, *Основы динамики русловкых поточов* (Bazele dinamicii cursurilor de apă). Гидрометеорологичекое издательство, Ленинград, 1956, 452 стр.

Lucrarea are ca obiect prezentarea mecanismului mişcării curenţilor fluviali şi interacţiunii între curenţi şi albii luate sub aspectul lor general şi răspunde programei analitice a cursului cu acelaşi nume din institutele sovietice de învăţămînt superior.

Lucrarea cuprinde două părţi : una tratînd dinamica albiilor cu fund fix, a doua dinamica albiilor cu fund mobil.

În prima parte se face o prezentare a stadiului actual al problemelor mişcării turbulente uniforme în regim permanent. Titlurile capitolelor oferă o imagine destul de clară a conţinutului acestei prime părţi : bazele fizice ale dinamicii curenţilor fluviali, mijloacele operaţionale de analiză a curentului uniform, turbulent, într-o albie fixă, stratul limită, curentul uniform plan, scurgerea în conducte cilindrice, unele probleme ale trecerii de la mişcarea plană, la curenţii fluviali din natură, rezistenţe suplimentare ale albiilor naturale.

În partea a doua sînt tratate aspectele principale ale problemei mişcării aluviunilor, domeniu în care autorul are numeroase contribuţii proprii. Această parte cuprinde următoarele capitole : problemele principale ale dinamicii albiilor cu fund mobil, caracteristicile principale ale terenurilor necoezive şi aluviunilor constitutive ale albiilor, acţiunea curentului asupra albiei deformabile, mecanismul desprinderii granulelor de la fund, mecanismele transportului în suspensie etc. Un ultim capitol prezintă pe scurt principalele aplicaţii ale dinamicii cursurilor de apă, printre care : probleme legate de regularizarea cursurilor de apă, problema vitezelor admisibile la construcţiile hidrotehnice, problema aplicaţiilor transportului hidraulic, rolul cercetărilor de laborator în rezolvarea problemelor practice de dinamică a cursurilor de apă.

După cum se vede, este vorba despre un material vast, astfel că lucrarea recenzată este foarte densă. Cei interesaţi pot găsi aci o prezentare critică a teoriilor clasice asupra turbulenţei, foarte completă şi la nivel înalt, deşi fără puncte de vedere originale ca în cartea lui Velicanov, de exemplu. Cartea este utilă pentru informarea generală a oricărui hidraulician.

E. Răzvan

Г. И. ШАМОВ, *Сток наносов рек СССР* (Debitul solid pe rîurile U.R.S.S.). Ghidrometeorizdat. Leningrad. 1956, 254 p.

În această lucrare sînt prezentate hărţile turbidităţilor medii pe rîurile U.R.S.S. Afară de o hartă sinoptică generală, au fost întocmite, la scări mai mari, hărţi pentru partea europeană a Uniunii Sovietice, pentru Caucaz şi pentru Asia Centrală. Sînt anexate, de asemenea, tabele cuprinzînd debitele solide medii lunare şi anuale, măsurate la 1015 staţiuni hidrometeorologice pînă în anul 1952 inclusiv. La alcătuirea hărţilor s-a ţinut seama de condiţiile locale şi zonale.

Aceste hărţi pot servi, împreună cu tabelele anexate, la analiza formării şi tranzitului aluviunilor şi printre altele, la fixarea dinamicii reţelei posturilor de măsurători pentru detalierea debitului solid, acolo unde aceasta se dovedeşte necesar.

Pentru specialiştii din ţara noastră, lucrarea prezintă interes sub aspectul metodicii de întocmire, precum şi ca informare generală.

E. Răzvan

W. NOWACKI, *Zagadniena termosprezystości* (Probleme de termoelasticitate), Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1960, 396 p.

Influenţa unui cîmp termic asupra stării de tensiune şi asupra stării de deformaţie a unui corp perfect elastic a făcut, pînă în prezent, obiectul a puţine lucrări de sinteză, deşi preocupările în acest domeniu s-au dovedit a fi din ce în ce mai numeroase în ultimul timp. Rezultatele obţinute au arătat că, atît din punct de vedere teoretic cît şi din punct de vedere practic, aceste probleme prezintă o deosebită importanţă în cele mai variate domenii.

O preocupare sistematică în această direcţie au avut-o cercetătorii polonezi, în special W. Novacki, J. Ignaczak, J. şi Z. Mossakowski, Wl. Derski, W. Piechocki, M. Sokołowski, H. Zorski, prin studiile lor formînd o adevărată şcoală de termoelasticitate. Lucrarea prof. W. Nowacki cuprinde, pe lîngă o prezentare a numeroaselor sale studii personale, şi multe din rezultatele obţinute de cercetătorii polonezi.

Capitolul I conţine consideraţii generale asupra ecuaţiilor termoelasticităţii. Se prezintă atît ecuaţia de propagare a căldurii, care caracterizează cîmpul termic, cît şi ecuaţiile corespunzătoare stării de solicitare ce ia naştere.

În capitolul II se tratează probleme spaţiale staţionare, considerînd corpurile elastice ca fiind izotrope sau cu izotropie transversă. În felul acesta se dau soluţii pentru cazul spaţiului elastic, semispaţiului elastic şi stratului elastic (inclusiv cazul plăcilor groase finite), sub acţiunea a diferite surse calorice.

Problemele spaţiale nestaţionare fac obiectul capitolului III. Se studiază astfel influenţa surselor nestaţionare asupra spaţiului elastic, semispaţiului elastic şi stratului elastic; de asemenea, se consideră şi efectele dinamice provocate de aceste surse.

Capitolul IV cuprinde studiul problemei plane a termoelasticităţii (stare de tensiune plană şi stare de deformaţie plană). Menţionăm astfel cazul semiplanului elastic, al benzii elastice şi al semibenzii elastice acţionate de surse termice punctuale staţionare.

În capitolul V se tratează problema plăcilor plane şi curbe subţiri. Se fac consideraţii de ordin general şi se insistă asupra plăcilor plane cu contur dreptunghiular şi circular.

Influenţa surselor de căldură plane şi liniare asupra spaţiului elastic, semispaţiului elastic şi stratului elastic este considerată în capitolul VI. Se tratează, de asemenea, şi starea de tensiune provocată de răcirea instantanee a corpului.

Capitolul VII conţine studiul determinării stării de tensiune şi a stării de deformaţie a unor clase de corpuri vîscoelastice liniare, în prezenţa unui cîmp termic. Se tratează cazul spaţiului vîscoelastic şi al semispaţiului vîscoelastic.

Rezultatele de mai sus au fost obţinute în ipoteza că starea de deformaţie nu influenţează propagarea cîmpului termic. Ecuaţiile cuplate ale termoelasticităţii, care ţin seama de această influenţă, sînt considerate în capitolul VIII, unde se indică unele metode generale de rezolvare a problemei. Menţionăm aplicaţiile care se fac pentru spaţiul elastic (plin sau cu gol interior), cît şi pentru semispaţiul elastic.

Cartea prof. W. Nowacki se bazează pe o bogată bibliografie şi este prezentată la un înalt nivel ştiinţific. Rezultatele teoretice obţinute sînt conduse pînă la posibilităţi de aplicare practică, fiind de cele mai multe ori însoţite de exemple numerice de calcul, ilustrate prin diagrame.

În felul acesta lucrarea se adresează unui cerc larg de cititori, constituind o valoroasă contribuţie la literatura de specialitate.

M. Predeleanu şi *P. P. Teodorescu*

* * * *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutchen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (Culegerea lucrărilor prezentate Academiei Germane de ştiinţe din Berlin cu ocazia a 250-a aniversări de la naşterea lui Leonhard Euler), sub redacţia lui K. Schröder.
Akademie-Verlag, Berlin, 1959, 336 p.

Cu ocazia împlinirii, la 15 aprilie 1957, a 250 ani de la naşterea lui L. Euler, Academia de Ştiinţe din Berlin şi Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. au ţinut Sesiuni ştiinţifice jubiliare la care s-au prezentat numeroase comunicări. Lucrările prezentate la Academia de Ştiinţe din Berlin fac obiectul unui volum scos sub redacţia lui K. Schröder. Lucrările prezentate la Leningrad sînt cuprinse într-un volum scos de Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., sub redacţia lui M. A. Lavrentiev.

Volumul cuprinde 26 de lucrări aparţinînd unor matematicieni din diferite ţări. Ţara noastră este reprezentată prin prof. S. Stoilow şi D. Barbilian.

Astfel[1]) D. Barbilian se ocupă de un analog al teoremei discriminanţilor. W. Blaschke (R. F. Germană) prezintă studii de cinematică afină legate de unele cercetări ale lui Euler iar E. Bompiani (Italia) se ocupă de geometria elementelor diferenţiale. V. Brun (Norvegia) tratează problema unor algoritme multidimensionale, care generalizează fracţia continuă dată de Euler pentru numătul *e*. A. Denjoy (Franţa) se ocupă de derivatele prime simetrice iar A. O. Gelfond (U.R.S.S.) consideră unele procese de aproximaţie a funcţiilor.

Se prezintă lucrări din domenii variate ale matematicii. Problema convergenţei unor mulţimi este studiată de K. Kuratowski (R. P. Polonă) iar A. G. Postnikov (U.R.S.S.) consideră un analog al problemei lui Tarry pentru funcţia exponenţială. Numerele lui Euler fac obiectul cercetărilor lui H. Salié (R. D. Germană). S. Stoilow face unele consideraţii asupra funcţiilor analitice definite prin relaţii întregi iar P. Turán (R. P. Ungară) se ocupă de teoria seriilor lui Dirichlet.

Unele din lucrările prezentate sînt dedicate unor preocupări de ordin istoric. Astfel G. K. Mihailov (U.R.S.S.) prezintă manuscrise nepublicate ale lui L. Euler iar J. E. Hofmann (R. D. Germană) studiază problemele legate de primele cercetări ale lui Euler în domeniul seriilor.

Studiile prezentate adîncesc cunoştinţele noastre asupra vieţii şi operei lui Euler şi arată cum se reflectă realizările şi ideile lui în cercetările matematice actuale. Problemele considerate de Euler fiind din domenii foarte diferite, culegerea de lucrări este adresată unui cerc larg de matematicieni.

P. P. Teodorescu

VIRGIL MORING FAIRES, *Kinematics* (Cinematica). Ed. Mc. Graw-Hill, New York 1959, XIV + 468 p.

Lucrarea prof. Faires este un curs de cinematică a mecanismelor scris pentru studenţii ingineri.

În cele 15 capitole ale sale, cursul tratează majoritatea problemelor legate de cinematica mecanismelor curent întîlnite în practica inginerească.

---

[1]) Autorii sînt citaţi în ordine alfabetică, după cum se face şi în cuprinsul volumului.

După prezentarea ecuaţiilor mişcărilor plane, se trece la studiul camelor şi apoi la diferitele metode analitice şi grafice de determinare a centrelor instantanee de rotaţie şi a vitezelor şi acceleraţiilor 1). Un capitol separat este dedicat acceleraţiei lui Coriolis.

Capitolele următoare studiază celelalte tipuri de mecanisme : roţile dinţate, curelele şi lanţurile, roţile de fricţiune, mecanismele de sacadare etc.

Ultimul capitol, care tratează despre sinteza mecanismelor dă o privire generală asupra metodelor folosite în rezolvarea problemelor de proiectare a mecanismelor, exemplificîndu-le pe cîteva cazuri concrete.

Tratarea subiectelor este făcută la un nivel uşor accesibil, folosindu-se numai aparatul matematic strict necesar înţelegerii problemelor şi rezolvării lor practice. Este de notat în mod special atenţia pe care autorul o dă explicării amănunţite a fiecărei chestiuni şi studierea tuturor aspectelor sub care ea se poate prezenta în practică. Din această cauză, lungimea unor părţi ale expunerii depăşeşte limitele obişnuite, fapt care, departe de a reprezenta o scădere a cărţii, îi măreşte valoarea didactică.

În prezentarea diferitelor tipuri de mecanisme, autorul foloseşte pe scară largă, pe lîngă schemele cinematice şi fotografii ale unor construcţii realizate, ceea ce permite cititorului să păstreze în permanenţă legătura cu aspectele practice şi îl familiarizează cu formele constructive ale elementelor care intră în componenţa mecanismelor respective.

Pentru a păstra caracterul de actualitate al lucrării, autorul prezintă în cadrul fiecărui capitol şi unele chestiuni care au intrat recent în practică, dînd indicaţii chiar şi asupra acelor probleme a căror rezolvare este încă susceptibilă de îmbunătăţiri. Astfel este cazul curbelor polinomiale pentru profilul camelor, influenţa variaţiei acceleraţiei asupra mişcării camelor etc.

O bibliografie bogată (140 de lucrări citate) îndrumă pe cititorii care doresc să aprofundeze studiul anumitor capitole.

În afara numeroaselor exemple complet lucrate, cartea cuprinde şi un număr de aproape 800 de probleme.

C. Petrescu

---

* * * *Rheology of disperse systems. Proceedings of a conference organized by the British Society of Rheology.* (Reologia sistemelor disperse. Comunicările unei Conferinţe organizată de Societatea Engleză de Reologie). Editat de C. C. Mill., Pergamon Press, London, 1959, 223 p.

În urma unui symposium ţinut între 19—21 sept., 1957 s-au editat o serie de articole privind studiul reologic al emulsiilor sau dispersiilor particulelor solide în lichide.

Într-o notă introductivă cu titlul *Proprietăţi reologice complexe* prof. J. G. Oldroyd dă o serie de elemente privind legile reologice ale diferitelor suspensii. Astfel, în cazul deformaţiilor infinitesimale lente este citată teoria elaborată considerînd faza lichidă L un lichid newtonian de viscozitate η. În cazul particulelor în suspensie sfere rigide în diluţie slabă, coeficientul de viscozitate considerat este cel dedus de Einstein : $\eta' = \eta\ (1 + 2{,}5\ c)$, c fiind concentraţia.

În cazul unor particule lichide de viscozitate η' formula corectată a lui Taylor este $\eta^* = \dfrac{2{,}5\,\eta' + \eta}{\eta' + \eta}$. În cazul unei faze continue cu modulul de lunecare μ şi modulul de

---

1) La mecanismele cu bare articulate.

deformare volumică K, cu goluri sferice modulul total e $\mu^{*}=\mu\left[1-\frac{5(3k+4\mu)}{9k+8\mu}c\right]$. În cazul prezenței unor incluziuni sferice rigide, $\mu^{*}=\mu\left[1+\frac{5(3k+4\mu)}{6(k+2\mu)}c\right]$ (Hashin).

În cazul unor viteze mai mari de deformație este citat modelul lui Fröhlich și Sack dat de legea tensiunii de lunecare-lunecări

$$\tau+\lambda_1\dot{\tau}=\eta_0\,(D+\lambda_2\dot{D})\ ,\quad (\lambda_1>\lambda_2>0)\quad \text{cu}\ \ \eta_0=\eta\,(1+2{,}5\,c)$$

$$\lambda_1=\frac{\eta(3+5\,c)}{2\mu},\qquad \lambda_2=\frac{\eta\,(3-7{,}5\,c)}{2\mu},$$

constînd dintr-o suspensie diluată din sfere hookeene cu o fază lichidă newtoniană.

În locul deformațiilor finite se dă ca exemplu legea între presiuni și deformații finite:

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+p'_{ik}\ ;\quad p'_{ik}+\lambda_1\frac{\mathcal{D}p'_{ik}}{\mathcal{D}t}=2\eta_0\left(e_{ik}+\lambda_2\frac{\mathcal{D}e_{ik}}{\mathcal{D}t}\right)$$

$$\frac{\mathcal{D}\,p_{ik}}{\mathcal{D}t}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial t}+v_j\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j}+\omega_{ij}\,p_{jk}+p_{kj}\,\omega_{ij}$$

care conduce la coeficientul aparent de viscozitate pentru fenomenul de lunecare $\eta=\eta_0\frac{1+\lambda_1\lambda_2\,D^2}{1+\lambda_1^2\,D^2}$ (Reiner).

Aceste exemplificări care dau o vedere de ansamblu acestui capitol al mecanicii mediilor deformabile sînt urmate de articole privind comportarea suspensiilor în fenomene de lunecare (S. G. Mason și W. Bartok, G. F. Eveson), în curgere prin tuburi (R. L. Whitmore), în cerneluri (N. Casson), paste (E. Bantoft) în fenomene de dilatanță și tixotropie (A. Jobling) etc.

M. Mișicu

---

* * * *The rheology of elastomers*. Proceedings of a conference organized by the British Society of Rheology, May 1957. (Reologia elastomerilor. Comunicările unei conferințe organizată de Societatea Britanică de Reologie, mai 1957). Pergamon Press, London, 1958, 202 p.

În urma conferinței de Reologia Elastomerilor din 29—31 mai 1957 s-au editat textele comunicărilor prezentate cu acestă ocazie într-un volum apărut în anul 1958.

Un punct de vedere comun acceptat, spre deosebire de cele anterioare adoptate, a fost acela al acceptării teoriei cinetice a elasticității marilor deformații. În unele articole s-au inclus studii pe această linie în legătură cu fenomenele fotoelastice și de relaxare ce apar în substanțe gelatinoase sau de tipul cauciucului. Procesele de relaxare sînt studiate în legătură cu comportarea viscoelastică a materialelor.

În același sens s-au studiat fenomenele de extenziune care intervin în procesele de fabricație.

L. R. G. Treloar expune în introducere stadiul actual al teoriei deformațiilor elastice finite reduse la cele mai simple aspecte și anume a teoriei cinetice și fenomenologice. Redăm mai jos pentru informare unele elemente din acest domeniu.

Precum se știe în cadrul primei teorii se consideră o aproximare de tip Gauss a energiei libere de deformare W: $W = \frac{G}{2}\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right\}$. unde $G = N k T = \rho \frac{RT}{M_c}$, N fiind numărul de lanțuri pe unitate de volum, M_c media greutății moleculare a lanțurilor, ρ densitatea, T temperatura absolută, k și R constanta lui Boltzmann și a gazului iar λ_1, λ_2, λ_3 lunecările principale.

Din această ecuație se deduc expresiile tensiunilor principale: $t_1 - t_2 = G(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$, $t_2 - t_3 = G(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)$.

Independent de o teorie statistică se poate deduce în cadrul unei teorii fenomenologice un rezultat mai general. Astfel W se exprimă prin mărimile $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$; $I_2 = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2$ sub forma:

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \text{ (Rivlin)}$$

tensiunile fiind

$$t_1 - t_2 = 2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right).$$

M. Mişicu

CLYDE ORR, SR., J. M. DALLAVALLE. *Fine Particle Measurement-Size, Surface and Pore Volume* (Măsurarea particulelor mici — mărimea, suprafața și volumul porilor) New York, The Macmillan Company, 1959, 353 p.

Tehnica modernă utilizează pe scară largă produse obținute din pulberi. Calitatea acestor produse este foarte puternic influențată de mărimea pulberilor ce se pot obține prin diverse metode.

Astfel, metalurgia pulberilor se impune din ce în ce mai mult ca un domeniu cu largi perspective.

Metalizarea prin pulverizare utilizează ca materie primă o serie de materiale sub formă de pulbere (pulverizarea de mase plastice, de materiale ceramice etc.).

Straturile obținute prin metalizare sînt poroase. Mărimea porilor, permeabilitatea straturilor, mărimea particulelor jetului de metal pulverizat sînt factori care influențează foarte mult asupra calității straturilor metalizate și deci cunoașterea mărimii lor este deosebit de importantă pentru cei ce lucrează în acest domeniu.

Cartea recenzată cuprinde o analiză a principalelor metode de măsurare a mărimii, suprafeței și volumului particulelor mici.

Cartea cuprinde 10 capitole și în fiecare din ele (cu excepția primului) se analizează cîte un grup de metode bazate toate pe același principiu fizic.

În general, fiecare capitol cuprinde două părți. Prima parte cuprinde considerații teoretice generale asupra principiilor fizice care stau la baza metodei respective, iar partea a doua cuprinde metodele experimentale elaborate pe baza considerațiilor teoretice.

Capitolul 1 al lucrării intitulat *Importanța măsurărilor tehnice și clasificarea lor* cuprinde definiția mărimii particulelor, suprafeței și volumului lor. De asemenea mai cuprinde și considerații asupra domeniului de aplicare a diferitelor metode și clasificarea lor.

Capitolul 2 intitulat *Analiza microscopică și prin ciuruire a mărimii particulelor* cuprinde considerații asupra tipurilor de microscoape utilizate (electronice, optice), limitele lor de utilizare etc. Se indică metode grafice de determinare a mediei mărimii particulelor și a abaterii medii pătratice, determinarea factorului de formă etc. În partea a doua a capitolului sînt date indicații asupra sistemelor de site utilizate pentru ciuruire.

Capitolul 3 se intitulează *Determinarea mărimii particulelor prin sedimentare* și are două părți. Partea întîi tratează aspectul teoretic al problemei (corecția Cunningham, corecția dată de electroviscozitate, formula lui Stokes etc.), iar partea a doua cuprinde descrierea metodelor experimentale elaborate pe baza acestor considerații (metoda pipetelor, metoda timpului fix, metoda densității, cufundării, a tuburilor înclinate etc.).

Capitolul 4 intitulat *Analiza mărimii particulelor prin metode inerțiale* cuprinde o descriere a metodelor de măsură elaborate pe baza forțelor de inerție a particulelor (metoda bazată pe determinarea traectoriei particulelor, metoda centrifugală, metoda Hauser Lynn, separator Goetz etc.).

Capitolul 5 se intitulează *Determinarea mărimii particulelor cu ajutorul transmiterii și difuziei luminii* și cuprinde unele considerații comparative între lungimea de undă a luminii și mărimea particulelor; difuziunea razelor X și electronice etc. De asemenea, se dă schema de principiu a unor aparate și dispozitive care funcționează pe baza acestor principii.

Capitolele 6—9 se ocupă cu problema determinării suprafeței porilor. Se descriu metodele de măsură pe bază de permeametre și pe baza principiilor de absorbție și adsorbție a gazelor etc. De asemenea, se prezintă ecuațiile aerodinamice care stau la baza acestor metode.

În capitolul 10 se descriu metodele de măsurare a mărimii porilor și a distribuției lor.

Pentru ilustrarea domeniului de aplicare a diverselor metode, fiecare capitol cuprinde și rezultatele obținute prin măsurarea unor pulberi din diverse materiale. Tot în același scop cartea mai cuprinde, în anexă, 34 tabele cu rezultatele măsurătorilor comparative obținute prin utilizarea diverselor metode. Cartea a fost elaborată pe baza unei documentații foarte bogate și cuprinde peste 600 referințe bibliografice.

Deoarece cartea cuprinde o descriere judicioasă a celor mai răspîndite metode de măsurare a particulelor mici și foarte mici, constituie un îndrumar pentru laboratoarele ce se ocupă cu astfel de probleme.

P. Freund

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

D. Tutunaru, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. Ed. tehnică, Buc., 1960.

A. Bărglăzan, I. Antonescu, V. Anton, I. Preda, *Încercările mașinilor hidraulice și pneumatice*. Ed. tehnică, Buc., 1960.

Victor Popescu, *Construcții metalice*. Ed. tehnică, Buc., 1960.

Ion A. Manoliu, *Regularizări de rîuri și căi navigabile interioare*. Ed. tehnică, Buc., 1960.

N. Iosipescu, *Introducere în fotoelasticitate*. Ed. tehnică, Buc., 1960, 158 pag.

Egon Cernea, *Mașini termice cu pistoane libere*. Ed. tehnică, Buc., 1960, 364 pag.

— *Petr Andreevici Zemiatcenskii*, Izd. Akad. Nauk, Moskva, 1960, 51 pag.

— *Reguliruemîi napravlennîi priem seismiceskih voln*. pod. red. L. A. Riabinkina. Ministerztvo vîsșego obrazovania SSSR Moskovskii ordena trudovogo krasnogo znameni. Institut neftehimiceskoi i gazovoi promișlennosti im. I. M. Gubkina W. 26, Gostoptehizdat, Moskva, 1960, 239 pag.

— *Voprosî geologii nefti i gaza*. Ministerztvo vîsșego obrazovania SSSR Moskovskii ordena trudovago krasnogo znameni. Institut neftehimiceskoi i gazovoi promișlennosti im. I. M. Gubkina, Gostoptehizdat, Moskva, 1959, 401 pag.

— *Problemî procinosti v mașinostroenii*. Izd. Akad. Nauk, SSSR (Institut Mașinovedenia) v. 1—6, 1958—1960.

— *Trudî Soveta po izuceniu proizvoditelnîh sil Kazahstana*. Tom 1, Alma-Ata Izd. Akad. Nauk Kazalkskoi SSR, 1960, 120 pag.

— *Trudî Tbiliskogo matematiceskogo instituta*. Izd. Akad. Nauk gruzinskoi SSR, Tbilisi, 1959, 306 pag.

— *Izvestia Akad. Nauk Kazahskoi SSR*. Alma-Ata, 1—2, 1959.

— *Izvestia Akad. Nauk Kazahskoi SSR*. Alma-Ata, 1960, 128 pag.

— *Atomnaia energia*. Akad. Nauk SSR Glavnoie upravlenie po ispolzovaniiu atomnoi energii pri sovete ministrov SSSR, Moskva, 1960.

— *Jurnal tehniceskoi fiziki*. Izd. Akad. Nauk, SSSR, Moskva, 1960.

— *Trudî instituta energhetiki*. Izd. Akad. Nauk Gruzinskoi SSR IX—X, Tbilisi 1957.

— *Izvestia vîsșih ucebnîh zavedenii. Fizika*. Minist. Vîsșego obrazovaniia SSSR Izd. Tomskogo universiteta, 1959.

— *Prikladnaia matematica i mehanika*. Akad. Nauk SSSR, otdelenie tehniceskih nauk, Moskva, 1960.

— *Trudî instituta energhetiki.* Izd. Akad. Nauk Kazahskoi SSR, Alma-Ata, 1, 2, 1960.

— *Trudî sektora matematiki i mehaniki.* Izd. Akad. Nauk Kazahskoi SSR, Alma-Ata, 1958.

Publicații ale Institutului de Stat pentru cercetări tehnice, Finlanda

K. ANGERVO, A. I. PUTKONEN, *Erweiterung der Theorie der Biegung eines Pfeilers ohne Zugfestigkeit und ihre Anwendung zur Berechnung von Rahmentragwerken mit unbewehrten Stielen.* Helsinki, 1957.

J. R. WUOLIJOKI, *Zur Schwingungstheorie des Kragbalkens unter besonderer Berücksichtigung des Schubmoduls.* Helsinki, 1950, 10 pag.

KYÖSTI ANGERVO, *Betonin Lujuusominaisunk sista yksi-ja Kaksiakselisessa.* Jännitystilassa, Helsinki, 1958, 57 pag.

V. KUNSKKOSKI, *Ueber die Haftung zwischen Beton und Stahl.* Helsinki 1950, 203 pag.

P. MATTILA, *On the theory of the Electron Wave Tube with Elliptic Cross Section.* Helsinki, 1957, 78 pag.

L. HYVÄRINEN, *Fourier analysis, a new numerical method.* Helsinki, 1958, 18 pag.

H. PARLAND, *Teräsbetonirakenteiden murtolujuus ja sitkeys.* Helsinki, 1956, 78 pag.

J. SALOKANGAS, *Neto-Puristus-Ja Koouden-mittanskoneiden tarkistuk — sesta ja tarkistus wälineistä.* Helsinki, 1947, 18 pag.

P. ASANTI, D. GRANFELT, *Some observations on the use of cobalt isotope at the testing of materials in the machineshop industry.* Helsinki, 1953, 13 pag.

M. C. STEELE, L. L. C. EICHBERGER, *The Use of Foil Gages to measure Large Strains under High Fluid Pressures.* Illinois, Urbana, Dep. of Theoretical and AppliedMechanics, 1954, 11 pag.

H. L. LANGHAAR, A. P. BORESI, *Buckling of Axially Compressed Cylindrical Shells Subjected to Internal Pressure* Illinois, Urbana, Dep. of Theoretical and Applied Mechanics, 1957, 38 pag.

J. Mc. NAMEE, *Analysis of Simmetric Cylindrical Shells.* London, 1955, 83 pag.

G. CONSTANTINESCU, *Scientists Versus Engineers.* Extras din „The Transactions of the Society of Engineers", Londra, dec. 1949, 20 pag.

G. CONSTANTINESCU, *Sonics,* din „The Transactions of the Society of Engineers", Londra, iunie 1959, 30 pag.

W. L. GRANT, A. J. A. ROUX, *The Development and Application of Gaz Turbines in South Africa with Special Reference to Coal and Nuclear Fuels.* Pretoria, 1959, 23 pag.

G. GOERTZEL, NUNZIO TRALLI, *Some mathematical methods of Physics.* New York, Toronto, Mc Grow Hill Book Comp. inc. 1960, 300 pag.

R.W. TRUITT, *Hypersonic Aerodynamics.* New York, 1959, 448 pag.

V. M. FAIRES, R. KEOWN, *Mechanism,* New York, 1960, 332 pag.

G. BUERGERMEISTER, H. STEUP *Stabilitätstheorie.* Vol. I. Akad. Verlag, Berlin, 1959, 407 pag.

Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dvs. pentru anul 1961.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

Întreprinderea Poligrafică Nr. 2, Str. Brezoianu nr. 23–25, București – c. 3212

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

6
ANUL XI
1960

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

6

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate științifice și tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări științifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— *Aerodinamică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*).

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI, nr. 6 1960

SUMAR

Pag.

ELIE CARAFOLI, Dezvoltarea cercetărilor ştiinţifice în Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. 1345

ŞT. BĂLAN, Învăţămîntul mecanicii teoretice în institutele de învăţămînt superior tehnic 1361

AL. IVANCENCO, Colaborarea strînsă între cercetarea ştiinţifică şi producţie 1369

STUDII

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU şi AL. NICA, Calculul lagărelor de alunecare . . 1377

D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, E. PROCOPOVICI, M. NĂSTASE şi V. CONSTANTINESCU, Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi 1397

TEORIA MECANISMELOR

D. TUTUNARU şi T. DEMIAN, Asupra determinării profilului camelor, la mecanismele cu tachet cu disc plan 1411

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

M. M. NIŢĂ, Asupra mişcării rachetei într-un cîmp de forţe centrale 1419

ELASTICITATE — PLASTICITATE— REZISTENŢA MATERIALELOR

MIHAIL HANGAN, Ordinea de apariţie şi rotirea articulaţiilor plastice la o structură statică solicitată de o sarcină permanentă şi un grup de sarcini ce creşte proporţional 1445

ALEXANDRU GHEORGHIU, Sistemele conjugate, mijloc de exprimare a condiţiei de compatibilitate în calculul structurilor 1459

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU, Studiul puterii necesare aşchierii oţelurilor carbon obişnuite 1481

Pag.

IS. NICULESCU şi C. FLORESCU, Comparaţie între tăierea verticală a solurilor cu o singură lamă şi tăierea cu mai multe lame dispuse în trepte 1497

HIDROMECANICĂ

VICTOR VÂLCOVICI, Suprafeţele Bernoulli 1507
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, Aplicaţiile unei probleme la limită în mecanica fluidelor . . . 1535
E. RĂZVAN, Parametrii caracteristici şi ecuaţia mişcării macroturbulente 1543
S. HÎNCU şi D. DELICAN, Fenomene de rezonanţă la mişcarea fluidelor cu suprafaţă liberă în jurul unor bare cilindrice 1555

AEROMECANICĂ

N. N. PATRAULEA, ŞT. ANDREI şi GH. RADO, Asupra calculului aerodinamic al vehiculelor utilizînd efectul solului 1565
T. HACKER, Despre limitele de aplicabilitate a unei teorii a stabilităţii mişcărilor parţial controlate ale avionului 1581

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

V. CLEJA şi D. PAVELESCU, Cu privire la erorile de înregistrare magnetică a parametrilor cu variaţie lentă 1587

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

L. DUMITRESCU, I. JAKAB, E. PROCOPOVICI şi A. ZAHARESCU, Probleme ale cercetării experimentale de aerodinamica vitezelor mari în tubul de şoc 1599

RECENZII 1609

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1623

Index alfabetic pe 1960 1625

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том. XI, № 6 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ЕЛИЕ КАРАФОЛИ, Развитие научных исследований в Институте прикладной механики Академии РНР 1345
Ш. БЭЛАН, Преподавание механики в высших технических учебных заведениях 1361
А. ИВАНЧЕНКО, Тесная связь научных исследований с производством . . . 1369

СТАТЬИ

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ, В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ и А. НИКА, Расчет подшипников скольжения 1377
Д. ПАВЕЛЕСКУ, И. ИЛЮК, С. БАРБУЛ, Е. ПРОКОПОВИЧ, М. НЭСТАСЕ и В. КОНСТАНТИНЕСКУ, Метод исследования износа подшипников при помощи радиоактивных изотопов 1397

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Д. ТУТУНАРУ и Т. ДЕМИАН, К определению профиля механизмов с плоским толкателем 1411

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

М. М. НИЦЭ, О движении ракеты в центральном поле сил 1419

УПРУГОСТЬ—ПЛАСТИЧНОСТЬ—СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

МИХАИЛ ХАНГАН, Порядок появления и вращение пластических шарниров статической конструкции под действием установившейся нагрузки и пропорционально возрастающей группы нагрузок 1445
АЛЕКСАНДРУ ГЕОРГИУ, Сопряженные системы, средство выражения условия совместимости при расчете конструкций 1459

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. П. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Исследования мощности резания при работе с обыкновенными углеродистыми сталями 1481

Стр.

И. НИКУЛЕСКУ и К. ФЛОРЕСКУ, Сравнение вертикального однорезцового резания грунтов со ступеньчатым многорезцовым резанием . . . 1497

ГИДРОМЕХАНИКА

ВИКТОР ВЫЛКОВИЧ, Поверхности Бернулли 1507
Ш. И. ГЕОРГИЦЭ, Применения одной граничной задачи в механике жидкостей 1535
Е. РЭЗВАН, Характерные параметры и уравнение макротурбулентного движения 1543
С. ХЫНКУ и Д. ДЕЛИКАН, Резонансные явления при движении жидкостей со свободной поверхностью вокруг цилиндрических стержней 1555

АЭРОМЕХАНИКА

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Ш. АНДРЕЙ и Г. РАДО, Аэродинамический расчет средств передвижения с применением эффекта земли 1565
Т. ХАКЕР, О пределах применимости теории устойчивости, частично контролируемых движений самолета 1581

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В. КЛЕЖА и Д. ПАВЕЛЕСКУ, О погрешностях магнитной записи медленно изменяющихся параметров 1587

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Л. ДУМИТРЕСКУ, И. ЯКАБ, Е. ПРОКОПОВИЧ и А. ЗАХАРЕСКУ, Вопросы экспериментальных исследований по аэродинамике больших скоростей с помощью ударных труб 1599

РЕЦЕНЗИИ 1609

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 1623

Алфавитный указатель за 1960 год 1625

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ”

публикует:

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).

— *Гидромеханика* (*гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства*).

— *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).

— *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).

— *Статика и динамика сооружений* (*методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике*).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(«*ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE*»)

publie :

— des études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;

— des notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;

— des exposés scientifiques et techniques *où l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée* ; *la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée* ;

— des notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— Aéromécanique (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;

— hydromécanique (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*) ;

— constructions mécaniques (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;

— mécanique générale (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;

— statique et dynamique des constructions (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;

— technique des mesures (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI, n° 6 1960

SOMMAIRE

Page

ELIE CARAFOLI, Essor des recherches scientifiques à l'Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia » de l'Académie de la République Populaire Roumaine 1345
ŞT. BĂLAN, L'enseignement de la mécanique théorique dans les instituts d'enseignement supérieur technique 1361
AL. IVANCENCO, Collaboration étroite entre la recherche scientifique et la production 1369

ÉTUDES

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU and AL. NICA, Calculation of journal bearings . 1377
D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, E. PROCOPOVICI, M. NĂSTASE and V. CONSTANTINESCU, A method for studying the wear of bearings with radioactive isotopes 1397

THÉORIE DES MÉCANISMES

D. TUTUNARU und T. DEMIAN, Methode zur Bestimmung des Profils von Kurvengetrieben mit ebenem Talerstössel 1411

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE

M. M. NIŢĂ, Sur le mouvement d'une fusée dans un champ de forces centrales 1419

ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

MIHAIL HANGAN, The order of occurrence and the rotation of plastic hinges for a static structure subjected to a permanent loading and a group of proportionally increasing loads 1445
ALEXANDRU GHEORGHIU, Les systèmes conjugués, moyen d'exprimer la condition de compatibilité dans le calcul des constructions. 1459

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. P. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Étude sur la puissance de coupe dans le cas des aciers au carbone 1481

Page

IS. NICULESCU et C. FLORESCU, Comparaison entre la coupe verticale du sol avec une lame unique et la coupe avec plusieurs lames échelonnées 1497

HYDROMÉCANIQUE

VICTOR VÂLCOVICI, Les surfaces de Bernoulli 1507
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, Les applications d'un problème à la limite à la mécanique des fluides 1535
E. RĂZVAN, Paramètres caractéristiques et équation du mouvement macroturbulent 1543
S. HÎNCU et D. DELICAN, Phénomènes de résonance dans le mouvement des fluides à surface libre autour des barres cylindriques 1555

AÉROMÉCANIQUE

N. N. PATRAULEA, ŞT. ANDREI and GH. RADO, On the aerodynamic calculation of vehicles by using the ground effect 1565
T. HACKER, Sur les limites d'applicabilité d'une théorie de la stabilité des mouvements partiellement contrôlés d'un avion 1581

TECHNIQUE DES MESURES

V. CLEJA and D. PAVELESCU, On the errors in the magnetic tape recordings of parameters with slow variations 1587

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

L. DUMITRESCU, I. JAKAB, E. PROCOPOVICI et A. ZAHARESCU, Quelques problèmes posés par l'utilisation des tubes à chocs aux recherches expérimentales d'aérodynamique des grandes vitesses 1599

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1609

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION 1623

Index alphabétique pour l'année 1960 1625

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR ȘTIINȚIFICE ÎN INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ AL ACADEMIEI R.P.R. [1]

DE

ELIE CARAFOLI

Pînă la înființarea Institutului de mecanică aplicată, în anul 1949, n-a existat la noi o organizare sistematică a cercetărilor științifice în acest domeniu. Dacă în anumite discipline ale științelor naturii, se crease în țară un început de tradiție în cercetare, în special la catedrele de învățămînt superior, în domeniul mecanicii aplicate nu puteau fi semnalate decît unele încercări sporadice, inițiate neorganizat în diferite puncte ale țării, de către cercetători izolați.

După naționalizarea principalelor mijloace de producție, dezvoltarea industriei noastre a căpătat un ritm din ce în ce mai avîntat, punîndu-se accentul pe industria grea și în special pe pivotul acesteia, construcția de mașini. A apărut astfel, ca o necesitate imperioasă rezolvarea unor probleme științifice de mecanică, după cum urmează :

— Probleme de imediată aplicație în procesul tehnologic de producție sau de punere în fabricație ;

— Probleme fundamentale ce rezultă din cele de mai sus prin generalizare și sinteză, cu scopul de a perfecta mai departe rezultatele științifice obținute, a trage concluzii generale și a extinde aplicația lor în întregul domeniu al specialității respective, introducînd tehnica nouă în industrie, îmbunătățind în mod continuu producția și metodele de proiectare sau de calculul mașinilor și al marilor construcții. Este vorba de cercetări fundamentale teoretice și experimentale de cea mai mare importanță pentru construirea socialismului în țara noastră ;

— Probleme de perspectivă, legate de cele sus-amintite, pentru crearea rezervei științifice de viitor, care să contribuie la îmbogățirea patrimoniului mondial al ştiinţei, sau să constituie puncte de plecare pentru noi cuceriri ştiinţifice sau descoperiri şi realizări remarcabile în tehnică.

---

[1] Text prescurtat al referatului prezentat la ședința de deschidere a Sesiunii stiințifice jubiliare a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R., 4–7 iulie 1960.

Este necesar însă să lămurim ce trebuie să înţelegem prin mecanica aplicată.

Orice fundamentare ştiinţifică a unei probleme de mecanică, orice rezultat sau formulă de calcul, dedusă pe cale teoretică sau experimentală, care are ca obiectiv imediat sau îndepărtat, aplicaţiile acestora în construcţia de maşini, în construcţiile civile şi industriale, în proiectare, în creşterea şi îmbunătăţirea producţiei industriale, sau în dezvoltarea oricărui alt factor cu caracter mecanic al economiei naţionale, se încadrează în general într-unul din capitolele mecanicii aplicate.

După aceste precizări, să vedem care au fost obiectivele principale ale Institutului de mecanică aplicată, stabilite încă de la înfiinţarea sa. La acea dată au apărut drept imperative imediate foarte multe sarcini dintre care vom menţiona pe cele mai importante.

În primul rînd a apărut necesitatea formării primei echipe de cercetători în diversele ramuri ale mecanicii cu aplicaţii la maşini şi la construcţii. Lipsa unor cercetători formaţi a impus utilizarea unor elemente foarte tinere, absolvenţi abia ieşiţi de pe băncile facultăţii, şi educarea lor în diverse metode de cercetare, folosind pentru aceasta cîteva cadre cu experienţă, foarte puţine de altfel, care desfăşuraseră o activitate ştiinţifică recunoscută şi pînă atunci. În al doilea rînd, Institutul de mecanică aplicată a trebuit să adapteze treptat o tematică avansată, alegînd acele probleme fundamentale care să fie legate de dezvoltarea impetuoasă a industriei noastre sau a marilor construcţii.

După un contact din ce în ce mai strîns cu locul de producţie, după o documentare mai largă asupra problemelor de rezolvat, urmînd în special indicaţiile documentelor de partid şi de stat, am reuşit să orientăm din ce în ce mai just cercetările noastre. Putem spune astăzi că, în raport cu baza materială pe care am realizat-o treptat în cei peste 10 ani de activitate şi faţă de numărul încă mic de cercetători, am stabilit o tematică corespunzătoare, care trebuie bineînţeles să fie mereu îmbunătăţită, paralel cu exigenţele tehnicii înaintate şi nevoile dezvoltării continue a economiei naţionale.

Institutul nostru, ori cît de mare ar fi fost numărul cercetătorilor săi, nu putea însă îmbrăţişa toate problemele fundamentale ale economiei noastre, care se dezvoltă într-un ritm impetuos. O sarcină importantă a fost astfel, aceea de a grupa în jurul său şi alte forţe din ţară pentru preocupări de mecanică aplicată.

Difuzarea rezultatelor prin şedinţe de comunicări, conferinţe, publicaţiile institutului *Studii şi cercetări de mecanică aplicată* şi *Revue de Mécanique Appliquée*, constituie preocupări dintre cele mai utile, deoarece, în felul acesta, rezultatele obţinute în institutul nostru sînt puse la îndemîna celor interesaţi. Totodată pe calea publicaţiilor se face cunoscută contribuţia noastră la patrimoniul mondial al ştiinţei.

În sfîrşit, prin cercetarea unor probleme de perspectivă mai apropiate sau mai depărtate, Institutul de mecanică aplicată a făcut acumulări importante de rezervă ştiinţifică de viitor, care vor fi valorificate pentru progresul tehnic şi ştiinţific în diferite ramuri tehnico-industriale.

Iată deci cîteva din preocupările generale ale institutului nostru. În cele ce urmează vom prezenta unele dintre realizările institutului în cei peste zece ani de activitate în domeniul cercetărilor.

După cum am arătat mai înainte, prima noastră preocupare a fost alegerea problemelor fundamentale, care să rezulte ca o necesitate a dezvoltării diferitelor ramuri tehnico-economice din ţară. Dintre acestea am considerat în primul rînd construcţia de maşini, apoi construcţiile generale şi speciale, construcţiile hidrotehnice, construcţiile aerotehnice şi alte domenii. Corespunzător acestor ramuri, Institutul a fost organizat pe secţii de specialitate şi anume : mecanică generală, maşini şi mecanisme, mecanica construcţiilor, hidromecanică, aeromecanică. La început institutul cuprindea şi secţia de metalurgie, care a fost transformată mai tîrziu într-o unitate independentă, Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R. De altfel, în cei peste 10 ani organizarea pe secţii a mai suferit unele modificări.

Pentru sprijinirea secţiilor de cercetări prin elaborarea metodelor de experimentare şi măsură s-a înfiinţat un sector de tehnica măsurătorilor cu radiaţii şi mărimi electrice.

Rînd pe rînd au început a fi atacate cîteva din problemele fundamentale specifice domeniilor de mai sus, în acord cu preocupările din practică.

Astfel una din problemele fundamentale studiate în cadrul institutului nostru a fost aceea a lubrificaţiei, frecării şi uzurii maşinilor, de mare importanţă în construcţia de maşini.

Menţionăm, astfel, că N. Tipei a reuşit să obţină o soluţie teoretică pentru distribuţia presiunilor în cazul lagărelor cu dimensiuni finite, simplă ca formă, şi în bună concordanţă cu datele experimentale, din care s-au dedus apoi formule şi diagrame pentru calculul elementelor funcţionale ale lagărelor şi proiectarea lor în condiţiile optime.

Stabilirea sub formă completă a ecuaţiilor lubrificaţiei, rezolvarea riguroasă a problemei lagărelor fără joc radial, cercetările privind lagărele supuse la forţe şi viteze variabile, studiul lagărelor cu elemente geometrice variabile, cercetările asupra stabilităţii mişcării lagărelor şi alte lucrări ale lui N. Tipei, toate acestea constituie rezolvarea generală a problemei lubrificaţiei hidrodinamice.

În alte cercetări ulterioare, N. Tipei, în colaborare cu Al. Nica, a dedus influenţa condiţiilor la limită şi a variaţiei viscozităţii în lungul stratului de lubrifiant.

În aceeaşi ordine de idei, V. N. Constantinescu, din acelaşi colectiv, a atacat problema lubrificaţiei lagărelor în regim turbulent, care apare la turaţii mari sau în cazul lagărelor cu dimensiuni mari, şi a dedus ecuaţiile lubrificaţiei în regim turbulent, dînd şi o metodă teoretică de studiu, bazată pe ipoteza lungimii de amestec.

O altă problemă care a făcut obiectul cercetărilor colectivului compus din N. Tipei şi V. N. Constantinescu, a fost lubrificaţia cu gaze în regim turbulent şi laminar, al cărei interes teoretic şi practic este deosebit.

Toate aceste lucrări se bucură de o elogioasă apreciere atît în țară cît și peste hotare. Lucrarea *Hidroaerodinamica lubrificației* de N. Tipei, apărută în 1957 în Editura Academiei R.P.R. este în curs de publicare în limba engleză în S.U.A.

În paralel, un alt colectiv, format din Olga Biță și alți colaboratori, a cercetat proprietățile fizico-chimice ale lubrifianților, stabilind noi criterii de clasificare a acestora și a pus la punct o metodă de rodare rapidă, pe cale chimică, care a început să fie introdusă acum în practică cu bune rezultate.

Trecînd mai departe la alte probleme fundamentale, vom menționa lucrările de hidrodinamică ale colectivului condus de prof. D. Dumitrescu, membru corespondent al Academiei R.P.R. din care fac parte C. Iamandi, Dan Ionescu, Vasile Ionescu, Mircea Cazacu, C. Crăciun și alții.

Astfel a fost atacată problema mișcării lichidelor grele cu suprafață liberă, de o deosebită importanță practică pentru calculul deversoarelor, pentru studiul mișcării în albii deschise, al curbelor de remuu etc. Problema prezentînd dificultăți teoretice, într-o primă etapă, un colectiv format din prof. D. Dumitrescu, V. Ionescu și alți colaboratori, a utilizat metoda diferențelor finite, care a permis rezolvarea directă într-o serie de cazuri utile pentru aplicații, ca scurgerea peste deversoare cu muchie ascuțită sau peste deversoare cu prag lat. Aceeași metodă s-a aplicat cu succes de către prof. D. Dumitrescu, D. Ionescu, V. Ionescu și alți colaboratori la studiul unor probleme de mișcare a fluidelor vîscoase, cum ar fi mișcarea în canale de diferite secțiuni, scurgerea plană între două plăci paralele în prezența unui obstacol și mișcările axial-simetrice ale fluidelor perfecte. Mai tîrziu, colectivul compus din prof. D. Dumitrescu, V. Ionescu și C. Crăciun a reușit să obțină o soluție generală a problemei mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă, elaborîndu-se o teorie susceptibilă de a fi aplicată la cazuri concrete. Rezultatele obținute în această direcție au fost apreciate și peste hotare. Totodată prof. D. Dumitrescu, Dan Ionescu și alți colaboratori au efectuat o serie de cercetări asupra mișcării fluidelor reale, cum ar fi integrarea riguroasă a ecuațiilor Navier-Stokes în anumite cazuri particulare, sau studiul mișcării turbulente în canale și conducte.

Paralel cu aceste cercetări, prof. D. Dumitrescu, C. Iamandi și alți colaboratori au efectuat încercări sistematice pe modele privind mai multe construcții hidrotehnice importante, care au fost realizate sau se află în curs de execuție în țara noastră.

Menționăm, de asemenea, și un studiu cu caracter original datorit prof. Cristea Mateescu, membru corespondent al Academiei R.P.R., asupra rezolvării ecuației diferențiale a lui Poisson prin trei metode noi. Problemele care au servit pentru demonstrarea metodelor au fost alese din domeniul hidrodinamicii fluidelor vîscoase, dar aceleași metode sînt aplicabile și în alte capitole ale hidrodinamicii și în elasticitate. Lucrarea publicată în revistele Academiei R.P.R. a fost relevată și în străinătate, făcînd și obiectul unei comunicări la Academia de Științe din Paris.

O altă problemă în care au fost obținute rezultate interesante, este studiul mișcării fluidelor prin medii poroase cu permeabilitate variabilă, care pot conduce și la aplicații practice în exploatările de petrol și gaze.

În acest domeniu T. Oroveanu a elaborat numeroase lucrări teoretice, și împreună cu colaboratorii săi au atacat de asemenea și alte probleme ca mișcarea amestecurilor de lichide și gaze prin medii poroase, în vederea aplicațiilor la exploatarea zăcămintelor cu regim de gaze dizolvate, ca problema dislocuirii petrolului de către apă, în care se ține seamă și de neomogenitatea mediului poros, ca problema restabilirii presiunii în zăcăminte după închiderea sondelor și alte similare.

În cercetările de aerodinamică acad. prof. E. Carafoli s-a ocupat cu teoria profilelor de contur dat, a generalizat apoi în colaborare cu N. Patraulea teoria sistemelor portante complexe, aripă-fuzelaj, demonstrînd teorema rezistenței minime și elaborînd o metodă precisă pentru studiul mișcării în jurul aripii cu fuzelaj central.

În aerodinamica suprafețelor permeabile, în afară de o primă lucrare, datorită lui E. Carafoli, privind teoria profilelor permeabile, N. Patraulea a intreprins cercetări sistematice, elaborînd o teorie liniarizată pentru suprafețele permeabile, cu aplicații la studiul ecranelor permeabile, la teoria parașutei, a profilelor aerodinamice cu volet permeabil și altele. Lucrările au fost strînse într-o monografie apărută în 1956 și distinsă cu premiul ,,Aurel Vlaicu'' al Academiei R.P.R.

În problema reducerii vitezelor de decolare și aterizare a avioanelor N. Patraulea, împreună cu L. Dumitrescu și alți colaboratori, au intreprins cercetări sistematice asupra aripilor inelare, sau asupra hipersustentației datorită jeturilor emise la bordul de fugă al aripilor de anvergură infinită și finită.

În aerodinamica vitezelor mari, colectivul condus de acad. E. Carafoli s-a ocupat de teoria aripilor în curent supersonic, extinzînd rezultatele obținute la aripile triunghiulare dublu-conice și apoi la studiul mișcărilor conice de ordin superior în jurul aripilor subțiri sau groase. Pe baza acestor studii s-a elaborat și dezvoltat în colaborare cu M. Ionescu o teorie unitară. care permite obținerea explicită a caracteristicilor aerodinamice ale aripilor și dă soluția generală a problemei, atît pentru cazul aripii de formă dată, problema directă, cît și pentru aripa avînd presiunile date, problema indirectă. Formulele obținute ar putea fi adaptate și aplicate și la studiul altor probleme de interes practic, ca influența aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripilor triunghiulare, sau mișcările oscilatorii ale aripilor, executate în colaborare cu Șerban Săndulescu; sau mai departe, teoria aripilor triunghiulare și trapezoidale de rezistență minimă, sau încă studiul aripilor triunghiulare cu simetrie forțată pentru incidențe și pentru presiune, în colaborare cu Adriana Năstase. În aceeași problemă M. Ionescu și Gh. Darie au determinat caracteristicile aerodinamice ale aripilor triunghiulare cu antisimetrie forțată.

O altă problemă care nu fusese studiată pînă atunci, ci numai menționată în cazuri simple, a fost teoria aripilor cruciforme și a ampenajelor, fie în problema directă, fie în problema indirectă, fie în problema mixtă, cînd se dă distribuția de presiuni pe un plan și forma geometrică a celuilalt plan, normal pe primul.

E. Carafoli în colaborare cu D. Mateescu au cercetat probleme de interferență, dînd soluția generală sub formă închisă a interferenței fuzelajului conic cu aripa simplă și cu aripa cruciformă.

D. Pantazopol s-a ocupat de studiul mișcărilor supersonice cu unde de șoc detașate și în special de mișcarea subsonică din spatele acestor unde, obținînd rezultate foarte interesante.

În aerodinamica experimentală, I. Stroescu, vechi pioner al aerodinamicii experimentale în țara noastră, împreună cu cercetătorii secției de aeromecanică printre care și I. Nedelescu și în colaborare cu personalul catedrei de aviație de la Institutul politehnic, au efectuat încercări pe machetele de avioane proiectate și construite în țara noastră în ultima vreme, precum și alte cercetări experimentale de interes practic pentru diferite ramuri ale tehnicii, cum ar fi acțiunea vîntului pe clădiri și altele.

Într-o problemă de mare actualitate L. Dumitrescu a efectuat cercetări cu privire la construcția și funcționarea tubului de șoc. Recent, același autor a studiat mișcarea cu transfer de căldură în gaze rarefiate. Mai semnalăm și cercetările întreprinse de M. Paloș, care s-a ocupat de scurgeri în ajutajele Laval.

În cercetările foarte actuale întreprinse asupra stratului limită, Șt. Săvulescu a reușit să dea o metodă originală de studiu și să rezolve mai multe probleme cu rezultate foarte bune, putînd să extindă metoda sa la cazul tridimensional și la regimul nepermanent.

În încheiere, vom semnala volumul *Aerodinamica aripilor* publicată în 1951 și tradusă în limba rusă la Moscova și în limba germană la Berlin precum și *Aerodinamica vitezelor mari* publicată în 1957 în R.P.R. și în 1960 în limba rusă la Moscova, ambele lucrări datorite acad. prof. E. Carafoli.

În problemele de mecanica zborului, menționăm cercetările asupra stabilității avioanelor și a altor tipuri de aerodine, datorite lui T. Haker care a stabilit un criteriu de stabilitate longitudinală a avionului pentru mișcările de bază nepermanente, orizontale și rectilinii. De asemenea, el a studiat stabilitatea avionului și pentru alte regimuri de zbor nepermanente, cu aplicație la avioanele cu decolare și aterizare pe verticală.

În aceeași problemă, Al. Marinescu a elaborat o metodă generală de calcul a stabilității elicopterelor, avînd rotoare cu pale cantilever și a elicopterelor prevăzute cu pale articulate și cu rotoare în tandem. Cercetările sale au fost sintetizate într-o monografie apărută recent în Editura Academiei R.P.R., sub titlul *Teoria elicopterului*.

De asemenea, Gh. Rado a studiat soluțiile constructive pentru asigurarea stabilității elicopterului construit la noi în țară, iar Ștefan Andrei a studiat metodele de calcul pentru elicopterele cu antrenare pneumatică.

O altă categorie de probleme analizate se referă la fenomenele termoaerodinamice care apar în motoarele cu reacție, cum sînt cercetările experimentale efectuate de către Al. Stratilescu și Tr. Comănescu în problema organizării cîmpului de temperaturi la ieșirea din camerele de ardere, ca și în studiul factorilor care contribuie la mărirea stabilității combustiei.

Trecînd acum la altă categorie de probleme vom semnala pe cele referitoare la teoria mecanismelor, unde colectivul condus de R. Bogdan şi Chr. Pelecudi, a efectuat o serie de cercetări, avînd ca scop final mărirea capacităţii de lucru la unele maşini şi a analizat automatizarea unei maşini de filigranat, spre a-i mări capacitatea de filigranare. Dintre rezultatele obţinute, vom cita elaborarea, împreună cu Gr. Antonescu, V. Calcan şi L. Calmaciuc a unei metode experimentale de cercetare a mecanismelor plane şi spaţiale pe cale mecano-electrică. Acelaşi colectiv a întreprins cercetări valoroase asupra unor tipuri noi de mecanisme, cu utilizări practice, s-a ocupat de asemenea de clasificarea mecanismelor spaţiale, studiul lanţurilor cinematice pentru trasarea curbelor ciclice, utilizarea funcţiilor de variabilă complexă la studiul lanţurilor cinematice, studiul cinematicii mecanismelor plane pe baza analizei armonice etc.

O problemă practică de prelucrare a metalelor a fost studiată de un colectiv condus de M. Popov, avînd colaboratori pe I. Mitrică şi E. Deciu, care au găsit pe cale experimentală, condiţiile optime de aşchiere pe strung a unor game largi de oţeluri romîneşti cu cuţite din oţel rapid, cu plăcuţe din carburi metalice şi plăcuţe metalo-ceramice de provenienţă romînească. Din cercetările care au necesitat un mare volum de experienţe, s-a reuşit să se stabilească diagramele care dau condiţiile geometrice şi regimurile optime ale aşchierii. Acelaşi colectiv a efectuat cercetări teoretice şi experimentale asupra condiţiilor de funcţionare ale unor laminoare din ţară.

C. Florescu şi colaboratorii au executat cercetări experimentale asupra proprietăţilor mecanice ale solurilor, pentru stabilirea rezistenţei la tăiere a organelor active de lucru ale maşinilor agricole, în vederea utilizării raţionale a acestor maşini şi a măririi productivităţii lor.

V. Marcu, P. Freund şi colaboratorii au efectuat cercetări experimentale, cu bune rezultate, asupra procedeului de metalizare prin pulverizare, ca mijloc de recondiţionare şi protecţie contra coroziunii suprafeţelor.

În domeniul elasticităţii, plasticităţii, stabilităţii şi vibraţiilor sistemelor mecanice, un prim capitol atacat a fost acela al rezistenţei materialelor şi elasticităţii statice şi dinamice, cu aplicaţii la maşini, la construcţii şi la mecanica pămînturilor.

S-au studiat unele fenomene dinamice ale elasticităţii, cu aplicaţii la problemele puse de propagarea trepidaţiilor la fundaţiile de maşini. M. Mişicu a studiat astfel cazul grinzilor şi plăcilor elastice de fundaţie şi problema stabilităţii dinamice a fundaţiilor masive sprijinite pe piloţi.

N. Pîrvulescu a întreprins cercetări sistematice asupra mecanicii utilajului petrolier, studiind rezistenţa şi flambajul prăjinilor de foraj, cu luarea în considerare a condiţiilor reale de lucru.

Fenomenele de torsiune care intervin în numeroase organe de maşini au făcut obiectul unor ample cercetări. Astfel, problema statică a arborilor supuşi la torsiune a fost studiată pentru diferite forme de secţiuni transversale de T. Oroveanu, V. Manea, L. Solomon şi D. Drăghicescu, L. Dumitrescu şi Cr. Stănescu. Aceeaşi problemă, aplicată la paletele de turbină a fost studiată de Fl. Dincă şi N. Boicu. În sfîrşit M. Mişicu a studiat aspectul dinamic tridimensional al torsiunii, obţinînd ecuaţiile generale şi soluţiile respective în cazul barelor cu diferite secţiuni.

Problema dinamică a plăcii cilindrice subțiri cu condiții determinate pe contur a fost cercetată de V. Visarion, care a stabilit criterii de dimensionare pentru carcasele de autobuz. Oscilațiile sistemului șasiu-suspensie-carcasă la autovehicule, precum și oscilațiile proprii ale navelor au fost studiate de V. Manea. Același autor, împreună cu Fl. Dincă, a atacat problema dinamică a barelor în mișcare uniformă, uniform accelerată și impulsivă. Pentru ultimul din aceste cazuri, stabilitatea dinamică a fost cercetată de E. Procopovici.

În probleme de aeroelasticitate A. Petre a elaborat o metodă pentru calculul vitezei de divergență aeroelastică la suprafețele portante în rotație, iar împreună cu Cr. Stănescu a studiat divergența aeroelastică a aripilor monocheson de secțiune constantă, ținînd seamă de împiedecarea răsucirii.

Toate aceste rezultate servesc la calculul riguros al structurii avioanelor.

Recent, problemele de aeroelasticitate tratate de M. Mișicu și Fl. Dincă au fost aplicate la calculul traversărilor conductelor peste cursuri de apă.

Tot în legătură cu problemele dinamice ale elasticității R. Prișcu a efectuat o serie de studii asupra barajelor de greutate, iar M. Mișicu, R. Voinea, S. Răutu și M. Ifrim au studiat comportarea structurilor etajate.

Un colectiv condus de prof. A. Beleș și prof. Șt. Bălan, membri corespondenți ai Academiei R. P. Romîne a executat cercetări experimentale asupra comportării construcțiilor la sarcini seismice.

În problema structurilor, M. Mihailescu a analizat cazul pînzelor subțiri, considerînd învelitorile cu două directoare și plan director în ipoteza de membrană, precum și învelitorile în formă de paraboloid. În același domeniu, V. Visarion a studiat, prin extinderea analogiei statico-geometrice, starea de eforturi în plăcile subțiri de formă sferică, de paraboloid hiperbolic și eliptic, elicoid drept și cilindru circular. Împreună cu Cr. Stănescu a elaborat o metodă de calcul al învelitorilor cilindrice circulare ortotrope de mică curbură și izotrope. L. Librescu a studiat la rîndul său cazul structurilor „sandwich", cu aplicații la construcțiile aeronautice, iar împreună cu A. Petre a considerat și cazul structurilor nesimetrice.

O serie de cercetări privind statica și dinamica grinzilor pereți, studii asupra plăcilor elastice, precum și unele investigații asupra unor probleme mai generale, au fost efectuate de P. P. Teodorescu, cu rezultate numeroase și interesante.

În problema construcțiilor de beton armat M. Weissenberg și colaboratorii au efectuat cercetări pe elemente de beton precomprimat, M. Mihailescu și I. Ungureanu au studiat vibrația în timp a caracteristicilor elastice ale betonului, iar prof. V. Nicolau, M. Weissenberg, V. Ile și Sabina Ciungu au cercetat aderența betonului de armături.

Colectivul condus de acad. N. Profiri și compus din I. Stănculescu, R. J. Bally, E. Stănescu, I. Antonescu, E. Zaharescu și R. Varlan, a efectuat cercetări sistematice asupra consolidării pe cale electrochimică a terenurilor și studii în domeniul comportării mecanice a pămînturilor.

În domeniul fotoelasticității M. Arcan și Ed. Nicolau au dat o metodă grafică pentru separarea tensiunilor principale, iar un colectiv condus de prof. Șt. Bălan și format din M. Arcan, S. Răutu, V. Petcu și H. Goldemberg a pus la punct o metodă experimentală de analiză optică cromoplastică servind la studiul comportării plastice a structurilor.

În cercetări cu caracter fundamental asupra mediilor deformabile, M. Mișicu a obținut rezultate valoroase în domeniul elasticității neliniare, metoda propusă fiind citată în tratatele de specialitate pentru caracterul ei general. El a elaborat de asemenea o interesantă teorie asupra funcțiilor monogene cu cuaternioni cu aplicații în elasticitate și mecanica fluidelor.

Utilizînd cele mai noi rezultate din tehnica măsurătorilor am aplicat în cercetările noastre metodele moderne de măsură, electronice și cu izotopi radioactivi. În acest domeniu I. Jakab, E. Procopovici A. Zaharescu și L. Dumitrescu au elaborat o metodă de măsură a vitezei de propagare a undei de șoc cu gaze, cu ajutorul unor detectori cu inerție mecanică foarte redusă. De asemenea, E. Procopovici, colaborînd cu L. Dumitrescu, a conceput o aparatură originală pentru măsurarea presiunilor cu variații foarte rapide în timp.

D. Pavelescu, împreună cu T. Pantelimon, a făcut cercetări asupra înregistrării parametrilor mecanici pe bandă magnetică, rezultatele fiind confirmate recent în străinătate, iar împreună cu I. Iliuc a elaborat o metodă originală de măsură pe cale radioactivă a grosimii straturilor de lubrifiant, prezentată la cea de-a 2-a Conferință de la Geneva pentru folosirea energiei atomice în scopuri pașnice.

În sfîrșit, menționăm lucrările colectivului condus de prof. D. Isăcescu, care a realizat diverse materiale sintetice care înlocuiesc cu succes metalele deficitare în organele de mașini.

★

Paralel cu activitatea de cercetare s-a dezvoltat în cadrul institutului, prin grija forurilor conducătoare și prin activitatea entuziastă a cercetătorilor și personalului auxiliar o puternică bază materială a laboratoarelor.

În primii ani, mijloacele materiale erau extrem de modeste, institutul nu avea un local propriu, iar puținele cercetări experimentale se efectuau la institutele de învățămînt superior (în special Institutul politehnic din București) sau cu mijloace improvizate. Cu totul alta este însă situația în momentul de față.

Pentru cercetările experimentale de aeromecanică posedăm un local propriu nou, cu spații de lucru încăpătoare, în care s-a construit o suflerie subsonică de mari dimensiuni. Această instalație servește nu numai pentru încercări de aviație, dar și pentru cercetări experimentale cu caracter industrial. Echipamentul de comandă și măsură, precum și balanța aerodinamică automată au fost realizate pe baza proiectelor elaborate în întregime în cadrul institutului nostru. A fost construită o instalație experimentală complexă pentru studiul ventilatoarelor, în vederea ameliorării ventilatoarelor fabricate în țară, apoi o suflerie specială pentru studiul stratului limită laminar și turbulent. Pentru aerodinamica vitezelor mari s-au făcut instalații remarcabile, cu mijloace foarte puțin costisitoare. A fost dată astfel în funcție o suflerie supersonică de dimensiuni reduse, utilizînd un compresor de motor de avion antrenat electric.

Experiența cîștigată a servit la proiectarea și realizarea unei suflerii supersonice de același tip, însă cu 4 compresoare, care se află în curs de montaj.

O realizare deosebit de interesantă, aparținînd ing. L. Dumitrescu, este tubul de șoc. Tubul de șoc permite să se realizeze într-o secțiune destul de mare și un consum minim de energie, un curent supersonic apreciabil. În colaborare cu colectivul condus de I. Jakab, s-a început punerea la punct a aparaturii electrice pentru măsurat presiuni și forțe.

Relevăm, de asemenea, realizarea unor instalații experimentale pentru studiul caracteristicilor de funcționare ale aero-reactoarelor și pentru cercetări asupra camerelor de ardere.

În domeniul hidraulic, colectivul de hidrodinamică a realizat o serie de instalații experimentale, în care au fost efectuate, pentru prima oară în țara noastră, în mod sistematic, cercetări pe modele hidraulice. În momentul de față există un canal vitrat cu pantă fixă (de 1 ×1 × 20 m), un canal vitrat cu pantă variabilă (de 0,3 × 0,3 × 9 m), o instalație complexă pentru studiul fluidelor vîscoase (avînd un debit de ulei de 100 l/s), precum și alte realizări importante, în care se vor face studii și cercetări de interes practic deosebit.

Tot astfel a fost dezvoltat și utilat într-o anumită măsură laboratorul de lubrificație, compus dintr-o instalație pentru studiul lagărelor circulare cu alunecare, o instalație pentru studiul materialelor de lagăre, o instalație pentru studiul proceselor de lubrificație în motoarele cu ardere internă, mai multe instalații pentru măsurarea temperaturilor, debitelor și presiunilor în lagăre, o instalație pentru încercările lagărelor cu aer, pentru studiul lubrificației suprafețelor cu mișcare de rostogolire și altele.

Toate aceste instalații au fost proiectate și realizate de colectivul de lubrificație.

S-a creat, de asemenea, un laborator de metalizare prin pulverizare, iar pe baza proiectului elaborat în institutul nostru, Uzinele I.O.R. construiesc în serie aparatul de electrometalizare tip I.M.A.-I.O.R., pentru diversele întreprinderi care vor utiliza această metodă pentru recuperarea sau protecția pieselor de mașini.

S-a realizat, de asemenea, o instalație complexă mecanoelectronică, pentru studiul mecanismelor, în întregime executată în cadrul institutului, iar laboratorul de așchiere posedă un utilaj corespunzător pentru cercetări în prelucrarea metalelor.

O altă realizare importantă este laboratorul de electronică care a reușit să efectueze numeroase lucrări de măsurători atît pentru cercetările Institutului, cît și pentru unități din exterior.

De asemenea, laboratorul de măsurători prin metode radioactive realizat pe baza proiectelor noastre a fost dotat cu o serie de instalații, care permit utilizarea izotopilor radioactivi și a razelor gama în cercetările experimentale de mecanică aplicată.

Institutul posedă și un atelier dotat cu mașini unelte corespunzătoare, în care se execută modele experimentale și diversele dispozitive necesare cercetărilor noastre experimentale. Trebuie însă subliniat faptul că numeroase laboratoare sînt în curs de utilare, iar multe colective trebuie încă dezvoltate.

★

O primă etapă în activitatea de cercetare o reprezintă documentarea. În acest sens s-a creat, începînd din 1952, o secţie de documentare, care a devenit un centru activ şi un sprijin important pentru activitatea de cercetare. S-au stabilit diferite forme de documentare cu caracter permanent, dintre care menţionăm în special Buletinul informativ documentar pentru uz intern cu apariţia bilunară. Informarea ştiinţifică şi documentară a cercetătorilor este asigurată şi prin împrumuturi interne şi internaţionale, procurări de microfilme, cercetări bibliografice pe teme date etc.

În activitatea de documentare în cadrul I.M.A. s-au obţinut rezultate remarcabile care au constituit ajutoare preţioase pentru secţiile de cercetări.

Colecţiile bibliotecii, care în 1950 numărau doar 300 titluri cărţi şi 30 titluri periodice, au ajuns astăzi la peste 12 000 titluri cărţi şi peste 1 600 titluri periodice.

Un mijloc deosebit de important pentru difuzarea rezultatelor cercetării ştiinţifice îl constituie publicaţiile periodice, tratatele şi monografiile. Institutul de mecanică aplicată publică revista *Studii şi cercetări de mecanică aplicată*, care apare astăzi cu 6 numere anual.

Pentru difuzarea lucrărilor noastre în străinătate, conducerea Academiei R.P.R. a hotărît din 1956 apariţia unei reviste în limbi străine *Revue de Mécanique Appliquée*, care acum apare de asemenea cu 6 numere anual.

În paginile acestor reviste se publică studii şi articole originale de înalt nivel, axate pe probleme importante actuale şi de perspectivă, cuprinzînd tratarea lor completă pînă la aplicaţiile practice, trezind prin aceasta interesul oamenilor de ştiinţă şi al inginerilor din producţie. Ele urmăresc stimularea activităţii ştiinţifice din domeniul mecanicii aplicate, precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, ale specialiştilor din ţară şi ale colaboratorilor de renume de peste hotare. Ambele reviste se bucură de o bună apreciere, fiind trimise actualmente la peste 300 instituţii din 37 de ţări. Pe lîngă faptul că se asigură o bună cunoaştere a cercetărilor noastre, prin această acţiune de schimb se primesc materiale documentare utile şi valoroase.

Se poate aprecia astăzi că revistele institutului nostru au atins un stadiu de maturitate similar revistelor cu o tradiţie mai veche din ţară şi străinătate.

Activitatea publicistică a institutului se reflectă şi într-un număr de tratate şi monografii, apărute în aceşti ani, care s-au bucurat de aprecieri deosebite atît în ţară cît şi peste hotare, unele fiind traduse sau în curs de traducere în limbile rusă, engleză, germană şi fiind distinse cu premiul de stat sau premiile Academiei R.P.R.

În cadrul convenţiilor de colaborare, cercetătorii din institutul nostru au întreprins vizite de schimb de experienţă şi de studii în diferite ţări, în special în Uniunea Sovietică, iar specialiştii de peste hotare au vizitat institutul nostru, stabilindu-se astfel legături utile pentru desfășurarea activității de cercetare.

Rezultatele cercetărilor noastre au fost de asemenea expuse la diferite congrese și conferințe internaționale din Uniunea Sovietică, din țările de democrație populară, precum și din alte țări, prezențele romînești la aceste manifestări bucurîndu-se de aprecieri elogioase.

★

Din problemele cu caracter fundamental, atacate și rezolvate în cadrul Institutului, a rezultat o serie de aplicații industriale directe, dintre care unele au și fost introduse în producție iar altele urmează să fie introduse cît de curînd. În urma studierii aprofundate și a dezbaterii, în cadrul institutului, a documentelor plenarelor Comitetului Central al P.M.R. din ultimii ani, planurile de cercetări au fost axate și mai strîns pe probleme legate de dezvoltarea economiei naționale, în special în domeniul construcției de mașini.

Rezultatele aplicative ale cercetărilor au făcut obiectul unor protocoale înaintate ministerelor interesate.

Pentru a ilustra modul în care au fost atinse obiectivele ce ne-am propus în aceste cercetări, vom da în cele ce urmează cîteva exemple.

Astfel, în cadrul colectivului de lubrificație, frecare și uzură, s-a stabilit metodologia necesară pentru prelungirea duratei de utilizare a segmenților de piston. Parte din concluziile conținute în protocol au fost însușite și aplicate de Uzinele de tractoare din orașul Stalin. Pe lîngă îmbunătățirea calitativă a funcționării motorului, din calculele economice preliminare efectuate rezultă că aplicarea integrală a recomandărilor din protocol ar putea conduce la economii însemnate.

Același colectiv a elaborat o metodă pentru rodarea chimică a motoarelor cu ardere internă. Metoda permite reducerea substanțială a timpului de rodaj, este mai simplă și mai economică decît rodajul obișnuit, conducînd și la rezultate calitative superioare.

Studiile referitoare la lubrificația cu gaze au condus la realizarea unor lagăre cu aer, care prezintă o durabilitate mai mare, calități superioare de funcționare și un consum foarte mic de ulei.

Metoda noastră de metalizare prin pulverizare, în scopul prelungirii duratei de funcționare a unor piese și instalații, prin protecția suprafețelor contra uzurii și coroziunii, precum și pentru recondiționarea unor piese uzate de mașini, a început să fie aplicată într-o serie de întreprinderi industriale ca Uzinele „Poiana Cîmpina”, „Semănătoarea”, „Republica”, „23 August”, „Copșa Mică” și altele, cărora institutul nostru le-a acordat în acest sens o bogată asistență tehnică, metalizarea reprezentînd o importantă sursă de economii, care nu s-a putut încă evalua decît parțial.

Colectivul de teoria mecanismelor a reușit să aducă unele contribuții importante în ceea ce privește determinarea posibilităților de lucru ale mașinilor de filigranat și la ameliorarea funcționării unor motoare de 450 C.P. fabricate în unele uzine de la noi. Prin aplicarea rezultatelor obținute, se prevede realizarea unor economii însemnate.

Colectivul de prelucrarea metalelor a elaborat norme tehnico-științifice de prelucrarea oțelurilor prin așchiere, care au făcut obiectul unui standard de stat și au folosit la normarea timpilor de lucru. Uzinele „23 August" au aplicat unele din rezultatele obținute de colectiv, în vederea introducerii unui nou oțel romînesc de scule, realizînd astfel economii importante.

Sprijinirea producției s-a făcut și pe cale indirectă, prin ameliorarea condițiilor de lucru. Astfel, pentru protecția auzului muncitorilor care lucrează în ateliere cu zgomote mari, a fost studiat și realizat un tip original de audio-protector, care este bine apreciat și în străinătate, fiind cerut în Uniunea Sovietică, R. S. Cehoslovacia și Republica Democrată Germană.

În laboratorul aerodinamic au fost efectuate cercetări experimentale asupra machetelor unor avioane utilitare, care au fost ulterior construite în țară și se află acum în serviciu. Pe de altă parte, s-a elaborat o metodă de verificare prin tensometrie a avioanelor, care a condus la ameliorarea structurii avioanelor utilitare înlocuind proba statică destructivă, ceea ce a condus la economii însemnate. Același colectiv a contribuit în mod esențial la elaborarea normelor de calcul pentru admisibilitatea la zbor a avioanelor civile.

În domeniul mecanicii construcțiilor, au fost elaborate lucrări asupra betonului precomprimat, care au fost aplicate la construirea unor poduri și la realizarea traverselor de cale ferată.

Colectivul de hidromecanică al institutului nostru a adus contribuții importante la proiectarea și executarea unora dintre principalele construcții hidrotehnice, prin încercările pe modele reduse ale acestora.

Recomandările și soluțiile din protocoale elaborate au servit efectiv la întocmirea proiectelor sau la ameliorarea lor, contribuindu-se astfel la realizarea pe baze științifice a unor lucrări de mare însemnătate economică. În acest domeniu, în anii trecuți s-a colaborat rodnic cu I.S.P.E.

În problemele ridicate de construcția de autovehicule, studiile teoretice și experimentale întreprinse în colaborare cu Uzinele „Tudor Vladimirescu", se află în curs de desfășurare pe prototip și vor conduce la ameliorarea metodelor de proiectare, la exploatarea economică optimă a autobuzelor.

De asemenea, studiile și încercările asupra ventilatoarelor vor contribui la sistematizarea lor, la construirea de ventilatoare de mare randament, cu preț redus, ceea ce va reduce cheltuielile de exploatare.

Aplicarea studiilor de aeroelasticitate la calculul marilor traversări de conducte de gaze, mai sus-amintit, a condus la o metodă de calcul și proiectare, care va aduce economii mari.

Problemele de calcul riguros al structurilor și-au găsit aplicații importante la elaborarea unor metode de calcul și proiectarea cuptoarelor rotative de ciment și a structurilor de nave. În vederea aplicării acestor metode, se colaborează cu Șantierele navale din Galați și cu Ministerul Industriei Grele.

Institutul a inițiat o serie de studii și măsurători electronice, în diferite sectoare industriale, în industria de laminoare, construcția de vagoane, utilajul petrolifer, în aviația civilă etc. realizîndu-se importante economii. În prezent, pentru astfel de studii sîntem intens solicitați de industrie.

Unele din rezultatele obținute au pătruns acum și în învățămîntul tehnic superior, fiind predate viitorilor ingineri. Menționăm în acest sens problemele de lubrificația mașinilor, teoria mașinilor, aerodinamica, hidrodinamica, probleme de elasticitate etc.

După cum rezultă din cele de mai sus, o parte din cercetările noastre au fost extinse pînă la stadiul aplicațiilor practice directe. Totuși aplicarea lor în producție nu a luat pînă în prezent un caracter de largă generalizare, rezultatele în acest sens nefiind încă satisfăcătoare. Prin legătura strînsă cu producția se depistează problemele importante ale industriei și se urmărește justa aplicare în producție a rezultatelor cercetărilor. Acolo unde intreprinderile au dat importanța și sprijinul cuvenit problemelor de colaborare, rezultatele au fost fructuoase. Au existat însă și unele întreprinderi și departamente care au minimalizat această colaborare, acordîndu-i o importanță și un sprijin cu totul insuficient. Din partea Institutului au fost constatate de asemenea o serie de lipsuri ; în multe cazuri a existat o slabă legătură pe parcurs cu unitățile de producție. Abia în ultimii ani s-au organizat adevărate campanii de informare asupra stadiului aplicării efective în industrie a rezultatelor obținute.

★

În urma activității desfășurate în decursul celor peste 10 ani, putem afirma că s-au obținut unele rezultate științifice de valoare, care au contribuit la dezvoltarea științei în domeniile respective de specialitate, au deschis căi noi în cercetarea științifică de mecanică aplicată și au generat aplicații practice importante, sprijinind prin aceasta economia noastră națională. Aceste rezultate sînt astăzi bine primite de cercuri autorizate de specialiști, atît din țară cît și de peste hotare.

Prin înființarea Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., creație a regimului nostru de democrație populară, cercetările din acest domeniu au luat un caracter organizat, ceea ce a permis o coordonare mai bună și o orientare justă a acestora, în legătură directă cu dezvoltarea economiei noastre naționale.

Sesiunea noastră științifică, organizată în colaborare cu Ministerul Industriei Grele, este și ea un factor important în orientarea cercetărilor fundamentale, teoretice și aplicate, în acest domeniu. Larga participare cu comunicări a lucrătorilor științifici din marea majoritate a unităților de cercetări din întreaga țară, ale Academiei R.P.R., ale departamentelor, din cadrul catedrelor de învățămînt superior și dintr-o serie de întreprinderi industriale, dovedește interesul crescînd față de cercetările științifice de mecanică aplicată și totodată demonstrează avîntul pe care l-au luat în întreaga țară aceste cercetări, paralel cu înființarea acestui nucleu organizat, care este Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R.

Cu această ocazie trebuie să menţionăm realizările Centrului de cercetări Timişoara, cele din cadrul Institutului de matematică din Bucureşti, cele din cadrul Ministerului Industriei Grele.

Cercetările fundamentale efectuate în cadrul Institutului nostru, precum şi în alte institute departamentale şi catedre de învăţămînt superior n-au putut satisface toate necesităţile mereu crescînde ale industriei noastre în plin avînt. Au fost studiate numeroase aspecte cu caracter ştiinţific şi practic, s-au dat soluţii în multe cazuri concrete, s-au elaborat noi teorii, care lărgesc cunoştinţele noastre în domeniile respective, şi care creează noi baze de aplicaţii practice.

Construcţia de maşini comportă o mare serie de probleme pentru fiecare din maşinile care se fabrică în ţara noastră (motoare de toate tipurile, autocamioane, tractoare, turbine cu aburi şi hidraulice, locomotive Diesel electrice, utilaje petrolifere, maşini unelte) sau instalaţii industriale complexe, sau elemente mecanice ale mecanizării şi automatizării, sau piese importante de maşini, cum sînt rulmenţii cu bile etc.

Cercetarea ştiinţifică în construcţia de maşini va trebui deci să aducă o contribuţie hotărîtoare în introducerea tehnicii noi în industrie. În acest scop ea va trebui organizată pe baze lărgite, va trebui să cuprindă toate necesităţile principale ale acestei ramuri industriale fundamentale.

Pentru aceasta, se impune înfiinţarea unui institut specializat exclusiv în construcţia maşinilor, dependent de Ministerul Industriei Grele, dotat cu o puternică bază materială şi numeroase cadre ştiinţifice şi tehnice. Pe lîngă acest mare institut, va trebui lărgită şi întărită reţeaua de laboratoare de cercetări uzinale şi birouri de proiectare din întreprinderi, care să studieze aplicarea concretă şi imediată a rezultatelor obţinute la problemele interesînd întreprinderea respectivă. Se impune ca aceste unităţi să fie încadrate cu ingineri şi tehnicieni din cei mai bine pregătiţi, capabili să rezolve orice problemă ridicată de procesul de producţie.

De asemenea, va trebui dezvoltată cercetarea în cadrul catedrelor de învăţămînt superior, îndreptată spre problemele de actualitate tehnică şi industrială, de o deosebită importanţă şi susceptibile pe de altă parte de generalizări, care să permită dezvoltarea ştiinţei sub toate aspectele.

Institutul de mecanică aplicată va trebui să-şi axeze tematica sa pe probleme cu caracter ştiinţific fundamental legate de imperativele economiei naţionale şi de crearea rezervei ştiinţifice de viitor, aşa cum rezultă ele din directivele, dezbaterile şi rezoluţia celui de-al III-lea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn, precum şi din hotărîrea Comitetului Central al P.M.R. şi a Consiliului de Miniştri din 3 iulie a. c. cu privire la ridicarea nivelului tehnic al economiei naţionale.

Aceste documente, privind planul de dezvoltare de 6 ani şi programul de perspectivă pe 15 ani, deschid drumul unei uriaşe dezvoltări tehnice şi industriale, care va face din ţara noastră una din cele mai înfloritoare ţări din lume, cu un nivel material şi cultural din cele mai ridicate.

În înfăptuirea acestor mărețe deziderate, cercetarea științifică va avea de îndeplinit sarcini multiple și de importanță capitală.

Institutul de mecanică aplicată se înscrie cu entuziasm la marea operă de îndeplinire a acestor sarcini epocale, iar cercetătorii noștri se vor înrola cu un avînt puternic și cu forțe înzecite în marea brigadă a constructorilor vieții noi, contribuind astfel, împreună cu tot poporul muncitor, la desăvîrșirea socialismului în țara noastră.

ÎNVĂȚĂMÎNTUL MECANICII TEORETICE ÎN INSTITUTELE DE ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC[1]

DE

ȘTEFAN BĂLAN
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Mecanica este una dintre cele mai vechi științe ale naturii, și evoluția ei, ca și evoluția altor științe, este indisolubil legată de dezvoltarea forțelor de producție. Mecanica s-a format pe baza generalizării experienței dobîndite de oameni de-a lungul timpului, în procesul activității conștiente efectuate pentru satisfacerea nevoilor de a capta și utiliza forțele naturii, de a construi mașini etc.

Dezvoltarea teoriei s-a produs în strînsă legătură cu nevoile practicii social-istorice, în procesul dialectic de cunoaștere a realității obiective, de la observarea realității obiective la gîndirea abstractă și de la aceasta la verificarea prin practică. Conținutul mecanicii, în fiecare stadiu de dezvoltare istorică, s-a îmbogățit cu noi cunoștințe teoretice, care s-au adăugat la cele vechi sau au aprofundat cunoștințele anterioare.

Cele mai vechi lucrări de mecanică pe care le cunoaștem au apărut anterior erei noastre. Se poate spune că mecanica clasică s-a dezvoltat de-a lungul a peste 2 500 de ani, ajungînd spre sfîrșitul secolului al XIX-lea aproape la nivelul pe care-l cunoaștem astăzi.

Mecanica clasică studiază fenomene și procese privitoare la mișcarea mecanică a corpurilor materiale, sesizabile și verificabile, în general, cu simțurile omului sau cu aparate nu prea complicate. Ea folosește geometria lui Euclid și analiza matematică curentă, vitezele care intervin în fenomenele studiate fiind foarte mici în comparație cu viteza luminii. Mecanica clasică se aplică cu succes în calculul mașinilor, în calculul construcțiilor, în hidraulică, balistica obișnuită etc.

---

[1] Text prescurtat al referatului prezentat la ședința de deschidere a Sesiunii științifice jubiliare a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia", București, 4—7 iulie 1960.

Nevoile practicii şi dezvoltarea continuă a teoriei au făcut ca mecanica să capete spre sfîrşitul sec. al XIX-lea şi sec. al XX-lea o extindere cu totul remarcabilă. Astfel s-a ajuns, o dată cu dezvoltarea vechii mecanici, la apariţia unor mecanici noi, cum sînt mecanica relativistă, mecanica statistică, mecanica cuantică. Aceste mecanici abordează domenii noi, a căror înţelegere este mult mai dificilă, fenomenele nemaifiind sesizabile numai prin simţurile omului sau prin aparate simple; geometria lui Euclid nu mai este aplicabilă întotdeauna; vitezele, în aceste cazuri, se apropie de viteza luminii; uneori trebuie luate în considerare particule extrem de mici în număr foarte mare, astfel încît calculele necesită a fi conduse pe principii statistice etc. Aceste mecanici au un cîmp de aplicaţie larg în astronomie, fizică atomică, cosmonautică etc.

În noile condiţii, mecanica devine o ştiinţă amplă, de o deosebită însemnătate pentru tehnică; iar studiul mecanicii dobîndeşte un deosebit interes atît pentru cei care sînt chemaţi să o aplice în diferitele domenii ale practicii cît şi pentru cei care vor să aibă o cultură generală ştiinţifică corespunzătoare timpurilor noastre.

Faptul că mecanica stă la baza înţelegerii studiului principalelor ramuri ale tehnicii şi multor ştiinţe ale naturii a făcut ca învăţămîntul ei să se dezvolte din cele mai vechi timpuri.

De-a lungul istoriei, conform nevoilor societăţii umane şi dezvoltării forţelor de producţie, mecanica s-a perfecţionat mereu, experienţa creînd bazele de dezvoltare a teoriei, iar teoria ajutînd la perfecţionarea practicii. S-au scris cărţi, s-au construit laboratoare şi s-au făcut cercetări ştiinţifice, s-a elaborat teoria necesară unor aplicaţii importante pentru tehnică (maşini, construcţii etc.).

În şcolile tehnice, unde mecanica constituie o disciplină de bază, s-a dat întotdeauna cea mai mare atenţie dezvoltării învăţămîntului mecanicii, găsirii unor metode de predare eficace, formării de noi cadre în această specialitate.

În ţara noastră, mecanica a avut în învăţămîntul tehnic superior, ca şi în universitate, reprezentanţi de seamă, începînd cu Chirilov, Mănescu etc. În anul 1908, catedra de mecanică de la Şcoala de poduri şi şosele, devenită ulterior Şcoala politehnică, a fost încredinţată lui Andrei Ioachimescu, care a condus cu cinste această catedră timp de 30 de ani. În tot timpul cît a profesat, Ioachimescu a prezentat un curs clar, închegat, apropiat de practică. Prelegeri de mecanică, cu un înalt nivel ştiinţific, au ţinut de asemenea Spiru Haret, Gheorghe Filipescu, Ion Ionescu. Un curs unitar şi modern a introdus în 1913 la Universitatea din Bucureşti prof. Victor Vâlcovici.

În anii regimului de democraţie populară au avut loc modificări profunde în structura învăţămîntului nostru superior. Reforma învăţămîntului din 1948, precum şi alte acte normative ulterioare, au dat o mare extindere instituţiilor noastre de învăţămînt superior şi au orientat conţinutul acestui învăţămînt în strînsă legătură cu nevoile economiei şi culturii.

Învăţămîntul superior a primit o orientare realist-ştiinţifică, pe baza ideologiei marxist-leniniste şi a legăturii strînse cu practica, fapt care a făcut posibilă pregătirea unor specialişti cu calificare înaltă, necesari construirii socialismului. De mare folos în organizarea învățămîntului superior ne-a fost bogata experiență sovietică în acest domeniu.

De aceste măsuri a beneficiat din plin și învățămîntul mecanicii. Conținutul acestei discipline a fost fundamentat științific, pe baza materialismului dialectic, pe baza folosirii celor mai noi cuceriri ale teoriei și practicii de specialitate ; s-a procedat la introducerea unor capitole moderne și la legarea tot mai strînsă a cursului de producție. S-a urmărit creșterea dotării laboratoarelor și îmbunătățirea cercetării științifice a cadrelor didactice.

Dezvoltarea învățămîntului mecanicii se bazează pe experiența valoroasă moștenită de la înaintași, pe observații practice și pe experiențe de laborator specifice, pe cercetările științifice făcute în vederea perfecționării acestei științe. Un rol important în dezvoltarea mecanicii îl are concepția generală despre lume. Avînd contingențe directe cu problemele de spațiu, timp, masă, mișcare continuu-discontinuu, relativ-absolut, este necesară cunoașterea aprofundată a materialismului dialectic în vederea fundamentării noțiunilor și legilor ei în mod științific. De altfel, este cunoscut și rolul important pe care l-a avut mecanica în demonstrarea unor concluzii pe care le-au tras Marx, Engels și Lenin, genialii dascăli ai omenirii muncitoare, în legătură cu materialismul dialectic.

În țara noastră, învățămîntul mecanicii începe încă din școala medie la cursul de fizică, unde se dau cunoștințe elementare de cinematică, dinamică și statică.

În învățămîntul tehnic superior, după modul cum se predă mecanica teoretică, se deosebesc două tipuri de facultăți și anume : facultăți în care mecanica este disciplină de profil (de exemplu facultățile de mecanică, construcții de mașini și utilaje etc.), la care planul de învățămînt prevede un număr aproximativ de 210 ore (curs și seminar) și facultăți în care mecanica nu este disciplină de profil (de exemplu facultatea de electrotehnică), la care planul de învățămînt prevede aproximativ 150 de ore (curs și seminar).

În universități (la facultățile de matematică și fizică) există, de asemenea, o diferențiere : la secția de matematici se prevăd aproximativ 270 de ore (curs și seminar), iar la secția de fizică se predau circa 110 ore (curs și seminar).

Organizarea cursului, expunerea materialului, prezintă o deosebită importanță, mai ales dacă ținem seama că mecanica asigură înțelegerea și pătrunderea în domeniul multor științe ale naturii, stînd totodată la baza multor discipline tehnice și contribuind la formarea concepției științifice despre lume.

În general, sînt două căi mai importante de a organiza studiul mecanicii :

— Studiul urmează linia dezvoltării istorice a mecanicii : statica, dinamica (cale cerută în mare măsură de necesitățile pedagogice).

— Studiul începe direct cu dinamica (statica fiind considerată drept un caz particular al dinamicii).

Opinăm pentru prima cale la institutele tehnice de construcții (unde statica are o dezvoltare deosebită de la începutul studiilor) și pentru cea de-a doua cale (care familiarizează pe student, de la început, cu problema mişcării) la celelalte institute şi la universităţi. Desigur, aceste diviziuni sînt convenţionale şi impuse mai ales de necesităţi pedagogice; mecanica este un tot unitar, dinamica, statica şi cinematica constituind diviziuni cu caracter mai mult metodologic, pentru studiul mecanicii.

Programa de curs tratează, în mare, aceleaşi capitole de statică, cinematică şi dinamică pentru toate facultăţile. Fiecăruia din aceste capitole i se afectează un număr mai mic sau mai mare de ore, după specificul facultăţii la care se predă cursul.

În legătură cu organizarea studiului mecanicii ar fi cazul să ne oprim puţin asupra locului pe care trebuie să-l ocupe cinematica şi cîteva capitole mai importante ca : legile fundamentale ale mecanicii clasice, maşinile simple, frecările, lucru-putere-energie, oscilaţii, ciocniri.

Considerăm că cinematica trebuie expusă doar pe scurt înainte de a se începe studiul dinamicii, problemele mişcării trebuind să fie neapărat legate de masă. Capitolul numit impropriu „maşini simple" (deoarece nu se studiază propriu-zis maşini) trebuie pus în legătură cu mişcarea, nu cu statica, cum se practică de cele mai multe ori. Frecările trebuie legate de mişcare. Capitolul „lucru-putere-energie" trebuie studiat la începutul dinamicii, pentru a crea o perspectivă pentru unele metode de rezolvare a problemelor de mecanică. În ceea ce priveşte noţiunile de bază şi legile fundamentale ale mecanicii, acestea trebuie explicate pe larg încă de la începutul cursului.

Metoda de calcul folosită este, în general, metoda vectorială, ceea ce permite demonstraţii interesante şi convingătoare.

Se poate aprecia că, în prezent, situaţia predării mecanicii în institutele tehnice de învăţămînt superior, ca nivel ştiinţific, număr de ore, pondere a diferitelor capitole, metodă de predare este, în general, corespunzătoare.

Mai sînt însă necesare unele îmbunătăţiri în ceea ce priveşte organizarea cursului.

Astfel, nu se realizează încă o suficientă corelaţie între cursurile de matematici, fizică, rezistenţa materialelor, statica construcţiilor (acolo unde se predă acest curs) şi mecanică. Se atacă unele capitole ale mecanicii cînd pregătirea la analiza matematică este insuficientă, sau se expun unele capitole de statica construcţiilor pentru care mecanica nu i-a pregătit încă pe studenţi (de exemplu : principiul deplasărilor virtuale); mai există suprapuneri între cursurile de fizică şi mecanică, între mecanică şi rezistenţă (de exemplu : momentele de inerţie).

O situaţie specială are şi mecanica analitică, prea puţin studiată în institutele tehnice. Această parte a mecanicii este considerată ca nefiind direct legată de fenomenele fizice şi este lăsată pe un plan secundar, poziţie complet nejustificată, dacă ţinem seamă de nevoile calculului modern al construcţiilor şi maşinilor (ecuaţia lui Lagrange etc.), de nevoile diferitelor ramuri ale mecanicii moderne, de studiile privitoare la automatizări etc.

Mecanica este strîns legată de fizică şi de tehnică; ea ridică de asemenea şi o serie de importante probleme filozofice. Considerăm necesar să ne oprim, deși foarte sumar, asupra modului în care credem că ar trebui expuse unele probleme în această disciplină pentru a contribui într-o măsură tot mai mare la formarea concepției materialist-dialectice la viitorii specialiști.

Problema fundamentală care intervine în mecanică este problema materiei și a formelor sale principale de existență : mișcarea, spațiul, timpul, masa.

În mecanica lui Newton, spațiul și timpul sînt considerate rupte de materie, complet independente (spațiu absolut, timp absolut) ; repausul poate avea un sens absolut, începutul mișcării este atribuit impulsului divin ; masa este însăși materia etc. Mecanica lui Newton, care ocupă un loc deosebit de important în fundamentarea mecanicii clasice, are totuși un caracter mecanicist și metafizic din punct de vedere filozofic, cu limitele specifice epocii istorice în care a fost creată.

Acest caracter va trebui să fie scos în evidență la curs și lămurit de pe pozițiile materialismului dialectic, cu argumentele științifice pe care ni le oferă cuceririle științei moderne. Va trebui lămurit de la început că materia este categoria filozofică care desemnează realitatea obiectivă reflectată de senzațiile noastre și existentă independent de ele. Materia are o serie de însușiri esențiale, dintre care, în primul rînd, mișcarea ; materia nu poate exista în afara mișcării, după cum nici mișcarea nu poate fi ruptă de materie. Materia există în spațiu și în timp, fiind infinită în spațiu și eternă în timp.

Spațiul, timpul și masa sînt forme obiective de existență a materiei în mișcare ; ele nu există independent unele de altele, ci strîns legate într-un tot unitar. Noțiunile de spațiu, timp și masă, cu care lucrăm în mecanică, oglindesc spațiul real, timpul real și masa reală, existente în mod obiectiv în natură.

În legătură cu problema mișcării va trebui lămurit că în mecanică este vorba de mișcare mecanică, adică de schimbarea în timp a poziției corpului sau a unei părți a acestuia (deplasare) în raport cu un alt corp solid, ales ca sistem de referință și complet determinat), aceasta spre deosebire de alte forme ale mișcării materiei care constituie obiectul de studiu al altor științe cum sînt : chimia, biologia etc.

De asemenea, va trebui arătat că Newton înțelegea prin masă însăși materia, pe cînd noi înțelegem prin masă numai una din formele obiective de existență a materiei.

Se va sublinia că mișcarea este eternă și universală ; nu există repaus absolut, ci numai repaus față de un anumit sistem de referire dat, la un moment dat.

Este important să se arate că cele trei principii fundamentale ale mecanicii (descoperite de Newton) au un conținut obiectiv, se bazează pe practică și se verifică prin practică, independent de voința oamenilor. Totuși, aceste principii nu au un caracter absolut. Mecanica lui Newton nu poate explica fenomenele mecanice în care intervin viteze apropiate de viteza luminii și unele fenomene mecanice legate de procesele intraatomice. Mecanica lui Newton rămîne valabilă pentru fenomenele mecanice în care intervin viteze mici în comparație cu viteza luminii, de exemplu în calculul construcţiilor şi maşinilor obişnuite. Pentru fenomenele intraatomice (nucleare), pentru unele fenomene cosmice, a trebuit să se caute noţiuni mai profunde şi principii mai generale, ceea ce s-a şi găsit, cel puţin în parte, pînă acum. Se dovedeşte, şi sub această formă, cum cunoaşterea lumii de către om se adînceşte mereu, iar adevărul relativ se apropie necontenit, cu timpul, de adevărul absolut, o dată cu îmbogăţirea practicii, cu sporirea şi precizarea cunoştinţelor ştiinţifice.

O importanţă deosebită va trebui acordată legii conservării şi transformării energiei, arătîndu-se importanţa istorică şi actuală a acestei legi. Energia este măsura mişcării materiei; energia este indisolubil legată de materie. Legea conservării energiei exprimă indestructibilitatea mişcării materiei şi capacitatea ei de a se transforma dintr-o formă în alta. Trebuie combătut „energetismul" (Ostwald etc.), care încearcă să rupă energia de materie şi să prezinte energia ca „unica substanţă a lumii", posibilă fără materie. Teoriile moderne, şi îndeosebi teoria relativităţii şi mecanica cuantică, aduc argumente pentru dovedirea limpede a legii conservării şi transformării energiei ca lege obiectivă, absolută a naturii.

Este necesar să se acorde toată atenţia formulării corecte a unor „definiţii cu tradiţii", avînd uneori mare influenţă asupra celor ce studiază mecanica.

De exemplu, este tradiţional să se spună că „forţa este cauza care produce mişcarea". Trebuie să arătăm că modificarea stării de mişcare a unui corp se produce datorită influenţei mişcării altui corp asupra lui; categoria forţă măsoară transmiterea mişcării între cele două corpuri.

Este bine să se precizeze definiţiile privitoare la impuls, energie, lucru mecanic, unde se înregistrează adeseori imprecizіuni sau erori.

Considerăm că trebuie insistat mai mult asupra mecanismelor, asupra cîmpurilor de forţe şi mai ales asupra gravitaţiei şi inerţiei. Se va arăta raportul dintre masa grea şi masa inertă; se va stărui asupra forţelor de inerţie şi importanţei acestora în problemele mişcării corpurilor terestre şi cereşti. O atenţie deosebită trebuie acordată definiţiilor şi formulării principiilor din mecanica analitică, pentru a nu se cădea într-o matematizare ruptă de realitate cum se întîmplă uneori; dimpotrivă, să se apeleze la realitatea concretă, pentru a se arăta clar ce oglindesc expresiile matematice (exemple foarte bune pot fi date din capitolele privitoare la deplasările virtuale, ecuaţiile canonice ale lui Hamilton etc.).

Este necesar ca definiţiile să fie clare şi solid legate de realitatea obiectivă şi totodată să fie fecunde, arătîndu-se tot ce se poate deduce din ele.

Trebuie mult dezvoltate unele capitole noi ale mecanicii. De exemplu, capitolul privitor la mişcarea punctului material de masă variabilă, formulele lui Ţiolkovski şi Meşcerski. La acest capitol cele mai bune exemple sînt marile succese sovietice în domeniul realizării sateliţilor artificiali şi rachetelor cosmice. De asemenea, se cer dezvoltate capitolele cu aplicaţii în automatică, telemecanică, fizică atomică etc.

O atenţie deosebită va trebui acordată capitolelor privitoare la oscilaţii (mai ales în legătură cu tehnica construcţiei de maşini, radio etc.) şi capitolelor cu privire la ciocniri.

Se cere să fie dezvoltate și capitolele care să facă introducerea în relativitatea restrînsă și generală, în mecanica statistică, mecanica cuantică, mecanica atomică.

Studentul trebuie ajutat să-și însușească metodele de tratare a problemelor pe baza materialismului dialectic și istoric, să fie ferit de a cădea în mecanicism, de fetișizarea unor definiții, de interpretări pozitiviste, obiectiviste sau alte poziții idealiste.

O mare atenție va trebui dată legării cursului de mecanică cu practica. Această legătură cu practica trebuie înțeleasă în mod larg, complet. În primul rînd, cursul va fi demonstrat temeinic cu exemple concrete, evidente, pe care ar fi bine ca studentul să le cunoască și practic. Exemplele și problemele de la curs să fie legate de viață și de producție, să fie clare și să conducă la rezultate verificabile fără dificultăți.

Mecanica teoretică este primul curs de cultură generală tehnică, care se predă în institutele noastre de învățămînt superior, este deci cursul care pune bazele multor discipline de specialitate, care vor fi asimilate ulterior de student, și de modul său de predare va depinde în mare măsură formarea spiritului tehnic al viitorilor ingineri.

În această ordine de idei, poate că ar fi utilă o discutare separată mai aprofundată a problemei laboratorului de mecanică. Laboratorul trebuie să ajute înțelegerea cursului, să lărgească orizontul științific al studentului și să-l pregătească pentru viitoarea lui profesiune, să-l apropie de producție.

Se cere o mai mare atenție organizării excursiilor în producție, vizitării unor uzine, șantiere, observatoare astronomice, institute de proiectări și cercetări, expoziții, muzee, pentru a familiariza pe student cu aplicațiile mecanicii.

Este necesar ca studentul să citească lucrări valoroase (cărți, reviste de specialitate), trebuie îndrumat cum să se documenteze în acest domeniu, cu ocazia practicii în uzine sau pe șantiere. De asemenea, el trebuie obișnuit să întocmească mici lucrări teoretice și practice de sinteză, să execute personal unele lucrări practice, manuale (dispozitive cu came, baza și rostogolitoarea etc.), să dea toată atenția cercetării științifice în acest domeniu. Se impune ca examenul să aibă atît probe teoretice cît și aplicații practice.

De o deosebită importanță este și activitatea științifică în cadrul catedrei de mecanică, activitate legată de nevoile planului de stat, de necesitățile didactice și de progresul acestei științe. Activitatea științifică a cadrelor didactice trebuie să servească drept îndreptar și pentru cercurile științifice studențești.

Este necesar ca activitatea științifică a cadrelor didactice să ducă la îmbogățirea și împrospătarea continuă a cursurilor predate, la amplificarea mijloacelor de investigație științifică în acest domeniu, la dezvoltarea acestei științe, la contribuții eficiente în construcția socialismului. În legătură cu aceasta, un exemplu strălucit ni-l dau cadrele didactice ale catedrelor de mecanică din U.R.S.S., unde s-au realizat și se realizează numeroase cercetări științifice de valoare, necesare progresului științei și tehnicii.

Remarcăm că multe din lucrările ştiinţifice ale catedrelor de mecanică din ţara noastră — îndeosebi în ultimii ani — sînt deosebit de valoroase şi au contribuit la rezolvarea unor importante probleme teoretice şi practice.

La acest punct ar trebui să adăugăm cîteva cuvinte privitor la cursurile şi tratatele de mecanică scrise la noi. Nu vom insista însă asupra acestor lucrări, ele fiind destul de cunoscute. Vom aminti doar că, în această privinţă, există o tradiţie sănătoasă : s-au scris cursuri şi tratate valoroase de mecanică pentru toate nevoile învăţămîntului ; credem că, pe viitor, autorii cursurilor şi lucrărilor de mecanică vor ţine seamă şi de cele arătate în acest referat.

În încheiere, considerăm că, şi pe viitor, prin muncă perseverentă şi creatoare, perfecţionîndu-şi necontenit munca, specialiştii din domeniul mecanicii vor putea să contribuie cu competenţă la progresul ştiinţei din ţara noastră şi din toată lumea.

COLABORAREA STRÎNSĂ ÎNTRE CERCETAREA ȘTIINȚIFICĂ ȘI PRODUCȚIE[1]

DE

AL. IVANCENCO[2]

Industria constructoare de mașini are un rol deosebit de important în dezvoltarea economiei țării noastre pe drumul construirii socialismului, ritmul și amploarea progresului tehnic în toate ramurile economiei naționale fiind determinate în primul rînd de gradul de dezvoltare a industriei constructoare de mașini, pivotul industriei grele.

În faza decisivă a întrecerii economice cu capitalismul, tehnica nouă aduce o imensă contribuție, căci, așa cum sublinia Lenin, ,,...iese învingător acela care are cea mai înaltă tehnică, organizare și disciplină și cele mai bune mașini''[3]. Unul din marile merite ale marxism-leninismului este descoperirea rolului uriaș al tehnicii în viața societății.

Partidul Muncitoresc Romîn și Guvernul Republicii Populare Romîne au asigurat condițiile necesare ca industria constructoare de mașini să se dezvolte într-un ritm rapid, astfel ca producția acesteia să satisfacă nevoile mereu crescînde de mașini și utilaje necesare tuturor ramurilor economiei naționale.

Astăzi tînăra și puternica noastră industrie constructoare de mașini produce numeroase tipuri de utilaje cu tehnicitate ridicată, iar producția sa acoperă în cea mai mare parte necesitățile interne de mașini și utilaje; în același timp se exportă numeroase mașini și utilaje, apreciate pe piața mondială prin calitățile lor.

În raportul la cel de-al III-lea Congres al P.M.R. se subliniază că unul dintre cele mai pozitive rezultate ale activității noastre economice în perioada 1956–1960 este realizarea cu un an mai devreme a sarcinilor industriei constructoare de mașini, a cărei producție este în 1960 de peste două ori mai mare decît în 1955 și de zece ori mai mare decît în 1938.

---

[1] Text prescurtat al referatului prezentat la ședința de deschidere a Sesiunii științifice jubiliare a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R.

[2] Ministerul Industriei Grele.

[3] V. I. Lenin, *Opere*, vol. 27, ESPLA, 1955, 178.

La această dezvoltare a industriei constructoare de mașini o contribuție însemnată pentru introducerea tehnicii noi, pentru îmbunătățirea organizării producției și a muncii, a fost adusă de activitatea de studii și cercetări tehnico-științifice desfășurate în institutele Academiei R.P.R., în institutele de învățămînt superior, în institutele de cercetări și proiectări și întreprinderile Ministerului Industriei Grele.

Cîteva exemple luate din diferite domenii de cercetare oglindesc tematica și deci preocupările noastre în domeniul cercetărilor tehnico-științifice :

— studiile și cercetările teoretice și experimentale privind : obținerea pulberilor metalice și producția pieselor din pulberi metalice sinterizate ;

— semicocsificarea prin fluidizare, care a dus la un procedeu tehnologic cu totul nou ;

— încercările la impuls ale aparatajului de înaltă tensiune și în special ale transformatoarelor de putere, realizîndu-se și instalația de impuls de 750 kV ;

— fabricația pompelor centrifugale, a motoarelor termice și altele.

Un sprijin însemnat pentru progresul tehnic în construcția de mașini a constat în colaborarea cu Institutele Academiei R.P.R., prin efectuarea unor lucrări de cercetare, necesare uzinelor noastre. Menționăm astfel studiile, cercetările și experimentările pentru :

— crearea pămînturilor sintetice de turnătorie ;

— arderea ligniților pe grătare cu împingere răsturnată și arderea ligniților pulverizați în moara ventilator ;

— îmbunătățirea calității motoarelor cu ardere internă ;

— așchierea oțelurilor cu plăcuțe de metal dur și mineralo-ceramice ;

— recondiționarea prin metalizare a organelor de mașini ;

— lubrificația mașinilor ;

— sudabilitatea oțelurilor de tipul OLX52, materialele documentare și tehnologice necesare și stabilirea metodelor de calcul și de aplicare la construcția vagoanelor și altele.

Lucrările efectuate de Institutele Academiei R.P.R. au fost utilizate de unitățile Ministerului Industriei Grele, pentru îmbunătățirea condițiilor de lucru în turnătorii, stabilirea datelor pentru dezvoltarea fabricației de cazane industriale în vederea valorificării combustibililor inferiori, îmbunătățirea performanțelor utilajelor produse, introducerea utilizării unor materiale noi, stabilirea normativelor unificate de prelucrare prin așchiere etc.

Trebuie să arătăm că au existat și o serie de deficiențe caracteristice în activitatea noastră.

Una din cauzele esențiale ale deficiențelor constatate constă în faptul că deseori nu s-a studiat în prealabil nivelul tehnic al produsului ce se însușea și o a doua cauză rezidă în faptul că nu s-a făcut apel la cercetarea tehnico-științifică și experimentală, care trebuie fie să premeargă proiectarea, fie să meargă în paralel cu ea.

Prin măsurile luate în ultimul timp s-au înregistrat progrese însemnate în eliminarea acestor deficienţe.

Astăzi, în faza premergătoare proiectării unui produs, în vederea însuşirii lui, se fac studii şi analize asupra nivelului tehnic al soluţiilor ce se vor alege. Aceste studii se fac de către colectivele alcătuite din cei mai buni specialişti în domeniul respectiv, în baza unei documentaţii de informare tehnică cea mai recentă. Se studiază diferite modele, în vederea însuşirii a ceea ce este mai nou şi mai corespunzător.

★

Congresul al III-lea al P.M.R. a adoptat măreţul program de dezvoltare a bazei tehnico-materiale a socialismului în R.P.R. Programul stabileşte orientarea generală şi cuprinzătoare a programului tehnic în ţara noastră în perioada desăvîrşirii construcţiei socialismului; dezvoltarea bazei energetice, continuarea industrializării, acordînd prioritate industriei grele; extinderea mecanizării şi automatizării producţiei.

Această orientare decurge din politica partidului în domeniul tehnicii, pe baza tezelor elaborate de V. I. Lenin şi a cărei justeţe a fost confirmată printr-o experienţă de zeci de ani. Stabilind sarcinile în domeniul progresului tehnic şi planul de dezvoltare a economiei naţionale pe perioada 1960—1965 şi pentru anii următori, partidul a ţinut seamă de realizările ştiinţei, care deschide mereu noi posibilităţi de perfecţionare a procesului de producţie.

Cifrele de control ale planului de dezvoltare a economiei naţionale pentru anii 1960—1965 prevăd, pentru industria construcţiilor de maşini, o creştere a producţiei în anul 1965 de 2,2 ori faţă de 1959.

Principalele linii de orientare în dezvoltarea ramurii construcţiei de maşini constau în:

— ridicarea permanentă a eficacităţii tehnico-economice a maşinilor şi utilajelor produse şi însuşirea fabricaţiei acelor maşini care reprezintă cel mai înalt nivel al tehnicii;

— dezvoltarea producţiei de instalaţii tehnologice complete, pe baza cooperării între uzinele specializate;

— organizarea şi dezvoltarea într-un timp scurt a producţiei de aparate şi elemente de automatizare, pentru a putea asigura procesul de mecanizare şi automatizare a producţiei;

— producerea de sortimente şi tipuri de maşini şi utilaje în raport cu nevoile economiei naţionale şi ţinînd seamă de avantajele economice rezultate din specializarea şi cooperarea cu celelalte ţări socialiste.

Realizarea acestor sarcini este legată de accentul pe care trebuie să-l pună cercetarea ştiinţifică pe introducerea tehnicii noi şi pe soluţionarea problemelor tehnico-economice ridicate de dezvoltarea economiei naţionale.

În acest scop, este necesar să se întărească sectorul de studii, cercetări şi proiectări al industriei constructoare de maşini, în unităţile centrale şi mai ales în întreprinderi. În acelaşi timp este necesară adîncirea colaborării între institutele de cercetări ale Academiei R.P.R., institutele de învăţămînt superior, institutele departamentale şi uzinele M.I.G.

În stadiul tehnic actual, în realizarea unei producții moderne, intervine un număr de factori cu acțiuni și efecte ascultînd de legi distincte, încît este necesară efectuarea de studii și cercetări științifice prealabile care să determine valorile și relațiile optime între diferiții factori, astfel ca să se poată realiza economicitatea maximă a producției.

Producția modernă este strîns legată de o cercetare științifică dezvoltată și orientată pe probleme actuale și de perspectivă ale producției.

Experiența demonstrează că ritmul progresului tehnic este în funcție de faptul cît de repede sînt aduse în stadiul de proiectare rezultatele cercetărilor științifice și cît de repede se face verificarea lor în condițiile producției pentru ca în baza aceasta să se organizeze producția de serie sau de masă.

Principalele probleme ale construcției de mașini privesc : obținerea de produse de calitate superioară și la nivel tehnic modern, asigurarea condițiilor optime de producție, dezvoltarea fabricației în raport cu nevoile și posibilitățile specifice ale economiei naționale.

În legătură cu aceste cerințe cităm numai cîteva dintre problemele mai importante și aspectele esențiale din planul de dezvoltare a tehnicii, rezultate din Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. în ramura construcției de mașini ;

Probleme privind proiectarea, construcția și experimentarea unor linii tehnologice complete și a instalațiilor complexe ;

Cercetări teoretice și experimentări în legătură cu servomecanisme hidraulice, pneumatice, mecanice și electrotehnice pentru acționări la mașini unelte și la linii tehnologice în vederea mecanizării și automatizării proceselor de producție ;

Probleme în legătură cu reducerea coeficienților de siguranță în dimensionarea organelor de mașini și reducerea greutății proprii a mașinilor, încercări la oboseală a organelor de mașini precum și a unor oțeluri speciale ;

Ce anume organe de mașini se pretează să fie construite din mase plastice și care nu se pretează în raport cu caracteristicile fizico-chimice și mecanice ale materialului și după funcția pe care trebuie să o îndeplinească, și încă multe alte probleme.

Analizînd cîteva din principalele aspecte de cercetare tehnico-științifică, legate de realizarea unor grupuri de mașini și utilaje ce urmează a se asimila în perioada 1961 —1965 și în anii următori, se scot în evidență următoarele :

Cercetări tehnico-științifice pentru perfecționarea locomotivelor Diesel electrice, în vederea sporirii parametrilor de funcționare și dezvoltarea unor tipuri noi de locomotive Diesel.

Acest domeniu de fabricație necesită studii și cercetări în legătură cu echipamentul de acționare și transmisie electrică, transmisii hidraulice, automatizarea comenzilor, echipament de frînare, construcția sudată și ambutisată a boghiurilor unificate precum și utilizarea unor materiale noi cu caracteristici superioare.

Cercetări tehnico-ştiinţifice pentru îmbunătăţirea performanţelor şi parametrilor de funcţionare a motoarelor termice, care trebuie asimilate în această perioadă.

Cercetările trebuie să tindă spre realizarea unei reduceri a greutăţii specifice prin folosirea oţelurilor aliate cu titan, şi a aliajelor cu aluminiu, ajungînd pentru motoare Diesel la o greutate specifică mai mică de 2,8 kg/CP.

Un alt obiectiv al cercetărilor trebuie să fie mărirea rapoartelor de compresie, tinzînd spre cifrele cele mai avansate la motoare Diesel şi la motoarele cu benzină, concomitent cu perfecţionarea combustibililor folosiţi.

De asemenea, se va avea în vedere reducerea continuă a consumului specific de combustibil prin realizarea unor sisteme perfecţionate de pulverizare şi ardere în motoare; se va folosi pe scară largă supraalimentarea în scopul măririi puterii motoarelor şi se vor utiliza, acolo unde este posibil, sistemele moderne de răcire cu aer.

Prin studii sistematice asupra proceselor de ardere şi a fenomenelor de uzură a pieselor, în funcţie de felul prelucrărilor, forma geometrică, condiţii de exploatare, se pot aduce îmbunătăţiri esenţiale în construcţia motoarelor.

Realizarea motoarelor cu performanţe sporite trebuie să ţină seamă de toată complexitatea problemelor ce rezultă din aplicarea soluţiilor noi.

De un interes deosebit în anii următori este aplicarea turbinei cu gaze în diferite utilizări. Realizarea turbinelor cu gaze determină o serie de probleme de cercetare în ce priveşte materialele folosite precum şi anduranţa de funcţionare a elementelor componente.

Dezvoltarea fabricaţiei de maşini unelte şi modernizarea tipurilor existente este strîns legată de o serie de probleme de cercetare privind:

— realizarea dispozitivelor de copiere hidraulice sau electronice;

— realizarea instalaţiilor de comandă program;

— introducerea dispozitivelor automate de control pentru măsurarea dimensiunilor pieselor;

— echiparea maşinilor cu dispozitive de alimentare automate, dispozitive de fixare rapidă etc.

De asemenea, se va dezvolta construirea maşinilor agregate pentru producţia de serie mare, pe baza capetelor de forţă tipizate. Prin realizarea seriilor tip de capete de forţă de puteri mici şi mijlocii pentru operaţii de găurire, frezare, strunjire plană şi a instalaţiilor anexe, se va lărgi introducerea utilizării maşinilor agregate şi a lini lor de transfer la fabricaţiile de serie, dezvoltînd capacităţile de producţie pe suprafeţele existente.

Una din liniile călăuzitoare în construcţia modernă de maşini este obţinerea de produse cu minim de greutate, folosind la maximum capacităţile metalelor.

În acest sens trebuie extinse cercetările pentru întrebuinţarea aliajelor uşoare cu rezistenţă ridicată, cum sînt aliajele de aluminiu, titan şi altele, care permit reducerea substanţială a greutăţii pieselor.

Studiile trebuie să cuprindă şi cazurile speciale de utilizare a materialelor la temperaturi joase precum şi la temperaturi ridicate cum este cazul la cazane şi turbosuflante speciale.

În legătură cu adoptarea unor forme noi constructive pentru execuţia pieselor componente ale produselor, vom insista asupra reducerii consumului de metal prin înlocuirea pieselor turnate din fontă sau oţel cu piese din tablă ambutisată şi asamblată prin sudură şi asupra construcţiilor din tablă şi profil exsudate, precum şi piese combinate, parţial turnate sau forjate şi asamblate cu piese ambutisate prin sudură.

În legătură cu însuşirea fabricaţiei de turbine cu abur de 12 şi 50 MW precum şi eventual a turbinelor cu gaze este necesar să fie rezolvate unele probleme importante ca :

— realizarea de oţeluri inoxidabile, aliate cu crom şi alte elemente pentru temperaturi de lucru pînă la 600°C ;

— realizarea de oţeluri austenitice pentru temperaturi de lucru pînă la circa 700° C precum şi de materiale inoxidabile aliate pentru palete cu gama de temperaturi de la 500—750°C ;

— însuşirea sudurii pieselor din oţeluri perlitice, inoxidabile, austenitice etc. ;

— determinarea formelor constructive ale spaţiilor de trecere în turbine din punct de vedere aerodinamic ş.a.

Lucrările de cercetare ştiinţifică determină concepţia constructivă a produselor, modul de construcţie, formele de organizare ştiinţifică a producţiei. Rezultatele obţinute în producţie scot la iveală probleme noi, care determină adîncirea cercetărilor ştiinţifice sau extinderea cercetărilor în domenii noi, obţinînd astfel un progres tehnic continuu. Există deci o interacţiune dintre producţie şi cercetare, cercetare ce se dezvoltă prin rezultatele date de producţie, iar producţia progresează prin elementele noi aduse de cercetare.

Trebuie să existe o acţiune continuă de studiere şi însuşire a procedeelor tehnologice noi, de introducere a lor în toate uzinele, astfel ca în timp scurt ele să se permanentizeze, devenind metode obişnuite de lucru.

În acest timp condiţiile de producţie moderne necesită metode şi utilaje de control cu eficacitate sporită, care să reducă durata operaţiunilor şi să asigure uniformitatea calităţii produselor.

Construcţia de maşini mai trebuie să ţină seamă de anumite particularităţi specifice ale economiei naţionale privind condiţiile speciale de utilizare a produselor, de resursele proprii de materii prime, de reducerea importului de materiale deficitare, de liniile de dezvoltare, în perspectivă, a cerinţelor celorlalte ramuri industriale.

Dacă în cercetarea ştiinţifică nu se ţine seamă de problemele producţiei şi de direcţiile de dezvoltare a producţiei, nu se poate realiza progresul tehnic, produsele industriei constructoare de maşini rămîn cu performanţe învechite, determinînd o rămînere în urmă şi în celelalte ramuri economice. Cercetarea ştiinţifică trebuie să premeargă, să vină în întîmpinarea nevoilor producţiei.

Este necesar ca după încheierea lucrărilor în cadrul institutului cercetătorul și proiectantul să colaboreze cu uzinele și să dea asistență tehnică necesară pînă la aplicarea în producție a rezultatelor cercetărilor. Trebuie să considerăm ca un fir conducător ideea că o cercetare științifică este terminată numai în momentul aplicării ei în practică.

Colaborarea între institutele Academiei R.P.R., institutele de învățămînt superior, institutele departamentale și unitățile de cercetare din întreprinderi, pentru problemele de cercetare legate de nevoile producției, trebuie să fie dezvoltată pentru a ajuta mai eficient producția.

Pentru ca aceste lucrări de colaborare să dea rezultate mai eficiente, considerăm necesar ca problemele de cercetare fundamentală ale institutelor Academiei R.P.R. și institutelor de învățămînt superior să fie legate de obiective concrete determinate de necesitățile producției, iar convențiile de colaborare cu Ministerul Industriei Grele să fie încheiate pe obiective cît mai concret exprimate și nu sub forma unor convenții generale.

Institutele Academiei R.P.R., institutele de învățămînt superior și institutele de cercetări departamentale, precum și laboratoarele noastre de cercetări din întreprinderi au sarcini de mare răspundere în ceea ce privește găsirea metodelor noi, înalt productive, introducerea în producție a rezultatelor cercetărilor științifice.

Lupta trebuie să fie organizată pe două fronturi :

1. Ridicarea posibilităților de asimilare de către întreprinderi a rezultatelor cercetărilor științifice,

2. Rezolvarea la timp și la un nivel cît mai înalt a problemelor actuale ce se pun în fața cercetătorilor, în fața oamenilor de știință.

În acest mod, prin legătura strînsă între cercetarea științifică și producție vom realiza progresul tehnic în construcția de mașini, contribuind astfel în mod hotărît la înfăptuirea măreților obiective prevăzute în Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. pentru dezvoltarea bazei tehnico-materiale a socialismului și creșterea rapidă a forțelor de producție în vederea desăvîrșirii construcției socialismului în țara noastră.

STUDII

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

CALCULUL LAGĂRELOR DE ALUNECARE

DE

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU și AL. NICA

NOTAŢII

F = încărcarea exterioară a lagărului,
$2r_1$ = diametrul fusului,
$2r_2$ = diametrul cuzinetului,
$\Delta = r_2 - r_1$ = jocul radial,
e = excentricitatea (distanța dintre axul fusului și axul cuzinetului),
δ = grosimea peliculei lubrifiante într-un punct oarecare,
θ = unghiul dintre linia centrelor (fig. 1) și o direcţie oarecare,
δ_1 = grosimea maximă a peliculei, corespunzătoare la $\theta = 0$,
δ_2 = grosimea minimă a peliculei, corespunzătoare la $\theta = \pi$,
$\alpha = \frac{e}{\Delta}$ = excentricitatea relativă,
Ω_1 = viteza unghiulară a fusului,
Ω_2 = viteza unghiulară a cuzinetului,
b = lățimea lagărului (paralel cu axa fusului),
$\lambda = \frac{b}{2r_1}$ = alungirea lagărului,
μ = viscozitatea uleiului într-un punct oarecare,
μ_1 = viscozitatea uleiului în punctul $\theta = 0$, $\delta = \delta_1$,
μ_2 = viscozitatea uleiului în punctul $\theta = 0$, $\delta = \delta_2$,
$\omega = \Omega_1 + \Omega_2$ = suma vitezelor unghiulare,
$\psi = \frac{\Delta}{r_1}$ = jocul relativ
$\zeta = \frac{F\psi^2}{2br_1\mu_1\omega} = \frac{F\psi^2}{4\lambda\mu_1\omega r_1^2}$ = coeficientul de portanță al filmului de ulei, în funcție de jocul relativ,

$\bar{\zeta} = \dfrac{F\delta_2^2}{4\mu_1\,\omega\, r_1^4} = \lambda\,(1-\alpha)^2\,\zeta$ = coeficientul de portanță în funcție de grosimea minimă,
Q_e = debitul de ulei în secțiunea minimă pe direcția θ,
Q_s = debitul de ulei care scapă pe la capetele lagărului,
$Cq_s = \dfrac{Q_s}{V\Delta b}$ = coeficientul adimensional pentru debitul Q_s,
t_e = temperatura uleiului la ieșire,
t_1 = ,, ,, în secțiunea $\theta = 0$,
t_2 = ,, ,, de ieșire $\theta = \pi$,
M_1 = momentul de frecare pe fus,
M_2 = ,, ,, ,, ,, cuzinet,
$Cm_{1.2} = \dfrac{\psi M_{1.2}}{\pi\mu_1\, V r_{1.2}\, b}$ = coeficientul de moment în funcție de jocul radial,
$km_{1.2} = \dfrac{6M_{1.2}}{\pi F\delta_2} = \dfrac{3Cm_{1.2}}{(1-\alpha)\zeta} = 3\,(1-\alpha)\dfrac{Cm_{1.2}}{\bar{\zeta}}$ = coeficientul de moment în funcție de grosimea minimă a peliculei,
b_i = lățimea fantei de intrare a uleiului,
$\nu = \dfrac{b_i}{b}$ = raportul dintre lățimea fantei și lățimea lagărului,
q = exponentul cu ajutorul căruia se exprimă legea de variație a viscozității cu punctul: $\mu = \mu_1\left(\dfrac{\delta}{\delta_1}\right)^q$,
p_i = presiunea uleiului la intrarea în lagăr,
J = echivalentul mecanic al caloriei,
H = căldura dezvoltată în lagăr în unitatea de timp,
c = căldura specifică a lubrifiantului,
a = coeficientul de transmisie al căldurii,
w = viteza curentului în care este situată carcasa lagărului,
γ = greutatea specifică a lubrifiantului,
p = presiunea într-un punct al peliculei lubrifiante,
p_0 = presiunea mediului înconjurător,
θ^* = unghiul dintre direcția rezultantei presiunilor și linia centrelor,
t^* = temperatura mediului ambiant,
t_m = temperatura medie a suprafeței cuzinetului și fusului
A = suprafața prin care se face schimbul de căldură cu mediul exterior,
B = lungimea arborelui cuprinsă în interiorul carcasei lagărului.

*

Mișcarea în filmul de lubrifiant din lagărele cu alunecare poate fi complet determinată prin calcule, cu condiția să se cunoască variația viscozității în lungul peliculei de ulei. Într-adevăr, determinarea prin calcul a distribuţiei temperaturilor impune considerarea ecuaţiei energiei ceea ce complică foarte mult tratarea teoretică a problemei, iar metoda curent aplicată astăzi de diferiţi autori care presupun viscozitatea constantă, luînd o valoare medie, poate conduce la erori, deoarece viscozitatea poate varia foarte mult de la un punct la altul. De aceea, pentru a putea construi o metodă de calcul a lagărelor care să dea o bună concordanţă cu datele experimentale şi care să permită efectiv proiectarea lagărelor în condiţii optime de funcţionare, este necesar ca formulele pe bază cărora se determină caracteristicile globale ale lagărelor să ţină seama de variaţia viscozităţii în lungul filmului lubrifiant.

Calea cea mai simplă şi totuşi suficient de precisă prin care se poate introduce în calcule influenţa variaţiei viscozităţii, se bazează pe observaţia [1], [2] că variaţia viscozităţii μ este analoagă ca alură cu variaţia grosimii δ a stratului de lubrifiant. În consecinţă se poate pune

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^2. \tag{1}$$

Dacă se vor determina constantele μ_1, δ_1, q, astfel încît viscozitatea să ia în punctele extreme (începutul şi sfîrşitul zonei active a peliculei, care coincid aproximativ cu punctele de temperatură minimă şi maximă

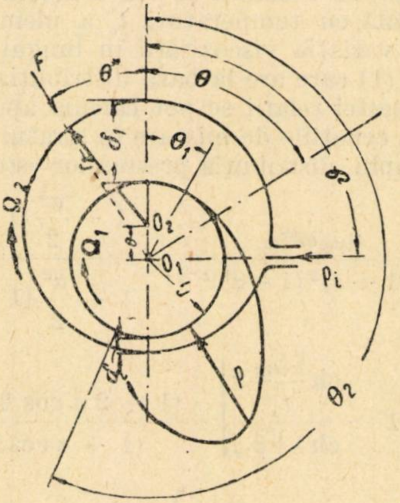


Fig. 1

a lagărului) valorile corespunzătoare distribuţiei de temperaturi în lagăr, atunci legea (1) va reda suficient de precis legea reală a variaţiei viscozităţii.

Să considerăm cazul lagărelor circulare (fig. 1) pentru care

$$\delta = \Delta (1 + \alpha \cos\theta), \tag{2}$$

unde Δ este jocul radial, iar $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ excentricitatea relativă.

Zona activă a filmului de lubrifiant cuprinde domeniul $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, [1], [3]. Notînd pentru $\theta = 0$, $\delta = \delta_1 = \Delta(1+\alpha)$, $\mu = \mu_1$ și pentru $\theta = \pi$, $\delta = \delta_2 = \Delta(1-\alpha)$, $\mu = \mu_2$, δ_1 și δ_2 sînt grosimile maxime și minime ale peliculei, iar raportul viscozităților este egal cu

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^q, \tag{3}$$

de unde

$$q = \frac{\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}} = \frac{\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4}$$

În consecință dacă se cunosc temperaturile extreme t_1 și t_2 din curba viscozității în funcție de temperatură pentru uleiul utilizat se deduc valorile μ_1 și μ_2, iar relația (4) determină exponentul q. De obicei, pentru t_1 se poate lua temperatura uleiului la intrarea în lagăr [5], iar temperatura t_2 poate fi exprimată aproximativ în funcție de temperatura medie a lagărului t_m

$$t_2 \cong 2t_m - t_2 \cong 2\,t_e - t_2, \tag{5}$$

deoarece experimental se constată [2] că temperatura medie a lagărului este aproximativ egală cu temperatura t_e a uleiului la ieșirea din lagăr.

În acest mod variația viscozității în lungul peliculei este complet definită prin relația (1) care are la bază distribuția reală a temperaturilor în lagăr. Pe baza acestei relații se pot calcula apoi caracteristicile funcționale plecînd de la ecuațiile de mișcare în stratul de lubrifiant [2], [4].

Astfel de exemplu, distribuția presiunilor este dată de relația

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1\omega r_1^2\alpha}{\Delta^2(1+\alpha)^2(1-\alpha^2)^{1-q}} \cdot \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{2}(1-q)\left(2-\dfrac{q}{2}\right)}{1+\dfrac{\alpha^2}{2}(1-q)\left(1-\dfrac{q}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{\beta_{1q}}}{r_1}z}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right]\cdot\frac{(1+2\,\bar{a}\cos\theta)\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} \tag{6}$$

în care

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}\lambda}}\left[\frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1-\dfrac{1}{2}(1-q)\left[1+\alpha^2\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\right]}{1-\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(2-\dfrac{q}{2}\right)}\cdot\frac{\alpha}{2}\right]\\
\beta_{1q} &= 0{,}833 + 0{,}0983\,q + (0{,}741 - 0{,}499\,q)\,\alpha\\
\frac{A_{12q}}{A_{11q}} &= 0{,}0539\,q - 0{,}0382 + (0{,}652 - 0{,}0254\,q)\,\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Prin integrarea relaţiei (6) se poate deduce sarcina suportată de lagăr

$$F = \frac{2\mu_1 \omega r_1 b}{\psi^2} \zeta, \tag{8}$$

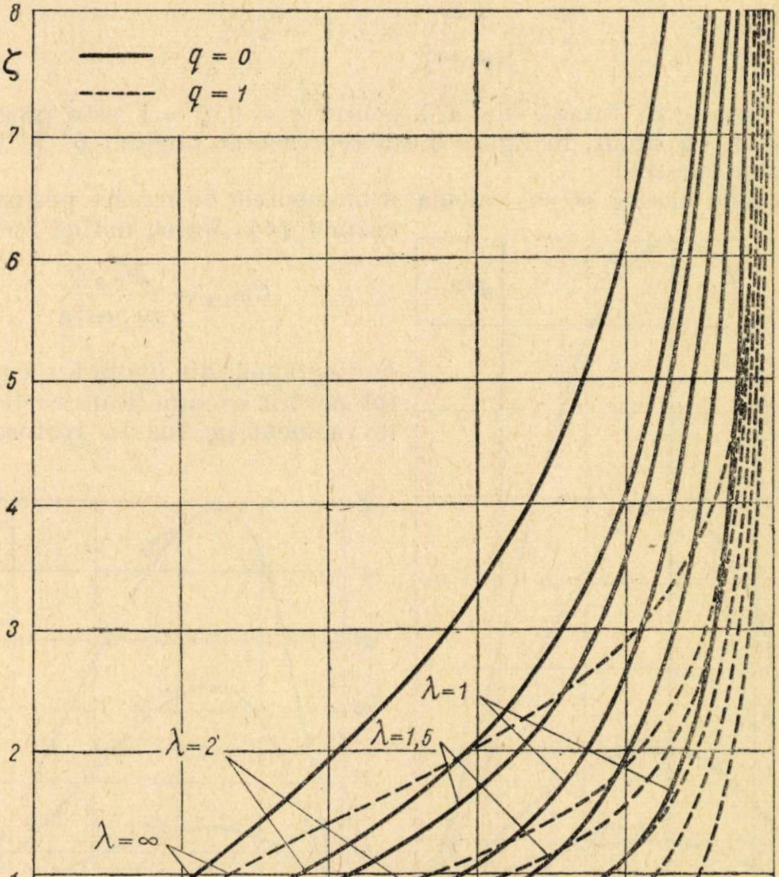


Fig. 2

cît şi unghiul θ^* făcut de linia centrelor cu rezultanta presiunilor. Intervalul cel mai frecvent de variaţie a parametrului q este $0 \leqslant q \leqslant 1$. De aceea în figura 2 s-a reprezentat variaţia coeficientului ζ (inversul numărului Sommerfeld) în funcţie de α, pentru diferite alungiri λ şi pentru

$q = 0$, $q = 1$ (pentru o valoare q intermediară se poate obține ζ sau α corespunzător, prin interpolare).

În mod analog se poate defini un coeficient de portanță în funcție de grosimea minimă δ_2 (deoarece în general jocul relativ ψ nu este cunoscut în cazul proiectării).

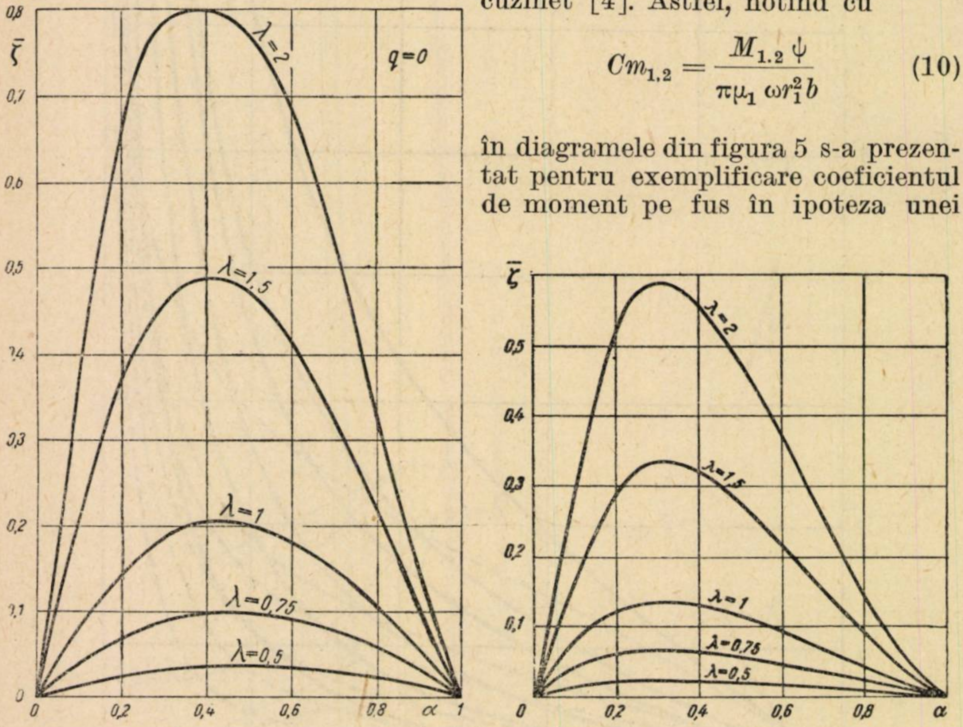
$$\bar{\zeta} = \frac{F\delta_2^2}{4\mu_1\,\omega r_1^2} = \lambda\,(1-\alpha)^2\zeta, \tag{9}$$

a cărei variație în funcție de α, λ pentru $q = 0$, $q = 1$ este prezentată în figura 3. În sfîrșit, în figura 4 s-a reprezentat unghiul θ^* în funcție de aceleași variabile.

În mod analog se pot calcula și momentele de frecare pe fus și pe cuzinet [4]. Astfel, notînd cu

$$Cm_{1.2} = \frac{M_{1.2}\,\psi}{\pi\mu_1\,\omega r_1^2 b} \tag{10}$$

în diagramele din figura 5 s-a prezentat pentru exemplificare coeficientul de moment pe fus în ipoteza unei umpleri incomplete a zonei divergente a peliculei (zona $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$).

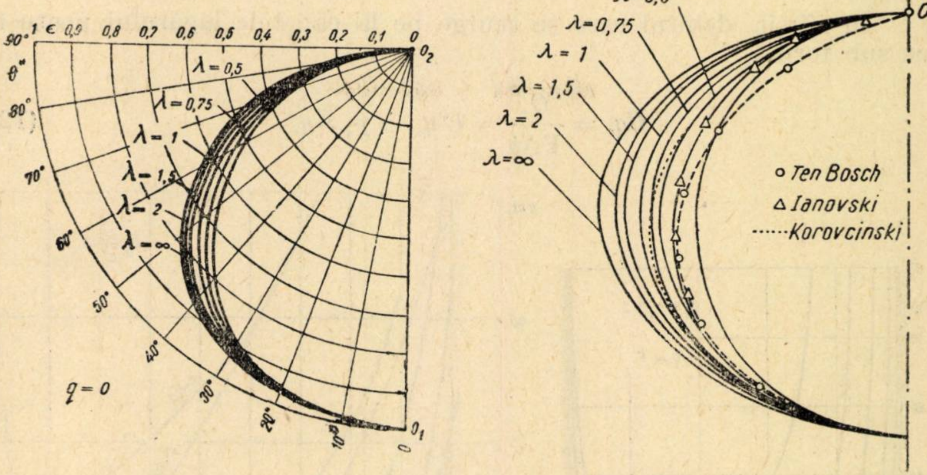


a *b*

Fig. 3

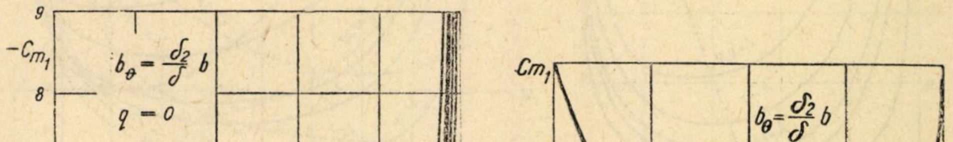
De asemenea, se poate defini un coeficient

$$km_{1.2} = \frac{6}{\pi}\,\frac{M_{1.2}}{F\delta_2} = \frac{3\,Cm_{1.2}}{(1-\alpha)\,\zeta} \tag{11}$$



a *b*

Fig. 4



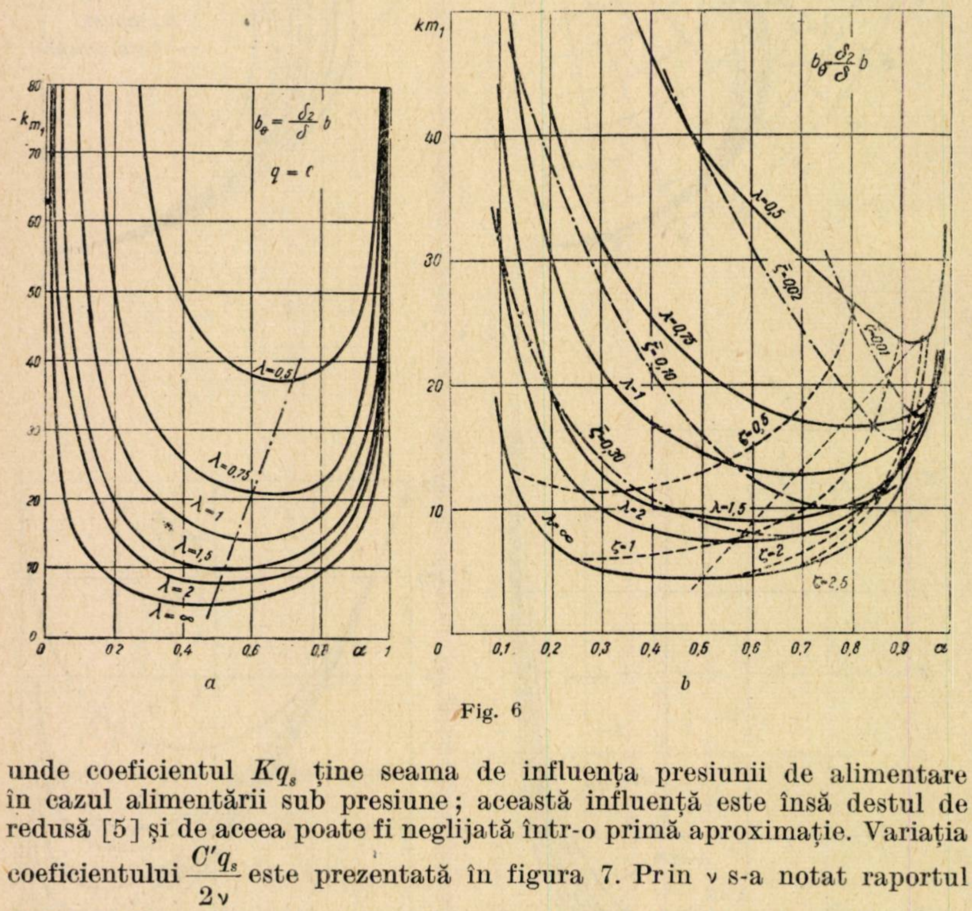
a *b*

Fig. 5

util pentru proiectare, a cărui variaţie (pentru fus) este reprezentată în figura 6.

În sfîrşit, debitul care se scurge pe la capetele lagărului poate fi pus sub forma

$$Cq_s = \frac{Q_s}{V\Delta b} = C'q_s + p_i\, Kq_s, \tag{12}$$



a *b*

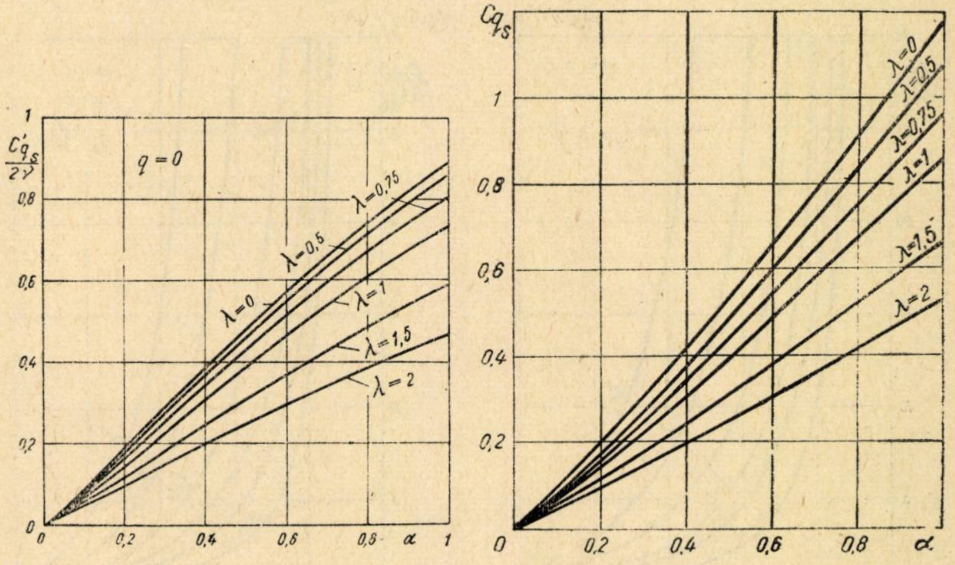
Fig. 6

unde coeficientul Kq_s ţine seama de influenţa presiunii de alimentare în cazul alimentării sub presiune; această influenţă este însă destul de redusă [5] şi de aceea poate fi neglijată într-o primă aproximaţie. Variaţia coeficientului $\frac{C'q_s}{2\nu}$ este prezentată în figura 7. Prin ν s-a notat raportul dintre lăţimea (diametrul) fantei sau orificiului de alimentare şi lăţimea lagărului (în cazul cînd nu există alimentare sub presiune, reprezintă lăţimea efectivă pe care se introduce ulei în lagăr, de exemplu lăţimea inelului pentru ungerea cu inel; în aceste cazuri de obicei $\nu < 0{,}15$).

Formulele şi diagramele de mai sus permit calculul lagărelor de alunecare, cu condiţia să se cunoască distribuţia temperaturilor în lagăr, respectiv temperaturile t_1, t_2, cu ajutorul cărora se defineşte variaţia viscozităţii în lagăr. Temperatura t_1 poate fi considerată, după cum am văzut, cunoscută (egală cu temperatura de intrare), iar temperatura t_2 poate fi determinată scriind ecuația de echilibru termic a lagărului.

Astfel căldura generată prin frecare în interiorul stratului de lubrifiant în unitatea de timp este egală cu

$$H = \frac{1}{J} M_1 \Omega_1 = \frac{1}{J} \Omega_1 \frac{\pi \mu_1 \omega r_1^2 b}{\psi} Cm_1 \tag{13}$$



a *b*

Fig. 7

pentru fus, în cazul obișnuit, cînd cuzinetul este imobil. În cazul contrariu, se poate scrie imediat

$$H = \frac{1}{J}(M_1 \Omega_1 + M_2 \Omega_2) = \frac{\pi \mu_1 \omega r_1^2 b}{J\psi}(\Omega_1 Cm_1 + \Omega_2 Cm_2). \tag{14}$$

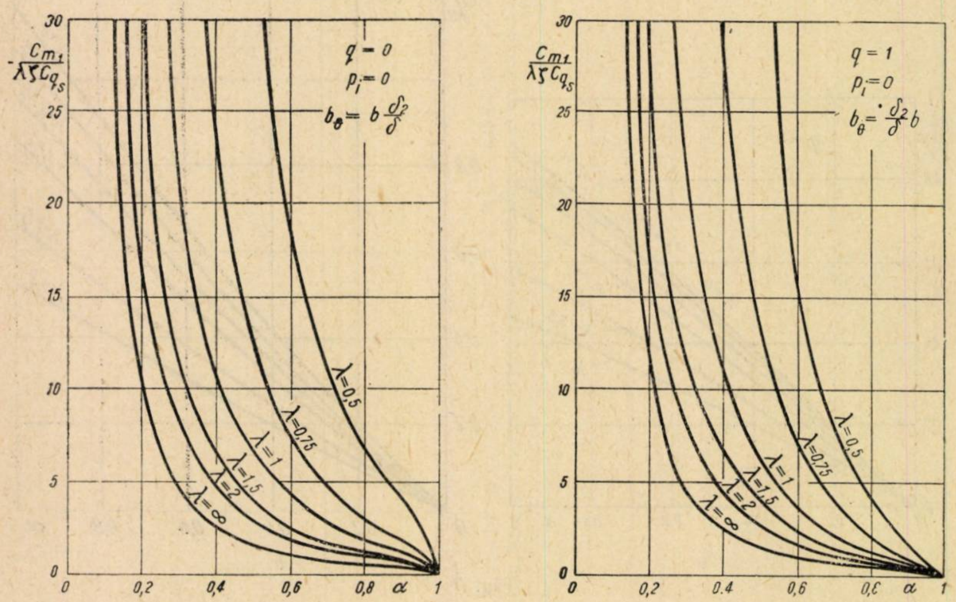
Această cantitate de căldură este evacuată prin convecție și radiație în mediul exterior, prin conductibilitate în piesele metalice vecine și mai ales prin uleiul care se scurge pe la capetele lagărului și care spală suprafețele fusului și cuzinetului. Căldura transmisă prin convecție și radiație se poate pune sub forma [6]

$$H_1 = aA(t_m - t^\star), \tag{15}$$

unde A este suprafața de contact cu mediul exterior, avînd temperatura $t^\star$, iar coeficientul de transmisie are valoarea

$$a = \frac{1{,}8}{J}\left[1 + \frac{2K_1 r_1}{B}\left(\frac{r_1}{0{,}0135}\right)^2 + K_2 \sqrt{w}\right] K_3 + 24{,}1 \times 10^{-6} K_3^4 (t_m - t^\star)^3, \tag{16}$$

unde B este lungimea arborelui cuprinsă în interiorul carcasei lagărului, iar w este viteza curentului în care este plasată aceasta. Coeficienții K_1, K_2, K_3 depind de construcția ansamblului; astfel $K_1 = \frac{1}{2}$ pentru un lagăr de sprijin de capăt, iar $K_1 = 1$ pentru un lagăr intermediar; $K_2 = 0{,}5$ pentru o ventilație pe o singură parte și $K_2 = 1$ pentru un lagăr ventilat pe la ambele capete, iar $K_3 = 0{,}8 \sim 1$. Ultimul termen al relației (16) este mic și poate fi neglijat într-o primă aproximație. În sfîrșit raportul $\frac{A}{2r_1 b} = 15 \ldots 30$ în cazurile practice. Dacă se consideră numai răcirea prin carcasa lagărului



a *b*

Fig. 8

$$a \cong (0{,}7 + 1{,}2\sqrt{w})\,\frac{1}{J}, \qquad (17)$$

unde w este în general cel puțin 1 m/s.

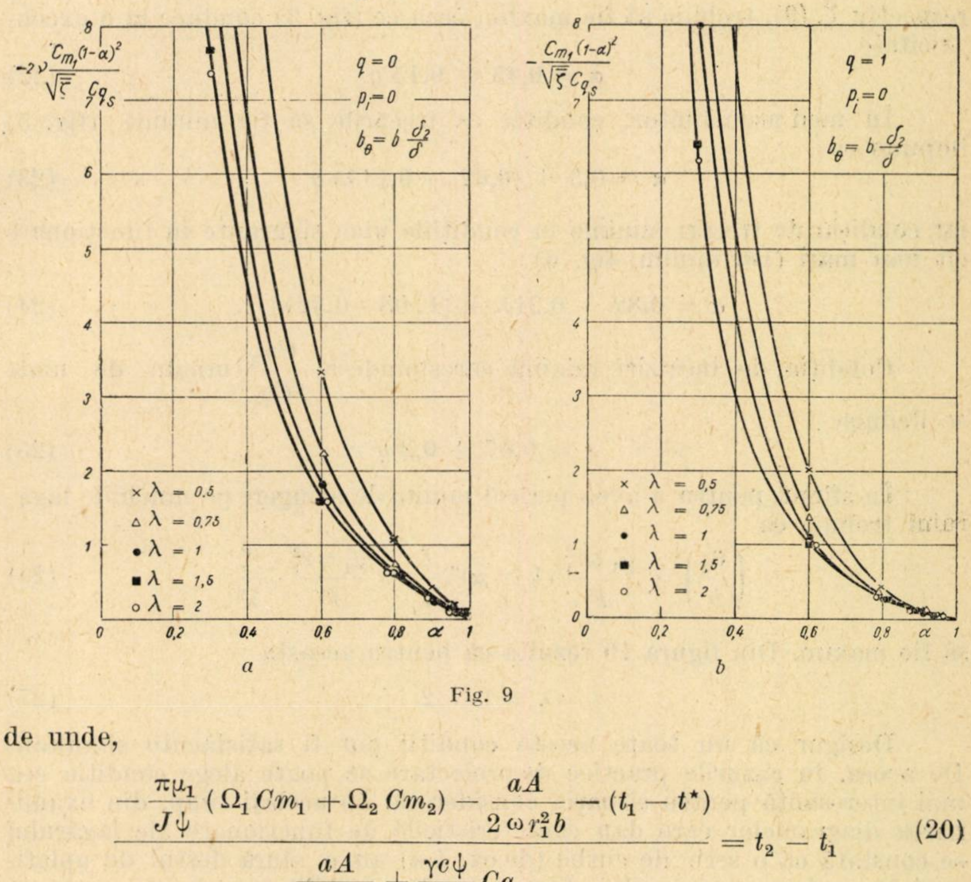
Căldura evacuată prin ulei este apoi

$$H_2 = \gamma c\,[Q_e\,(t_2 - t_1) + Q_s\,(t_m - t_1)], \qquad (18)$$

unde Q_e este debitul ce traversează secțiunea $\theta = \pi$ (a cărui contribuție poate fi neglijată deoarece nu se evacuează direct în exterior, ci contribuie la uniformizarea temperaturilor pe cuzinet).

Egalînd căldura produsă (13) cu cea evacuată (15), (18) se obține relația

$$- \frac{\pi\mu_1 \omega r_1^2 b}{J\psi} (\Omega_1 Cm_1 + \Omega_2 Cm_2) = aA \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t^* \right) + \\ + \frac{1}{2} \gamma c\omega \Delta r_1 b \, Cq_s (t_2 - t_1) \tag{19}$$



a *b*

Fig. 9

de unde,

$$\frac{- \frac{\pi\mu_1}{J\psi} (\Omega_1 Cm_1 + \Omega_2 Cm_2) - \frac{aA}{2\omega r_1^2 b} - (t_1 - t^*)}{\frac{aA}{2\omega r_1^2 b} + \frac{\gamma c \psi}{2} Cq_s} = t_2 - t_1 \tag{20}$$

relație care permite calculul temperaturii t_2.

Dacă cuzinetul este fix ($\Omega_2 = 0$) și se consideră acoperitor numai căldura evacuată prin ulei, din relația de mai sus se deduc formulele

$$- \frac{Cm_1}{\zeta\lambda\, Cq_s} = \frac{2J c\gamma r_1^2}{\pi F} (t_2 - t_1) \, ; \; - \frac{Cm_1 (1 - \alpha)^2}{\sqrt{\zeta}\, Cq_s} = \frac{J\gamma c \delta_2}{\pi \sqrt{\mu_1 \Omega_1 F}} (t_2 - t_1) \tag{21}$$

utile pentru cazul proiectării. În figurile 8 și 9 s-au reprezentat parametrii astfel definiți în funcție de α, λ, pentru $q = 0$, $q = 1$.

Relațiile de mai sus permit calculul temperaturii t_2 și în acest mod problema este complet rezolvată. Mai mult, se pot deduce și criterii pentru proiectarea lagărelor în anumite condiții optime.

Astfel, dacă dorim o siguranță în funcționare și o durabilitate cît mai mare a lagărului, deci o uzură minimă în timp (lagăre de turbine, motoare electrice etc.), grosimea minimă δ_2 trebuie să fie cît mai mare, respectiv $\overline{\zeta}$, (9), trebuie să fie maxim, ceea ce (fig. 3) conduce la o excentricitate

$$\alpha = 0{,}45 - 0{,}15\, q. \tag{22}$$

În mod asemănător, condiția ca frecările să fie minime (fig. 5) impune ca

$$\alpha = 0{,}3 + (0{,}62 - 0{,}11\lambda)\, q \tag{23}$$

iar condiția de frecări minime în condițiile unei siguranțe în funcționare cît mai mari (*km* minim, fig. 6)

$$\alpha = 0{,}82 - 0{,}21\lambda + (1,08 - 0{,}32\lambda)\, q \tag{24}$$

Condiția de încălziri minime corespunde la $\dfrac{Cm_1}{Cq_s}$ minim de unde se deduce

$$\alpha = 0{,}67 + 0{,}2\, q \tag{25}$$

În sfîrșit, pentru a avea pericol minim de atingeri pe muchiile lagărului trebuie ca

$$\left(\frac{\delta_2}{b}\right)^2 = \frac{\mu_1 \omega r_1^2}{F}(1-\alpha)^2 \frac{\zeta}{\lambda} = \frac{\mu_1 \omega r_1^2}{F} \cdot \frac{\overline{\zeta}}{\lambda^2} \tag{26}$$

să fie maxim. Din figura 10 rezultă că pentru aceasta

$$\lambda = 1 \ldots 2 \tag{27}$$

Desigur că nu toate aceste condiții pot fi satisfăcute simultan. De aceea, în cazurile practice de proiectare se poate alege condiția cea mai interesantă pentru situația considerată. În același timp, din examinarea diagramelor care dau caracteristicile de funcționare ale lagărului se constată că o serie de curbe (de ex. *km*) au o alură destul de aplatisată în regiunea minimului, fapt care dă posibilitatea ca să se aleagă excentricitatea astfel încît să se poată realiza aproximativ mai multe condiții simultan.

*

După cum s-a mai spus, exponentul q, (4), este cuprins între zero și unitate. El ia valori din ce în ce mai mici (pentru t_1, t_2, date), pe măsură ce excentricitatea crește; de exemplu pentru $\alpha = 0{,}98$, pentru ca $q = 1$, din (4), se vede că viscozitatea la ieșire μ_2 ar trebui să fie de cca. 100 ori mai mică decît cea de la intrare, μ_1. Dacă $\mu_1 \neq \mu_2$, iar raportul lor are întotdeauna o valoare finită și diferită de zero, din relația (4) rezultă teoretic $q \to 0$ cînd $\alpha \to 1$ și $q \to \infty$ cînd $\alpha \to 0$. Rezultă deci că ne putem aştepta ca la excentricităţi mici $q > 1$ (de exemplu la $\alpha = 0{,}3$ şi pentru $t_1 = 39°C$, $t_2 = 49°C$, avem aproximativ, pentru uleiul STAS, 305, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 3$ şi rezultă $q = 2{,}28$). În domeniul excentricităţilor mici, influenţa variaţiei viscozităţii asupra funcţionării lagărului este însă redusă, deoarece variaţiile de presiune şi temperatură sînt mici. Din această cauză la aceste excentricităţi se poate chiar să se considere o viscozitate constantă (o valoare medie), fără să se comită o eroare prea mare.

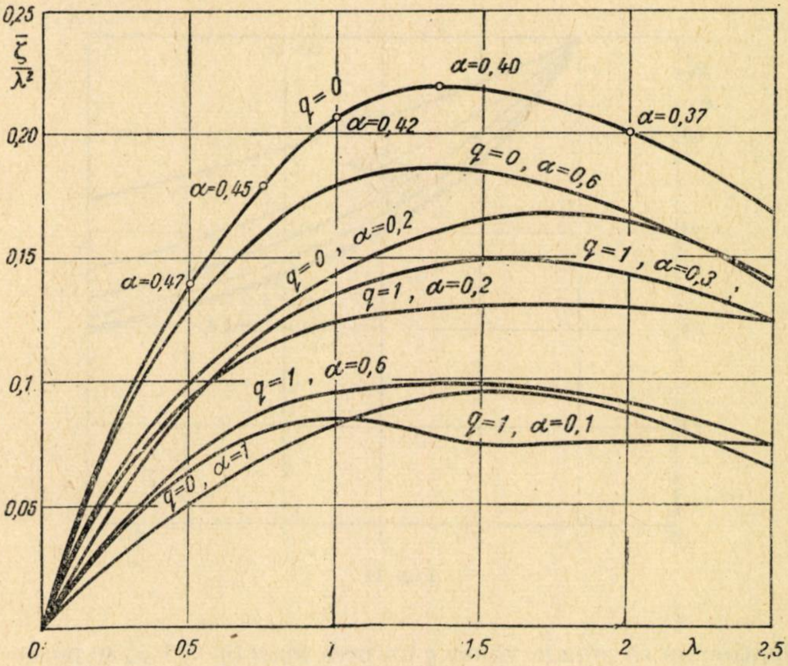


Fig. 10

Din aceste motive s-au trasat variaţiile parametrilor funcţionali în diagramele precedente numai pentru $q = 0$ şi $q = 1$, fără să se ia în considerare cazul $q > 1$. Pentru $q > 1$ se poate lua în formule $q = 1$, corectînd în schimb eroarea introdusă prin modificarea corespunzătoare a valorii viscozităţii la intrare μ_1, care se ia în calcule şi anume o valoare $\mu_1' < \mu_1$. Determinarea valorii μ_1' astfel încît erorile calculului să fie cît mai mici, se poate face scriind relaţia

$$\int_0^\pi \mu d\theta = \mu_1 \int_0^\pi \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q d\theta = \mu_1' \int_0^\pi \frac{\delta}{\delta_1} d\theta, \tag{28}$$

de unde se deduce

$$\frac{\mu_1'}{\mu_1} = \frac{\int_0^{\pi} (1 + \alpha \cos \theta)^q \, d\theta}{\pi (1 + \alpha)^{q-1}} \tag{29}$$

a cărui variaţie este prezentată în figura 11.

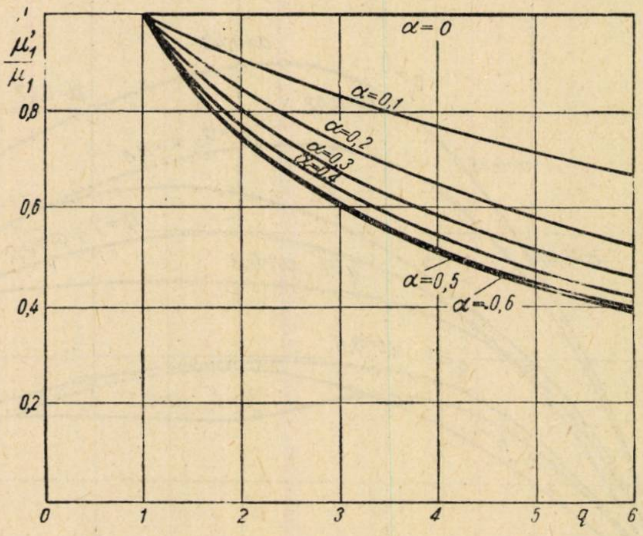


Fig. 11

Menţionăm că pînă la valori q nu prea mari ($q < 1{,}5$) se poate utiliza în continuare variaţia reală a viscozităţii, iar valorile parametrilor funcţionali se vor determina prin extrapolare, pe baza datelor din diagrame, pentru $q=0$ şi $q = 1$ întocmai ca şi pentru cazul cînd $0 \leqslant q \leqslant 1$.

★

Rezultatele de mai sus permit calculul şi proiectarea în mod judicios a lagărelor circulare cu alunecare.

În general, se pot deosebi două cazuri de calcul şi anume :

a. *Calcule de verificare*, cînd necunoscutele problemei sînt excentricitatea α, respectiv grosimea minimă δ_2 şi temperatura medie a lagărului t_m, respectiv temperatura t_2, legate între ele prin relaţia (5). Aceste două necunoscute se determină imediat prin încercări, cu ajutorul relaţiilor (8) şi (21) sau (20) şi a diagramelor care dau coeficienţii respectivi.

b. *Calculele de dimensionare*. În acest caz se dau parametrii funcţionali : sarcina F, vitezele Ω_1, (eventual şi Ω_2) şi uneori uleiul utilizat. Rămîn ca necunoscute :

$$\{t_1,\ t_2,\ r_1,\ b,\ \psi,\ \delta_2(\alpha),\ \mu_1 \text{ (uleiul)},\ \nu\} \tag{30}$$

Ecuațiile echilibrului hidrodinamic și termic impun, după cum am văzut, două condiții : ca lagărul să suporte sarcina dată și ca echilibrul termic să fie realizat. În același timp se mai poate pune una sau cel mult două condiții de optim (care prescriu α, eventual și λ). Rămîn deci 5 parametri nedeterminați, care trebuie aleși ținînd seama de alte criterii. Această libertate de a alege anumiți parametri și de a impune unele condiții suplimentare deși, cel puțin la prima vedere complică destul de mult calculul, este utilă din punctul de vedere al proiectării permițînd calculul în mai multe variante din care se poate adopta în cele din urmă soluția cea mai avantajoasă.

O serie dintre necunoscutele (30) pot fi fixate de la început (ca uleiul cel mai potrivit, sistemul de ungere, etc.) ținînd seama de mașina respectivă, altele pot rezulta din calculul de rezistență al mașinii (de ex. r_1). Altele în sfîrșit, ca de exemplu t_1, t_2, δ, pot fi prescrise, de asemenea ținînd seama de condițiile de funcționare care se cer. Cele mai frecvente necunoscute sînt, jocul ψ, lățimea lagărului b, dimensiunile orificiului sau fantei de alimentare (ν); urmează apoi r_1, δ_2, t_2 și eventual μ_1 (tipul de ulei).

În toate aceste cazuri calculele pot fi efectuate prin încercări pe baza formulelor și diagramelor precedente. Dacă se prescrie grosimea minimă δ_2, este comod să se utilizeze relațiile (9) și (20) sau (21_2) împreună cu diagramele corespunzătoare.

Exemplu de calcul de dimensionare

Fie un lagăr de turbină avînd $F = 2\,000$ kg, $n = 3\,000$ rot/min ($\Omega_1 = 3{,}4$ rad/sec, $\Omega_2 = 0$), $\gamma = 920$ kg/m³, $c = 0{,}5$ kcal/kg° C, $r_1 = 75$ mm ; alegem $t_1 = 40$°C, $\delta_2 = 0{,}12$ mm, $t_m = 55$°C ($t_2 = 70$°C), ulei T_b 5 003, $p_i = 1{,}5$ kg/cm².

Din diagrama variației uleiului T_b 5 003 cu temperatura, rezultă $\mu_1 = 0{,}00266$ kgsec/m². $\mu_2 = 0{,}000955$ kg sec/m².

Rămîn ca necunoscute : lățimea b, jocul ψ și dimensiunile fantei (canalului) de ungere (ν).

Deoarece formulele de calcul dau numai două ecuații, vom pune o condiție de optim, și anume condiția (22), mai precis

$$\alpha = 0{,}3 \tag{31}$$

deoarece după cum se va vedea în acest caz $q > 1$.

În aceste condiții din (9) se deduce

$$\mu_1' = \frac{F\delta_2^2}{4\Omega_1 r_1^4} \cdot \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{2\,000 \cdot 1{,}2^2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 314 \cdot 0{,}075^4} \cdot \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{0{,}073 \cdot 10^{-3}}{\overline{\zeta}} \tag{32}$$

Considerînd cîteva alungiri $\lambda = 0{,}7$; 1 ; 1,5, din diagrama din figura 3 rezultă pentru $\alpha = 0{,}3$ respectiv : $\overline{\zeta} = 0{,}069$; 0,135 ; 0,336, și din formula de mai sus $\mu'_1 = 0{,}01055$; 0,0054 ; 0,00217.

Apoi din relația (4) și cu temperatura t_2 admisă, rezultă din diagrama din figura 11 (pentru $\alpha = 0{,}3$), $\dfrac{\mu_1'}{\mu_1} = 0{,}875$ și $\mu_1' = 0{,}00224$. Din comparația cu rezultatele obținute pe baza formulei de mai sus (fig. 12) rezultă că soluția problemei se găsește pentru $\lambda = 1{,}48$.

Putem lua deci

$$\lambda \cong 1{,}5\,;\quad b = 225 \text{ mm}\,;\quad \Delta = \frac{\delta_2}{1 - \alpha} = 0{,}172 \text{ mm} \tag{33}$$

În același timp, considerînd căldura evacuată numai prin ulei rezultă $-\frac{Cm_1}{\zeta\lambda Cq_s} = 12,7$ iar din (21_1)

$$-\frac{Cm_1}{\zeta\lambda Cq_s} = \frac{2J\gamma c r_1^2}{\pi F}(t_2 - t_1) = \frac{2\cdot 427\cdot 920\cdot 0,5\cdot 0,075^2\cdot 30}{\pi\cdot 2\,000} = 10,5 \qquad (34)$$

Pentru a asigura acest debit va trebui să luăm

$$\nu = \frac{1}{2}\cdot\frac{12,7}{10,5} = 0,606 \qquad (35)$$

sau un canal de ungere cu o lățime

$$b_i = \nu b = 0,606 \times 225 = 137 \text{ mm} \qquad (36)$$

În calculul de mai sus s-a neglijat influența presiunii de alimentare asupra lui Cq_s. În schimb valoarea 12,7 pentru $\frac{Cm_1}{\zeta\lambda Cq_s}$ este mai mare decît cea dată de curbele din fig. 9, deoarece s-au utilizat curbele obținute în ipoteza umplerii complete a zonei divergente a lagărului [4], fenomen care apare datorită alimentării sub presiune. Evident, calculul este acoperitor, iar temperatura medie reală t_m va fi ceva mai redusă decît cea utilizată în calcule.

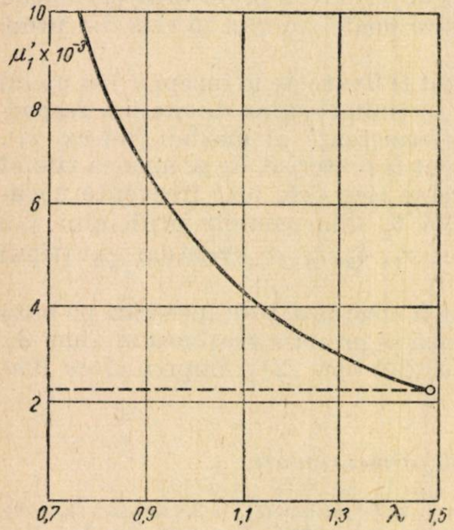


Fig. 12

Verificări experimentale (exemplu de calcul de verificare)

Vom considera lagărul experimental utilizat în lucrarea [2]; fie $F = 500$ kg, $n = 960$ rot/min ($\Omega_1 = 100,5$ rad/sec, $\Omega_2 = 0$), $t_1 = 36$°C (temperatura măsurată experimental), ulei STAS-305 ($\mu_1 = 0,00805$ kgsec/m²), $r_1 = 18$ mm, $b = 18$ mm ($\lambda = 0,5$), $p_i = 1$ kg/cm², $b_i = 5,2$ mm ($\nu = 0,29$), $\psi = 1,6\,\%$.

Necunoscutele sînt $\alpha\,(\delta_2)$ și t_2.

Formula (8) dă

$$\zeta = \frac{F\cdot\psi^2}{2\mu_1\Omega_1 b r_1} = \frac{500\cdot 1,6^2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 8,05\cdot 10^{-3}\cdot 100,5\cdot 1,8^2\cdot 10^{-4}} = 2,43 \qquad (37)$$

iar din figura 2 rezultă $(\alpha)_{q=0} = 0,9$; $(\alpha)_{q=1} = 0,96$. Considerînd că α variază între aceste două limite liniar cu q, ținînd seama și de (4), se deduce, pentru cîteva temperaturi t_2 valorile q și α prezentate în fig. 13 a.

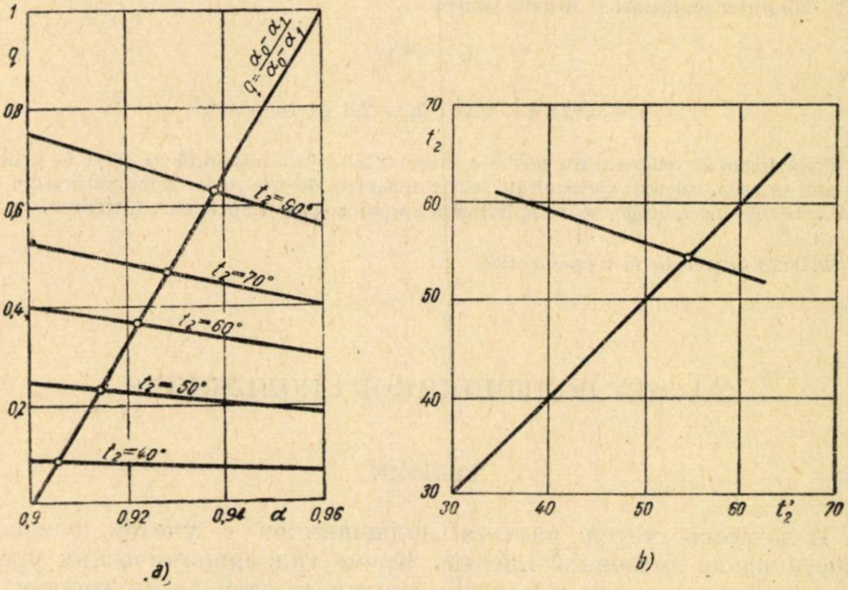
Pentru a determina temperatura t_2, vom considera că evacuarea căldurii se face atît prin ulei cît și prin radiație, dat fiind construcția specială a lagărului (fig. 14), (cuzinetul din bronz, cu dimensiunile ∅ 64 × 28 mm, necapsulat, liber în atmosferă).

În aceste condiții, suprafața exterioară a cuzinetului prin care se poate evacua căldura este ($R = 32$ mm, $B = 28$ mm)

$$A = 100 \text{ cm}^2;\ \frac{A}{2br_1} = 15 \qquad (38)$$

iar a (16) cu $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $w = 1$ m/s, $K_3 = 0,85$ rezultă:

$$a = \frac{1,8}{427}\left[1 + \frac{4\cdot 1\cdot 1,8\cdot 10^{-4}}{2,8^2,\,10^{-4}}\left(\frac{1,8}{1,35}\right)^2 + 1\right]0,85 = 0,0177. \qquad (39)$$



a)

b)

Fig. 13

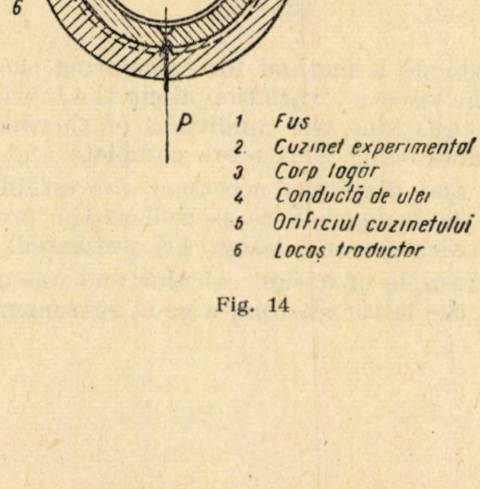

4
3
5
2
θ_1
1
6
P
1 Fus
2. Cuzinet experimental
3 Corp lagăr
4 Conductă de ulei
5 Orificiul cuzinetului
6 Locaș traductor

Fig. 14

În sfîrşit, din formula (20) se deduc temperaturile t_2 prezentate în diagrama din fig. 13 b. Se vede că soluţia problemei se deduce pentru

$$t_2 = 54°\mathrm{C} \tag{40}$$

la care

$$\alpha = 0{,}92\,;\ q = 0{,}30\,;\ \delta_2 = 2{,}3\ \mu\,;\ t_m = 45°\mathrm{C} \tag{41}$$

Experimental, temperatura medie a cuzinetului a fost măsurată ca fiind $t_m = 42,\ 5°\mathrm{C}$. După cum se vede, calculul dă rezultate foarte apropiate de cele reale. Temperatura din calcul rezultă ceva mai mare decît cea reală, datorită aproximaţiilor acoperitoare introduse.

Primită la redacţie la 9 aprilie 1960

РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Излагается метод расчета подшипников с учетом изменения вязкости вдоль смазочной пленки. Кроме гидродинамических уравнений применяются также и условия теплового равновесия, причем расчет является, таким образом, более полным и точным.

Приводятся соотношения и диаграммы, необходимые для установления суммарных характеристик и температур, а также показывается ход расчетов (как проверочных, так и проектных). Далее приводится пример проектного расчета и проверочного расчета, причем последний показывает хорошее согласование между расчетными и экспериментально полученными данными.

CALCULATION OF JOURNAL BEARINGS

ABSTRACT

This paper presents a method for calculating the bearings, taking into consideration the viscosity variation along the lubricant film. Besides the hydrodynamic equations, the conditions of thermic equilibrium are also used, the calculus being thus more complete and accurate.

The relations and diagrams necessary for establishing the global characteristics and the temperatures as well as the proceeding of calculations (both for verification and design) are presented.

Finally, one example of design calculus and one of verification calculus are presented, the latter showing a good agreement with the experimental data.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R.P.R., 1957.
2. N. TIPEI, AL. NICA, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor*. I. *Influența variației viscozității*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, *3*, 737–754 (1959).
3. M. B. КОРОВЧИНСКИЙ, *Прикладная теория подшипников жидкостного трения*. Машгиз, Москва, 1954.
4. N. TIPEI, AL. NICA, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor*. II. *Caracteristicile globale în cazul viscozității variabile*. Studii și cercetări de mecanică, aplicată, *4*, 1079–1092 (1959).
5. — *Influența condițiilor de alimentare cu lubrifiant asupra funcționării lagărelor cu alunecare*. Metalurgia și Construcția de Mașini, *10*, 844–851 (1959).
6. G. VOGELPOHL, *Betriebsichere Gleitlager*. I. Springer, Heidelberg, 1958.

METODĂ PENTRU STUDIUL UZURII LAGĂRELOR CU IZOTOPI RADIOACTIVI

DE

D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, E. PROCOPOVICI,
M. NĂSTASE şi V. CONSTANTINESCU

În construcţia de maşini, micşorarea uzurii, efect al frecării pieselor în mişcare — constituind un factor determinant în mărirea duratei de funcţionare a maşinilor — a format şi continuă a forma o problemă de studiu de importanţă deosebită.

Fenomenele care însoţesc frecarea s-au dovedit a fi cu mult mai complicate decît au fost imaginate iniţial; cu toate numeroasele lucrări cu caracter ştiinţific, efectuate în diferite ţări, există încă un cîmp larg pentru cercetări [1], [2], [7], [8], [9].

Trebuie observat de la început, că fenomenele de uzură sînt în general intim legate de cele de lubrificaţie, din care cauză, în bună parte metodele experimentale de cercetare sînt analoge. Dacă pentru studiul uzurii (uscate) se variază materialele supuse frecării, starea suprafeţelor, sarcina aplicată, viteza, timpul de funcţionare, temperatura etc., pentru studiul lubrificaţiei, în afară de factorii enumeraţi, se folosesc uleiuri sau alte medii de calităţi diferite (cu sau fără aditivi), calitatea lubrificaţiei şi a lubrifiantului respectiv, fiind apreciată după durata de funcţionare normală a suprafeţelor de frecare şi deci după gradul de uzură respectiv.

Calcularea uzurii în construcţia de maşini este dificilă; dacă rezistenţa materialelor ne furnizează metode precise pentru calculul pieselor la rupere, acestea sînt insuficiente însă pentru calculul de uzură.

Aceste considerente — expuse succint — au făcut necesare studii şi cercetări sistematice într-un număr mare de ţări — luîndu-se în considerare diferiţi parametri ce intervin, calitativ şi cantitativ — pentru a se determina legile uzurii şi cele ale lubrificaţiei, în cazul diferitelor sisteme afectate [1], [2], [7], [8].

S-a ajuns la concluzia, că desfăşurarea procesului de uzură, este condiţionată de numeroşi factori ca :

— compoziţia chimică, structura internă şi starea suprafeţelor în mişcare ;

— mărimea şi modul de variaţie în timp a sarcinii (constantă sau pulsatorie) ;

— timpul de funcţionare ;

— viteza de alunecare relativă a suprafeţelor ;

— elementele constructive ;

— compoziţia şi viscozitatea agentului de lubrificare ;

— temperatura la care se desfăşoară procesul.

Procesul de uzură este cu atît mai complex cu cît el poate fi — după cum se vede — afectat simultan de mai mulţi parametri.

Sarcinile îmbunătăţirii indicilor de exploatare ai maşinilor şi ieftinirea acestora, aduc pe prim plan *studiul aprofundant şi multilateral al fenomenului de uzură*. În această lucrare ne vom ocupa de uzura lagărelor — cercetată cu ajutorul izotopilor radioactivi — şi aceasta în condiţiile de ungere şi funcţionare, întîlnite normal în practică.

1. METODELE CLASICE PENTRU STUDIUL UZURII ŞI METODA IZOTOPILOR RADIOACTIVI

Sînt cunoscute următoarele metode clasice, folosite în mod curent pentru studiul uzurii : metode prin cîntărire (pierdere de masă) ; determinări micrometrice (micşorarea dimensiunilor) ; prin urmărirea cantităţii de metal trecut în lubrifiant (analiză chimică) ; metoda tiparelor (marcarea suprafeţelor). Unele din aceste metode se folosesc şi în prezent chiar în unele laboratoare de cercetări din străinătate, în determinări calitative sau în anumite cercetări ce se fac în paralel cu metodele radioactive. Faţă de aceste metode însă, utilizarea izotopilor radioactivi prezintă următoarele avantaje [3], [4], [5], [6] :

— posibilitatea de observare şi cercetare a dinamicii uzurii chiar în timpul funcţionării maşinii, fără ca procesul studiat să fie perturbat şi fără a fi necesară oprirea şi demontarea maşinii ; acest caracter este important şi prin aceea că după fiecare pornire a maşinii, pînă la restabilirea regimului normal de lucru, apare o uzură mai mare ;

— exactitatea mai mare a metodei (sensibilitate pînă la 10^{-14} g (metal)/cm^3 (ulei)) ;

— posibilitatea de urmărire a uzurii diferitelor piese (experimentale) într-un timp foarte scurt ; (reducerea timpului de studiu faţă de metodele clasice în raport de 1/5—1/20) ;

— permite studiul uzurii simultan la mai multe piese sau suprafeţe de frecare ;

— se poate studia transportul particulelor metalice de pe o suprafaţă pe alta (în special prin metoda autoradiografică) ;

— se poate semnaliza uzura maximă admisibilă (în special prin marcare radioactivă);

— se poate determina cu precizie perioada necesară pentru rodarea mașinii.

În general, metoda utilizării izotopilor radioactivi constă în iradierea — totală sau parțială — a unor elemente ale cuplului supus uzurii și urmărirea cu o aparatură radiometrică a particulelor de metal radioactive, produse ale uzurii, care sînt antrenate de lubrifiant.

2. STADIUL ACTUAL AL PROBLEMEI

Dat fiind complexitatea problemei, cu toate că principiul metodei a fost enunțat și a devenit clasic, studiile și încercările se continuă totuși în diferitele țări, atît pentru îmbunătățirea metodelor de măsură în sine, cît și pentru studierea influenței diferiților factori, dintre care semnalăm, lubrifianții, metalele — aliajele și soluțiile constructive ale mașinilor, care ca și în cazul așchierii metalelor sînt în mare măsură specifici condițiilor țării respective.

Privite în general, lucrările publicate în străinătate (U.R.S.S., S.U.A., ANGLIA, FRANȚA etc.) arată că în condițiile experimentatorului respectiv și folosind izotopii radioactivi, s-au rezolvat pînă în prezent o serie de probleme practice în legătură cu alegerea materialelor rezistente la uzură și s-au stabilit relații între uzura lagărelor și condițiile de funcționare [3], [5], [8], [9].

În general, în aceste cercetări, parametrii urmăriți curent au fost: materialul, sarcina, viteza relativă, calitatea lubrifiantului, vîscozitatea și temperatura.

În unele lucrări și în special în cele sovietice s-a studiat și efectul procentului de sulf sau fosfor din ulei asupra mărimii uzurii, constatîndu-se efectele favorabile sau defavorabile ale acestor condiții.

S-au efectuat, de asemenea, cercetări și în legătură cu influența chimică a uleiului asupra metalelor lubrificate; s-a constatat astfel că anumite produse de adițiune în uleiuri reacționează chimic și antrenează mici cantități de metal, provenite de pe suprafața cu care acesta a venit în contact; în acest fel metalul fiind radioactiv, s-a putut determina relativ ușor gradul de corozivitate a uleiului [9].

În ultimul timp, în special în U.R.S.S., s-a acordat o mare importanță influenței prafului de diferite compoziții chimice specifice diferitelor regiuni, influenței gazelor de ardere etc., precum și urmăririi în mod simultan a uzurii a 2—3 suprafețe [9].

Trebuie să remarcăm că în studiile lor diferiți cercetători străini prezintă metodele proprii ca fiind cele mai eficace, fără însă a le compara cu alte metode publicate anterior.

Din această cauză nu apar concludente anumite sisteme de măsură cum ar fi de exemplu utilizarea filtrului în circuitul de ulei, a grupurilor de contoare GM plasate în diferite sisteme, utilizarea unui anumit tip de machetă etc.

Lucrările importante de lubrificație și uzură elaborate de N. Tipei și colaboratorii săi, au utilizat metode experimentale clasice de care dispunea în momentul respectiv institutul [7].

În țara noastră nu s-a folosit, pînă în prezent pentru studiul uzurii lagărelor metoda radioizotopilor. Rezultă ca o consecință a celor arătate necesitatea acestui studiu, ce a fost întreprins, ca un prim început, necesitate cu atît mai acută cu cît sînt binecunoscute condițiile actuale de mare avînt al dezvoltării industriei construcțiilor de mașini, care reclamă astfel de cercetări ce trebuie să conducă la îmbunătățirea permanentă a indicilor tehnico-economici.

Condițiile diferite, impuse de anumiți parametri, specifici fiecărei țări, fac ca în acest domeniu să nu fie posibilă și eficace, simpla adaptare a unei metode străine.

3. METODE EXPERIMENTALE — DESCRIEREA INSTALAȚIEI

În cadrul Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia” a fost construit în 1959 un nou laborator de metode radioactive. Laboratorul permite — în afară de alte studii — și cercetări experimentale privind uzura și ungerea lagărelor.

Mergîndu-se pe linia precizată anterior, în timpul relativ scurt, care a stat la dispoziția colectivului, s-a urmărit atît crearea unei metode de măsură proprii, cît și în paralel verificarea unor rezultate ce au fost semnalate în ultimii ani în literatura de specialitate.

În acest scop, pentru început s-au studiat și proiectat 3 machete pentru studiul experimental al uzurii lagărelor.

Macheta experimentală propriu-zisă (fig. 1), se caracterizează prin plasarea orizontală a axului motor (*6*) și verticală a tijei sabotului (*3*) care permite transmiterea efortului de la un braț de pîrghie (*9*) cu încărcarea variabilă (*10*).

La această machetă, cele două corpuri în frecare sînt : fusul, continuare a axului motor, și o piesă sabot (*5*), confecționată din materialul lagărului ce trebuie studiat, piesă ce se poate schimba deci după necesitate.

Procesul de uzură-ungere se produce într-o cameră metalică în formă de trunchi de con (*1*), cu pereții din oțel de 10 mm grosime. Peretele frontal exterior (de formă circulară) (*2*) se poate detașa, pentru curățire sau schimbare a axului. Această placă metalică a fost prevăzută cu mai multe orificii circulare de diferite diametre — etanșate cu cauciuc — pentru a permite introducerea în baia de ulei sau în altă parte a camerei experimentale, a contoarelor GM de dimensiuni diferite, termocuple, conducte pentru ulei sau un gaz oarecare etc.

În funcționare normală, introducerea lubrifiantului se face prin partea superioară a casetei metalice, astfel ca suprafețele în frecare să fie spălate permanent de jetul de ulei, evacuarea lubrifiantului făcîndu-se prin partea inferioară (12). Circuitul continuu este asigurat printr-o pompă (*15*) plasată în exteriorul machetei propriu-zise, antrenată de un electromotor propriu.

S-a prevăzut posibilitatea de extragere a tijei și a sabotului, prin partea superioară (canalul de ghidaj) (*4*), fără a fi deci nevoie de demontare sau manevre greoaie.

Brațul de pîrghie fiind executat constructiv în raportul 1/7 permite încărcări pînă la 100 kg/cm².

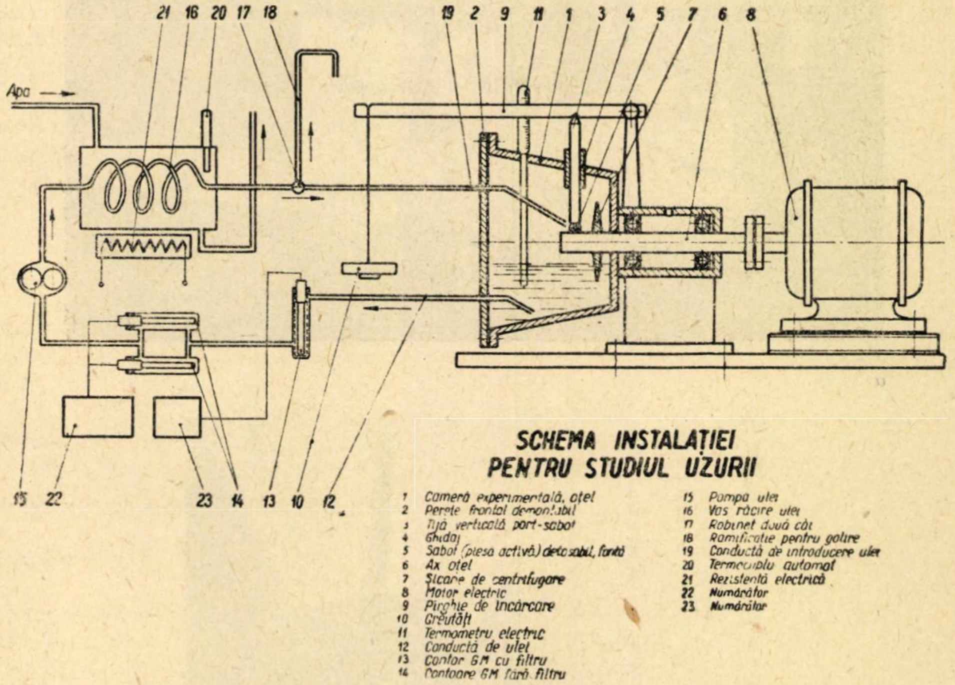

21
16
20
17
18
19
2
9
11
1
3
4
5
7
6
8
Apa
15
22
23
14
13
10
12
SCHEMA INSTALAȚIEI PENTRU STUDIUL UZURII
1 Cameră experimentală, oțel
2 Perete frontal demontabil
3 Tijă verticală port-sabot
4 Ghidaj
5 Sabot (piesa activă) detașabil, fontă
6 Ax oțel
7 Șicane de centrifugare
8 Motor electric
9 Pîrghie de încărcare
10 Greutăți
11 Termometru electric
12 Conductă de ulei
13 Contor GM cu filtru
14 Contoare GM fără filtru
15 Pompa ulei
16 Vas răcire ulei
17 Robinet două căi
18 Ramificație pentru golire
19 Conductă de introducere ulei
20 Termocuplu automat
21 Rezistență electrică
22 Numărător
23 Numărător

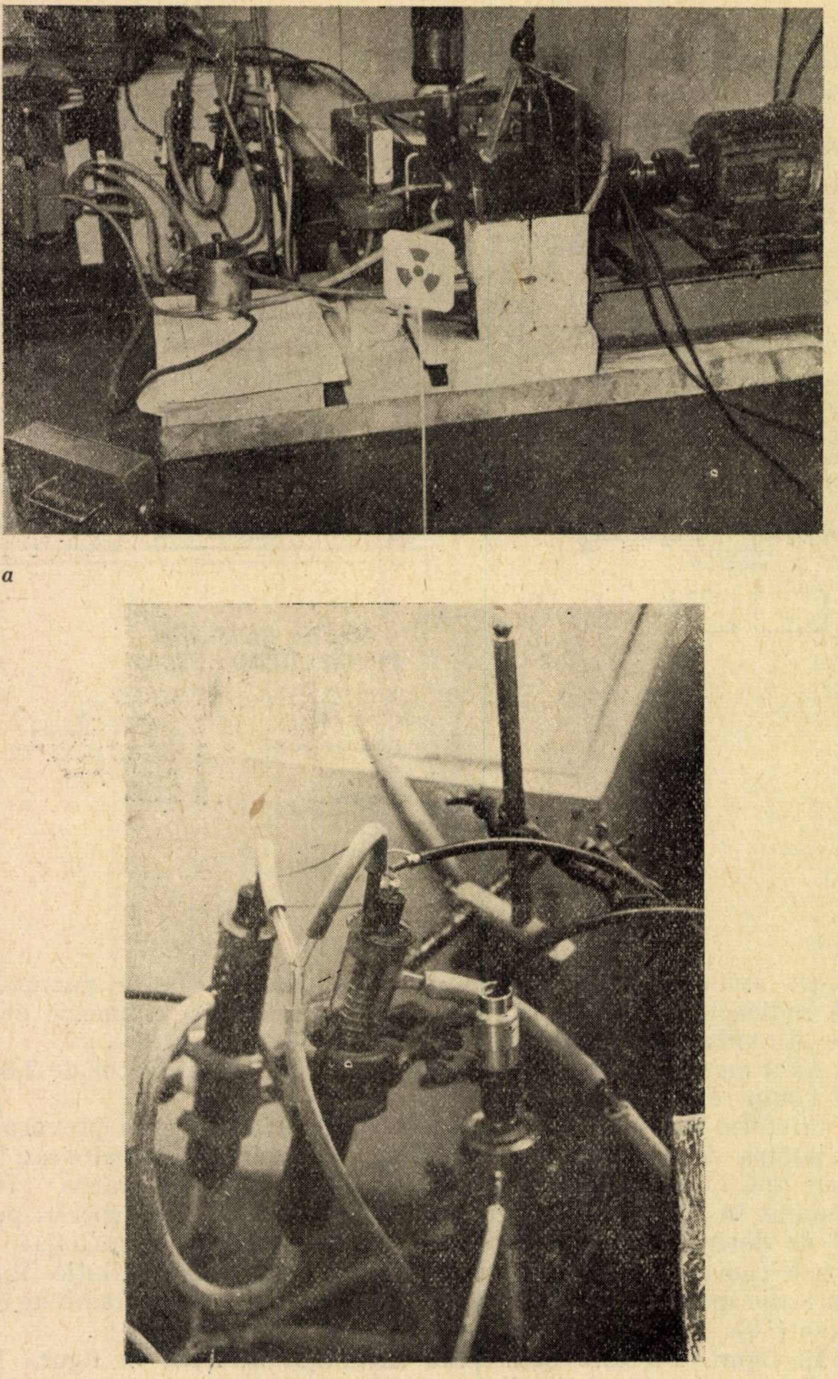
Fig. 1

S-a evitat posibilitatea scurgerii uleiului, ce conține particule de uzură radioactive, dinspre camera experimentală spre rulmenții de susținere ai axului, plasîndu-se pe ax șicane de centrifugare (*7*).

Axul motor este antrenat prin cuplă de un electromotor de 2,8 kW, 1,430 t/min (*8*).

Circuitul exterior de ulei (conducte de vinilin) este prevăzut, pe lîngă pompa de recirculare menționată, cu un circuit de răcire sau încălzire cu apă (*16*) – pentru menținerea temperaturii constante. Inițial s-a montat în circuit un singur contor GM tip VAZ 411, special pentru astfel de determinări (*14*). Circuitul de ulei este astfel amenajat, încît se poate comanda pomparea uleiului radioactiv din instalație, într-un vas metalic special, plasat izolat într-o cutie cu pereții de plumb de 5 mm grosime (18).

În figura 2 *a* este prezentată instalația schițată în figura 1. În figura 2 *b* se prezintă un detaliu.



a

b

Fig. 2

Comanda întregii instalații (pornire, oprire, citire și înregistrare etc.), se face de la un post plasat exterior camerei (fig. 3). Aparatura principală a acestui post este formată din: numărător de impulsuri „Tesla" (23), numărător de impulsuri cu integrator tip „Vacutronic" (22), potențiometru electronic, radiometru tip TISS.

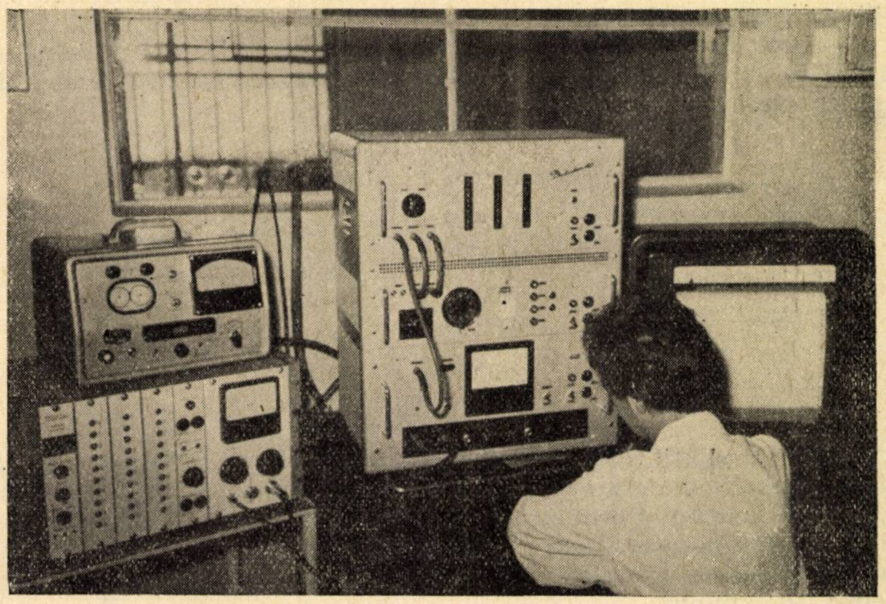


Fig. 3

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Un aspect important care s-a studiat în primul rînd, a fost cel al suprafeței radioactive. Sînt cunoscute diferite sisteme de marcare radioactivă și anume [3], [4], [5], [6], [8], [9].

a) introducerea izotopului radioactiv înainte de turnarea piesei;

b) iradierea integrală;

c) acoperirea electrolitică cu metal radioactiv;

d) introducerea mecanică a metalului radioactiv;

e) prelucrarea cu scîntei electrice, folosind un electrod iradiat prealabil;

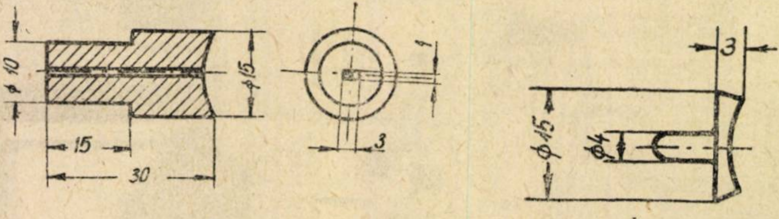
f) prin schimb de ioni în băi de ioni marcați.

S-a preferat la început iradierea în reactorul nuclear I.F.A. a unor mici piese metalice (știfturi), sau chiar a unei părți a sabotului, utilizînd integral suprafața de contact.

Studiindu-se aplicarea şi utilizarea unor mici ştifturi radioactive de formă paralelipipedică, aplicate în sabot pe cale mecanică (fig. 4 *a*), s-a ajuns la următoarele concluzii :

— Plasarea acestor plăcuţe după iradiere, în condiţii de interşanjabilitate este greoaie.

— Prelucrarea prealabilă a locaşului ştiftului este pretenţioasă, existînd posibilitatea ca ştiftul radioactiv să cedeze (să se înfunde) şi să nu preia sarcină.



a *b*

Fig. 4

— În cazul utilizării ştifturilor de fontă (izotopii Fe^{59}) s-a constatat că faţă de secţiunile eficace respective, fluxul de neutroni al reactorului I.F.A. (10^{12} n/cm^{2}s) şi o durată acceptabilă de expunere, obţinerea unor activităţi strict necesare, este dificilă. În general, din cauza unei activităţi prea mici a ştifturilor, eroarea de măsură este mare, faţă de fondul iniţial de circa 30 p/minut.

— În schimb, utilizarea unor ştifturi radioactive, de activitate mică, a făcut posibil să se poată urmări comod evoluţia măririi suprafeţei de contact între elementele cuplului de frecare.

În această privinţă a rezultat dificultatea, în perioada de început a uzurii — perioada de rodare — de a se obţine *contactul* dorit şi deci suprafaţa şi sarcina specifică respectivă.

În această perioadă există posibilitatea de a se depăşi sarcina specifică admisibilă, contactul dintre sabot şi ax fiind făcut pe o suprafaţă redusă; rezultatul este arderea uleiului sau uzura intensă a suprafeţei.

În cazul în care s-ar fi făcut experienţele cu ştifturi radioactive sau plăci de Co^{60} de activitate mare, cum se obişnuieşte în general, nu s-ar fi putut remarca aceste aspecte care din această cauză, în literatura de specialitate sînt trecute pe seama *uzurii de început.* Dificultăţile apărute în cazul utilizării micilor plăcuţe radioactive — pentru continuarea experimentărilor — au condus la concluzia utilizării unor porţiuni radioactive mai mari a sabotului, care să conţină de fapt, activată întreaga suprafaţă de contact (fig. 4 *b*).

Pentru început s-a efectuat o serie de măsurători pentru determinarea sensibilităţii şi preciziei cu care macheta experimentală prezentată, cu anexele respective, poate măsura uzura. În acelaşi timp, din analiza rezultatelor obţinute, au reieşit modificările care trebuie făcute pentru îmbunătăţirea performanţelor instalaţiei.

Într-o primă etapă parametrii caracteristici ai instalației au fost următorii :

— cuplu de frecare : axul de oțel netratat și sabot din fontă ;

— suprafața activă pentru sabotul din fontă de formă specială, activat integral (elementul radioactiv fiind Fe^{59}) ;

— activitatea totală : 0,6 mCu ;

— activitatea specifică 0,16 mCu/g ;

— volumul total de ulei : 1,40 l ;

— raportul între volumul măsurat și volumul total de ulei : $\frac{1}{35}$;

— elementul de măsură : contor tip GM scufundat (VAZ 111) cu o grosime a peretelui de 35—45 mg/cm^2.

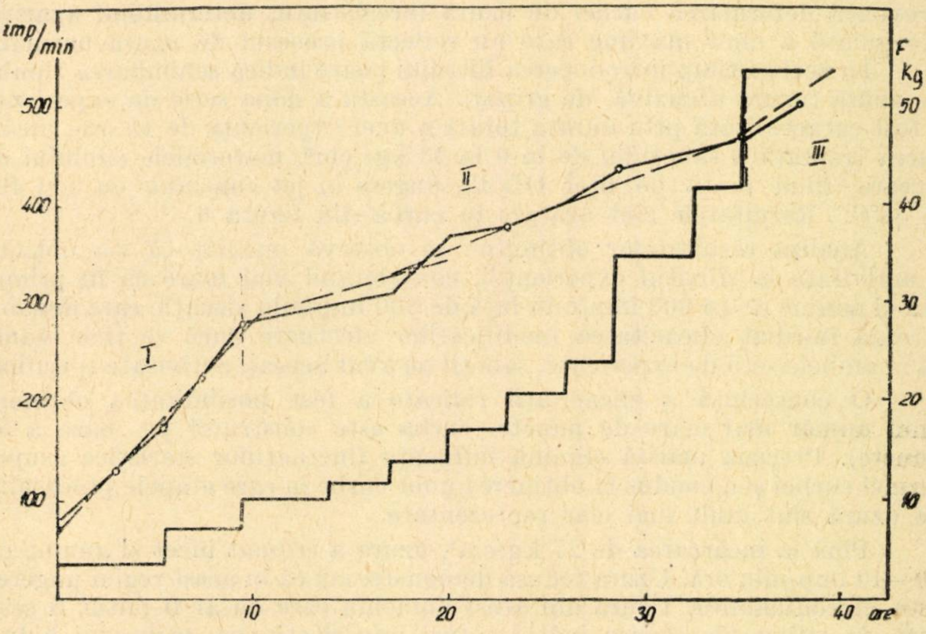


Fig. 5

Ungerea a fost asigurată de o pompă cu un debit de circa 0,5 l/min ;

— temperatura în volumul de ulei a fost menținută constantă prin termostatare la 33°C.

S-au făcut măsurători de cîte 10 minute, la intervale de timp astfel alese, încît diferența dintre vitezele de numărare inițiale și finale — să fie mai mare de 40 imp/min. În aceste condiții eroarea statistică asupra diferenței nu a depășit 15%.

Încărcarea sabotului a fost majorată treptat pînă la 50 kg/cm^2.

Rezultatele obținute sînt de forma celor prezentate în figura 5. Se remarcă trei zone de uzură (dintre care în II ungerea este hidrodinamică), totuși curba prezintă multe neregularități.

Aceste rezultate au indicat necesitatea măririi sensibilității și preciziei metodei.

În continuare observațiile din această etapă a experiențelor au condus la modificarea acelor parametri și părți a instalației care asigurau mărirea sensibilității metodei de măsură.

Astfel a fost redus volumul total de ulei (Vt) și concomitent a fost mărit volumul de ulei măsurat (Vm). Raportul Vm/Vt a ajuns 1/5 de la 1/35. Dispozitivul de măsură, de această dată, comportă două contoare cu peretele metalic tip CTC-6, care au o eficacitate ridicată (pentru radiațiile β și pentru radiațiile γ), legate în paralel (fig. 1-*14*).

De asemenea, a fost montat și un filtru cu contor în circuitul de ulei, (fig. 1—*13*). Filtrul în cazul de față, are ca scop reținerea particulelor mari, desprinse accidental din sabotul activ ; prezența acestor particule provoacă deformarea curbei de uzură înregistrată, determinînd apariția neregulată a unor maxime care nu reflectă procesul de uzură normală.

În același timp introducerea filtrului poate indica schimbarea tipului de uzură (uzura abrazivă, de gripaj). Această a doua serie de experiențe a fost caracterizată prin durata totală a unei experiențe de 45 ore, încărcarea treptată a sabotului de la 0 la 43 kg/ cm^2, materialele cuplului de frecare fiind fonta pe oțel OL 42, ungere în jet continuu cu ulei 405 la 33°C. Rezultatele sînt arătate în curba din figura 6.

Analiza rezultatelor obținute : se observă imediat că s-a obținut o activitate la sfîrșitul experienței, considerabil mai mare ca în primul caz și anume de 16 000 imp/min față de 500 imp/min situație care demonstrează imediat eficacitatea modificărilor efectuate dacă se ține seama că în ambele serii de experiențe, saboții au avut aceeași activitate specifică.

O consecință a eficacității ridicate a fost posibilitatea obținerii unui număr mai mare de puncte (curba este construită pe baza a 50 puncte). Precizia mărită elimină influența fluctuațiilor statistice asupra formei curbei și a condus la obținerea unor curbe în care etapele procesului de uzură sînt mult mai clar reprezentate.

Pînă la încărcarea de 27 kg/cm^2, uzura a crescut încet și anume cu 20—40 imp/min.oră. Uzura redusă demonstrează că în acest regim ungerea este hidrodinamică. Uzura din acest domeniu care nu ar fi putut fi sesizată cu mijloacele clasice, indică totuși imperfecțiunea regimului hidrodinamic în sistemul experimentat (vibrații, particule abrazive în lubrifiant etc.). Mărind sarcina în continuare, se observă apariția pe curba de uzură a unor *trepte* corespunzătoare rodajului parțial pentru formarea condițiilor geometrice necesare regimului hidrodinamic. În porțiunea de rodaj, uzura este de 180—200 imp/min. oră pentru ca apoi să revină la o creștere mică (circa 100 imp/min. oră), deci o valoare de palier. Pe măsura creșterii sarcinii cresc și salturile de uzură. Astfel ultima treaptă a condus la o uzură de rodaj de 4 500 imp/min. oră.

La o încărcare de 43 kg/cm^2 uzura crește brusc, cu o viteză de numărare de 60 000 imp/min. oră. În această situație curba nu se mai aplatisează, sistemul trecînd în regimul uzurii intensive. Examinîndu-se suprafața sabotului s-a constatat prezența urmelor uzurii destructive.

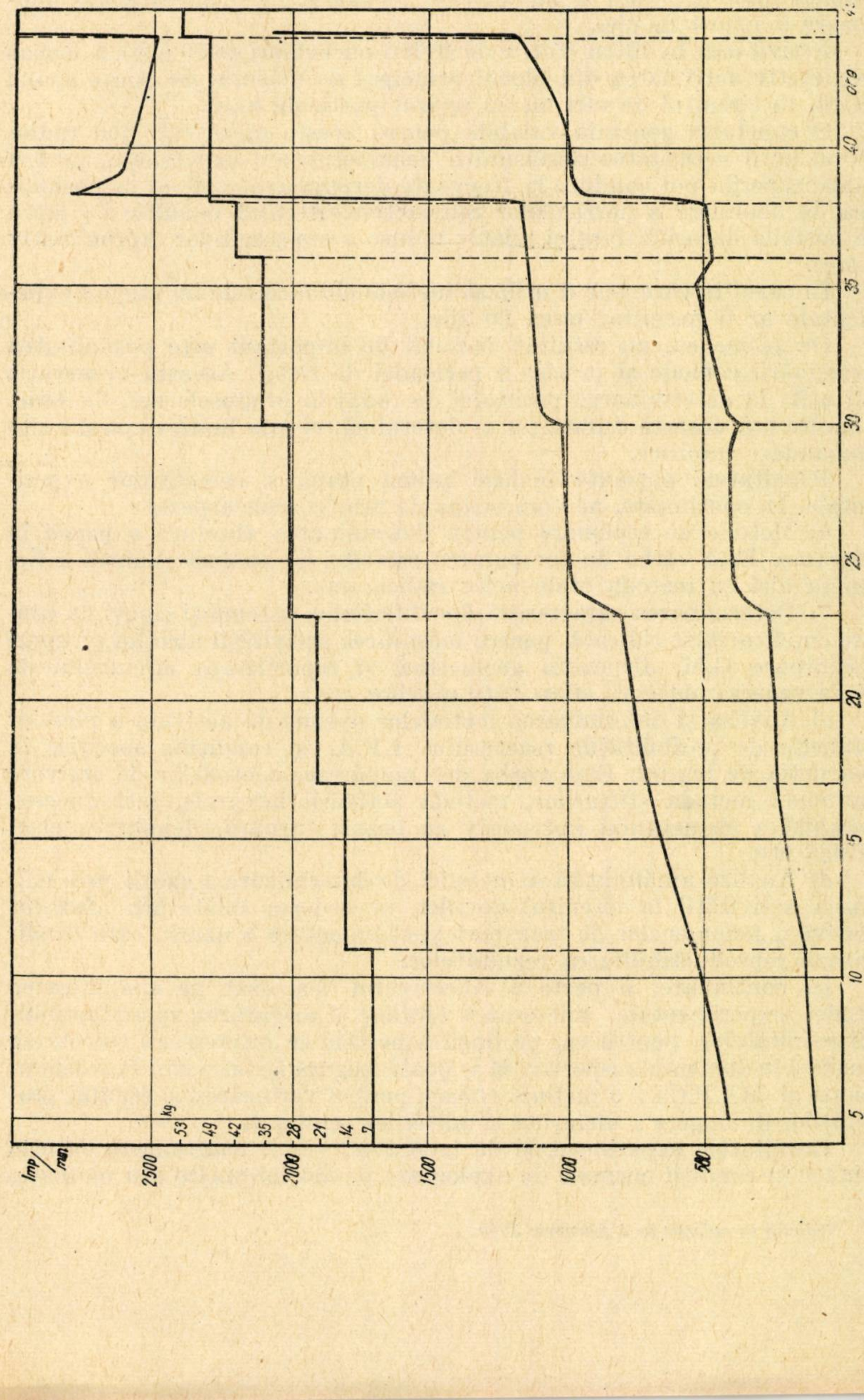

Imp/min
2500
2000
1500
1000
500
kg
53
49
42
35
28
21
14
7
5
10
15
20
25
30
35
40
ora
45

Fig. 6

Porţiunile descentente, care nu ar trebui să apară, indică fie existenţa unor depuneri a particulelor de uzură, fie o insuficientă omogenizare a uzurii în ulei.

Activitatea în filtru (filtru de nylon cu ochiuri de 50 $\mu\varnothing$), a urmat aproximativ activitatea din blocul principal de măsură. Se poate spune deci că, în circuitul de ulei nu au apărut particule mari.

O concluzie generală valabilă pentru aceste experienţe (cu radioizotopi) ar fi necesitatea desfăşurării neîntrerupte a experienţei, pentru că întreruperile pot conduce la frecvente deranjamente cît şi la posibilitatea de depunere a particulelor radioactive. Această condiţie de lucru este posibilă datorită duratei relativ reduse a experienţelor (aproximativ 45 ore).

În cazul în care s-ar fi utilizat metode chimice cele 50 puncte experimentale ar fi necesitat circa 20 zile.

De asemenea, un rezultat deosebit de important este posibilitatea determinării comode şi precise a perioadei de rodaj. Această observaţie ar fi utilă la determinarea perioadei de rodaj la produsele noi, de serie. De multe ori, această durată nu se determină, ci este luată după diferite recomandări empirice.

Rezultatele obţinute încheie prima etapă a cercetărilor experimentale. În continuare, ne vom ocupa de următoarele aspecte :

a) Metode de etalonare pentru determinarea absolută a uzurii în miligrame. Este vorba de compararea metodei de analiză chimică a fierului în ulei cu metoda etaloanelor radioactive.

b) Determinarea caracteristicilor diferitelor sisteme şi tipuri de contoare cu eficacitate ridicată, pentru măsurarea activităţii uleiului (grupuri de contoare G.M, dispoziţia geometrică şi repartizarea circuitului de ulei, în vederea obţinerii eficacităţii maxime etc.).

c) Analiza şi determinarea metodelor optime de activare a pieselor în funcţie de posibilităţile reactorului I.F.A. şi condiţiile specifice în construcţia de maşini. Este vorba de compararea metodelor de activare şi anume : metoda ştifturilor, metoda activării integrale, introducerea prealabilă a elementului radioactiv cu ocazia turnării, depunerea electrolitică etc.

d) Analiza amănunţită a metodei de determinare a uzurii prin măsurarea activităţii în circuitul de ulei, în vederea înlăturării efectelor negative a fenomenelor de transport şi sedimentare a uzurii, care condiţionează reproductibilitatea rezultatelor.

În continuare, o parte a colectivului s-a axat pe simplificarea metodei experimentale, micşorarea erorilor şi asigurarea reproductibilităţii rezultatelor, pentru ca, pe lîngă aspectele ce interesează cercetarea ştiinţifică în domeniul respectiv, să se poată asigura Institutului Petrochim-Ploieşti al M.I.P.Ch., o metodă eficace pentru verificarea şi studiul proprietăţilor de ungere a uleiurilor şi aditivilor romîneşti.

Rezultatele experimentale de laborator, vor fi confruntate cu cele obţinute în condiţii normale de exploatare pe maşini-unelte sau motoare.

Primită la redacţie la 2 februarie 1960

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗНОСА ПОДШИПНИКОВ ПРИ ПОМОЩИ РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ

РЕЗЮМЕ

Излагается экспериментальный радиоактивный метод исследования износа. Авторы пользовались изотопом Fe^{59}, причем активация которого получается облучением в ядерном реакторе малых чугунных вставок или колодок больших размеров. Описывается экспериментальный макет, а также кривые, полученные в двух этапах чувствительности. В первом случае применялись малые радиоактивные поверхности, причем в системе циркуляции смазки находится один счетчик типа VAZ-111. Во втором случае (кривая на рис. 6) была активирована вся поверхность колодки, а в системе циркуляции смазки находятся два счетчика Гейгер-Мюллера типа СТС-6, связанных параллельно, а также счетчик Гейгер-Мюллера с фильтром.

Были осуществлены нагрузки до 50 кг/см^2 для трущейся пары из чугуна на сталь OL 42 с применением румынского масла 405; температура при опытах равна 33°С.

Исследования продолжаются.

A METHOD FOR STUDYING THE WEAR OF BEARINGS WITH RADIOACTIVE ISOTOPES

ABSTRACT

This paper presents an experimental radioactive method for studying the wear of bearings. The radioactive element is Fe^{59}, the activation being obtained by irradiating small cast iron plates or part of a bearing in the nuclear reactor. The experimental equipment and the curves obtained for the two phases are described. In the first case, small radioactive surfaces have been used, a single VAZ-111 counter being placed in the oil circuit. In the second case (see fig. 6) the whole experimented surface has been activated, two CTC-6 type GM counters being placed in parallel in the oil circuit, as well as a filter GM counter.

Other data were: loads up to 50 kg/cm^2; metals used, cast iron and OL 42 steel; Rumanian 405 oil; temperature 33°C.

The investigations are in progress.

BIBLIOGRAFIE

1. BOWDEN F. P., TABOR D., *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, 1954, 10–22 şi 58–63.
2. CAZAUD R., *Le frottement et l'usure des métaux*. Ed. Dunod, Paris, 1955, 2–16.

3. Дьяченко П. Е., *Применение радиоактивных изотопов*. В. техники. Москва, Машгиз, 1958.
4. Kulikov I. S., Popov I. A., *Folosirea izotopilor radioactivi în metalurgie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
5. Pavelescu D., *Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, VII, *1*, 275–278 (1956).
6. Raiski S. M., Smirnov V. F., *Bazele fizice ale metodei indicatorilor radioactivi*, Ed. I.S.R.S., Bucureşti, 1957.
7. Tipei N., *Hidroaerodinamica lubrificaţiei*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
8. * * * *Развитие теории трения и изнашивания*, Труды совещания по вопросам теории трения и изнашивания (15—17 нов. 1954). Москва, 1957.
9. * * * *Машиностроение* и *Приборостроение*. Труды всесоюзной научно-технической конференции по применению радиоактивных и стабильных изотопов и излучений в народном хозяйстве и науке (4—12 апрель 1957). Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1958.

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

ASUPRA DETERMINĂRII PROFILULUI CAMELOR, LA MECANISMELE CU TACHET CU DISC PLAN

DE

D. TUTUNARU și T. DEMIAN[1]

1. Profilul camei se obține ca înfășurătoarea tangentelor comune duse în punctele de contact dintre camă și tachet. Cînd terminația tachetului are forma unui disc plan, tangenta comună este însăși dreapta care reprezintă acest disc într-un plan care trece prin axa tachetului și este perpendicular pe axa camei.

Ținînd seamă de aceste considerații, se presupune un mecanism cu camă cu tachet cu disc plan (fig. 1) la care curba α reprezintă profilul camei iar punctul A centrul de rotație al ei. Dacă se duc prin punctul A perpendiculare pe tangentele comune T_1, $T_2, \ldots, T_6$, se obțin punctele 1, 2, ..., 6 (picioarele perpendicularelor) care unite între ele printr-o linie continuă dau curba β care reprezintă *podara profilului* α *și totodată legea de variație a deplasării tachetului.*

Din cele de mai sus se desprinde concluzia că determinarea profilului unei came la mecanismele cu tachet cu disc plan se poate face stabilindu-se o curbă a cărei podară se cunoaște (fig. 2).

Pentru a stabili profilul α al unei came, se consideră un punct M_0 (fig. 3) de pe podara β luată în raport cu originea A a unui sistem de axe carteziene și un punct M de pe profilul α al camei.

Dreapta MM_0 are ecuația

$$y - y_0 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}(x - x_0) = -(x - x_0) \operatorname{ctg} \varphi,$$

unde $y_0 = r \sin \varphi$ și $x_0 = r \cos \varphi$, care înlocuite mai sus dau

$$y = r \sin \varphi = -(x - r \cos \varphi) \operatorname{ctg} \varphi$$

---

[1] Institutul politehnic, București.

și cum $r = r(\varphi)$, *ecuația familiei de drepte* MM_0, are forma:

$$y \sin \varphi + x \cos \varphi - r(\varphi) = 0. \tag{1}$$

Derivînd această ecuație în raport cu φ, rezultă

$$y \cos \varphi - x \sin \varphi - r'(\varphi) = 0. \tag{2}$$

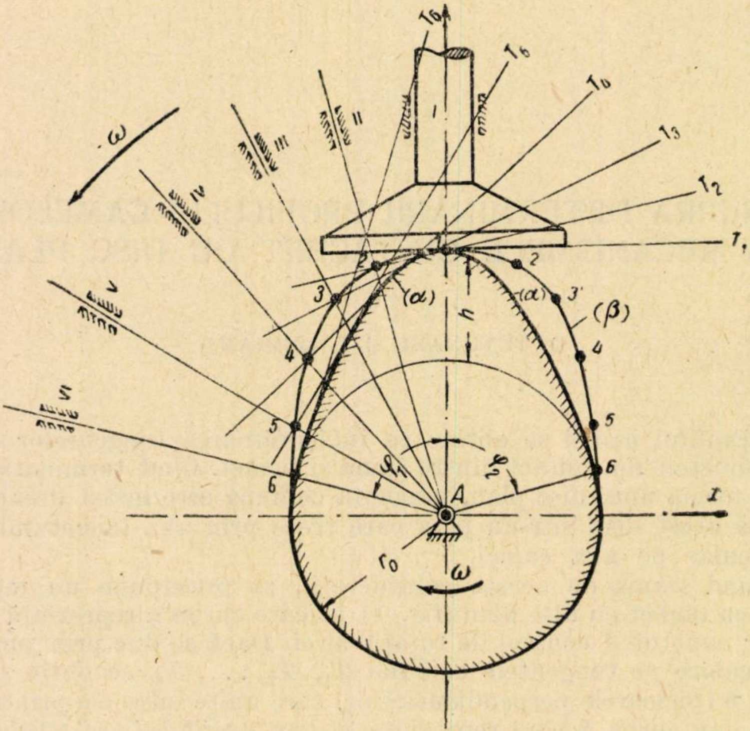

ω
I
II
III
IV
V
VI
T1
T2
T3
T4
T5
T6
1
2
3
4
5
6
2
3'
4
5
6
(α)
(α)
(β)
h
A
I
r0
ω
φ1
φ2

Fig. 1

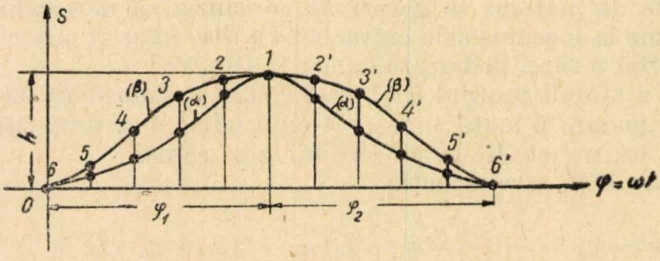


Fig. 2

Rezolvînd ecuațiile (1) și (2) în raport cu x și y, se determină *ecuațiile parametrice ale înfășurătoarei*

$$y = r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi,$$
$$x = r(\varphi) \cos \varphi - r'(\varphi) \sin \varphi. \tag{3}$$

Aceste ecuații reprezintă tocmai ecuațiile profilului (α) al camei cu tachet cu disc plan, parametrul fiind unghiul de rotație φ al camei. Pe baza acestor ecuații se poate trasa profilul (α) al camei pe cale analitică. În tabela 1, se dau ecuațiile profilelor (α) la camele cele mai des întîlnite în practică, stabilite pe baza formulelor (3).

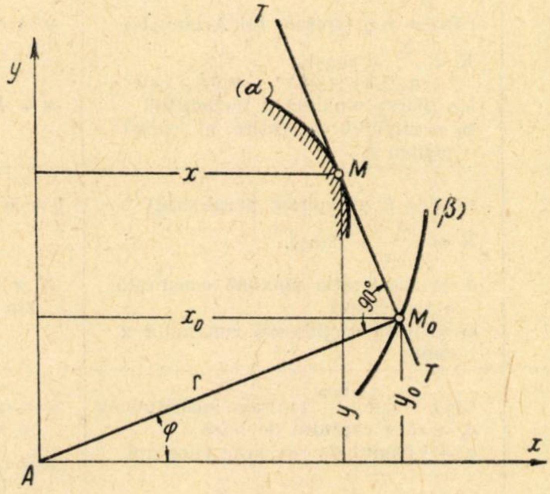


Fig. 3

2. Cunoscîndu-se ecuația profilului (α), la camele cu tachet cu disc plan, *raza de curbură* se poate determina aplicînd formulele cunoscute din geometria analitică.

Dacă viteza unghiulară ω a camei este constantă, raza de curbură se determină, mai simplu folosind calea arătată mai jos.

Din figura 4 se observă că pentru raza de curbură se poate scrie relația

$$\rho = r_0 + s + y. \tag{4}$$

Viteza instantanee a centrului de curbură C este $v = r\omega$, iar cele două componente pe axele de coordonate au valorile

$$v_1 = x\omega = \frac{ds}{dt},$$

$$v_2 = y\omega = \frac{dx}{dt}, \tag{5}$$

de unde se vede că v_1 este chiar viteza tachetului, iar v_2 este viteza centrului de curbură C în direcția tangentei $T - T$.

Tabela 1

Legea de variație a deplasării tachetului (podara)	Ecuația legii de variație a deplasării tachetului (podarei)	Ecuațiile profilului (α)
Cardioidică	$r(\varphi) = K\varphi$ (spirala lui Arhimede) $K = \frac{h}{\varphi_1}$ = const. h = cursa maximă a tachetului φ_1 = unghiul de rotire al camei pentru h	$y = K(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$ $x = K(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)$
Parabolică	$r(\varphi) = K\varphi^2$ (spirala parabolică) $K = \frac{a}{2\omega^2}$ = const. a = accelerația maximă constantă a tachetului ω = viteza unghiulară constantă a camei	$y = K\varphi(2\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$ $X = K\varphi(\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi)$
Logaritmică	$r(\varphi) = r_0 e^{\varphi \operatorname{tg} \varphi}$ (spirala logaritmică) r_0 = raza careului de bază α = unghiul de presiune constant	$y = r_0 e^{\varphi \operatorname{tg} \alpha}(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi + \sin\varphi)$ $x = r_0 e^{\varphi \operatorname{tg} \alpha}(\cos\varphi - \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi)$
Cosinusoidală	$r(\varphi) = \frac{h}{2}(1 - \cos\varphi)$ h = cursa maximă a tachetului	$y = \frac{h}{2}(\sin\varphi + 1)$ $x = \frac{h}{2}(\cos\varphi - 1)$
Sinusoidală	$r(\varphi) = h(\varphi - \sin\varphi)$ h = cursa maximă a tachetului	$y = h(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - 1)$ $x = h(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)$

Cu $d\varphi = \omega\, dt$, ecuațiile (5), iau forma

$$v_1 = x\,\omega = \omega\frac{ds}{d\varphi},$$

$$v_2 = y\omega = \omega\frac{dx}{d\varphi}. \tag{5'}$$

Ținînd seama de ecuațiile (5) și (5') accelerația tachetului $a = \frac{dv_1}{dt}$ este dată de ecuația

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \omega = y\omega^2. \tag{6}$$

Dacă valoarea accelerației este pozitivă, centrul de curbură C se află sub axa $A - x$ ca în figura 4, iar în cazul că accelerația este negativă centrul de curbură C este deasupra axei $A - x$.

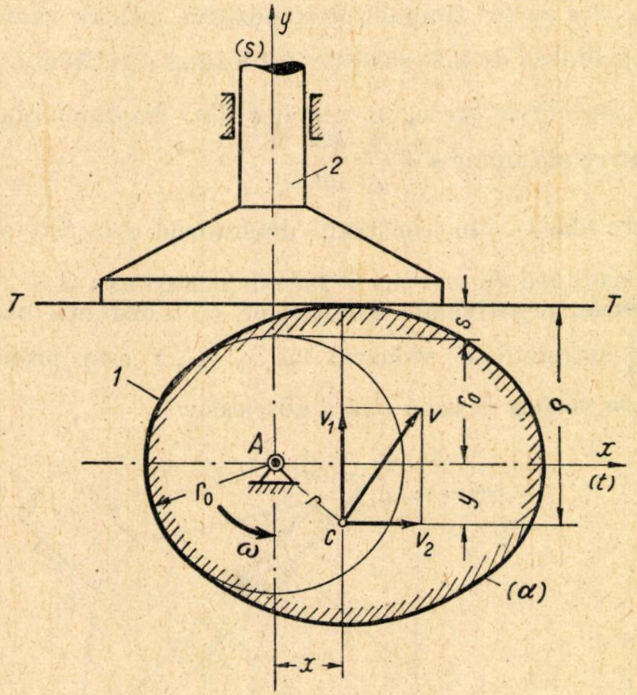


Fig. 4

Introducînd valoarea lui y din ultima ecuație, în relația (4), se obține pentru raza de curbură relația

$$\rho = r_0 + s + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{7}$$

Ținînd seama că la mecanismele cu tachet cu disc plan profilul (α) al camei nu poate avea porțiuni concave-utile ci numai porțiuni convexe, se poate scrie

$$\rho > 0$$

sau

$$r_0 + s + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2} > 0, \tag{8}$$

inegalitatea care permite determinarea *valorii minime a razei cercului de bază* r_0, dimensiune fundamentală în proiectarea mecanismelor cu camă.

Inegalitatea (8) se poate scrie sub forma

$$r_0 > -(s + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{9}$$

şi deoarece r_0 şi s au tot timpul valori pozitive, pentru valoarea pozitivă a lui $\frac{d^2s}{dt}$, inegalitatea de mai sus este totdeauna satisfăcută.

Pentru stabilirea lui r_0 se vor lua din diagrame numai valorile maxime negative ale sumei $s + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2}$.

Ca atare dacă s-au construit diagramele $s = f(t)$ şi $\frac{d^2s}{dt^2} = f_1(t)$, rezolvarea inegalităţii de mai sus se face deplasînd axa $A - t$ a absciselor în sensul valorilor negative ale ordonatelor, cu o distanţă mai mare decît $-\left(s + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ obţinîndu-se valoarea lui r_0, care este proporţională cu distanţa dintre vechea şi noua axă a absciselor.

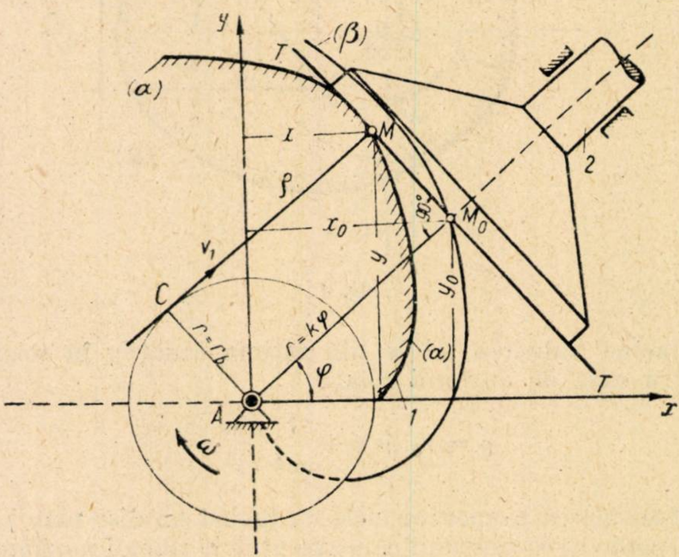


Fig. 5

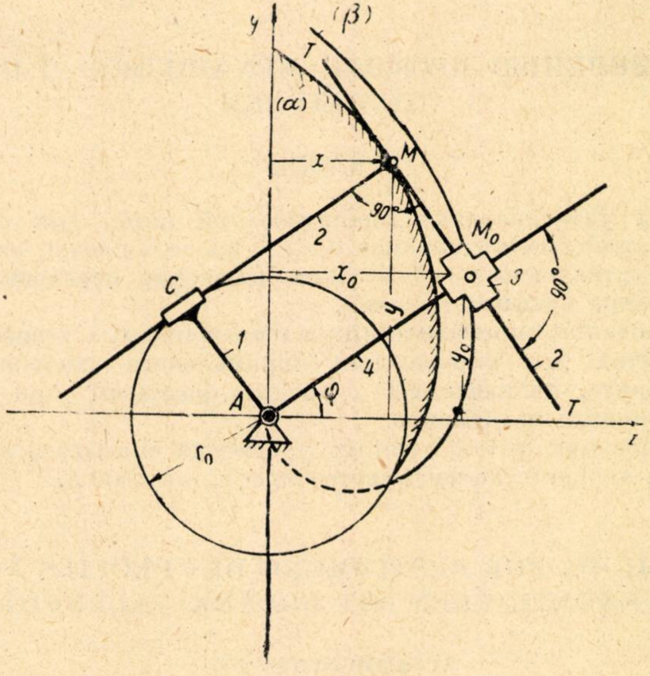
3. Întrucît curba β — legea de variaţie a deplasării tachetului — este podara profilului α al camei, se poate construi un mecanism de tip Artobolevski pentru reproducerea unei curbe a cărei podară se cunoaşte.

Dacă se consideră cazul profilului cardioidic ale cărui ecuaţii sînt date în tabela 1, mecanismul se va construi după cum urmează.

Întrucît în acest caz, viteza tachetului este constantă (v_1 = const.) şi deoarece viteza unghiulară a camei s-a considerat constantă (ω = const.), legea de variație a deplasării tachetului este o funcție liniară în raport cu unghiul de rotație al camei.

În acest condiții (fig. 5), viteza instantanee v_1 a centrului de curbură C fiind și viteza tachetului, se poate scrie

$$v_1 = r\,\omega = \text{const.} \tag{10}$$



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Fig. 6

Această egalitate este satisfăcută pentru $r = r_b = \text{const.}$ întrucît $\omega = \text{const.}$, de unde rezultă că normalele la profilul camei trebuie să fie tangente la un cerc de bază de rază r_b, condiție îndeplinită de profilul unei came generat de evolventa de cerc, iar cercul de bază în acest caz este evoluta evolventei.

Ținînd seama că cele două curbe (α) și (β) din figura 5 sînt identice cu cele din figura 3 și cum podara (β) este spirala lui Arhimede ($r = r(\varphi) = k(\varphi)$ și $r'(\varphi) = K$), ecuațiile evolventei (α) rezultă prin aplicarea formulelor (3), deci

$$\begin{aligned} y &= K(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \\ x &= K(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

Mecanismul care reproduce profilul (α) al camei (evolventa), cunoscîndu-se curba β de variație a deplasării tachetului care este podara evolventei luată față de centrul de rotație A al camei, (spirala lui Arhimede) este reprezentat în figura 6.

Mecanismul este format din patru elemente şi are gradul de mobilitate egal cu 2. Deplasînd punctul M_0 pe spirala lui Arhimede (β), punctul M descrie evolventa (α) care este profilul camei.

Cum $AM_0 = r = K\varphi$ şi $r'(\varphi) = K$, se vede că punctul M satisface imediat ecuaţiile (11).

Primită la redacţie la 12 mai 1960

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОФИЛЯ МЕХАНИЗМОВ С ПЛОСКИМ ТОЛКАТЕЛЕМ

РЕЗЮМЕ

Авторы устанавливают аналитический метод для определения профиля кулачковых механизмов с плоским толкателем, на основании кривой, представляющей собой закон изменения перемещения толкателя как подера профиля кулачка.

На основании кинематических и геометрических условий устанавливается метод для определения минимального значения радиуса основного круга, являющегося основным размером при проектировании кулачковых механизмов.

На основании установленных уравнений описывается механизм, при помощи которого начертывается профиль кулачка.

METHODE ZUR BESTIMMUNG DES PROFILS VON KURVENGETRIEBEN MIT EBENEM TALERSTÖSSEL

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser bringen eine analytische Methode zur Bestimmung des Profils von Kurvengetrieben mit ebenem Talerstössel auf Grund der Kurve, die das Variationsgesetz der Stösselbewegung als Fußkurve des Kurvenprofils darstellt.

Aus den kinematischen und geometrischen Bedingungen wird eine Methode zur Bestimmung des Mindestwertes des Grundkreisradius, einer der wichtigsten Größen beim Entwurf von Kurvengetrieben, ausgearbeitet.

Auf Grund der aufgestellten Gleichungen wird ein Getriebe beschrieben, mit Hilfe dessen das Kurvenscheibenprofil gezogen werden kann.

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., *Теория механизмов для образования и ее применение к циклическим кривым.* Труды Института машиноведения, **XVII**, выпуск 65, Москва, 1957.
2. Tutunaru D., *Mecanisme cu came.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
3. Решетов Л. Н., *Кулачковые механизмы.* Машгиз, 1948.

STUDII

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

ASUPRA MIŞCĂRII RACHETEI ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE CENTRALE

DE

M. M. NIŢĂ[1]

1. INTRODUCERE. IPOTEZE

Una din problemele importante ale cosmonauticii o constituie teoria mişcării rachetei sub acţiunea atracţiei corpurilor cereşti.

În cele ce urmează ne propunem să studiem mişcarea unei rachete sub acţiunea atracţiei unui singur corp ceresc C de masă M.

În tratarea problemei, introducem următoarele ipoteze :

— Forţa de atracţie exercitată asupra rachetei de către corpul ceresc C, este dată de

$$F = f\frac{Mm}{r^2},$$

unde

f — este constanta atracţiei universale ;
m — este masa rachetei ;
M — este masa corpului C ;
r — este distanţa rachetei faţă de centrul O al corpului ceresc C.

— Viteza de ieşire a gazelor din ajutajul rachetei, $\bar{v}_r$ este constantă ca mărime şi invariabilă ca direcţie. Se presupune deci că racheta are o orientare invariabilă în spaţiu.

— Masa rachetei variază după legea

$$m = m_0 e^{-\alpha t}$$

ceea ce înseamnă că acceleraţia corespunzătoare forţei reactive

$$a_r = \alpha v_r$$

---

[1] Academia Militară Generală.

este constantă ca mărime; avînd în vedere ipoteza anterioară rezultă că accelerația reactivă este invariabilă ca direcție.

— Sistemul de referință legat invariabil de corpul C este un sistem inerțial.

P. Blanc, tratează în [1] mișcarea rachetei, orientată invariabil în spațiu, într-un cîmp gravitațional paralel și uniform; acest studiu constituie o tratare în primă aproximație a problemei rezolvată de noi în prezenta lucrare.

2. ECUAŢIILE DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII

Considerăm deci, mișcarea unei rachete într-un cîmp central de forțe, sub acțiunea forței reactive Φ, orientată invariabil în spațiu.

Ecuația de mișcare a rachetei este deci

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r} + \bar{a}_r \tag{1}$$

unde am notat

$$K = fM.$$

Vom considera în cele ce urmează un sistem de coordonate $Oxyz$, cu originea în centrul O, fiind astfel orientat încît direcția axei Ox să coincidă cu direcția axului rachetei (fig. 1).

Proiectînd ecuația (1) pe axele sistemului de coordonate $Oxyz$, se obține

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{K}{r^3}x + a_r, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{K}{r^3}y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{K}{r^3}z. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

În scopul de a integra ecuația diferențială a mișcării vom folosi un sistem de coordonate curbilinii format din următoarele suprafețe (fig. 2):

— un paraboloid de revoluție în jurul axei Ox, avînd focarul în originea O, a cărui ecuație este

$$y^2 + z^2 = 2q_1x + q_1^2; \tag{3}$$

— paraboloidul de revoluție

$$y^2 + z^2 = -2\,q_2\,x + q_2^2 \tag{4}$$

homofocal cu primul paraboloid;

— un plan care conține axa Ox, a cărui ecuație este

$$z = y \, tg \, \nu. \tag{5}$$

Vom considera ca coordonate curbilinii ale rachetei parametrii q_1, q_2 şi ν.

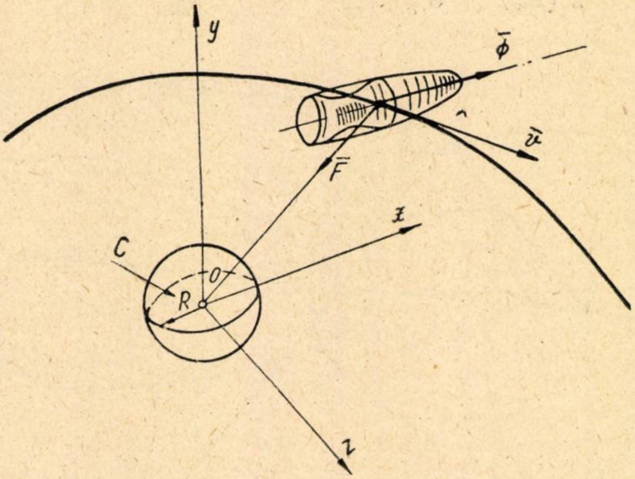


Fig. 1

Astfel, $q_1 =$ const. reprezintă un paraboloid cu focarul în O al cărui parametru este q_1; $q_2 =$ const. reprezintă un paraboloid al cărui parametru este q_2, iar $\nu =$ const. reprezintă un plan care conține axa Ox. Pentru $q_1 = 0$, paraboloidul (3) degenerează în semiaxa pozitivă Ox; pentru $q_2 = 0$, paraboloidul (4) degenerează în semiaxa negativă Ox.

Parametrii q_1 și q_2 trebuie să satisfacă condițiile

$$\begin{cases} q_1 \geqslant 0, \\ q_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

Ținînd seama de (3), (4) și (5), relațiile între coordonatele x, y, z și coordonatele q_1, q_2, ν sînt

$$\begin{cases} x = \dfrac{q_2 - q_1}{2}, \\ y^2 = q_1 q_2 \cos^2 \nu, \\ z^2 = q_1 q_2 \sin^2 \nu. \end{cases} \tag{7}$$

Elementul de arc în noul sistem coordonate este deci

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz = \frac{1}{4} \left[\frac{q_1 + q_2}{q_1} dq_1^2 + \frac{q_1 + q_2}{q_2} dq_2^2 + 4 q_1 q_2 \, d\nu^2 \quad (8) \right]$$

de unde se observă că sistemul de coordonate curbilinii q_1, q_2, ν este un sistem ortogonal.

Avînd în vedere relaţia (8), energia cinetică în sistemul de coordonate q_1, q_2, ν este

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{8}\left[\frac{q_1+q_2}{q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{q_1+q_2}{q_2}\dot{q}_2^2 + 4q_1 q_2 \dot{\nu}^2\right]. \tag{9}$$

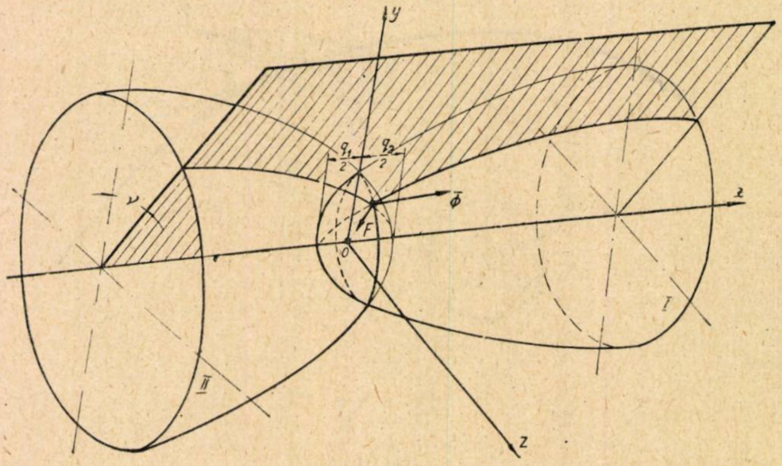


Fig. 2

Funcţia de forţă în sistemul de coordonate $Oxyz$, este

$$U = \frac{K}{r} + a_r\, x.$$

Ţinînd seama de prima din relaţiile (7) se obţine pentru funcţia de forţă U, expresia

$$U = \frac{1}{q_1+q_2}\left[2\,K + \frac{q_2^2 - q_1^2}{2}\,a_r\right]. \tag{10}$$

Introducînd variabilele conjugate,

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1};\quad p_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2};\quad p_3 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\nu}},$$

se obţine funcţia lui Hamilton

$$H = E - U = \frac{4q_1}{q_1+q_2}\,p_1^2 + \frac{4q_2}{q_1+q_2}\,p_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q_1 q_2}\,p_3^2 - \frac{1}{q_1+q_2}\left[2K + \frac{q_2^2 - q_1^2}{2}\,a_r\right]. \tag{11}$$

Ecuaţiile lui Hamilton în formă canonică sînt

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \dot{\nu} = \dfrac{\partial H}{\partial p_3}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}; \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}; \quad \dfrac{dp_3}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \nu}. \end{cases} \tag{12}$$

Avînd în vedere relaţia (12), ultima ecuaţie din sistemul (12) devine

$$\frac{dp_3}{dt} = 0,$$

adică

$$q_1 q_2 \dot{\nu} = \text{const.} \tag{13}$$

Ţinînd seama de relaţiile (7), se obţine că

$$(y^2 + z^2)\dot{\nu} = \text{const.}$$

sau

$$d^2 \dot{\nu} = \text{const.} \tag{14}$$

unde $d = \sqrt{y^2 + z^2}$ este distanţa rachetei faţă de axa ox.

Din relaţia (14) rezultă următoarea teoremă importantă:

În cazul mişcării unei rachete într-un cîmp de forţe centrale, axul rachetei fiind orientat invariabil în spaţiu, mişcarea proiecţiei rachetei pe un plan normal pe axul rachetei, respectă legea ariilor.

Ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi, este

$$\frac{8q_1}{q_1 + q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{8q_2}{q_1 + q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q_1 q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^2 - 2(U + h) = 0. \tag{15}$$

Pentru integrarea acestei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, vom aplica o teoremă a lui P. Stäckel [2].

Pentru ca ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 - 2(U + h) = 0,$$

să se poată integra prin separarea variabilelor, este necesar să existe un sistem de n^2 funcţii

$$\varphi_{ij}(q_i); \; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

şi un sistem de n funcţii

$$\psi_i(q_i); \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

astfel ca

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\Delta \varphi_{i1}}$$

şi

$$U = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}},$$

unde Δ este determinantul funcţiilor φ_{ij}

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1), & \varphi_{21}(q_2), & \ldots, & \varphi_{n1}(q_n) \\ \varphi_{12}(q_1), & \varphi_{22}(q_2), & \ldots, & \varphi_{n2}(q_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1n}(q_1), & \varphi_{2n}(q_2), & \ldots & \varphi_{nn}(q_n) \end{vmatrix}$$

În acest caz, funcţia V este dată de

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2\, \psi_i(q_i) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\alpha_\lambda\, \varphi_{i\lambda}(q_i)}\, dq_i,$$

unde α_λ sînt n constante de integrare; constanta α_1 este chiar constanta energiei $- h -$ din ecuaţia (15).

Soluţiile sistemului canonic (12) sînt deci

$$\sqrt{2}\,(t - t_0) = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\varphi_{i1}(q_i)\, dq_i}{\sqrt{R_i(q_i)}},$$

$$\sqrt{2}\,\beta_s = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\varphi_{is}(q_i)\, dq_i}{\sqrt{R_i(q_i)}}, \quad (s = 2, 3, \ldots, n),$$

unde

$$R_i(q_i) = \psi_i(q_i) + \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda\, \varphi_{i\lambda}(q_i),$$

constantele β_s sînt conjugatele constantelor α_λ.

Ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale (15) obţinută de noi, satisface condiţiile impuse de teorema lui Stäckel. Astfel, întrucît mişcarea studiată are 3 grade de libertate, se obţine un sistem de 9 funcţii

$$\varphi_{11} = \frac{1}{8}, \quad \varphi_{21} = \frac{1}{8}, \quad \varphi_{31} = 0,$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{16\, q_1}, \quad \varphi_{22} = -\frac{1}{16\, q_2}, \quad \varphi_{32} = 0,$$

$$\varphi_{13} = -\frac{1}{16\, q_1^2}, \quad \varphi_{23} = -\frac{1}{16\, q_2^2}, \quad \varphi_{33} = \frac{1}{2},$$

şi un sistem de 3 funcţii

$$\psi_1(q_1) = \frac{1}{16\, q_1^2}\left[-\, q_1^3\, a_r + (2\, K + \alpha_2)\, q_1 - \alpha_3\right],$$

$$\psi_2(q_2) = \frac{1}{16\, q_2^2}\left[q_2^3\, a_r + (2K - \alpha_2)\, q_2 - \alpha_3\right],$$

$$\psi_3(\nu) = \frac{\alpha_3}{2}\cdot$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii canonice sînt deci

$$\sqrt{2}(t-t_0) = \int\frac{q_1\, dq_1}{2\sqrt{P_1(q_1)}} + \int\frac{q^2\, dq_2}{2\sqrt{P_2(q_2)}}, \tag{16}$$

$$\sqrt{2}\,\beta_2 = \int\frac{dq_1}{4\sqrt{P_1(q_1)}} - \int\frac{dq_2}{4\sqrt{P_2(q_2)}}, \tag{17}$$

$$\sqrt{2}\,\beta_3 = \int\frac{dq_1}{q_1\sqrt{P_1(q_1)}} + \int\frac{dq_2}{q_2\sqrt{P_2(q_2)}} - 2\int\frac{d\nu}{\sqrt{\alpha_3}}, \tag{18}$$

unde am notat

$$P_1(q_1) = q_1\left[-a_r q_1^2 + 2\,\alpha_1 q_1 + 2(K + \alpha_2)\right] - 2\,\alpha_3. \tag{19}$$

$$P_2(q_2) = q_2\left[a_r q_2^2 + 2\alpha_1 q_2^2 + 2(K - \alpha_2)\right] - 2\alpha_3. \tag{20}$$

Ecuaţiile (17) şi (18) reprezintă ecuaţia traiectoriei în sistemul de coordonate q_1, q_2, ν iar ecuaţia (16) este legea mişcării rachetei pe traiectorie.

Valorile constantelor α_1, α_2 şi α_3, se obţin cu uşurinţă în funcţie de elementele iniţiale ale mişcării, q_1^0, q_2^0, ν^0, $\dot{q}_1^0$, $\dot{q}_2^0$ şi $\dot{\nu}^0$.

3. STUDIUL MIŞCĂRII

Integrarea ecuaţiilor (16), (17) şi (18) nu prezintă nici o dificultate, astfel că dacă se cunosc constantele de integrare α_1, α_2, α_3, se poate obţine ecuaţia traiectoriei şi legea mişcării rachetei pe traiectorie, care ţinînd seama de forma funcţiilor $P_1(q_1)$ şi $P_2(q_2)$, se exprimă cu ajutorul unor integrale eliptice.

O deosebită importanţă o prezintă în cazul de faţă studiul calitativ al mişcării rachetei cu ajutorul căruia se pot delimita şi ordona toate clasele de traiectorii pe care se deplasează racheta.

Din ecuațiile (16), (17) și (18) se obțin imediat

$$\frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{dq_1}{dt} = \sqrt{P_1(q_1)}, \tag{21}$$

$$\frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{dq_2}{dt} = \sqrt{P_2(q_2)}, \tag{22}$$

$$q_1 q_2 \cdot \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{2}\,\alpha_3, \tag{23}$$

unde $P_1(q_1)$ și $P_2(q_2)$ sînt date de (19) și (20).

Se observă că ecauția (23) este ecuația (14) găsită anterior.

În [2], se demonstrează că dacă variabila q este definită de ecuația diferențială

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{F(q)}, \tag{24}$$

atunci, variabila q nu poate depăși pentru valori finite ale timpului, valoarea $q = a$ pentru care

$$F(q) = 0. \tag{25}$$

Dacă $q = a$ este o rădăcină simplă a ecuației (25), atunci această valoare va fi atinsă pentru valori finite ale timpului și derivata $\frac{dq}{dt}$ își schimbă în acel moment semnul. Dacă $q = a$ este o rădăcină multiplă de ordinul m ($m \geqslant 2$), variabila q nu va atinge această valoare pentru valori finite ale timpului.

Fie a și b ($b > a$) două rădăcini consecutive de multiplicitate m respectiv n, a ecuației (25). Dacă $m = n = 1$, variabila q va oscila, periodic, între valorile a și b avînd o variație de librație între aceste limite. Dacă $m \geqslant 2$, variabila q se va apropia asimptotic de valoarea $q = a$.

În afirmațiile de mai sus, s-a presupus că variabila q este reală continuă și finită împreună cu prima sa derivată, pentru orice valori finite ale timpului. Este evident că coordonatele q_1, q_2, ν, satisfac această condiție. Rezultă că variația variabilelor q_1, q_2 și ν definite de (21), (22) și (23) depinde de natura rădăcinilor ecuațiilor

$$P_1(q_1) = 0, \tag{26}$$

$$P_2(q_2) = 0, \tag{27}$$

care evident, depind de coeficienții α_1, α_2, α_3, adică de condițiile inițiale ale mișcării.

3.1. MIŞCĂRI CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Racheta are o mişcare cu două grade de libertate dacă

$$y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0 = 0, \tag{28}$$

unde y_0, z_0 şi $\dot{y}_0$, $\dot{z}^0$, sînt elementele iniţiale ale mişcării în sistemul de coordonate $Oxyz$.

În sistemele de coordonate curbilinii q_1, q_2, ν relaţia (28) capătă forma

$$q_1^0 q_2^0 \dot{\nu}_0 = 0. \tag{29}$$

Ţinînd seama de relaţia (23), rezultă că în cazul mişcării cu două grade de libertate, avem

$$\alpha_3 = 0.$$

În acest caz, racheta se va mişca în planul

$$y = \frac{y_0}{z_0} z. \tag{30}$$

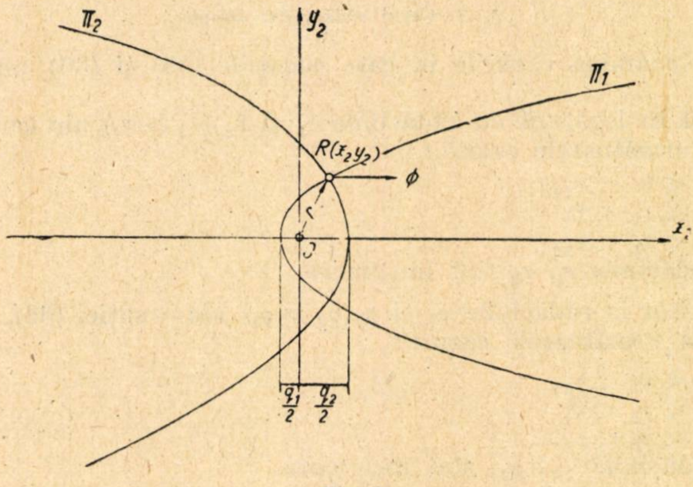


Fig. 3

Intersecţia dintre paraboloizii (3), (4) şi planul (30) determină două parabole π_1 şi π_2 (fig. 3).

Ecuaţia traiectoriei este dată de ecuaţia (17) iar legea mişcării rachetei pe traiectorie, este dată de ecuaţia (16) în care funcţiile $P_1(q_1)$ şi $P_2(q_2)$ conform condiţiei (29) au forma

$$P'(q)_1 = q_1[-a_r q^2 + 2\alpha_1 q_1 + 2(K + \alpha_2)], \tag{31}$$

$$P'(q_2) = q_2[a_r q_2^2 + 2\alpha_1 q_2 + 2(K - \alpha_2)]. \tag{32}$$

Studiul calititiv al mișcării rachetei, se face avînd în vedere ecuațiile (21) și (22) unde P_1 (q_1) și P_2 (q_2) sînt date de(30) și respectiv (31).

Este evident că în tot timpul mișcării, variabilele q_1 și q_2, care satisfac condiția (6), trebuie să varieze în așa fel încît

$$P'_1(q_1) \geqslant 0, \tag{33}$$

$$P'_2(q_2) \geqslant 0. \tag{34}$$

Variația coordonatelor q_1 și q_2 depinde, așa cum s-a arătat mai sus, de rădăcinile ecuațiilor

$$P'_1(q_1) = 0, \tag{35}$$

$$P'_2(q_2) = 0. \tag{36}$$

Ecuațiile (35) și (36) au cîte o rădăcină nulă, astfel că pentru precizarea celorlalte rădăcini vom examina ecuațiile

$$Q(q_1) = -a_r q_1^2 + 2\alpha_1 q_1 + 2(K + \alpha_2), \tag{37}$$

$$Q_2(q_2) = a_r q_2^2 + 2\alpha_1 q_2 + 2(K - \alpha_2), \tag{38}$$

ale căror rădăcini sînt r_1, r_2 și respectiv ρ_1, ρ_2.

3.1.1. Cazul rădăcinilor simple

Vom examina cazurile în care ecuațiile (35) și (36) au rădăcini simple.

Astfel în legătură cu rădăcinile r_1 și r_2 $(r_2 > r_1)$ ale ecuației (37) se disting următoarele cazuri :

a) $r_1 < 0 < r_2$,
b) $r_1 < r_2 < 0$,
c) $0 < r_1 < r_2$,
d) rădăcinile r_1, r_2 sînt imaginare.

Referitor la rădăcinile ρ_1 și $\rho_2(\rho_2 > \rho_1)$ ale ecuației (38), se disting de asemena următoarele cazuri :

α) $\rho_1 < 0 < \rho_2$,
β) $\rho_1 < \rho_2 < 0$,
γ) $0 < \rho_1 < \rho_2$,
δ) rădăcinile ρ_1, ρ_2, sînt imaginare.

Vom considera că $a_r > 0$ adică, forța reactivă este dirijată în sensul pozitiv al axei Ox.

Examinăm mai jos, clasele de traiectorii ce rezultă din combinarea cazurilor din prima grupă cu cele din grupa a doua.

Cazul Ia

Acest caz are loc dacă $K + \alpha_2 > 0$. Ținînd seama de condiția (33) rezultă că variabila q_1 trebuie să satisfacă în tot timpul mișcării condiția

$$0 \leqslant q_1 \leqslant r_2.$$

Rădăcinile $q_1 = 0$ şi $q_1 = r_2$ fiind rădăcini simple ale ecuaţiei (35), rezultă că coordonata q_1 va avea o variaţie de libraţie între limitele $q_1 = 0$ şi $q_1 = r_2$; traiectoria rachetei este cuprinsă în domeniul din interiorul parabolei $q_1 = r_2$. Mişcarea rachetei se obţine analizînd variaţia coordonatei q_2.

Cazul I a α — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 au semne contrarii; acest caz are loc dacă $\alpha_2 > K$.

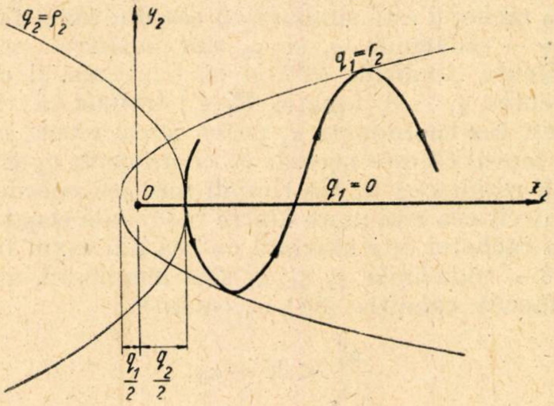


Fig. 4

Ţinînd seama de condiţia (34), rezultă că variabila q_2 trebuie să satisfacă în tot timpul mişcării condiţia: $q_2 \geqslant \rho_2$.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 < 0$, atunci coordonata q_2 scade pînă cînd atinge valoarea $q_2 = \rho_2$, cînd derivata $\dot{q}_2$ îşi schimbă semnul; coordonata q_2 creşte apoi, devenind infinită o dată cu timpul.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 > 0$, coordonata q_2 creşte de la valoarea iniţială q_2^0, devenind infinită o dată cu timpul.

Racheta se deplasează spre infinit către valorile pozitive ale axei *Ox*, traiectoria rachetei fiind periodic tangentă la parabola $q_1 = r_2$ (fig. 4).

Cazul I a β — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt negative; acest caz are loc dacă

$$-K < \alpha_2 < K, \tag{39}$$

$$\alpha_1 > 0, \tag{40}$$

$$\frac{\alpha_1^2}{2a_r} > K - \alpha_2. \tag{41}$$

Coordonata q_2 trebuie să satisfacă condiţia $q_2 \geqslant 0$.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 < 0$ coordonata q_2 scade de la valoarea iniţială q_2^0 pînă la valoarea $q_2 = 0$. În acest caz, este posibil ca racheta să se ciocnească cu centrul atractiv *O*, dacă coordonata q_1 devine nulă o dată cu coordonata q_2. Întrucît corpul C este o sferă cu rază R, rezultă evident că ciocnirea poate avea loc, dacă în timpul mişcării coordonatele q_1 şi q_2 satisfac relaţia $q_1 + q_2 = 2R$.

Dacă nu are loc ciocnirea rachetei cu corpul central, atunci coordonata q_2 după ce atinge valoarea $q_2 = 0$, începe să crească devenind infinită o dată cu timpul.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 > 0$, coordonata q_2 creşte continuu, devenind infinită o dată cu timpul.

Traiectoria rachetei este similară cu cea din cazul Ia α.

Cazul I a γ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt pozitive : acest caz are loc dacă sînt satisfăcute condiţiile (39) şi (41) precum şi condiţia $\alpha_1 < 0$.

Întrucît pentru $q_2 > 0$, funcţia $P_2'(q_2)$ trebuie să rămînă pozitivă, rezultă că în acest caz coordonata q_2 poate avea valori ori cît de mari; avînd în vedere faptul că este necesar ca coordonata q_2 să devină infinită odată cu timpul, rezultă că în tot timpul mişcării coordonata q_2 trebuie să fie mai mare decît cea mai mare dintre rădăcinile ecuaţiei (36).

Traiectoria rachetei este similară cu cea din cazul Ia α.

Cazul I a δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare, acest caz are loc dacă este satisfăcută condiţia (38) şi condiţia :

$$\frac{\alpha_1^2}{2a_r} < K - \alpha_2. \tag{42}$$

Acest caz este similar cazului I a β.

Cazul Ib

În acest caz este necesar ca $\alpha_2 < 0$. Notăm $\alpha_2 = -\alpha_2'$ unde α_2' este o mărime pozitivă. Pentru ca ecuaţia (37) să aibă ambele rădăcini negative, este necesar ca

$$K < \alpha_2' < K + \frac{\alpha_1^2}{2a_r},$$

$$\alpha_1 < 0.$$

Pentru ca să fie satisfăcută condiţia (33), ţinînd seama şi de condiţia (6), este necesar ca în tot timpul mişcării să avem $q_1 \equiv 0$, adică racheta se mişcă pe semiaxa pozitivă Ox.

Mişcarea rachetei este precizată de rădăcinile ecuaţiei (36). Cînd ecuaţia (37) are ambele rădăcini negative, ecuaţia (38) poate avea fie ambele rădăcini pozitive, fie imaginare. Vom examina fiecare din aceste cazuri.

Cazul I b γ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt pozitive; acest caz are loc dacă constanta α_1 este negativă şi

$$K < \alpha_2' < \frac{\alpha_1^2}{2a_r} - K. \tag{43}$$

Coordonata q_2 trebuie să satisfacă, în acest caz, condiţia $q_2 \geqslant \rho_2$.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 < 0$, atunci q_2 scade de la valoarea iniţială q_2^0 pînă la valoarea ρ_2 şi apoi creşte devenind infinită o dată cu timpul. Este evident că este necesar ca $q_2^0 > 2\,R$ unde R este raza corpului C.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 > 0$, coordonata q_2 creştere continuu; racheta se depărtează de corpul central C, mişcîndu-se pe axa Ox.

În acest caz, este necesar ca $q_2^0 \geqslant 2\,R$.

Cazul I b δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare.

În acest caz este necesar ca

$$K + \frac{\alpha_1^2}{2a_r} > \alpha_2' > -K + \frac{\alpha_1^2}{2a_r} \tag{44}$$

şi

$$\frac{\alpha_1^2}{2a_r} \geqslant 2K. \tag{45}$$

Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau egală cu zero. Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 < 0$, coordonata q_2 scade pînă la valoarea $q = 0$ cînd are loc ciocnirea rachetei cu centrul O.

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 > 0$, atunci coordonata q_2 creşte continuu, racheta depărtîndu-se de corpul central C, mişcîndu-se pe semiaxa pozitivă Ox spre valorile pozitive ale acestei axe.

Cazul Ic

În acest caz, este necesar ca $\alpha_2 < 0$. Notăm $\alpha_2 = -\alpha_2'$ unde α_2' este o mărime pozitivă. Pentru ca ecuaţia (40) să aibă ambele rădăcini pozitive este necesar ca

$$K < \alpha_2' < K + \frac{\alpha_1^2}{2a_r}$$

şi

$$\alpha_1 > 0. \tag{46}$$

Avînd în vedere condiţia (33), şi întrucît rădăcinile r_1 şi r_2 sînt rădăcini simple, coordonata q_1 va avea o variaţie de libraţie în domeniul $r_1 \leqslant q_1 \leqslant r_2$.

Traiectoria rachetei este cuprinsă între parabolele $q_1 = r_1$ şi $q_1 = r_2$.

Ecuaţia (36) poate avea, fie ambele rădăcini negative, fie imaginare.

Cazul I c β — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt negative; în acest caz este necesar ca să fie satisfăcute condiţiile (43) şi (46).

Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau cel mult egală cu zero. Dacă la momentul iniţial, $\dot{q}_2 < 0$ variabila q_2 scade pînă la valoarea $q_2 = 0$ (traiectoria intersectează axa Ox în A) şi apoi creşte continuu cu timpul (fig. 5).

Dacă la momentul iniţial $\dot{q}_2^0 > 0$, atunci variabila q_2 creşte continuu cu timpul; racheta se depărtează continuu de corpul central, pe o traiectorie care atinge periodic parabolele $q_1 = r_1$ şi $q_1 = r_2$.

Cazul I c δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare; acest caz are loc dacă sînt satisfăcute condiţiile (44), (45) şi (46).

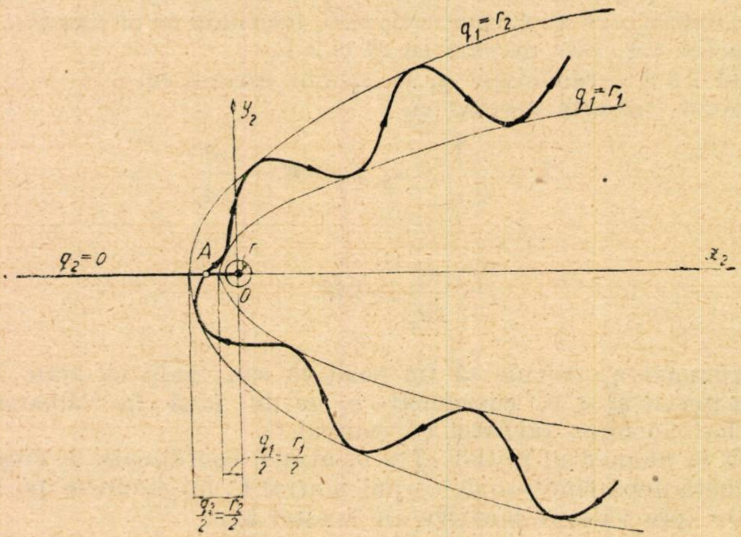


Fig. 5

Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau cel mult nulă.

Mişcarea este identică cu cea din cazul I c β.

Cazul I d

Pentru ca ecuaţia (40) să aibă rădăcini imaginare, este necesar ca

$$\alpha_2 < -K - \frac{\alpha_1^2}{2a_r}.$$

În acest caz, pentru ca să fie satisfăcută condiţia (33) este necesar ca în tot timpul mişcării să avem $q_1 \equiv 0$.

Racheta se mişcă deci pe semiaxa pozitivă Ox. Ecuaţia (36) poate avea numai rădăcini imaginare.

Cazul I d δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare; acest caz are loc întotdeauna cînd ecuaţia (35) are rădăcini imaginare. Coordonata q_2 trebuie să fie deci pozitivă sau cel mult egală cu zero.

Mişcarea este similară cu cea din cazul I b δ.

Observaţie. Dacă vom considera $a_r < 0$ (forţa reactivă este dirijată în sensul negativ al axei Ox), se obţin aceleaşi cazuri de mişcare, considerînd în locul coordonatei q_2 coordonata q_1 şi invers.

3.1.2. Cazul rădăcinilor duble

Examinăm cazurile în care ecuaţiile (35) şi (36) au rădăcini duble, adică cazurile în care coordonatele q_1 sau q_2 au variaţii de limitaţie. Se disting următoarele cazuri :

A) $r_1 = 0\,;\ r_2 > 0,$
B) $r_1 < 0\,;\ r_2 = 0,$
C) $0 < r_1 = r_2,$
D) $r_1 = r_2 < 0,$
E) $\rho_1 = 0\,;\ \rho_2 > 0,$
F) $\rho_1 < 0\,;\ \rho_2 = 0,$
G) $0 < \rho_1 = \rho_2,$
H) $\rho_1 = \rho_2 < 0.$

Analizăm în cele ce urmează fiecare din aceste cazuri.

Cazul IIA

Pentru ca ecuaţia (38) să aibă o rădăcină dublă nulă şi cealaltă rădăcină pozitivă, este necesar ca $\alpha_2 = -K$.

Dacă $a_r > 0$, este necesar ca $\alpha_1 > 0$ şi dacă $a_r < 0$ este necesar ca $\alpha_1 < 0$.

Considerăm în primul rînd cazul $a_r > 0$; — cazul IIA'.

Coordonata q_1 atinge o singură dată valoarea $q_1 = r_2$ (dacă $\dot{q}_1^0 > 0$) şi apoi scade tinzînd asimptotic către valoarea $q_1 = 0$. Mişcarea rachetei are loc deci în interiorul parabolei

$$q_1 = r_2.$$

Cazului IIA' i se pot asocia cazurile β, δ din paragraful anterior şi cazul H.

Cazul IIA'β — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt negative; acest caz are loc dacă $\alpha_1^2 > 4a_r K$.

Rezultă că coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau nulă.

Racheta poate atinge o dată parabola $q_1 = r_2$ şi apoi se deplasează spre infinit, apropiindu-se asimptotic de axul Ox (fig. 6).

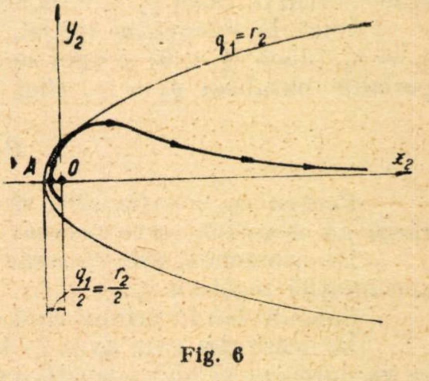


Fig. 6

Cazul IIA'δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare; acest caz are loc dacă $\alpha_1^2 < 4\, a_r K$.

Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau cel mult nulă. Mişcarea rachetei este similară cu cea din cauzl IIA' β.

Cazul II A'H — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt egale şi negative; acest caz are loc dacă $\alpha_1^2 = 4a_r K$.

Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau cel mult nulă. Mişcarea este similară cu cea din cazul IIA' β.

Analizăm acum cazul IIA'' în care $a_r < 0$.

Coordonata q_1 trebuie să satisfacă condiția $q_1 \equiv 0$ sau $q_1 \geqslant r_2$, după cum respectiv $q_1^0 = 0$ sau $q_1^0 \geqslant r_2$.

În primul caz racheta se va mişca pe axa Ox iar în cazul al doilea, coordonata q_1 atinge o dată valoarea $q_1 = r_2$ (dacă $\dot{q}_1^0 < 0$) şi apoi creşte la infinit.

Cazului IIA″ i se poate asocia cazul α din paragraful anterior.

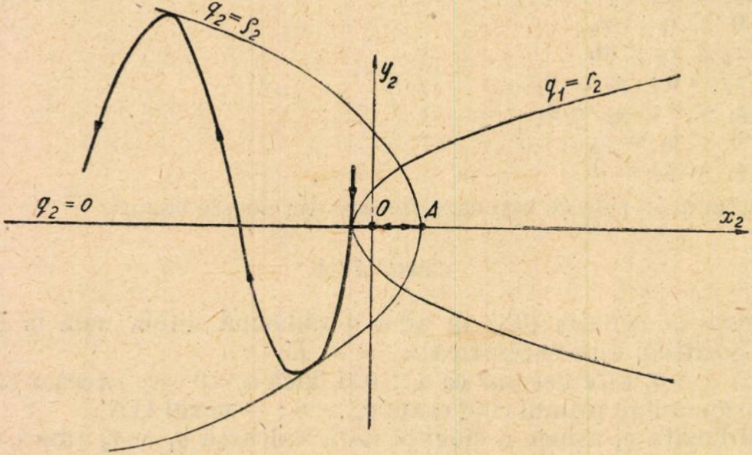


Fig. 7

Cazul IIA″α — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt de semne contrarii. Avînd în vedere condiția (37), rezultă că coordonata q_2 are o variație de librație între valorile $q_2 = 0$ şi $q_2 = \rho_2$. Dacă la momentul inițial $q_1^0 = 0$, racheta se mişcă pe axul Ox; dacă $\dot{q}_2^0 < 0$, atunci racheta se depărtează pe centrul O ajungînd pînă în punctul A definit de $q_1 = 0$ şi $q_2 = \rho_2$ şi apoi cade spre centrul O. Dacă $\dot{q}_2^0 < 0$ racheta cade pe corpul central C.

Dacă la momentul inițial, $\dot{q}_1^0 \geqslant r_2$, racheta atinge o dată parabola $q_1 = r_2$ (dacă $\dot{q}_1^0 < 0$) şi apoi se depărtează de corpul central C, atingînd periodic parabola $q_2 = \rho_2$ (fig. 7).

Cazul IIB

Pentru ca ecuația (38) să aibă o rădăcină dublă nulă şi cealaltă rădăcină negativă, este necesar ca $\alpha_2 = -K$.

De asemenea, este necesar ca constanta α_1 să aibă semnul contrar accelerației reactive a_r.

Considerăm în primul rînd cazul $a_r > 0$ — cazul IIB′.

În acest caz vom avea în tot timpul mişcării $q_1 \equiv 0$ adică, racheta se va mişca pe semiaxa pozitivă Ox.

Cazului IIB′ i se pot asocia cazurile γ şi δ din paragraful anterior, şi cazul G.

Cazul IIB′γ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt pozitive; acest caz are loc dacă : $\alpha_1 > 4a_r K$.

Rezultă că coordonata q_2 trebuie să satisfacă condiția

$$q_2 \geqslant \rho_2 .$$

Dacă la momentul inițial $\dot{q}_2^0 < 0$, atunci racheta se apropie de corpul central pînă în punctul definit de coordonatele $q_1 = 0$ şi $q_2 = \rho_2$ şi apoi se depărtează spre infinit. Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$ atunci racheta se depărtează de corpul C, mişcîndu-se pe axa Ox.

Cazul IIB′δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare; acest caz are loc dacă $\alpha_1^2 < 4a_r K$.

Coordonata q_2 poate fi pozitivă sau cel mult nulă. În acest caz coordonata q_2 scade de la valoarea q_2^0 pînă la valoarea $q_2 = 0$ cînd are loc ciocnirea rachetei cu centrul 0 (dacă $\dot{q}_2^0 < 0$).

Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$, racheta se depărtează continuu de corpul central, mişcîndu-se pe axa Ox.

Cazul IIB′G — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt egale şi pozitive $(\rho_1 = \rho_2 = \rho)$; acest caz are loc dacă, $\alpha_1^2 = 4\, a_r K$.

Dacă la momentul inițial $\dot{q}_2^0 < 0$ atunci coordonata q_2 scade de la valoarea $q_2 = q_2^0$, apropiindu-se asimptotic de valoarea $q_2 = \rho$. Ciocnirea rachetei cu corpul central C poate avea loc dacă $\rho < 2R$. Dacă $\rho = 2R$, racheta atinge corpul central după un timp infinit. Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$, racheta se depărtează continuu de corpul central, mişcîndu-se pe axa Ox.

Considerăm acum cazul $a_r < 0$; — cazul IIB″.

În acest caz, dacă $\dot{q}_1^0 < 0$, atunci coordonata q_1 scade de la valoarea inițială q_1^0, apropiindu-se asimptotic de valoarea $q_1 = 0$. Dacă $\dot{q}_1^0 > 0$, atunci coordonata q_1 creşte continuu cu timpul.

Cazului IIB″ i se poate asocia cazul α din paragraful anterior.

Cazul IIB″α — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt de semne contrarii. Coordonata q_2 are o variație de librație între limitele $q_2 = 0$ şi $q_2 = \rho_2$.

Dacă $\dot{q}_1^0 > 0$, atunci racheta se depărtează continuu de corpul central, spre partea negativă a axei Ox, atingînd periodic parabola $q_2 = \rho_2$ (fig. 8). Dacă, $\dot{q}_2^0 < 0$, atunci racheta se apropie asimptotic de centrul O.

Cazul IIC

Pentru ca ecuația (37) să aibă o rădăcină dublă pozitivă $(r_1 = r_2 = r)$ este necesar ca

$$\alpha_1^2 + 2a_r(K + \alpha_2) = 0,$$

şi $\alpha_1 a_r > 0$.

Dacă $K + \alpha_2 < 0$ este necesar ca $a_r > 0$ şi $\alpha_1 > 0$.

Dacă $K + \alpha_2 > 0$ este necesar ca $a_r < 0$ şi $\alpha_1 < 0$.

Considerăm cazul cînd $a_r > 0$ — cazul IIC′.

În acest caz este necesar ca în tot timpul mişcării să avem $q_1 \equiv r$. Racheta se mişcă deci pe parabola $q_1 = r$. Mişcarea rachetei pe parabola $q_1 = r$ este precizată de natura rădăcinilor ecuației (36). Ecuația (38) poate avea în acest caz numai rădăcini imaginare, deci cazul *IIC′* poate fi asociat numai cu cazul δ din paragraful anterior.

Cazul IIC′ δ — rădăcinile ρ_1 şi ρ_2 sînt imaginare. Coordonata q_2 trebuie să satisfacă condiţia $q_2 \geqslant 0$. Dacă $\dot{q}_2^0 < 0$ racheta plecînd din poziţia iniţială, se deplasează pe parabola $q_1 = r$, trecînd prin punctul A de intersecţie a acestei parabole cu axa Ox, şi apoi se deplasează spre infinit.

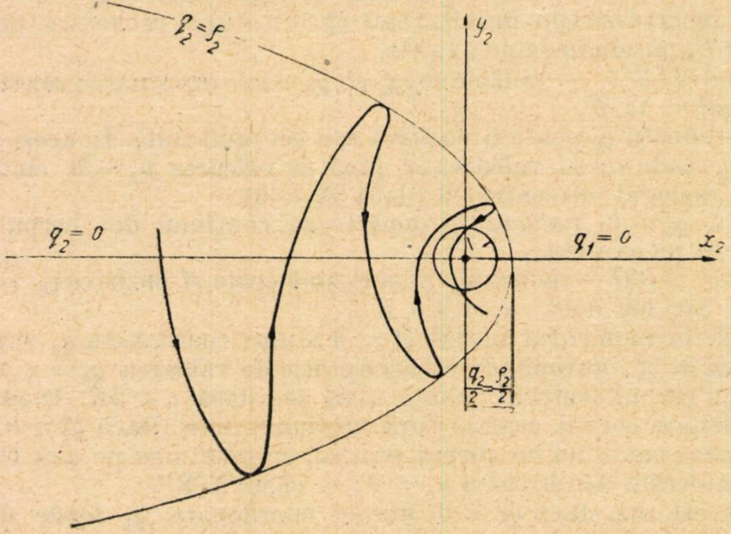

$q_2=\rho_2$
y_2
$q_2=0$
$q_1=0$
x_2
$\frac{q_2}{2}$
$\frac{\rho_2}{2}$

Fig. 8

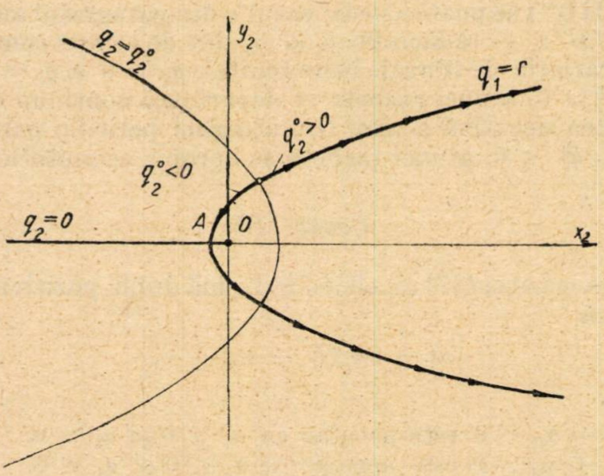

$q_2=q_2^0$
y_2
$q_1=r$
$\dot{q}_2^0>0$
$\dot{q}_2^0<0$
$q_2=0$
A
0
x_2

Fig. 9

Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$ racheta se deplasează pe parabola $q_1 = r$ depărtîndu-se continuu de corpul central C (fig. 9).

Analizăm acum cazul în care $a_r < 0$ — cazul IIC″.

În acest caz, dacă $\dot{q}_1^0 < 0$ coordonata q_1 scade de la valoarea $q_1^0 > r$ tinzînd asimptotic către valoarea $q_1 = r$. Dacă $\dot{q}_1^0 > 0$ coordonata q_1 crește devenind infinită o dată cu timpul. Dacă $q_1^0 = r$ racheta se mișcă pe parabola $q_1 = r$.

Cazul IIC″ poate fi asociat cu cazurile α și β din paragraful anterior și cu cazul F.

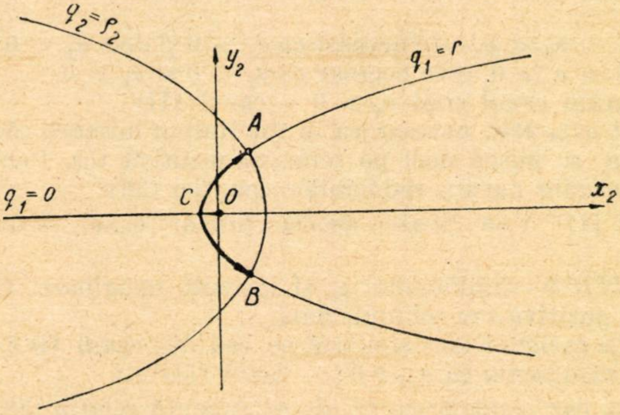


Fig. 10

Cazul IIC″α — rădăcinile ρ_1 și ρ_2 au semne contrarii; acest caz are loc dacă $\alpha_2 < K$. Coordonata q_2 are o variație de librație între limitele $q_2 = 0$ și $q_2 = \rho_2$.

Mișcarea rachetei are loc în domeniul

$$q_1 \geqslant r,$$

$$0 < q_2 < \rho_2.$$

Dacă $q_1^0 = r$, racheta se mișcă pe parabola $q_1 = r$ oscilînd periodic între punctele A și B (fig. 10).

Cazul IIC″β — rădăcinile ρ_1 și ρ_2 sînt negative; acest caz are loc dacă $\alpha_2 > K$. De asemenea, în acest caz trebuie să fie satisfăcută condiția $\alpha_1^2 > 2a_r(K - \alpha_2)$.

Pentru ca să fie satisfăcută condiția (34), rezultă că $q_2 \equiv 0$.

Mișcarea rachetei are loc deci pe semiaxa negativă Ox. Racheta se apropie asimptotic de punctul C (vîrful parabolei $q_1 = r$), dacă $\dot{q}_1^0 < 0$; ciocnirea rachetei cu corpul central poate avea loc dacă $r < 2\,R$. Dacă $r = 2\,R$, racheta atinge suprafața corpului central după un timp infinit.

Dacă $q_1^0 = r$ racheta rămîne în repaus în punctul C (fig. 10).

Cazul IIC″F — ecuația (36) are o rădăcină dublă nulă și cealaltă rădăcină negativă; acest caz are loc cînd $\alpha_2 = K$.

Rezultă că $q_2 \equiv 0$. Mișcarea rachetei este similară cu cea din cazul IIC′ β.

Cazul IID

Pentru ca ecuația (35) să aibă o rădăcină dublă negativă cealaltă rădăcină fiind evident nulă, trebuie să fie satisfăcute condițiile

$$\alpha_1^2 + 2\, a_r\, (K + \alpha_2) = 0,$$

$$a_r\, \alpha_1 < 0.$$

Dacă $K + \alpha_2 < 0$, este necesar ca $a_r > 0$ și deci $\alpha_1 < 0$.

Dacă $K + \alpha > 0$, este necesar ca $a_r < 0$ și $\alpha_1 > 0$.

Considerăm cazul cînd $a_r > 0$ — cazul IID'.

În acest caz, este necesar ca în tot timpul mișcării să avem $q_1 \equiv 0$.

Racheta se mișcă deci pe semiaxa pozitivă Ox. Pentru a preciza mișcarea, analizăm natura rădăcinilor ecuației (36).

Cazului IID' i se poate asocia numai cazul δ din paragraful anterior.

Cazul IID'δ — rădăcinile ρ_1 și ρ_2 sînt imaginare. Coordonata q_2 trebuie să fie pozitivă sau cel mult nulă.

Mișcarea rachetei este similară cu cea din cazul Ib δ.

Considerăm acum că $a_r < 0$; — cazul IID''.

În acest caz pentru ca să fie satisfăcută relația (33) este necesar ca $q_1 \geqslant 0$.

Dacă $\dot{q}_1^0 < 0$, coordonata q_1 scade de la valoarea inițială q_1^0 pînă la valoarea $q_1 = 0$ și apoi crește continuu cu timpul.

Cazului IID'' i se pot asocia cazurile α și γ din paragraful anterior și cazul E.

Cazul IID''α — rădăcinile ρ_1 și ρ_2 au semne contrarii ; acest caz are loc dacă $-K < \alpha_2 < K$.

Coordonata q_2 are o variație de librație între limitele $q_2 = 0$ și $q_2 = \rho_2$. Traiectoria rachetei este cuprinsă între ramurile parabolei $q_2 = \rho_2$, atingînd periodic această parabolă (fig. 7).

Cazul IID''γ — rădăcinile ρ_1 și ρ_2 sînt pozitive ; acest caz are loc dacă $\alpha_2 > K$.

Coordonata q_2 are o variație de librație între limitele $q_2 = \rho_1$ și $q_2 = \rho_2$. Traiectoria rachetei este cuprinsă între parabolele $q_2 = \rho_1$ și $q_2 = \rho_2$, atingînd periodic aceste parabole (fig. 11).

Cazul IID''E — ecuația (39) are o rădăcină dublă nulă și cealaltă rădăcină pozitivă ; acest caz are loc dacă $\alpha_2 = K$.

Coordonata q_2 tinde asimptotic spre valoarea $q_2 = 0$.

Racheta poate atinge o dată parabola $q_2 = \rho_2$ și apoi se depărtează de corpul central apropiindu-se asimptotic de semi axa negativă Ox. Mișcarea este similară cu cea din cazul IIA'β. cu deosebirea că în cazul IIA' β, racheta se depărtează de corpul central deplasîndu-se în sensul pozitiv al axei Ox, iar în cazul IID''E racheta se depărtează de corpul central deplasîndu-se în sensul negativ al axei Ox.

Mişcarea rachetei în cazurile E, F, G şi H este similară cu cea studiată în cazurile anterioare cu deosebirea că în locul coordonatei q_1 trebuie să considerăm coordonata q_2 şi invers.

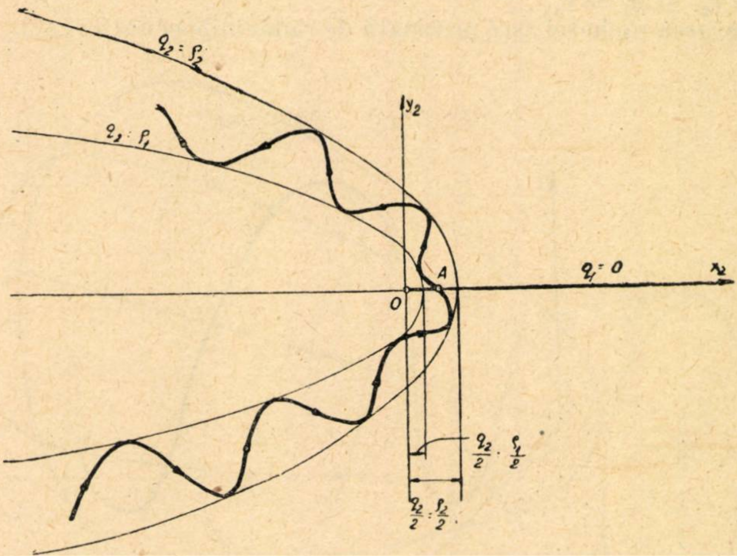

$q_2 = \rho_2$
$q_1 = \rho_1$
y_2
A
O
$q_1 = 0$
x_2
$\frac{q_2}{2} = \frac{\rho_1}{2}$
$\frac{q_2}{2} = \frac{\rho_2}{2}$

Fig. 11

4. MIŞCAREA CU TREI GRADE DE LIBERTATE

Dacă nu este îndeplinită condiţia (29), racheta va avea o mişcare cu trei grade de libertate. În acest caz, evident, $\alpha_3 \neq 0$.

Avînd în vedere ecuaţia (26), rezultă că constanta α_3 trebuie să fie pozitivă.

Considerăm cazul cînd $a_r > 0$.

Ecuaţia (26) trebuie să aibă neapărat două rădăcini, iar ecuaţia (27) poate avea o rădăcină pozitivă, sau toate rădăcinile pozitive.

Se disting deci următoarele cazuri :

a) $r_1 < 0 < r_2 < r_3$,
b) $r_1 < 0 < r_2 = r_3$,
α) $\rho_1 < \rho_2 < 0 < \rho_3$,
β) $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$,
γ) $0 < \rho_1 < \rho_2 = \rho_3$,
δ) $0 < \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$.

Cazul IIIa

În acest caz, coordonata q_1 are o variație de librație între limitele $q_1 = r_2$ și $q_1 = r_3$. Traiectoria rachetei este cuprinsă deci între paraboloizii $q_1 = r_2$ și $q_1 = r_3$.

Mișcarea rachetei este precizată de rădăcinile ecuației (27).

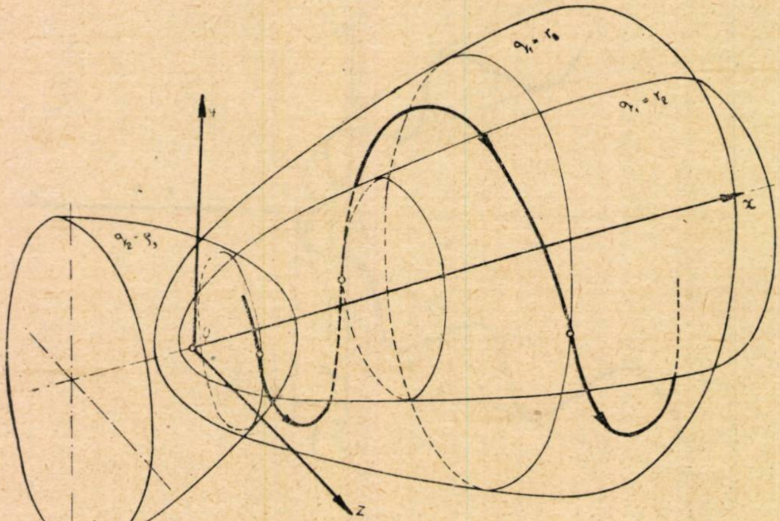


Fig. 12

Cazul IIIaα — ecuația (27) are o singură rădăcină pozitivă. Coordonata q_2 scade de la valoarea q_2^0 pînă la valoarea $q_2 = \rho_3$ (dacă $\dot{q}_2^0 < 0$) și apoi crește devenind infinită o dată cu timpul. Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$, coordonata q_2 crește continuu cu timpul.

Racheta se depărtează de corpul central C, deplasîndu-se pe o traiectorie cuprinsă între paraboloizii $q_1 = r_2$ și $q_1 = r_3$ atingînd periodic aceste suprafețe (fig. 12).

Cazul IIIaβ — ecuația (27) are trei rădăcini pozitive. În acest caz, trebuie ca în tot timpul mișcării să avem

$$q_2 \geqslant \rho_3,$$

unde ρ_3 este cea mai mare rădăcină pozitivă a ecuației (27). Mișcarea rachetei este similară mișcării din cazul IIIaα.

Cazul IIIaγ — ecuația (27) are trei rădăcini pozitive, dintre care una este dublă ($\rho_2 = \rho_3 = \rho$).

Dacă $q_2^0 = \rho$, atunci în tot timpul mișcării vom avea

$$q_2 \equiv \rho.$$

Traiectoria rachetei este situată pe paraboloidul $q_2 = \rho$ atingînd periodic paraboloizii $q_1 = r_2$ şi $q_1 = r_3$ (fig. 13).

Dacă $q_2^0 > \rho$ racheta se apropie asimptotic de paraboloidul $q_2 = \rho$ (dacă evident $\dot{q}_2^0 < 0$) sau se depărtează continuu de corpul central (dacă $\dot{q}_2^0 > 0$), atingînd periodic paraboloizii $q_1 = r_2$ şi $q_1 = r_3$.

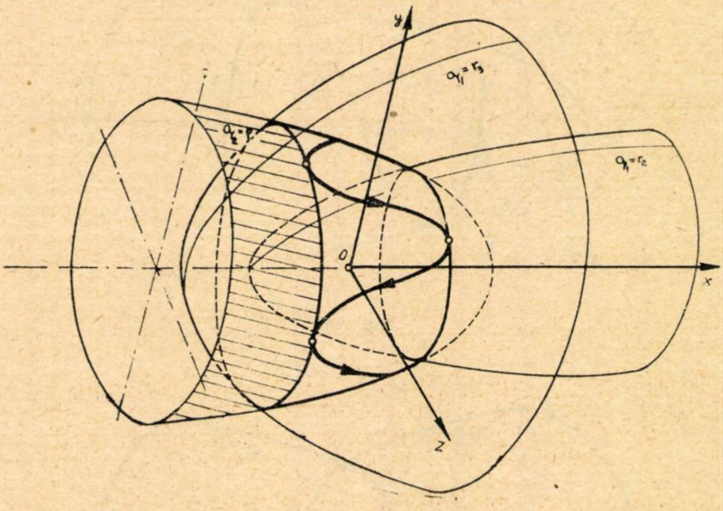


Fig. 13

Cazul III a δ — mişcarea rachetei este similară mişcării din cazul III a γ.

Cazul IIIb

Dacă ecuaţia (26) are o rădăcină dublă pozitivă ($r_2 = r_3 = r$) atunci în tot timpul mişcării vom avea că $q_1 \equiv r$.

Traiectoria rachetei este situată pe paraboloidul $q_1 = r$.

Cazul IIIb α — ecuaţia (27) are o singură rădăcină pozitivă.

Racheta se deplasează pe paraboloidul $q_1 = r$ atingînd o dată paraboloidul $q_2 = \rho_3$ (dacă $\dot{q}_2^0 < 0$) şi apoi se depărtează continuu de corpul central *C*.

Dacă $\dot{q}_2^0 > 0$ racheta se depărtează continuu de corpul central *C*, deplasîndu-se pe paraboloidul $q_1 = r$ (fig. 14).

Cazul IIIb β — (ecuaţia 46) are toate rădăcinile pozitive. Am văzut că în acest caz,

$$q_2 \geqslant \rho_3.$$

Mişcarea este similară mişcării din cazul IIIb α.

Cazul IIIbγ — ecuaţia (46) are trei rădăcini pozitive dintre care una este dublă ($\rho_2 = \rho_3 = \rho$).

Dacă $q_2^0 = \rho$ atunci în tot timpul mișcării $q_2 \equiv \rho$.

Racheta se mișcă uniform pe cercul de intersecție a paraboloizilor $q_1 = r$ și $q_2 = \rho$ (fig. 15).

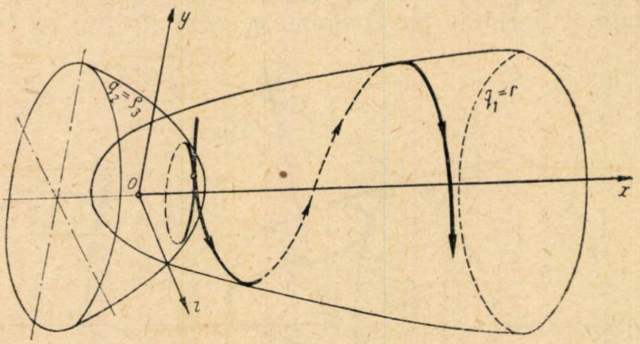


Fig. 14

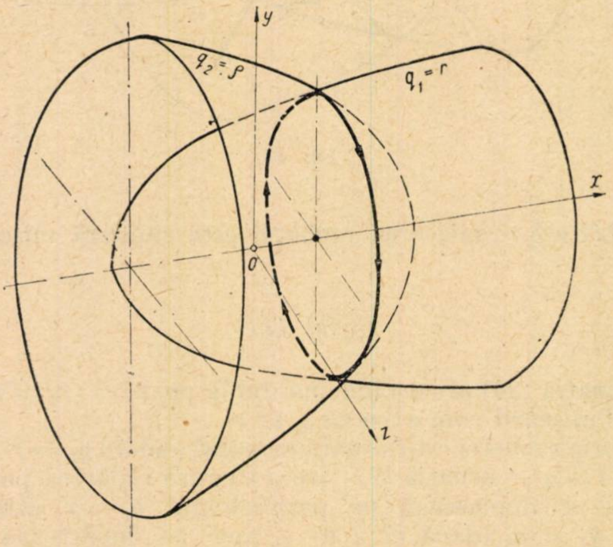


Fig. 15

Dacă $q_2^0 > \rho$, racheta se apropie asimptotic de paraboloidul $q_2 = \rho$, (dacă $\dot{q}_2^0 < 0$) sau se depărtează continuu de corpul central (dacă $\dot{q}_2^0 > 0$), deplasîndu-se pe paraboloidul $q_1 = r$.

Cazul III b δ — acest caz este similar cazului III b γ.

Din relația (26) se deduce că

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{2\alpha_3}}{q_1 q_2}.$$

În cazul mişcării pe paraboloidul $q_1 = r$,

$$\dot{\nu} = \frac{C}{q_2}$$

unde

$$C = \frac{\sqrt{2\alpha_3}}{q_1} = \text{const.}$$

Se constată că viteza unghiulară $\dot{\nu}$ scade pe măsură ce coordonata q_2 creşte, adică pe măsură ce racheta se depărtează de corpul central.

5. CONCLUZII

Din studiul de mai sus, rezultă că racheta se poate deplasa pe o mare diversitate de traiectorii.

Avînd în vedere cazurile studiate, se pot determina condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească elementele iniţiale ale mişcării pentru ca racheta să se deplaseze pe un anumit tip de traiectorie.

Este important de semnalat, că în toate cazurile studiate se poate întîmpla ca racheta să se ciocnească cu corpul central, dacă în timpul mişcării, coordonatele q_1 şi q_2 satisfac egalitatea

$$q_1 + q_2 = 2\,R,$$

unde R, este raza corpului central.

De asemenea, la momentul iniţial, este necesar ca

$$q_1^0 + q_2^0 \geqslant 2\,R.$$

Primită la redacţie la 21 ianuarie 1960

О ДВИЖЕНИИ РАКЕТЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

РЕЗЮМЕ

Изучается движение ракеты, постоянно направленной в пространстве, в центральном поле сил, предполагая, что масса ракеты изменяется по показательному закону.

Для того чтобы интегрировать дифференциальные уравнения движения, автор вводит ортогональную систему криволинейных координат так, что уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби может интегрироваться при разделении переменных.

Выводятся уравнения траектории в криволинейной координатной системе и закон движения ракеты по траектории.

В дальнейшем автор проводит качественный анализ движения ракеты, определяя классы траекторий, на которых возможно движение ракеты.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FUSÉE DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le mouvement d'une fusée ayant une orientation fixe dans l'espace ; il suppose que l'engin est situé dans un champ de forces centrales et que sa masse varie selon une loi exponentielle.

Afin d'intégrer les équations différentielles du mouvement, il utilise un système de coordonnées orthogonales curvilignes, permettant de transformer l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi dans une équation aux variables séparées. Il en déduit ensuite les équations de la trajectoire, ainsi que la loi du mouvement de la fusée sur cette trajectoire.

Pour finir, l'auteur fait une étude qualitative du mouvement de la fusée et détermine les classes des trajectoires que la fusée peut suivre.

BIBLIOGRAFIE

1. P. BLANC, *Balistique extérieure des fusées dans le vide et avec champs de pesanteur constant.* Mémorial de l'Artillerie Française, *24*, 7 (1950).
2. C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels.* V. Veit, Leipzig, 1927, 70–120.

ORDINEA DE APARIȚIE ȘI ROTIREA ARTICULAȚIILOR PLASTICE LA O STRUCTURĂ STATICĂ SOLICITATĂ DE O SARCINĂ PERMANENTĂ ȘI UN GRUP DE SARCINI CE CREȘTE PROPORȚIONAL

DE

MIHAIL HANGAN [1]

Structurile statice alcătuite din bare se calculează în domeniul plastic în mod obișnuit în una din ipotezele :

— toate sarcinile de pe construcție cresc proporțional ;

— sarcinile rămîn constante iar numai una din sarcini crește sau un grup de sarcini crește proporțional.

În ipoteza sarcinilor ce cresc proporțional am dat în [1], o metodă de calcul și o serie de exemple de calcul.

În lucrarea de față vom da o completare a metodei de calcul expusă pentru asemenea structuri supuse acțiunii unei serii de sarcini constante și a unei sarcini care crește sau a unui grup de sarcini care cresc proporțional. Vom trage de asemenea o serie de concluzii asupra plastificării structurilor sub acest tip de încărcare. Cazul studiat corespunde unor situații reale la care sarcina ce rămîne de valoare constantă, este sarcina dată de greutatea proprie și încărcarea moartă a unei construcții.

De asemenea vom arăta modul în care se calculează unghiul de rotire relativ al secțiunilor vecine articulațiilor plastice, apărute lîngă un nod sau în cîmpul unei bare precum și totalul fisurilor ce apar la o grindă de beton armat, într-o articulație plastică. Studiul făcut pentru rotirea articulațiilor plastice se aplică în mod general oricărui fel de încărcare a structurii.

*

---

[1] Institutul de construcții, București.

ORDINEA DE APARIŢIE A ARTICULAŢIILOR PLASTICE

Față de metoda obișnuită de calcul cînd structura este solicitată numai de sarcini ce cresc proporțional, cazul prezent este caracterizat prin faptul că structura este solicitată și de o sarcină permanentă care rămîne constantă pe structură și produce momentele M^0.

Să facem pentru toate punctele în care ar putea apare articulații plastice valorile.

$$\mathfrak{M}^P \equiv \mathfrak{M}/c - M^0 = \overline{\mathfrak{M}} - M^0. \tag{1}$$

Valorile $\mathfrak{M}^P$ vor avea de această dată rolul pe care la structurile obișnuite îl aveau valorile $\overline{\mathfrak{M}}$ adică momentul de plastificare al secțiunii, împărțit prin coeficientul de siguranță admis [1].

Se poate face calculul plecînd de la orice valoare a grupului de forțe crescător sau a forței P, fie $P = 1$ t. Pentru acest grup de forțe inițial, vor apărea momentele m_i^1. Dacă se vor face pentru punctele considerate ale sistemului rapoartele $\rho_1 = m^1/\mathfrak{M}^P = 1/\gamma$, valorile cele mai mari ale lui ρ, ne vor arăta punctele cele mai apropiate de plastificare.

Prima articulație va fi dată de punctul pentru care ρ_1 este maxim. Se va stabili apoi valoarea $\gamma_1 = 1/\rho_1$ pentru care se realizează în prima articulație ce va apare egalitatea

$$\frac{\gamma_1 m_i^1}{\mathfrak{M}_i^P} = 1\,;\ \gamma_1 = \frac{\mathfrak{M}_i^P}{m_i^1} = \frac{1}{\rho_1}. \tag{2}$$

În urmă se va proceda similar pentru a se găsi cea de-a doua articulație plastică plecînd iarăși de la forța $P = 1$ t sau de la sistemul similar de mai multe forțe, aplicat structurii.

Dacă prima articulație a apărut în punctul i, se va introduce în acest punct un moment încovoietor $\overline{m}_i$ care să facă ca într-un al doilea punct al structurii, fie j acel punct, să se realizeze [1]

$$\rho_2 = \frac{m_i + \overline{m}_i}{\mathfrak{M}_i^P} = \frac{m_j + t_{ij}\,\overline{m}_i}{\mathfrak{M}_j} = \frac{1}{\gamma_2}. \tag{3}$$

În urmă, se va proceda după metoda generală de găsirea articulațiilor plastice, prin aproximații succesive, prin introducerea momentelor încovoietoare de corecție în nodurile structurii care se plastifică succesiv [1]. Se observă în figura 2*b*, 2*c* și 2*d* că diagramele au fost făcute în ipoteza introducerii în articulațiile plastice, a unor momente încovoietoare similare $M = 1$ tone, iar în tabela 1 s-a ținut seama de valorile reale ale momentelor introduse în noduri.

ROTIREA SUCCESIVĂ A ARTICULAŢIILOR PLASTICE

Metoda de calcul expusă, obține prin aproximații succesive repartiția de momente încovoietoare din o structură după apariția articulațiilor plastice succesive. În această metodă, apariția unei articulații plastice în punctul k, este marcată prin rotirea secțiunilor vecine acestei articulații cu θ_k și prin scăderea cu $\overline{M}_k$ a momentului încovoietor de la valoarea ce ar avea-o într-o structură total elastică, la structura cu punctul k plastificat. Rezultatul final este același cu cel ce s-ar obține dacă peste distribuția inițială de momente încovoietoare, s-ar suprapune diagrama de momente încovoietoare obținute dacă structura ar fi considerată tăiată în k iar în această tăietură s-ar introduce momentul încovoietor $\overline{M}_k = -(M_k - \mathfrak{M}_k^p)$ ca singură solicitare exterioară.

Ca și în cazul studiului amintit [1] calculul poate fi făcut la nivelul solicitărilor reale ale unei structuri sau poate fi făcut cu valori mai mici, plecînd de la încărcarea cu o sarcină oarecare, de exemplu cu o sarcină unitară, trecîndu-se apoi la sarcinile și rotirile reale, prin proporționalitate [1].

Două cazuri caracteristice pot apărea și anume, articulații apărute în vecinătatea reazemelor și articulații în cîmp.

ARTICULAȚII APĂRUTE ÎN VECINĂTATEA REAZEMELOR

Acesta este cazul frecvent ce interesează proiectarea curentă (fig. 4 *a*).

Cînd într-o secțiune plastificată a unei structuri statice, fie de exemplu a unei grinzi continue, în vecinătatea unui nod se introduce momentul încovoietor $\overline{M}_k$ moment încovoietor care în celelalte noduri i, j, provoacă momentele încovoietoare $\overline{M}_{ik}$, $\overline{M}_{jk}$, . . ., rotirile tangentelor la fibra medie deformată în k vor fi (fig. 4)

$$\bar{\theta}_k = \bar{\theta}_{ki} + \bar{\theta}_{kj}. \tag{4}$$

Pentru fiecare capăt de bară se va avea

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{ki} &= \frac{l_{ki}}{6\,EI_{ki}}\,(2\,\overline{M}_k + \overline{M}_{ik}), \\ \bar{\theta}_{kj} &= \frac{l_{kj}}{6\,EI_{kj}}\,(2\,M_k + M_{jk}), \end{aligned} \tag{5}$$

sau în total

$$\bar{\theta}_k = \frac{1}{6\,E}\left[2\left(\frac{l_{ki}}{I_{ki}} + \frac{l_{kj}}{I_{kj}}\right)\overline{M}_k + \frac{l_{ki}}{I_{ki}}\,M_{ik} + \frac{l_{kj}}{I_{kj}}\,\overline{M}_{jk}\right]\cdot\frac{1}{\rho}, \tag{6}$$

unde ρ este factorul de corecție ce trebuie introdus dacă calculul nu s-a făcut la nivelul momentelor încovoietoare reale ci s-a făcut de exemplu pentru momentele produse de sarcina de o tonă.

Dacă se face notația curentă în calculul structurilor statice

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ik} &= t_{ki}\,\overline{M}_k, \\ \overline{M}_{jk} &= t_{kj}\,\overline{M}_k, \end{aligned} \tag{7}$$

unde s-a notat prin t_{ki} și t_{kj} coeficienții de transmisie a momentelor unitare în structura în care s-a ținut seama de articulațiile plastice apărute iar în punctul k structura se consideră secționată, se va avea

$$\theta_k = \frac{\overline{M}_k}{6E}\left[2\left(\frac{l_{ki}}{I_{ki}} + \frac{l_{kj}}{I_{kj}}\right) + \frac{l_{ki}\,t_{ki}}{I_{ki}} + \frac{l_{kj}\,t_{kj}}{I_{kj}}\right]\cdot\frac{1}{\rho}\,. \tag{8}$$

Momentul încovoietor $\overline{M}_k$ este chiar partea de moment încovoietor ce apare în punctul k și se scade din momentul încovoietor elastic, datorită plastificări $\overline{M}_k = -\,[M_k - \mathfrak{M}_k]$ sau o valoare proporțională cu acest moment încovoietor.

Din calculul făcut pentru stabilirea ordinei de apariție a articulațiilor plastice, este cunoscută valoarea $\overline{M}_k$ și valorile $\overline{M}_{jk}$ și $\overline{M}_{jk}$. Eventual pot fi utilizați coeficienții de transmisie ai momentului unitar, t_{ki} și t_{ij}, stabiliți pe orice cale.

ARTICULAȚII PLASTICE APĂRUTE ÎN CÎMPUL BARELOR

Cazul acesta este foarte rar întîlnit, în special la construcții de beton armat unde prin faptul că momentul încovoietor cu valoarea lui maximă se întinde, pe o lungime mare de grindă punctul de apariție al articulației plastice poate fi greu de determinat și este mai totdeauna cazul a conta că această articulație e plasată la mijlocul deschiderii.

Vom trata totuși cazul general, contînd într-o deschidere cu grade de încastrare diferite la capete, că articulația plastică apare la distanțele a și b de capete.

În articulația plastică apare o forță tăietoare T pe care o vom determina punînd condiția ca săgețile celor două porțiuni de grindă, de la reazim la articulație, în dreptul articulației să fie egale $\omega_a = \omega_b$ (fig. 4 *b*).

Să notăm cu $\overline{\theta}_a$ și $\overline{\theta}_b$ rotirile celor două noduri sub efectul unui moment unitar, aplicat în nod, după apariția articulației plastice din cîmp.

Săgeata grinzii în dreptul articulației plastice, calculată pe cele două jumătăți de grindă se va scrie

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{\overline{M}}{2EI}a^2 + \frac{Ta^3}{3EI} + M_a\overline{\theta}_a\cdot a \quad \text{unde} \quad M_a = \overline{M} + T\cdot a,\\ \omega_b &= \frac{\overline{M}}{2EI}b^2 - \frac{Tb^3}{3EI} + M_b\overline{\theta}_b\cdot b \quad\;\; ,, \qquad M_b = \overline{M} - T\cdot b. \end{aligned} \tag{9}$$

Din egalitatea de săgeți $\omega_a = \omega_b$ se obține valoarea lui T iar rotirea articulației plastice poate fi calculată exact.

Modul în care se produce fisurarea și în care apar articulațiile plastice în cîmpul unei bare, dezvoltate pe o mare lungime de bară, fac ca precizarea riguroasă a pozițiilor acestor articulații să fie lipsită de un corespondent fizic riguros. În asemenea situații care pot face obiectul unor examinări detaliate, se poate arăta că articulațiile plastice pot fi considerate plasate în mijlocul deschiderilor.

Să admitem un caz simplu, anume că articulația plastică apare la mijlocul deschiderii. În acest caz $M_a = M_b = \overline{M}$. Admițînd de asemenea că ne referim în reazemele *a* și *b* la unghiul de rotație al unei singure bare încastrate la capăt, vom putea scrie

$$\bar{\theta}_k = \left[\frac{\overline{M}l}{2E.I} + \overline{M}\,\bar{\theta}_a + \overline{M}\,\bar{\theta}_b\right] = \overline{M}\left[\frac{l}{2EI} + \bar{\theta}_a + \bar{\theta}_b\right], \tag{10}$$

$$\bar{\theta}_k = \frac{M.l}{2E.I} + \overline{M}\frac{k_a^1}{\Sigma k_a}\cdot\frac{h_a^1}{4\,EI} + \overline{M}\frac{h_b^1}{\Sigma h_b}\cdot\frac{h_b^1}{4\,EI}\,. \tag{11}$$

Din compararea acestei formule, cu cea dedusă pentru cazurile în care articulațiile apar în vecinătatea nodurilor, se deduce că rotația articulațiilor apărute în cîmp este mult mai mare, în mod normal de 3—4 ori ca rotația unei articulații de lîngă nod.

Ca și în cazul precedent dacă calculul rotirii articulației plastice a fost făcut plecînd de la o sarcină oarecare, diferită de sarcina ultimă ce poate fi suportată de grindă, valorile unghiului obținut vor trebui multiplicate cu $1/\rho$.

Pentru cazul în care ne găsim, dacă calculul a fost făcut pentru sarcina $P = 1$ tone, momentul M_k introdus este cel necesar a se trece de la o articulație la două sau în general de la *t* la $(t+1)$ articulații.

Dacă din calculul ordinei de apariție al articulațiilor plastice rezultă că pentru *t* articulații structura suportă sarcina P_t și pentru $(t+1)$ articulații structura suportă sarcina $P_{(t+1)}$ valoarea θ_k obținută precedent va trebui multiplicată cu $(P_{(t+1)} - P_t)$.

Deschiderea ansamblului de fisuri ce apar la o articulație plastică Δ, într-o grindă de înălțimea *h* poate fi calculată în ipoteza că, în întregime, unghiul format de fibra medie a grinzii este realizat prin fisurarea betonului :

Pentru un prim calcul, la grinzile de beton armat cu procente curente de armare, se poate conta pe un braț pe pîrghie intern $z = 0{,}8\ h$. Cunoscînd unghiul θ și brațul de pîrghie z, se va avea $\Delta = \theta.\ z = 0.8\ h.\ \theta$.

EXEMPLU DE CALCUL. ORDINEA DE APARIȚIE A ARTICULAȚIILOR LA O GRINDĂ CONTINUĂ

Grinda continuă din figura 1 este încărcată cu o sarcină permanentă de 7565 kg/ml. Grinda are un moment de inerție constant.

Să studiem modul de apariție al articulațiilor plastice cînd grinda este solicitată și de forța *P* crescătoare din deschiderea 2—3.

Calculul e făcut prin aproximații succesive iar rezultatele intermediare sînt trecute în figura 2

Calculul poate fi urmărit în detaliu în tabela 1.

În linia 1 este trecut momentul de plastificare al secțiunilor $\mathfrak{M}$ iar în linia 2 momentul de plastificare împărțit prin coeficientul de siguranță $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/c$ care nu trebuie depășit în exploatare.

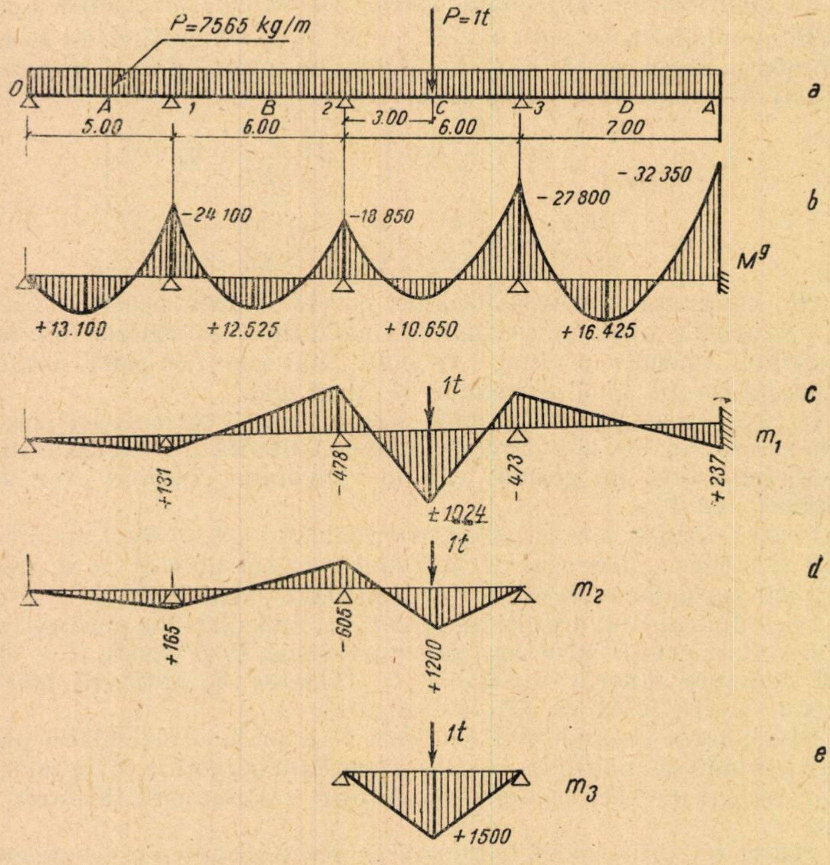

P=7565 kg/m
P=1t
0
A
1
B
2
C
3
D
A
5.00
6.00
3.00
6.00
7.00
a
-24 100
-18 850
-27 800
-32 350
+13.100
+12.525
+10.650
+16.425
M^g
b
1t
+131
-478
±1024
-473
+237
m_1
c
1t
+165
-605
+1200
m_2
d
1t
+1500
m_3
e

Fig. 1. — Momente încovoietoare preliminare în grindă, pentru sarcina uniform distribuită și sarcina concentrată $P = 1$ t.

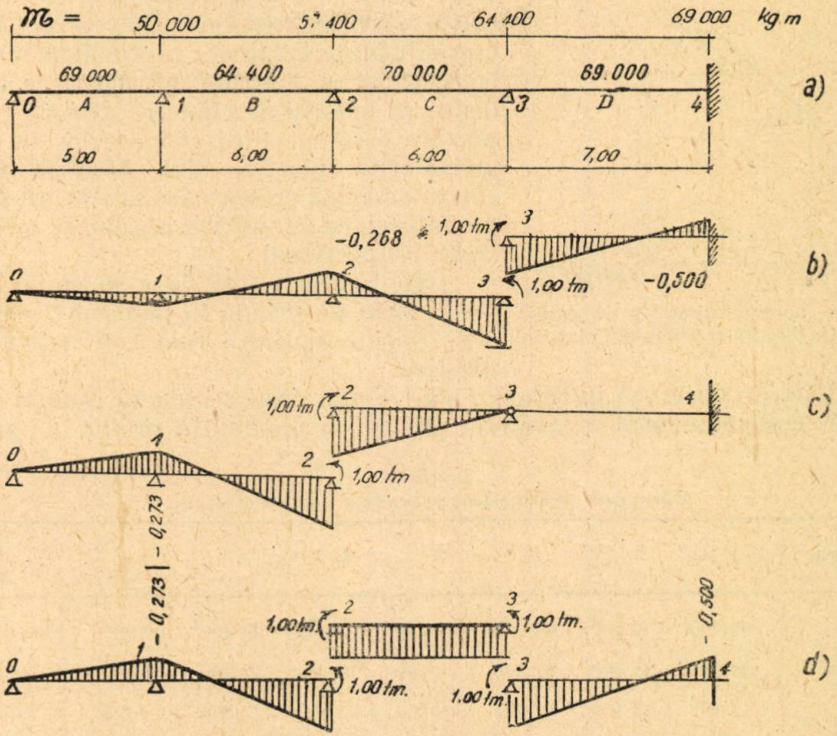
În linia 3 este trecut momentul încovoietor dat de sarcinile permanente M^g iar în linia 4 sînt trecute momentele încovoietoare

$$\mathfrak{M}^P = \overline{\mathfrak{M}} - M^g,$$

care pot fi suportate de grindă datorită sarcinii crescătoare P.

Mersul calculului este cel utilizat în mod curent la asemenea structuri [1] cu observația că se pleacă de la momentele $\mathfrak{M}^P$ cu care se lucrează pentru acest caz cum se lucra în metoda generală cu momentele încovoietoare $\overline{\mathfrak{M}}$ de care erau capabile secțiunile grinzii [1].

De data aceasta transmiterea momentelor încovoietoare date de momentele M_3 şi M_2 s-a făcut conform figurilor *2a*, *2b* şi *2c* care au putut fi calculate exact, ceea ce se poate face tot atît de simplu prin aproximaţii succesive.



𝔐 =
50 000
57 400
64 400
69 000
kg m
69 000
64.400
70 000
69.000
0
A
1
B
2
C
3
D
4
5,00
6,00
6,00
7,00
a)
-0,268
1,00 tm
3
0
1
2
3
1,00 tm
-0,500
b)
1,00 tm
2
3
4
c)
0
1
2
1,00 tm
- 0,273
- 0,273
1,00 tm
2
3
1,00 tm
- 0,500
0
1
2
1,00 tm
1,00 tm
3
4
d)

Fig. 2. — Transmiterea momentelor încovoietoare unitare după apariţia unor articulaţii plastice în grindă.

Se pune în punctul *C* sarcina $P = 1$ tonă şi se obţin în noduri momentele încovoietoare m^1. Făcînd rapoartele $\rho_1 = m/\mathfrak{M}^P$ se observă că prima articulaţie plastică va apare în punctul 3 pentru sarcina

$$P_1 = 1 \frac{1}{\rho_1} = 9{,}35 \text{ tone}$$

Se observă că în punctul 1, ρ avea valoarea absolută mai mare ca în punctul 3 anume $\rho = -\ 0{,}145$. Din cauză însă că această valoare e negativă nu se ţine seama de dînsa, ea făcînd ca momentul încovoietor total din punctul 1 să scadă cînd *P* creşte.

Pentru a se găsi cea de a doua articulaţie plastică, se introduce în punctul 3 momentul încovoietor $m = 236$ kgm care se transmite întregii grinzi ca în figura *2a* şi *b*. Se ajunge la valoarea $\rho_2 = 0{,}055$; $1/\rho_2 = 18{,}25$; $P_2 = 1.\ 1/\rho_2 = 18{,}25$ tone.

A treia articulație plastică apare în punctul C, realizîndu-se un mecanism local pentru $1/\rho_3 = 20{,}8$; $P_3 = 20{,}8$ tone.

Grinda considerată este de patru ori static nedeterminată. Această grindă ar fi trebuit să ajungă la limita capacității de rezistență la apariția celei de-a 5-a articulații plastice. Din cauza apariției unui mecanism local, limita capacității de încărcare a grinzii se obține la apariția a 3 articulații plastice, localizate în aceeași deschidere. Această comportare este specifică structurilor în care articulațiile plastice sînt produse de o singură sarcină crescătoare sau de un grup de sarcini ce au poziții apropiate și care cresc proporțional.

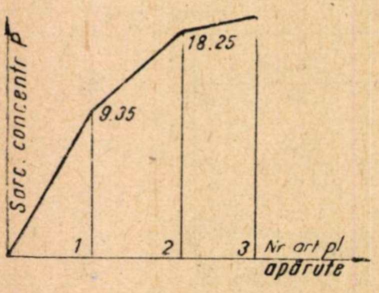


Fig. 3. — Sarcini suportate de grindă la apariția diferitelor articulații plastice.

În figura 3 sînt date sarcinile P ce pot fi puse pe grindă în punctul C pentru a se obține succesiv cele trei articulații plastice.

Este de observat în tabela 1 că trebuie ținut seama că, numai cînd într-un nod momentul încovoietor M^g și cu momentul produs de m au

Tabela 1

Tabel pentru calculul ordinei de apariție a articulațiilor plastice

Secțiunea	*A*	1	B	2	C	3	*D*	4	$\gamma - 1/\rho$
$\mathfrak{M}$	69 000	50 000	64 400	57 400	70 000	64 400	69 000	69 000	
$\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/c$	34 500	25 000	32 200	28 700	35 000	32 200	34 500	34 500	
M^g	+13 100	−24 100	+12 525	−18 850	+10 650	+27 800	+16 425	−32 350	
$\mathfrak{M}^P=\overline{\mathfrak{M}}-M^g$	+21 400	− 900	+19 675	− 9 850	+24 350	− 4 400	+18 073	− 2 150	
m^1	+ 65	+ 131	− 174	− 478	+ 1 024	− 473	− 118	+ 237	
$\rho_1=\frac{m^1}{\mathfrak{M}^P}$	—	− 0,145	—	+0,0485	+ 0,042	+*0,1075*	—	− 0,110	9,35
$\overline{m}_1$	—	+ 17	—	− 62	+ 91	+ 236	—	− 118	
m_2	—	+ 148	—	− 540	+ 1 115	− 243	—	+ 119	
ρ_2	—	− 0,165	—	*0,055*	+ 0,046	+ *0,055*	—	− 0,055	18,25
$\overline{m}_2$	—	− 16	—	+ 62	+ 46	− 30	—	− 15	
m^3	—	+ 132	—	− 178	+ 1 161	− 213	—	+ 104	
$\rho_3=\frac{m^3}{\mathfrak{M}^P}$	—	0,147	—	+*0,0485*	*0,048*	*0,0485*	—	0,0476	20,8

Observație: 1) Avînd în vedere specificul încărcării (o singură sarcină concentrată) nu interesează în mod obișnuit ce se petrece în mijlocul deschiderilor cu excepția deschiderii unde acționează sarcina. De aceea nu s-au mai calculat valorile momentelor încovoietoare din toate coloanele.

2) Deoarece s-a calculat totul începînd de la sarcina unitară $P=1$ momentele în noduri și cele nou introduse, s-au notat cu litere mici (m).

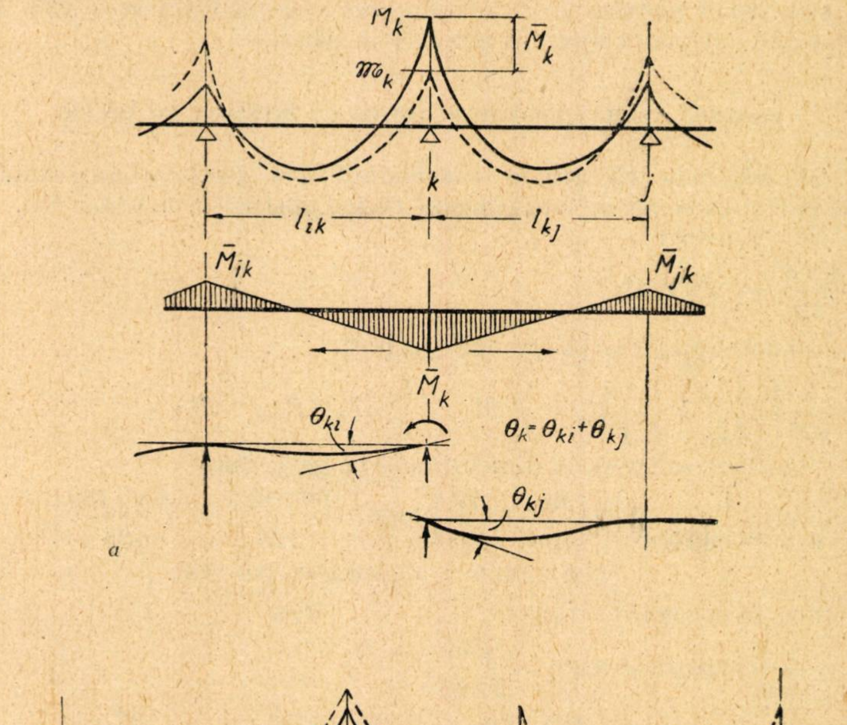

M_k
$\bar{M}_k$
$\mathfrak{M}_k$
i
k
j
l_{ik}
l_{kj}
$\bar{M}_{ik}$
$\bar{M}_{jk}$
$\bar{M}_k$
θ_{ki}
$\theta_k = \theta_{ki} + \theta_{kj}$
θ_{kj}
a
a
b
$\bar{M}$
a
b
$\bar{M}$
M_a
M_b
θ_a
h_s
I_s
$k_s = \frac{I_s}{h_s}$
b
a
b
$\bar{M}$
$\bar{M}$
θ_a
θ_b
$\bar{\theta}$
θ_a
θ_b
a
b
l
c

Fig. 4. — Notații pentru calculul rotirilor articulațiilor plastice *a*) articulație plastică apărută lîngă un nod ; *b*), *c*) articulație plastică apărută în cîmp.

acelaşi semn, în acel nod poate apare o articulaţie plastică. În caz contrar cum este cazul nodului 1 la introducerea momentului $m = 236$ kgm, în acel nod nu poate apare o articulaţie plastică.

ROTIREA ARTICULAŢIILOR PLASTICE LA DIFERITE ÎNCĂRCĂRI

Să admitem că grinda considerată are secţiune constantă de 30·80 cm² şi că se poate face calculul făcînd abstracţie de armătură.

Se va avea :

$$I = \frac{3 \times 8^3}{12} = 128 \text{ dm}^4,$$

$$E = 160\,000 \text{ kg/cm}^2 = 16\,000\,000 \text{ kg/dm}^2,$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{6E}\left[2\left(\frac{l_{ki}}{I_{ki}} + \frac{l_{kj}}{I_{kj}}\right)\overline{M}_k + \frac{l_{ik}}{I_{ik}} M_{ik} + \frac{l_{jk}}{I_{jk}} M_{jk}\right](P_{t+i} - P_t)$$

Vom face calculul cu dimensiunile în kg şi dm,

$$\bar{\theta}_3^1 = \frac{1}{6 \times 16\,000\,000}\left[2\left(\frac{60}{128} + \frac{70}{128}\right)2360 - \frac{60 \times 620}{128} - \frac{70 \times 1180}{128}\right],$$

$$\bar{\theta}_3^1 = \frac{1}{6 \times 16\,000\,000}\left[\frac{260 \times 2360}{128} - \frac{60 \times 620 + 70 \times 1180}{128}\right],$$

$$\bar{\theta}_3^1 = \frac{1}{24\,800} \cdot (18{,}25 - 9{,}35) = \frac{0{,}36}{1\,000},$$

$$\bar{\theta}_3^2 = \frac{1}{6 \times 16\,000\,000}\left[2\left(\frac{60 \times 70}{128}\right)300 - \frac{70 \times 150}{128}\right] = \frac{527}{6 \times 16\,000\,000},$$

$$\theta_3^2 = \frac{0{,}136}{24\,800}(20{,}8 - 18{,}25) = \frac{0{,}014}{1\,000},$$

$$\bar{\theta}_2^2 = \frac{1}{6 \times 16\,000\,000}\left[\frac{2 \times 120 \times 620}{128} - \frac{60 \times 160}{128}\right],$$

$$\bar{\theta}_2^2 = \frac{1\,090}{6 \times 16\,000\,000} = \frac{1{,}09}{6 \times 16\,000} = \frac{0{,}282}{24\,800}(20{,}8 - 18{,}25) = \frac{0{,}029}{1\,000}.$$

Tabela 2

Rotaţia articulaţiilor plastice

Articulaţie deschisă	Art. I	II	Total
	3	2	
3	$\frac{0{,}36}{1\,000}$	$\frac{0{,}014}{1\,000}$	$\frac{0{,}374}{1\,000}$
2	—	$\frac{0{,}029}{1\,000}$	$\frac{0{,}029}{1\,000}$

Deschiderea articulaţiilor plastice se calculează pentru fiecare articulaţie, la apariţia fiecărei noi articulaţii apărute în structură. Deschiderea finală se poate obţine prin sumarea rotaţiilor succesive a fiecărei articulaţii în parte.

CONCLUZII

În cele precedente s-a arătat modul de calcul al momentelor încovoietoare şi ordinea de apariţia articulaţiilor plastice în structuri solicitate de o sarcină permanentă şi o sarcină crescătoare. Dacă în locul sarcinii P s-ar fi pus un grup de sarcini ce cresc proporţional, modul de aplicare al metodei ar fi fost acelaşi.

Metoda propusă şi expusă pe larg în *Revue de mécanique appliquée*, nr. 4, 1959 pentru sarcini ce cresc proporţional, se poate aplica în totul în condiţii satisfăcătoare şi în cazurile studiate în lucrarea de faţă. Se întrevăd de altfel o serie de variante a modului de aplicare a metodei expuse, în diferite alte cazuri.

Pentru cazul unei sarcini constante şi unui grup de sarcini ce cresc proporţional, în mod obişnuit rezervele de rezistenţă ale unei structuri, pot apare mai mici decît în cazul structurilor la care toate sarcinile cresc proporţional.

În cazul unei sarcini verticale crescătoare concentrate pe un panou, articulaţiile plastice se grupează de obicei la nodurile vecine panoului încărcat.

Cînd sarcina crescătoare este orizontală şi se aplică unui cadru cu unul sau mai multe nivele, rezervele de rezistenţă ale întregii structuri pot fi foarte mari, iar articulaţiile plastice sînt distribuite în întreaga structură.

Metoda permite calculul fără dificultăţi a rotirii articulaţiilor plastice precum şi calculul deschiderii fisurilor în articulaţiile plastice şi aceasta indiferent de tipul de încărcare al structurii.

Primită la redacţie la 19 februarie 1960

ПОРЯДОК ПОЯВЛЕНИЯ И ВРАЩЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ШАРНИРОВ СТАТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НАГРУЗКИ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ГРУППЫ НАГРУЗОК

РЕЗЮМЕ

Для статических конструкций, подверженных действию установившейся нагрузки и возрастающей нагрузки или пропорционально возрастающей группы нагрузок, применяется общий метод, описанный

в „Revue de mécanique appliquée", № 4, 1959 г. [4], дается расчетный метод для определения:

— порядка появления пластических шарниров;

— нагрузки, действующей на конструкцию при появлении различных пластических шарниров;

— последовательного вращения различных возникающих пластических шарниров.

Делаются выводы о поведении статических конструкций под действием эффекта такого рода нагружения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Предварительные изгибающие моменты в балке для равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной нагрузки $P = 1$т.

Рис. 2. — Передача единичных изгибающих моментов после появления пластических шарниров в балке.

Рис. 3. — Нагрузки, выносимые балкой при появлении различных пластических шарниров.

Рис. 4. — Обозначения для расчета вращений пластических шарниров: *a*) пластический шарнир, появившийся около узла; *b*), *c*) пластические шарниры, появившиеся в поле.

THE ORDER OF OCCURRENCE AND THE ROTATION OF PLASTIC HINGES FOR A STATIC STRUCTURE SUBJECTED TO A PERMANENT LOADING AND A GROUP OF PROPORTIONALLY INCREASING LOADS

ABSTRACT

By using the general method presented in "Revue de mécanique appliquée" N° 4, 1959 [4] for static structures subjected to a permanent load and an increasing load or a group of proportionally increasing loads, this paper presents a method of calculation for

— the order of occurrence of plastic hinges;

— the load to which the structure is subjected when various plastic hinges occur;

— the successive rotation of various plastic hinges.

Conclusions are drawn on the behaviour of static structures under the action of such loads.

EXPLANATION OF THE FIGURES

Fig. 1. — Preliminary bending moments in the beam for the uniformly distributed load and the concentrated load $P = 1$ ton.

Fig. 2. — Transmission of the bending moments after the occurrence of plastic hinges in the beam.

Fig. 3. — Loads to which the beam is subjected at the occurrence of various plastic hinges.
Fig. 4. — Notation employed for the calculation of rotations and plastic hinges :
a) plastic hinges occurring near a node
b, *c*) plastic hinges occurring bestween two supports.

BIBLIOGRAFIE

1. M. D. Hangan, *Une méthode de calcul des structures hyperstatiques dans le domaine élasto-plastique*. Revue de Mécanique Appliquée, *4* (1959).
2. А. А. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкций по методу предлинного равновесия*. Гостехиздат, Москва, 1949.
3. I. F. Baker, *A review of recent investigations into the behaviour of steel frames in the plastic range*. J. Inst. Civ. Engr., 31 (1949).
4. L. L. Baker, *Note on Meeting at Stockholm*. June, 1960.
5. Y. Guyon, *The Strength of Statically Indeterminate Prestressed concrete Structures*. Simposium of the Strength Concrete Structures, London, 1956.

SISTEMELE CONJUGATE, MIJLOC DE EXPRIMARE A CONDIȚIEI DE COMPATIBILITATE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR

DE

ALEXANDRU GHEORGHIU[1]

1. *Condiția de compatibilitate.* La rezolvarea diferitelor probleme ale staticii structurilor alcătuite din bare, se utilizează trei condiții fundamentale, care exprimă aspecte diferite ale situației de echilibru a structurii : (1) O condiție care se referă la ansamblul forțelor ce acționează în sistemul considerat și care exprimă echilibrul acestora — condiția de *echilibru static* ; (2) O condiție care se referă la configurația structurii în situația de echilibru și care exprimă că această configurație respectă totalitatea legăturilor exterioare și interioare existente în sistem în stadiul considerat — condiția de *compatibilitate* ; (3) O condiție care se referă la datele fizice ale structurii (natura materialului, dimensiunile elementelor) și care exprimă că în nici o secțiune solicitarea nu depășește o anumită limită — condiția de *elasticitate* (plasticitate).

Condiția de compatibilitate, care este o condiție cu caracter geometric, intervine ori de cîte ori este necesară considerarea și determinarea unor *poziții deplasate* ale structurii, foarte apropiate de poziția inițială, fie că acestea se referă la poziții deformate reale sau la configurații de deplasări virtuale, cu caracter cinematic sau elastic.

Astfel, la structuri static nedeterminate, unde rezolvarea necesită cercetarea situației de echilibru în poziția deformată, condiția de compatibilitate pentru stadiul elastic se referă la respectarea în poziția deformată a legăturilor și a continuității barelor. Cînd structura trece în stadiul elastico-plastic, de exemplu în cazul cadrelor, condiția trebuie să țină seama și de rotirile relative care se produc în anumite secțiuni, prin dispariția unor legături datorită formării de articulații plastice (admise punctuale). Utilizarea deplasărilor virtuale se bazează de asemenea pe condiția de compatibilitate, deoarece orice configurație de deplasare virtuală este definită numai prin această condiție. Asemănător, în calculul cadrelor la cedarea plastică, aplicarea condiției de mecanism necesită cercetarea diferitelor mecanisme de cedare posibile, ale căror configurații, cît și corelația dintre rotirile relative din articulațiile plastice, rezultă tot din condiția de compatibilitate.

---

[1] Institutul de construcții, București.

Pentru determinarea pozițiilor deplasate se pot folosi diferite metode, dintre care cele uzuale operează direct pe sistemul dat. Astfel, la deplasări cu caracter cinematic se utilizează geometria centrelor instantanee (respectiv geometria axelor instantanee) și se trasează diagrame de deplasări; la studiul pozițiilor deformate elastic se utilizează formula *Maxwell-Mohr*, ecuația fibrei medii deformate etc. În afară de acestea, în literatura de specialitate se întîlnesc și alte modalități de studiu, prezentate în genere izolat și sub forme particulare, care au la bază operarea pe sisteme convenționale, cum sînt : metoda „suprafețelor de momente”, dată de *O. Mohr* pentru grinda simplu rezemată și extinsă ulterior sub forma metodei „grafo-analitice”, metoda „sarcinilor elastice” la grinzi cu zăbrele, metoda „analogiei coloanelor” propusă de *H. Cross* etc. Pornind de la aceste forme particulare, s-a ajuns la cuprinderea lor într-o metodă unitară și generală, care are la bază înlocuirea operării pe sistemul real cu operarea pe un sistem convențional — *sistemul conjugat.* Semnificația generală a sistemelor conjugate, proprietățile lor și modul de utilizare au fost expuse în lucrări anterioare [1], [2], [3].

Trecerea la sistemul convențional (conjugat) are la bază o analogie, care dă o interpretare statică caracteristicilor geometrice ale poziției deplasate considerate. Corelațiile geometrice dintre vectorii-deplasări relative, care definesc poziția deplasată, devin corelații statice în sistemul conjugat, unde aceiași vectori apar ca forțe exterioare (vectorii-rotiri relative sînt considerați drept forțe, iar vectorii-deplasări liniare relative sînt considerați drept vectori-moment). Pentru fiecare contur al structurii date, condiția geometrică de închidere a deplasărilor relative între reperele de la extremități este reprezentată, în sistemul conjugat asociat, prin condiția de echilibru static a forțelor exterioare aplicate pe conturul corespunzător. Astfel, reținînd elementul esențial al semnificației sistemelor conjugate, rezultă : *condiția de compatibilitate a unei anumite poziții deplasate este analogă cu condiția de echilibru static a sistemului conjugat respectiv.* În această interpretare, sistemul conjugat apare ca o reprezentare a condiției de compatibilitate pentru poziția deplasată considerată.

Înseamnă că se pot înlocui corelațiile cu caracter geometric referitoare la poziția deplasată a structurii reale, prin corelații cu caracter static în sistemul convențional. În problemele unde este necesară utilizarea concomitentă a condiției de echilibru static și a condiției de compatibilitate, în loc de a recurge la exprimări cu specific diferit pe structura reală, se ajunge pe această cale la o tratare unitară, în sensul că ambele condiții apar sub forma condiției de echilibru static, aplicată atît structurii date cît și sistemului conjugat asociat. Cînd intervine numai condiția de compatibilitate, exprimarea echilibrului static în sistemul conjugat este suficientă pentru rezolvare.

În cele ce urmează se arată modul cum se reflectă condiția de compatibilitate în sistemul conjugat, pentru unele categorii de probleme din calculul structurilor, punînd în evidență posibilitățile și căile eficiente de utilizare. Expunerea se referă la structuri alcătuite din elemente cu secțiune plină, la care folosirea sistemelor conjugate apare de obicei avantajoasă.

2. *Configurații de deplasări virtuale.* Poziții deplasate cu caracter cinematic apar obișnuit la determinarea eforturilor și la trasarea liniilor de influență pentru structuri static determinate, folosind deplasările virtuale. Prin suprimarea legăturii de pe direcția necunoscutei considerate, se ajunge la un sistem cinematic cu un singur grad de libertate; problema constă în determinarea configurației deplasării virtuale compatibile cu legăturile rămase.

Se știe că unei structuri static determinate îi corespunde un sistem conjugat de asemenea static determinat, care se obține din structura dată prin operația cunoscută de transformare de legături. Suprimarea unei legături în structură și producerea pe direcția acesteia a unei deplasări de mărime arbitrară (obișnuit o deplasare-unitate), este analogă cu aplicarea pe sistemul conjugat a sarcinii convenționale corespunzătoare. Sistemul conjugat static determinat, încărcat cu sarcina convențională, se rezolvă prin condiția de echilibru static (aplicată pe contururi). Reacțiunile conjugatei reprezintă deplasările relative din punctele corespunzătoare ale structurii reale, iar eforturile din diferitele secțiuni ale conjugatei reprezintă deplasările efective ale secțiunilor corespunzătoare din structura reală. Configurația deplasării virtuale este astfel determinată. La structuri plane, care se deplasează în planul lor, diagramele de deplasări după direcții date se obțin sub forma diagramelor de momente încovoietoare ale conjugatelor simplificate corespunzătoare acestor direcții [1]). La structuri care se deplasează normal pe planul lor, diagrama deplasărilor după normala la plan este dată de diagrama de momente încovoietoare a sistemului conjugat (care în acest caz apare ca o structură plană încărcată cu forțe acționînd în planul său).

Pentru exemplificare, fie cadrul plan din fig. 1 *a*, la care se produce o rotire relativă $\overline{\theta}_i = 1$, în secțiunea *i*. Sistemul conjugat se vede în fig. 1 *b*, în care apar un număr de nouă reacțiuni ($\overline{u}_1, \overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_4, \overline{\theta}_6, \overline{\delta}_6, \overline{\theta}_7, \overline{\theta}_8$ și $\overline{u}_8$), precum și sarcina convențională $\overline{\theta}_i = 1$, ale căror sensuri se definesc în raport cu sensurile de parcurgere indicate pentru bare. Sînt trei contururi, pentru care se pot scrie în total nouă ecuații de echilibru static, cîte trei pentru fiecare contur. Pornind de la conturul central, pe care se aplică sarcina convențională, se determină cele trei necunoscute ale acestuia ($\overline{\theta}_4$, $\overline{\theta}_6$ și $\overline{\delta}_6$). Se trece apoi la contururile laterale, inversînd sensurile reacțiunilor de pe barele comune și se determină celelalte două grupe de cîte trei reacțiuni. Cu aceste elemente se pot calcula deplasările secțiunilor care definesc configurația deplasării virtuale (de ex. $u_2 = M^c_{x2}$, $v_2 = M^c_{y2}$, etc.); aceasta este schițată în fig. 1 *d*. Pentru diagrama deplasărilor pe verticală se utilizează conjugata simplificată din fig. 1*c*.

---

[1]) Semnificația conjugatelor auxiliare și trasarea sistematizată a diagramelor de momente încovoietoare ale acestora, fără a mai fi necesară determinarea mărimii reacțiunilor din sistemul conjugat, este examinată și exemplificată în lucrarea [2].

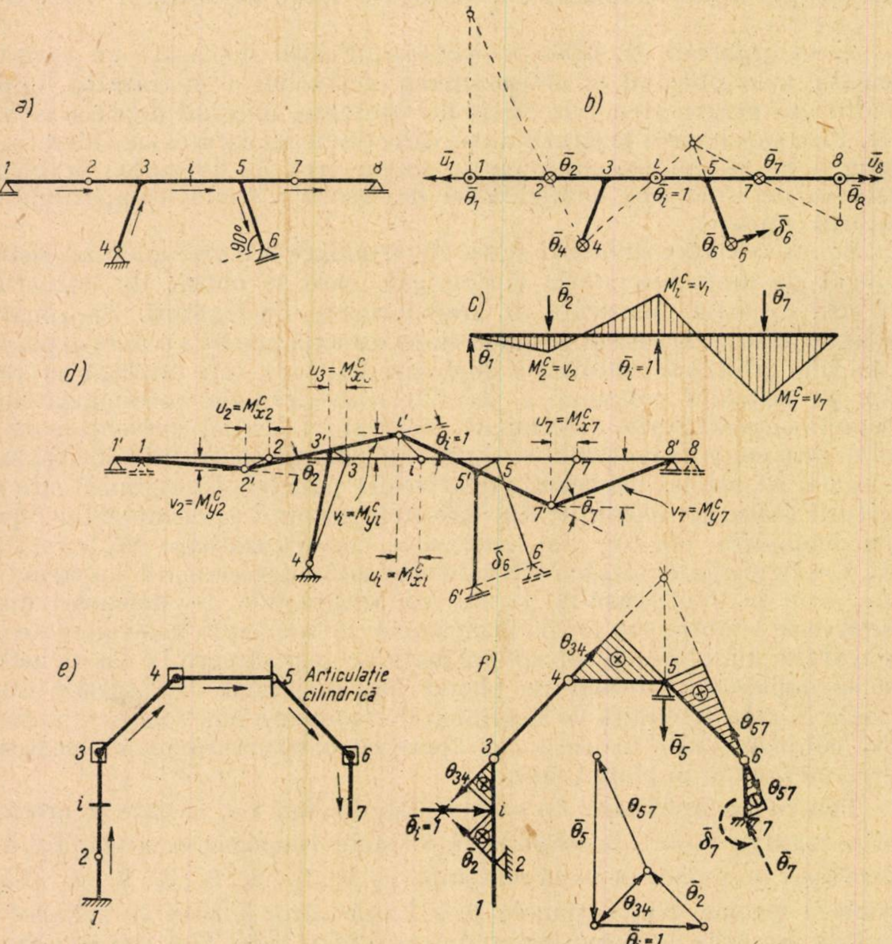

a)
1
2
3
i
5
7
8
4
6
90°
b)
$\bar{u}_1$
1
$\bar{\theta}_1$
2
$\bar{\theta}_2$
3
i
$\bar{\theta}_i=1$
5
$\bar{\theta}_7$
7
8
$\bar{u}_8$
$\bar{\theta}_8$
$\bar{\theta}_4$
4
$\bar{\theta}_6$
6
$\bar{\delta}_6$
c)
$\bar{\theta}_2$
$M_i^c=v_i$
$\bar{\theta}_7$
$\bar{\theta}_1$
$M_2^c=v_2$
$\bar{\theta}_i=1$
$M_7^c=v_7$
d)
$u_3=M_{x3}^c$
$u_2=M_{x2}^c$
$u_7=M_{x7}^c$
1'
1
2
3'
i'
$\bar{\theta}_i=1$
8'
8
2'
$\bar{\theta}_2$
3
i
5'
5
7
$v_2=M_{y2}^c$
$v_i=M_{yi}^c$
7'
$\bar{\theta}_7$
$v_7=M_{y7}^c$
4
$u_i=M_{xi}^c$
$\bar{\delta}_6$
6
6'
e)
4
5
Articulație cilindrică
3
6
i
2
7
1
f)
θ_{34}
4
5
$\bar{\theta}_5$
θ_{57}
3
6
θ_{34}
$\bar{\theta}_i=1$
i
$\bar{\theta}_2$
2
1
$\bar{\theta}_5$
θ_{57}
θ_{34}
$\bar{\theta}_2$
$\bar{\theta}_i=1$
θ_{57}
7
$\bar{\delta}_7$
$\bar{\theta}_7$

Fig. 1. — Determinarea configurației deplasărilor virtuale.

Determinarea configurației deplasărilor virtuale cu ajutorul sistemelor conjugate este îndeosebi avantajoasă la structuri plane care se deplasează normal pe planul lor, deoarece se înlocuiește astfel studiul pe cale cinematică a unei deplasări virtule spațiale, cu trasarea unei diagrame de momente încovoietoare la un sistem plan. Fie, de exemplu, bara plană din fig. 2 *e*, incastrată complet în extremitatea *1* şi aşezată pe trei reazeme simple, avînd în cursul său o articulaţie sferică în secţiunea *2* şi o articulaţie cilindrică în secţiunea *5*; printr-o secţionare incompletă, se produce o rotire relativă $\overline{\theta}_i = 1$, în secţiunea *i*, perpendicular pe axa barei *2—3*. Sistemul conjugat se vede în fig. 2 *f*, unde s-a aplicat sarcina convenţională $\overline{\theta}_i = 1$. Folosind condiţia de echilibru static, se determină direcţiile reacţiunilor $\overline{\theta}_2$ şi $\overline{\theta}_5$, precum şi acţiunile reciproce θ_{34} şi θ_{57}; mărimile acestora rezultă în fig. 2 *g*. Se poate acum trasa diagrama de momente încovoietoare a sistemului conjugat, în forma haşurată pe figură (momentele încovoietoare pozitive reprezintă deplasări deasupra planului). Ordonatele de pe porţiunile *2—i*, *i—5* şi *5—7* trebuie multiplicate respectiv cu $\overline{\theta}_2$, θ_{34} şi θ_{57}, ale căror mărimi au fost determinate în funcţie de deplasarea relativă dată ($\overline{\theta}_i = 1$).

3. *Sisteme cu formă critică.* Este cunoscut că aceste sisteme sînt lipsite de *strictă* indeformabilitate geometrică, deşi au *numărul* minim necesar de legături corespunzător situaţiei de determinare statică. Forma critică provine dintr-o situaţie geometrică particulară privind alcătuirea structurii şi dispunerea legăturilor.

Identificarea structurilor cu formă critică se poate face pe două căi, după cum se foloseşte condiţia de echilibru static sau condiţia de compatibilitate. Pentru prima cale este caracteristică metoda cunoscută a „sarcinii-zero”. Considerînd structura neîncărcată, criteriul constă în cercetarea posibilităţii de a găsi un sistem de forţe de legătură, diferite de zero, care să fie în echilibru. Analitic, aceasta corespunde cazului cînd în sistemul omogen al ecuaţiilor de echilibru static (termeni liberi nuli datorită lipsei sarcinilor), determinantul principal este nul. Folosind a doua cale, care se adresează direct fenomenului fizic de lipsă a strictei indeformabilităţi geometrice, se cercetează posibilitatea unei deplasări compatibile cu caracter cinematic. Este acelaşi lucru cu a produce o deplasare virtuală, însă fără suprimare de legături. Obişnuit, se folosesc pentru cercetare proprietăţile de coliniaritate a centrelor instantanee, în cazul sistemelor plane care se deplasează în planul lor, respectiv proprietăţile de concurenţă a axelor instantanee, în cazul sistemelor plane care se deplasează normal pe planul lor.

Posibilitatea unei poziţii deplasate compatibile poate fi studiată folosind condiţia de echilibru static a sistemului conjugat. De data aceasta, în sistemul conjugat nu mai apare o sarcină convenţională, ca în fig. 1, ci trebuie considerate numai reacţiunile ce rezultă prin transformarea de legături şi care sînt în număr egal cu ecuaţiile de echilibru static disponibile. O poziţie deplasată posibilă în sistemul dat implică reacţiuni diferite de zero în sistemul conjugat, deci situaţia de formă critică este caracterizată prin posibilitatea de a găsi un sistem de reacţiuni, diferite de zero, care să asigure echilibrul sistemului conjugat. Rezultă de aici că *metoda de identificare pe criteriul unei poziţii deplasate compatibile, aplicată sistemului real, este analogă cu aplicarea metodei sarcinii-zero în sistemul conjugat.* În această interpretare, metoda sarcinii-zero devine unica metodă

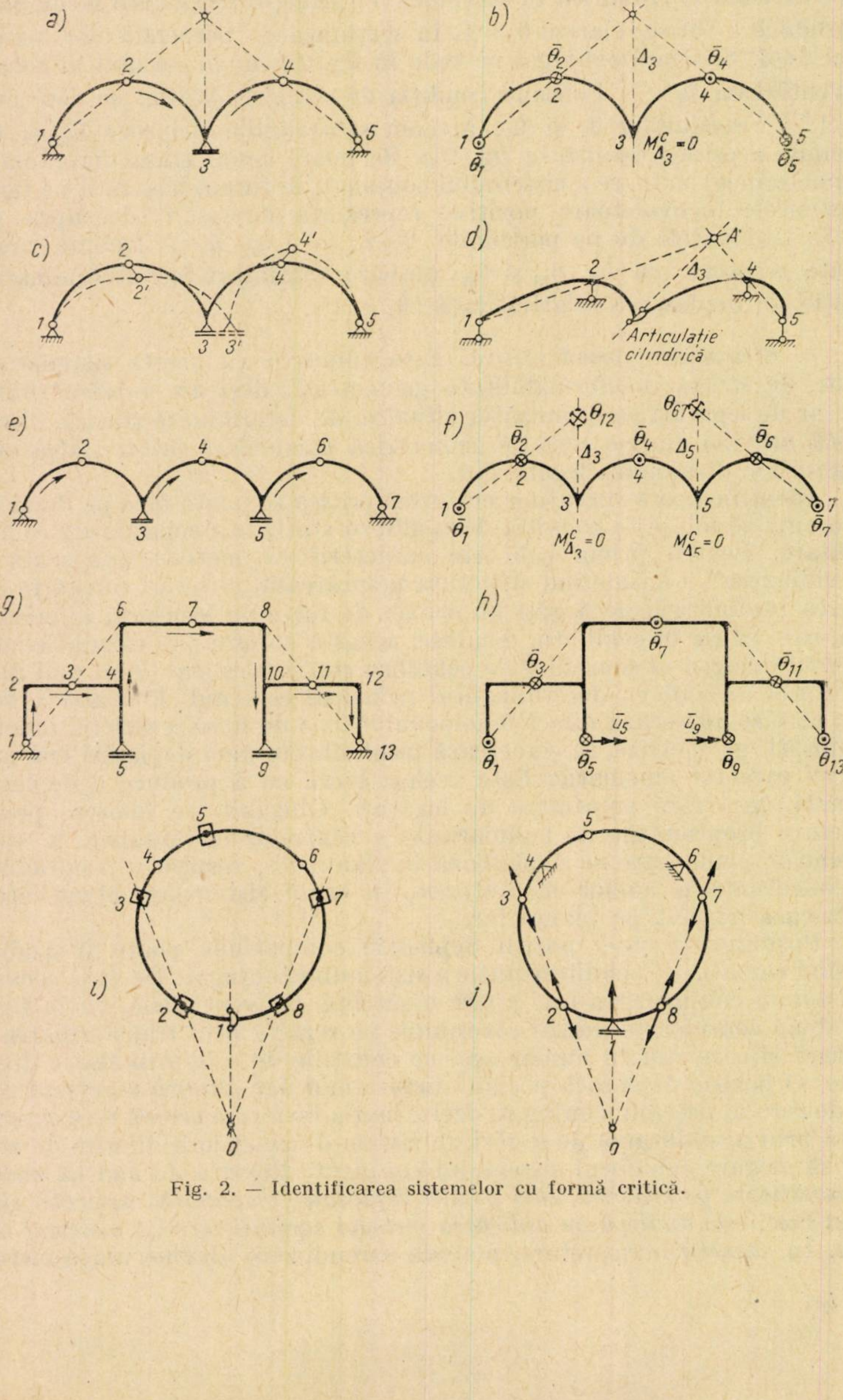

a)
A
1
2
3
4
5
b)
A
$\bar{\theta}_2$
Δ_3
$\bar{\theta}_4$
1
2
3
4
5
$\bar{\theta}_1$
$M^c_{\Delta_3}=0$
$\bar{\theta}_5$
c)
1
2
2'
3
3'
4
4'
5
d)
A'
Δ_3
1
2
4
5
Articulație cilindrică
e)
1
2
3
4
5
6
7
f)
θ_{12}
θ_{67}
$\bar{\theta}_2$
$\bar{\theta}_4$
$\bar{\theta}_6$
Δ_3
Δ_5
1
2
3
4
5
7
$\bar{\theta}_1$
$\bar{\theta}_7$
$M^c_{\Delta_3}=0$
$M^c_{\Delta_5}=0$
g)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
h)
$\bar{\theta}_3$
$\bar{\theta}_7$
$\bar{\theta}_{11}$
$\bar{u}_5$
$\bar{u}_9$
$\bar{\theta}_1$
$\bar{\theta}_5$
$\bar{\theta}_9$
$\bar{\theta}_{13}$
i)
1
2
3
4
5
6
7
8
0
j)
1
2
3
4
5
6
7
8
0

Fig. 2. — Identificarea sistemelor cu formă critică.

de identificare, urmînd a fi aplicată fie în sistemul dat, fie în sistemul conjugat asociat.

Exemplificări sînt date în fig. 2. Este ușor de văzut că în cazul *a*) sistemul are formă critică, deoarece se reduce de fapt la porțiunea *2—3—4*, rezemată prin trei reazeme simple ale căror reacțiuni au suporturi concurente; echilibrul poate fi satisfăcut pentru mărimi diferite de zero ale reacțiunilor. Sistemul conjugat are un singur contur și este arătat în fig. 2 *b*, unde apar patru reacțiuni și o condiție de moment nul în secțiunea *3*, după direcția axei Δ_3, care corespunde deplasării efective nule pe verticală în dreptul reazemului simplu. Această condiție impune ca rezultantele perechilor de reacțiuni $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ și $\overline{\theta}_4$, $\overline{\theta}_5$ să fie aplicate pe axa Δ_3, la intersecțiile acesteia cu dreptele *1—2* și *4—5*. Datorită poziției particulare a articulațiilor în cazul considerat, ambele rezultante se aplică în punctul *A*, astfel că este suficient ca ele să fie egale și de sens contrar pentru ca echilibrul conjugatei să fie asigurat. Este deci posibilă o poziție deplasată compatibilă a sistemului dat, schițată în fig. 2 *c*. În cazul *e*) este arătat un sistem asemănător, dar cu număr impar de deschideri. Sistemul conjugat din fig. 2 *f* are tot un singur contur, unde apare un număr de cinci reacțiuni și două condiții de moment nul în secțiunile *3* și *5*, după axele Δ_3 respectiv Δ_5. Procedînd asemănător, se ajunge la concluzia că rezultantele $\overline{\theta}_{12}$ și $\overline{\theta}_{67}$ împreună cu reacțiunea $\overline{\theta}_4$ trebuie să-și facă echilibru, ceea ce — în cazul considerat — este imposibil cu reacțiuni diferite de zero. Nefiind deci posibilă o poziție deplasată compatibilă, sistemul dat are strictă indeformabilitate geometrică. Dacă alcătuirea sistemului s-ar modifica, prin înălțarea arcului din deschiderea centrală astfel ca — în sistemul conjugat — $\overline{\theta}_{12}$, $\overline{\theta}_{67}$ și $\overline{\theta}_4$ să devină coliniare, se ajunge la un caz de formă critică.

La sisteme cu formă critică avînd un singur contur, concretizînd legăturile rezultate din operația de transformare, sistemul conjugat apare de asemenea cu formă critică (de exemplu sistemul conjugat din fig. 2 *d*, care corespunde sistemului cu formă critică din fig. 2 *a*). Această situație are numai semnificația de a reflecta posibilitatea existenței unui sistem de reacțiuni diferite de zero, în echilibru, deoarece în acest caz condiția de echilibru static se aplică întregului sistem conjugat. Cînd sînt mai multe contururi, ansamblul sistemului conjugat constituie numai o formă sistematizată de reprezentare, condiția de echilibru static urmînd a fi aplicată — separat — pe contururi, neavînd semnificație decît în aceste condiții. Astfel, sistemului din fig. 2 *g* (care are o alcătuire asemănătoare cu cel din fig. 2 *e*), îi corespunde sistemul conjugat din fig. 2 *h*. Din echilibrul contururilor laterale rezultă că perechile de reacțiuni $\overline{u}_5$, $\overline{\theta}_5$ și $\overline{u}_9$, $\overline{\theta}_9$ se reduc la cîte o rezultantă-forță aplicată în punctele *6*, respectiv *8*. În conturul central apar astfel trei forțe cu puncte de aplicație coliniare, deci echilibrul este posibil cu reacțiuni diferite de zero. Forma critică este identificată.

Datorită reciprocității cunoscute de situație între o structură și sistemul conjugat asociat, considerînd ca sistem dat pe cel din fig. 2 *d*, acestuia îi corespunde sistemul conjugat din fig. 2 *a*, căruia urmează să i se aplice metoda sarcinii zero. *Identificarea situației de formă critică la un sistem spațial, se reduce astfel la aplicarea metodei sarcinii-zero la un sistem plan.* Pentru structuri spațiale de acest fel, folosirea interpretării statice a condiției de compatibilitate elimină necesitatea cercetării directe cinematice și poate aduce astfel avantaje substanțiale. Fie, de exemplu, sistemul din fig. 2 *i* format dintr-o bară inelară așezată pe cinci reazeme simple și care are în cursul său două articulații sferice, precum și o articulație cilindrică a cărei axă trece prin intersecția liniilor ce unesc reazemele *2* și *3*, respectiv *7* și *8*. Sistemul conjugat este arătat în fig. 2 *j*. Admițînd o reacțiune diferită de zero în reazemul simplu *1*, se vede imediat că este posibil echilibrul porțiunilor *2—8*, *2—3* și *7—8*, de asemenea că se pot determina reacțiunile din reazemele articulate *4* și *6*, deoarece porțiunea *3—4—5—6—7* rezultă static determinată (arc cu trei articulații). Fiind posibil în sistemul conjugat un sistem de reacțiuni diferite de zero, în echilibru, sistemul dat are formă critică.

4. *Mecanisme de cedare plastică.* Se știe că un cadru își pierde capacitatea portantă cînd într-un număr suficient de secțiuni momentul încovoietor ajunge egal cu momentul plastic total al secțiunilor respective, astfel că întreaga structură sau numai o parte a ei, se transformă într-un mecanism cu articulații plastice. La determinarea factorului de încărcare limită, se admite că s-au format toate articulațiile plastice corespunzătoare mecanismului de cedare și că acest mecanism începe să funcționeze. Continuitatea a dispărut deci în toate secțiunile unde apar articulații plastice; totodată, porțiunile structurii separate prin aceste articulații sînt privite drept corpuri rigide. Aplicarea condiției de mecanism necesită cunoașterea mecanismului de cedare, cît și stabilirea corelației dintre rotirile relative din articulațiile plastice, precum și a deplasărilor efective din dreptul sarcinilor.

Din punct de vedere al aplicării condiției de compatibilitate, situația este similară celei întîlnite la studiul configurațiilor de deplasări virtuale. Specificul problemei constă aici în identificarea diferitelor mecanisme de cedare posibile. La cadre de formă oarecare, este mai avantajos să se facă acest studiu de triere cu ajutorul sistemelor conjugate, unde corelațiile dintre rotirile relative și determinarea deplasărilor efective rezultă din operații statice simple, evitînd astfel determinarea centrelor instantanee și trasarea diagramelor de deplasări, care sînt deobicei necesare cînd condiția de compatibilitate se aplică mecanismului însuși. De asemenea, cînd se utilizează metoda combinării mecanismelor elementare [4], aprecierea combinărilor utile apare mai clară și efectuarea lor este mai simplă, deoarece totul se reduce la suprapuneri convenabile ale unor sisteme de forțe în echilibru.

La mecanismele de cedare plastică intervin numai rotirile relative din articulațiile plastice, deci sistemul conjugat al unui cadru plan apare ca o structură plană încărcată cu forțe concentrate aplicate normal pe plan. Una dintre acestea se alege arbitrar (obișnuit de mărime egală cu unitatea) și are caracter de *sarcină* convențională, iar celelalte — cu sensuri

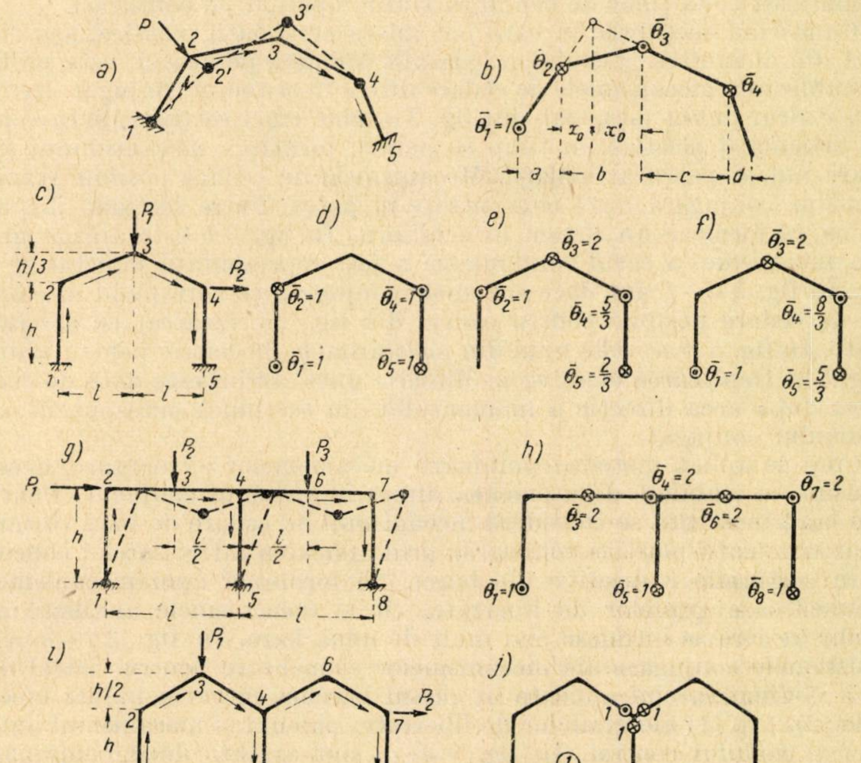

a)
P
1
2
2'
3
3'
4
5
b)
$\bar{\theta}_1=1$
$\bar{\theta}_2$
$\bar{\theta}_3$
$\bar{\theta}_4$
x_0
x'_0
a
b
c
d
c)
P_1
P_2
h/3
h
l
1
2
3
4
5
d)
$\bar{\theta}_1=1$
$\bar{\theta}_2=1$
$\bar{\theta}_4=1$
$\bar{\theta}_5=1$
e)
$\bar{\theta}_2=1$
$\bar{\theta}_3=2$
$\bar{\theta}_4=\frac{5}{3}$
$\bar{\theta}_5=\frac{2}{3}$
f)
$\bar{\theta}_1=1$
$\bar{\theta}_3=2$
$\bar{\theta}_4=\frac{8}{3}$
$\bar{\theta}_5=\frac{5}{3}$
g)
P_1
P_2
P_3
h
$\frac{l}{2}$
l
1
2
3
4
5
6
7
8
h)
$\bar{\theta}_1=1$
$\bar{\theta}_3=2$
$\bar{\theta}_4=2$
$\bar{\theta}_5=1$
$\bar{\theta}_6=2$
$\bar{\theta}_7=2$
$\bar{\theta}_8=1$
i)
P_1
P_2
h/2
h
l
1
2
3
4
5
6
7
8
j)
①
k)
②
l)
③
m)
④
n)
② + 2·④
o)
③ + ④ + ①

Fig. 3. — Alcătuirea şi combinarea mecanismelor de cedare plastică.

și mărimi inițial necunoscute — au caracter de *reacțiuni* și se determină prin aplicarea condițiilor de echilibru static, operînd pe contururi.

Cunoscînd secțiunile în care pot apare articulații plastice, așa cum rezultă din alcătuirea cadrului și sarcinile aplicate pe acesta, este posibil să se stabilească mecanismele de cedare direct în sistemul conjugat. Astfel, pentru cadrul dublu incastrat din fig. 3 *a*, sînt cinci secțiuni în care pot apare articulații plastice, în timp ce pentru formarea mecanismului sînt necesare numai patru articulații. Mecanismele de cedare posibile rezultă aplicînd pe conjugată forțe concentrate în patru dintre secțiuni, dispuse astfel ca să formeze un sistem în echilibru. În fig. 3 *b* este arătat unul dintre mecanisme, a cărui configurație a fost reprezentată punctat și pe cadru. În fig. 3 *d*—*f* sînt date sistemele conjugate ce corespund mecanismelor de cedare posibile pentru cadrul din fig. 3 *c*, încărcat cu sarcinile indicate. În fig. 3 *h* se vede unul din mecanismele de cedare pentru cadrul din fig. 3 *g*. Deplasarea efectivă pe direcția unei sarcini este dată de componenta după acea direcție a momentului din secțiunea corespunzătoare a sistemului conjugat.

Cînd se aplică metoda combinării mecanismelor elementare, aceste mecanisme se stabilesc de asemenea direct în sistemul conjugat. Pentru fiecare bară încărcată se consideră mecanismul de cedare de bară (format din trei articulații plastice colineare), prin aplicarea a trei sarcini concentrate în secțiunile respective ale barei. Se formează apoi mecanismele corespunzătoare gradelor de libertate, cît și mecanismele auxiliare ale nodurilor în care se întîlnesc mai mult de două bare. În fig. 3 *j*—*m* sînt date sistemele conjugate ale mecanismelor elementare pentru cadrul din fig 3 *i*. Nefiind sarcini aplicate în cursul barelor, intervin numai mecanismele (2), (3), (4) ale gradelor de libertate, precum și mecanismul auxiliar (1) al nodului central. În fig. 3 *n*—*o* sînt arătate două combinări, care conduc la mecanisme totale de cedare.

5. *Poziții deformate în stadiul elastic.* La studiul poziției deformate a unei structuri, în domeniul elastic, trebuie considerate și deplasările relative ce caracterizează deformarea elementelor *ds* ale barelor. Pentru structuri plane la care solicitarea dominantă este încovoierea (grinzi, cadre) și cînd se reține numai efectul acesteia asupra poziției deformate, rotirile relative $d\overline{\theta}$ dintre fețele elementelor $\overline{ds}$ sînt definite de diagrama de momente încovoietoare și au mărimea $d\overline{\theta} = Mds/EI$. Barele sistemului conjugat rezultă încărcate cu sarcini distribuite de intensitate M/EI, aplicate normal pe planul sistemului. Astfel, pentru cadrul din fig. 4 *a*, a cărui diagramă de momente încovoietoare este schițată informativ în fig. 4 *b*, sistemul conjugat apare sub forma arătată în fig. 4 *c*, unde pentru bara intermediară *4*—*5* sensul încărcării convenționale corespunde primului contur. Eforturile din diferite secțiuni ale sistemului conjugat sînt analoge deplasărilor efective ale secțiunilor corespunzătoare din cadrul dat, astfel că sistemul conjugat definește complet poziția deformată.

O simplificare la trasarea configurației poziției deformate se obține stabilind în prealabil secțiunile în care urmează a se calcula deplasările efective. În acest caz, sarcinile convenționale distribuite pot fi înlocuite prin componente concentrate la extremitățile porțiunilor de bară separate de aceste secțiuni, cum se arată în fig. 4 *d*. Pentru sistematizarea expresiilor, se utilizează multiplicarea cu constanta $6EI_c$ (I_c — moment de

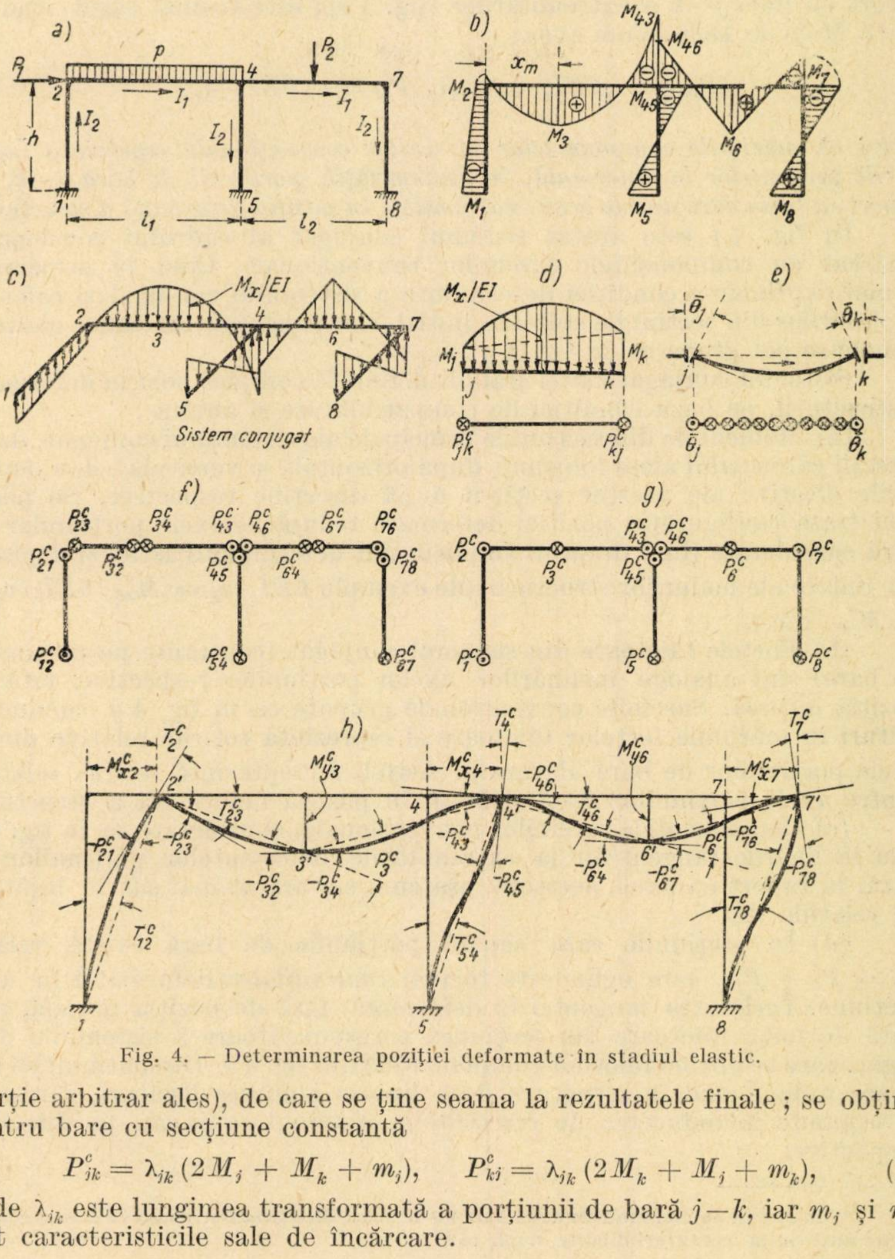

a)
P
p
P/2
1
2
4
7
I_1
I_2
h
5
8
l_1
l_2
b)
x_m
M_{43}
M_{46}
M_2
M_3
M_{45}
M_6
M_7
M_1
M_5
M_8
c)
M_x/EI
3
6
Sistem conjugat
d)
M_j
M_k
j
k
P^c_{jk}
P^c_{kj}
e)
θ_j
θ_k
f)
P^c_{23}
P^c_{34}
P^c_{43}
P^c_{46}
P^c_{67}
P^c_{76}
P^c_{21}
P^c_{32}
P^c_{45}
P^c_{64}
P^c_{78}
P^c_{12}
P^c_{54}
P^c_{87}
g)
P^c_2
P^c_3
P^c_6
P^c_7
P^c_1
P^c_5
P^c_8
h)
T^c_2
M^c_{x2}
M^c_{y3}
T^c_4
M^c_{x4}
$-P^c_{46}$
M^c_{y6}
T^c_7
M^c_{x7}
2'
3'
4'
6'
7'
T^c_{23}
T^c_{46}
$-P^c_{21}$
$-P^c_{23}$
$-P^c_{32}$
$-P^c_{34}$
$-P^c_{43}$
$-P^c_{45}$
$-P^c_{64}$
$-P^c_{67}$
$-P^c_{76}$
T^c_{12}
T^c_{54}
T^c_{78}

Fig. 4. — Determinarea poziției deformate în stadiul elastic.

inerție arbitrar ales), de care se ține seama la rezultatele finale ; se obține pentru bare cu secțiune constantă

$$P^c_{jk} = \lambda_{jk}(2M_j + M_k + m_j), \qquad P^c_{kj} = \lambda_{jk}(2M_k + M_j + m_k), \qquad (1)$$

unde λ_{jk} este lungimea transformată a porțiunii de bară $j-k$, iar m_j și m_k sînt caracteristicile sale de încărcare.

O semnificație a componentelor P^c_{jk} și P^c_{kj} apare considerînd situația de echilibru dintre *inversele* lor și sarcina convențională distribuită pe porțiunea $j-k$. Rezultă sistemul conjugat al acestei porțiuni de bară, considerată simplu rezemată, sistem care-i definește poziția deformată în raport cu linia $j-k$ a extremităților (fig. 4 *e*); este tocmai cazul studiat de O. Mohr în 1868. Vom avea

$$P^c_{jk} = -6EI_c \cdot \overline{\theta}_j \quad \text{și} \quad P^c_{kj} = -6EI_c \cdot \overline{\theta}_k, \tag{2}$$

astfel că *mărimile componentelor sarcinilor convenționale reprezintă înclinările tangentelor la deformată, în extremitățile porțiunii de bară j—k, în raport cu linia care unește aceste extremități în poziția deformată a structurii.*

În fig. 4 *f* este arătat sistemul conjugat al cadrului considerat, încărcat cu componentele sarcinilor convenționale. Cînd se urmărește numai exprimarea condiției de echilibru a sistemului conjugat și calculul deplasărilor din secțiunile stabilite inițial, componentele sarcinilor convenționale se pot grupa ca în fig. 4 *g* *).

Sistemul conjugat astfel stabilit definește complet poziția deformată a structurii, pe baza condiției de compatibilitate și anume :

(a) Momentele din secțiunile principale ale sistemului conjugat, după direcții convenabil alese (obișnuit după orizontală și verticală), dau deplasările efective ale acestor secțiuni după direcțiile respective. Se poate deci trasa configurația poziției deformate redusă la axele porțiunilor de bară considerate (linii drepte). Implicit sînt determinate astfel și deplasările liniare ale nodurilor structurii (de exemplu $6EI_c \cdot u_2 = M^c_{x2}$, $6EI_c \cdot v_6 = M^c_{v6}$, etc.).

(b) Forțele tăietoare din sistemul conjugat (constante pe porțiunile de bare) sînt analoge înclinărilor axelor porțiunilor respective, față de poziția inițială. Sarcinile convenționale grupate ca în fig 4 *g*, conduc la salturi în mărimile forțelor tăietoare și reprezintă rotirile relative dintre axele porțiunilor de bară alăturate. Astfel, P^c_3 reprezintă rotirea relativă dintre axele porțiunilor *2—3* și *3—4*, în poziția deformată a structurii.

(c) Componentele sarcinilor convenționale, considerate ca în fig. 5 *f*, dau înclinările tangentelor la extremitățile deformatelor porțiunilor de bară, în raport cu axele acestora, așa cum s-a arătat mai sus în legătură cu relațiile (2)

(d) În secțiunile care separă porțiunile de bară există relația $P^c_j = P^c_{ji} + P^c_{jk}$, care oglindește tocmai *continuitatea* deformatei în acea secțiune. Înclinarea tangentei la deformată, față de poziția inițială, este dată de forța tăietoare din secțiunea corespunzătoare a sistemului conjugat, care se obține folosind componentele din fig 4 *f*. Discontinuități pot apare numai cînd în structura dată lipsesc anumite legături, cărora le corespunde introducerea de *reacțiuni* în sistemul conjugat, pe direcțiile respective.

---

*) În noduri cu mai mult de două bare nu se poate face grupare, deoarece aceste componente intervin în contururi diferite, după caz.

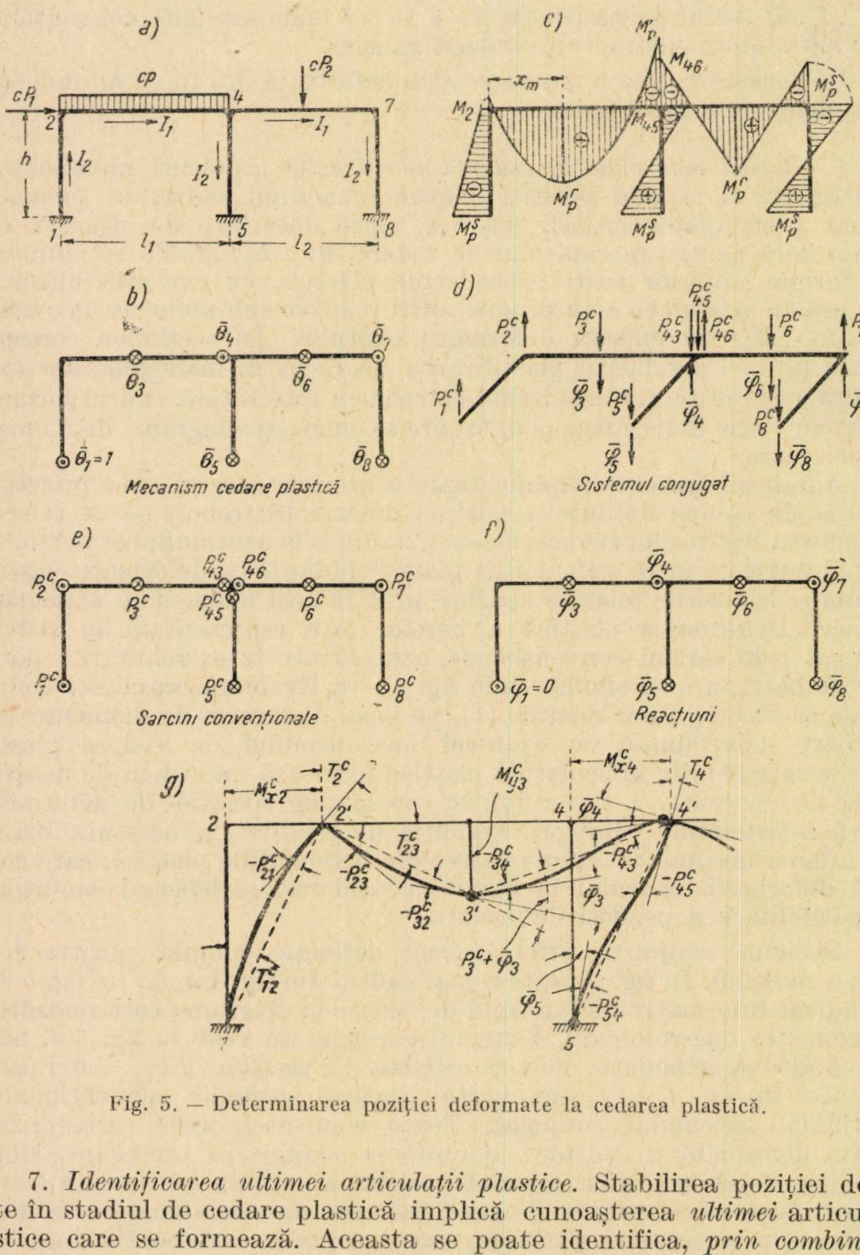
(e) În același mod se determină și rotirile nodurilor cadrului. Astfel, pentru nodul *2* vom avea $6EI_c \cdot \theta_2 = T_2^c = P_{12}^c + P_{21}^c$, iar pentru nodul *4* se obține $6EI_c \cdot \theta_4 = T_4^c = -(P_{54}^c + P_{45}^c)$, fie că se consideră primul contur *1—2—4—5*, sau al doilea contur *5—4—7—8* unde sarcinile convenționale de pe bara intermediară se inversează ca sens.

Pe această bază s-a trasat poziția deformată din fig. 4 *h*, unde apar toate elementele menționate.

6. *Poziții deformate la cedarea plastică.* O problemă asemănătoare se întîlnește la studiul poziției deformate a unui cadru, în momentul imediat premergător cedării plastice. Spre deosebire de situația care se consideră pentru mecanismul de cedare, în acest stadiu se admite că s-au format anterior toate articulațiile plastice, cu excepția ultimei și că în aceste articulații s-au produs rotiri relative sub moment încovoietor constant (M_p) pe măsura deformării cadrului. În secțiunea corespunzătoare ultimei articulații plastificarea s-a făcut în întregime, *dar continuitatea subzistă încă.* Considerînd că cedarea este totală, cadrul formează un sistem static determinat pentru care se cunoaște diagrama de momente încovoietoare.

Admițînd ipoteza simplificatoare a articulațiilor plastice punctuale, condiția de compatibilitate a poziției deformate trebuie să se refere la respectarea legăturilor rămase în acest stadiu și la continuitatea porțiunilor de bară cuprinse între articulațiile plastice (admise cu deformare elastică), precum și la rotirile relative apărute pînă în acel moment în articulațiile plastice. Deformarea elastică a barelor este reprezentată în sistemul conjugat prin sarcini convenționale, concentrate la extremitățile porțiunilor de bare, în mod similar ca în fig. 4*f*—*g*. Evaluarea sarcinilor convenționale se face folosind relațiile (1), pe baza diagramei de momente încovoietoare determinate cu ajutorul mecanismului de cedare plastică. Rotirile relative din articulațiile plastice formează un sistem de *reacțiuni*, inițial necunoscute, a căror număr corespunde situației de determinare statică a sistemului conjugat. Condiția de echilibru a acestuia permite deci aflarea mărimii rotirilor relative din articulațiile plastice, care corespund deformării cadrului în stadiul considerat, satisfăcînd condiția de compatibilitate a poziției deformate.

Sistemul conjugat astfel alcătuit definește complet poziția deformată a cadrului. În fig. 5 *a* este reluat cadrul din fig. 4 *a*, iar în fig. 5 *b*—*c* s-a indicat informativ mecanismul de cedare și diagrama corespunzătoare de momente încovoietoare. Sistemul conjugat se vede în fig. 5 *d*, admițînd că ultima articulație plastică este cea din secțiuna *1* ($\bar{\varphi}_1 = 0$); pentru claritate, în fig. 5 *e*—*f* s-au arătat separat sarcinile convenționale și reacțiunile sistemului conjugat. Toate elementele care caracterizează poziția deformată a cadrului, definite în paragraful precedent, sînt în întregime valabile și aici, calculate pentru ansamblul sistemului (sarcini convenționale și reacțiuni). Singurul element nou care apare este rotirea relativă din articulația plastică, care introduce o discontinuitate prin variația bruscă a înclinării tangentei la deformată în secțiunea respectivă, așa cum se vede în fig. 5 *g*, unde s-a trasat — în noua situație — poziția deformată a primului contur al cadrului.


Mecanism cedare plastică

Sistemul conjugat

Sarcini convenționale

Reacțiuni

a)
c)
b)
d)
e)
f)
g)
cp
cP1
cP2
I1
I2
h
l1
l2
1
2
4
5
7
8
xm
M2
M'p
M46
M45
Mp^s
Mp^r
θ4
θ7
θ3
θ6
θ1=1
θ5
θ8
P2^c
P3^c
P43^c
P45^c
P46^c
P6^c
P7^c
P1^c
P5^c
P8^c
φ3
φ4
φ5
φ6
φ7
φ8
φ1=0
Mx2^c
T2^c
My3^c
Mx4^c
T4^c
2'
3'
4'
T23^c
-P21^c
-P23^c
-P34^c
-P32^c
-P43^c
-P45^c
P3^c+φ3
T12^c
-P54^c

Fig. 5. — Determinarea poziției deformate la cedarea plastică.

7. *Identificarea ultimei articulații plastice*. Stabilirea poziției deformate în stadiul de cedare plastică implică cunoașterea *ultimei* articulații plastice care se formează. Aceasta se poate identifica, *prin combinarea condiției de compatibilitate a poziției deformate la cedarea plastică, cu con-*

diţia de compatibilitate a poziţiei deplasate a mecanismului de cedare, folosind următoarele consideraţii :

(a) În stadiul imediat premergător cedării plastice, în primele n articulaţii plastice s-au produs rotiri relative ($\bar{\varphi}_j \neq 0$), în timp ce ultima articulaţie plastică nu funcţionează încă ($\bar{\varphi}_{n+1} = 0$). Sensurile rotirilor relative $\bar{\varphi}_j$ sînt cunoscute, trebuind să fie aceleaşi cu ale rotirilor relative din mecanismul de cedare plastică, deoarece cedarea se produce în continuarea deformării, cînd intră în funcţiune şi ultima articulaţie plastică.

(b) Se consideră poziţia deformată din acest stadiu ($\bar{\varphi}_{n+1} = 0$) ca un sistem cinematic, în care barele îşi menţin poziţia deformată finală, iar articulaţiile plastice sînt privite ca articulaţii obişnuite. Se dă acestui sistem o deplasare în *sens invers* celui în care s-a produs deformarea structurii. Prin aceasta, în articulaţii intervin noi rotiri relative, a căror corelaţie este cunoscută — fiind aceeaşi ca în mecanismul de cedare — deoarece deplasarea se face pe schema acestuia. După deplasare, rotirea relativă în articulaţia j este $\bar{\varphi}'_j = \bar{\varphi}_j - \alpha_i \cdot \bar{\theta}_j$, unde α_i reprezintă mărimea deplasării date, în raport cu cea admisă iniţial pentru mecanismul de cedare. În ultima articulaţie plastică ($\bar{\varphi}_{n+1} = 0$) va rezulta rotirea totală $\bar{\varphi}'_{n+1} = -\alpha_i \cdot \bar{\theta}_{n+1}$, avînd astfel *sens invers* celui din mecanismul de cedare. Pentru diferite valori α_i, se poate obţine anularea oricăreia dintre rotirile relative totale $\bar{\varphi}'_j$; pentru $\alpha_i = 0$ corespunde $\bar{\varphi}'_{n+1} = \bar{\varphi}_{n+1} = 0$, deci situaţia din poziţia deformată la cedarea plastică.

(c) Orice asemenea combinare a celor două poziţii deplasate compatibile (deformata finală şi mecanismul de cedare) *conduce tot la o poziţie deplasată compatibilă*, care se exprimă prin echilibrul sistemului conjugat respectiv. Acesta apare încărcat cu sarcinile convenţionale care corespund deformării barelor în stadiul limită şi cu reacţiunile $\bar{\varphi}'_j$, care pot fi calculate prin condiţia de echilibru static. În toate cazurile una dintre reacţiuni este nulă, deci sînt de calculat un număr de n reacţiuni, realizîndu-se situaţia de determinare statică în sistemul conjugat.

Pe această bază, rezultă următorul procedeu :

(1) Ultima articulaţie plastică nefiind iniţial cunoscută, se apreciază una dintre articulaţii ca fiind ultima (reacţiune nulă în conjugat), calculînd celelalte reacţiuni $\bar{\varphi}_j$ corespunzătoare. Dacă aprecierea nu a fost cea justă, cel puţin una dintre reacţiuni va rezulta de sens contrar rotirii relative corespunzătoare din mecanismul de cedare.

(2) Peste aceste valori ale reacţiunilor se suprapun rotirile relative din mecanismul de cedare, multiplicate cu diferiţi coeficienţi α_i, astfel ca să se anuleze cîte una dintre reacţiuni. De fiecare dată vor fi cîte n reacţiuni diferite de zero, care rezultă din suprapunere. Nu este necesar să se calculeze valorile reacţiunilor, ci numai să se identifice *sensurile* (semnele) lor. Suprapunerea se poate efectua într-un tablou şi se limitează pentru fiecare caz pînă la apariţia primei contradicţii de sens cu mecanismul de cedare.

(3) Dintre cele $n + 1$ situaţii studiate, una singură îndeplineşte condiţia ca toate cele n reacţiuni diferite de zero să concorde ca sens cu

rotirile relative din mecanismul de cedare. Articulația la care—în această situație — rotirea relativă rezultă nulă, *este ultima articulație plastică*.

(4) Pentru acest caz, se calculează efectiv — prin suprapunere — valorile tuturor reacțiunilor sistemului conjugat, care reprezintă rotirile relative ce au apărut în articulațiile plastice, în stadiul imediat premergător cedării plastice. Ele servesc la determinarea poziției deformate, așa cum s-a arătat în fig. 5 *f—g*.

Din cele ce preced, se pot aprecia avantajele care rezultă prin utilizarea interpretării statice a condiției de compatibilitate, la calculul structurilor în domeniul plastic, deoarece rotirile relative din articulațiile plastice — care reprezintă un element esențial al problemei — apar explicit în condiția de echilibru static a sistemului conjugat.

8. *Calculul deplasărilor*. Calculul unei anumite deplasări dintr-o secțiune dată, pentru poziția deformată a unei structuri, revine la determinarea unui anumit efort din secțiunea corespunzătoare a sistemului conjugat. Aceasta se poate face folosind o deplasare virtuală în sistemul conjugat, a cărei configurație se stabilește pe baza condiției de compatibilitate. Această condiție se transformă într-o condiție de echilibru static dacă se utilizează conjugata sistemului conjugat, numită și *conjugată auxiliară* [2]. În acest mod, două condiții diferite de compatibilitate apar exprimate sub formă de condiții de echilibru static : (1) Compatibilitatea poziției deformate a structurii reale se exprimă prin echilibrul sistemului conjugat; (2) Compatibilitatea deplasării virtuale date în sistemul conjugat se exprimă prin echilibrul conjugatei auxiliare.

Datorită situației de reciprocitate dintre structura dată și conjugata sa, conjugata auxiliară coincide cu structura inițială, ca efect al dublei transformări de legături. Astfel, pentru un cadru plan, conjugata apare ca un sistem plan încărcat cu forțe aplicate normal pe plan, iar trecerea la conjugata auxiliară duce la regăsirea cadrului plan inițial, încărcat de data aceasta cu forțe convenționale aplicate în planul său. Stabilirea configurației unei deplasări virtuale în sistemul conjugat revine astfel la rezolvarea unei probleme de statică plană în conjugata auxiliară.

Deplasarea virtuală în sistemul conjugat se obține făcînd o secționare incompletă, care să pună în evidență efortul căutat, apoi producînd o deplasare relativă—unitate pe direcția acestuia și în sensul său pozitiv. Astfel, unei deplasări efective liniare Δ_j din structura reală, după o direcție dată, îi corespunde efortul M_j^c în sistemul conjugat, iar deplasarea virtuală ce trebuie dată în acest sistem este caracterizată prin rotirea relativă $\overline{\theta}_j^c = 1$ (fig. 6 *a*). Condiția de echilibru prin deplasări virtuale are forma

$$1 \cdot M_j^c - \int d\overline{\theta} \cdot \delta^c = 0, \quad \text{deci} \quad \Delta_j = M_j^c = \int d\overline{\theta} \cdot \delta^c, \tag{3}$$

unde : $d\overline{\theta} = M ds/EI$ — sarcina convențională pe elementul ds de bară al conjugatei (pentru M pozitiv, $d\overline{\theta}$ rezultă dirijat în jos) ; δ^c — deplasarea după normala la plan în dreptul acestui element (deplasări pozitive sînt cele deasupra planului). Se poate lucra și cu componentele P_i^c ale sarcinilor convenționale, date de relațiile (1), cînd secțiunea j este situată într-un punct de separație a intervalelor folosite la concentrarea sarcinilor convenționale. Se obține

$$1\cdot M_j^c-\sum P_i^c\cdot\delta_i^c=0,\qquad \text{deci } 6EI_c\cdot\Delta_j=M_j^c=\sum P_i^c\cdot\delta_i^c \tag{4}$$

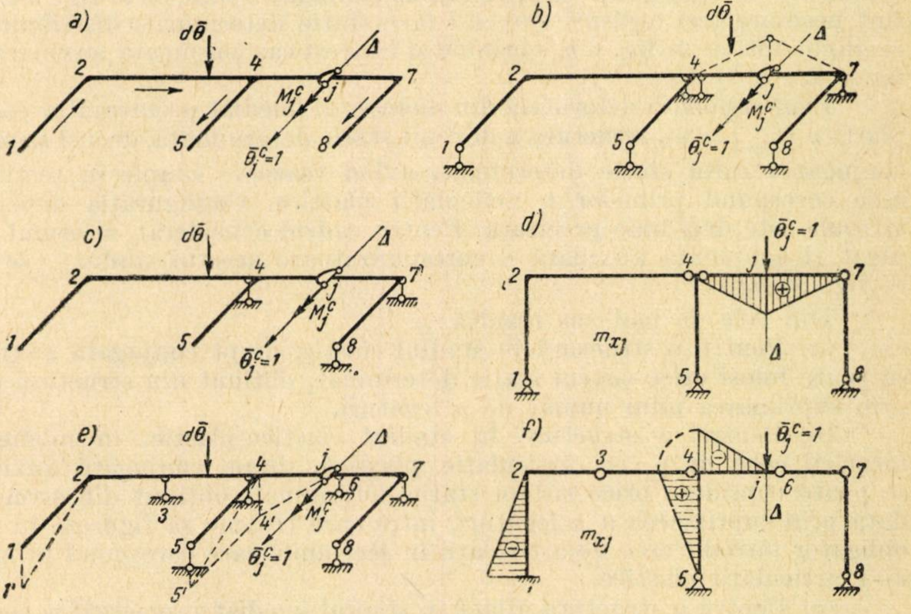


Fig. 6. — Calculul unei deplasări în diferite stadii ale structurii.

La precizarea configurației deplasării virtuale în sistemul conjugat, intervine și stadiul în care se găsește structura dată. La o structură de n ori static nedeterminată, aflată în stadiul elastic, sistemul conjugat rezultă cu n grade de libertate. Astfel, cadrului din fig. 4 *a* îi corespunde sistemul conjugat din fig 6 *a*. Admițînd făcută secționarea incompletă în secțiunea j și dînd deplasarea virtuală, aceasta poate avea diferite configurații după modul cum intervin gradele de libertate. O deplasare virtuală bine precizată rezultă numai dacă se admite blocarea gradelor de libertate printr-un număr n de legături introduse în sistemul conjugat, astfel ca să funcționeze numai secționarea incompletă. Cele n legături pot fi introduse oricum, cu condiția de a se obține un sistem static determinat. Sistemul conjugat devenind static determinat, conjugata auxiliară — care corespunde acestei distribuții de legături — este de asemenea static determinată. Introducînd de exemplu distribuția de legături arătată în fig. 6 *b*, se obține conjugata auxiliară din fig. 6 *d*.

Cînd structura s-ar găsi în stadiul elastico-plastic și anume după formarea primelor i articulații plastice ($\overline{\varphi}_i = 0$), sistemul conjugat apare cu $i - 1$ reazeme simple, în secțiunile care corespund primelor $i - 1$ articulații plastice și are deci $(n - i + 1)$ grade de libertate. Pentru precizarea configurației deplasării virtuale este necesar să se introducă încă $(n - i + 1)$ legături în sistemul conjugat, spre a deveni static determinat. Astfel, pentru același cadru, dacă primele patru articulații plastice ar fi — în ordine — cele din secțiunile *4*, *7*, *8* și *5* (fig 5 *b*), dintre care ultima nu ar funcționa încă, sistemul conjugat apare ca în fig. 6 *c*. Mai sînt necesare trei legături spre a-l face static determinat, distribuite de exemplu tot ca în fig. 6 *b*, obținînd și în acest caz conjugata auxiliară din fig. 6 *d*.

Pentru poziția deformată din momentul imediat premergător cedării plastice ($\overline{\varphi}_{n+1} = 0$), structura a devenit static determinată, deci și sistemul conjugat rezultă static determinat, avînd reazeme simple în secțiunile care corespund primelor n articulații plastice. Configurația deplasării virtuale este deci bine precizată. Pentru cadrul considerat, sistemul conjugat și conjugata auxiliară — corespunzătoare acestui stadiu — se văd în fig. 6 *e* și 6 *f*.

Din cele de mai sus rezultă :

(a) Pentru o structură în stadiul elastic, drept conjugată auxiliară se poate folosi orice sistem static determinat, obținut din structura dată prin suprimarea unui număr de n legături.

(b) Pentru o structură în stadiul elastico-plastic, în momentul formării celei de a i-a articulație plastică, drept conjugată auxiliară se poate considera orice sistem static determinat, obținut din structura dată prin suprimarea a n legături, între care trebuie să figureze în mod obligator introducerea de articulații în secțiunile care corespund primelor $i-1$ articulații plastice.

(c) Pentru o structură aflată în stadiul imediat premergător cedării plastice, conjugata auxiliară este acel sistem static determinat, care rezultă din structura dată prin introducere de articulații în secțiunile corespunzătoare primelor n articulații plastice.

Configurația deplasării virtuale date în sistemul conjugat se obține sub forma diagramei de momente încovoietoare a conjugatei auxiliare, încărcată cu sarcina convențională—unitate corespunzătoare (fig. 6 *d*, *f*). Momentelor încovoietoare pozitive le corespund deplasări δ^c deasupra planului sistemului conjugat. Se regăsesc astfel diagramele unitare binecunoscute și deci $\delta^c = m_{xi}$, astfel că relațiile (3) și (4) se pot scrie sub forma

$$\Delta_j = M_j^c = \int d\overline{\theta} \cdot m_{xj}, \quad \text{sau } 6EI_c \cdot \Delta_j = M_j^c \cdot \sum P_i^c \cdot m_{ij} \tag{5}$$

care este *expresia generală a deplasărilor*. Introducînd în prima formă $d\overline{\theta} = Mds/EI$, se regăsește expresia *Maxwell-Mohr*, a cărei aplicare este însă extinsă la calculul deplasărilor în orice stadiu al structurii. Concluziile (a)—(c) de mai sus servesc la alegerea cea mai avantajoasă a sistemului static determinat pe care trebuie trasate diagramele unitare m_{xj}.

9. *Rezolvarea structurilor static nedeterminate.* Această rezolvare necesită folosirea concomitentă a condiției de echilibru static și a condiției de compatibilitate a poziției deformate. Este cunoscut că cele două metode generale de calcul diferă tocmai prin modul cum folosesc aceste condiții :

(a) În metoda generală a *eforturilor*, sistemul de bază se obține prin suprimare de legături, deci prin abatere de la condiția de compatibilitate (continuitate) ; diferitele situații de încărcare pe sistemul de bază respectă condiția de echilibru static. Ecuațiile de condiție ale metodei exprimă restabilirea condiției de compatibilitate a deformatei reale, deci se întemeiază pe această condiție.

(b) În metoda generală a *deplasărilor*, sistemul de bază se obține prin introducerea unor forțe fictive de legătură, ceea ce conduce la o abatere de la condiția de echilibru static, în sensul că în calcul intervin și forțe fictive alături de cele reale ; diferitele situații de încărcare pe sistemul de bază respectă condiția de compatibilitate a acestuia. Ecuațiile de condiție ale metodei exprimă restabilirea echilibrului static real (anularea forțelor fictive), deci se întemeiază pe această condiție.

În loc de a aplica pe structura dată atît condiția de echilibru static, cît și condiția de compatibilitate, este posibil să se folosească două condiții de echilibru static, anume cea a structurii reale și cea a sistemului conjugat asociat. Pentru o structură de n ori static nedeterminată, rezultă un sistem conjugat cu n grade de libertate. Evaluînd sarcinile convenționale ce se aplică pe conjugată, pe baza diagramei M a structurii date, în expresiile acestora vor interveni cele n necunoscute static nedeterminate care definesc diagrama. Aplicînd în sistemul conjugat ecuațiile de echilibru static corespunzătoare gradelor de libertate, se obține un număr de n ecuații de condiție între sarcinile convenționale, din care se pot afla mărimile cantităților static nedeterminate.

Condiția de echilibru static a sistemului conjugat fiind analogă condiției de compatibilitate a poziției deformate considerate, înseamnă că ecuațiile de condiție obținute în acest mod sînt analoge ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor. Rezultă că *utilizarea sistemelor conjugate la rezolvarea structurilor static nedeterminate reprezintă o altă interpretare și un alt mod de aplicare al ideii de bază din metoda generală a eforturilor.* S-a arătat anterior [2] cum, pe această cale, se pot obține direct ecuațiile generale de condiție ale metodei eforturilor, de asemenea diferitele sale forme de sistematizare pentru anumite categorii de structuri (ecuațiile de trei și patru momente, metoda punctelor fixe, metoda centrului elastic etc.).

Utilizarea sistemelor conjugate se dovedește îndeosebi avantajoasă la trasarea liniilor de influență pentru structuri static nedeterminate ; configurațiile acestora sînt date de anumite poziții deformate, ce rezultă prin producerea unei deplasări relative egală cu unitatea pe direcția necunoscutei considerate. Pe această cale se tratează unitar ambele etape ale rezolvării, în care se folosește condiția de compatibilitate : (1) condiția de echilibru static a sistemului conjugat ridică nedeterminarea statică a structurii cu $n-1$ nedeterminări, care rezultă prin suprimarea legăturii corespunzătoare necunoscutei; (2) diagrama de momente încovoietoare a conjugatei simplificate (la structuri plane), respectiv diagrama de momente încovoietoare a sistemului conjugat (la structuri încărcate normal pe plan), dă chiar linia de influență căutată. Aplicarea sistematizată a acestei metode a fost dată în lucrările [2], [3].

10. *Încheiere.* Din cele de mai sus, se poate desprinde o vedere de sinteză asupra posibilităților variate pe care le oferă utilizarea sistemelor conjugate, ca mijloc de exprimare a condiției de compatibilitate în calculul structurilor alcătuite din bare. În acest scop, expunerea s-a limitat să arate numai modul cum se reflectă condiția în sistemul conjugat, în specificul diferitelor categorii de probleme, cît și căile pe care poate fi folosită în mod eficient, pentru aprecierea domeniilor în care această interpretare a condiției de compatibilitate devine avantajoasă la aplicarea practică, în raport cu metodele cunoscute. Modalitățile efective de aplicare, sistematizările care se pot obține, cît și diferite alte aspecte și concluzii, fac obiectul altor lucrări.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1960

СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ, СРЕДСТВО ВЫРАЖЕНИЯ УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

Дается обзор разнообразных возможностей, которые открывают применение сопряженных систем для выражения условия совместимости для различных категорий задач статики сооружений. Исходя из сопряженных систем, показывается как условие совместимости некоторого перемещенного положения данной конструкции аналогично условию статического равновесия соответствующей сопряженной системы.

В области перемещенных положений кинематического характера рассматриваются конфигурации возможных перемещений, идентификация систем с критической формой, составление и комбинирование механизмов пластической ползучести. В области деформированных положений рассматривается полное установление их конфигурации с элементами непосредственно появляющиеся у сопряженной системы как для упругой стадии, так и для стадии пластической ползучести, а также идентификация последнего пластического шарнира; также способ применения общего выражения перемещений в различных стадиях конструкции.

Целью работы является показать, как отражается условие совместимости в сопряженной системе для различных упомянутых задач, указывая при этом и удобные пути применения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Определение конфигурации возможных перемещений.
Рис. 2. — Идентификация систем с критической формой.
Рис. 3. — Строение и комбинация механизмов упругой просадки.
Рис. 4. — Определение деформированного положения в упругой стадии.
Рис. 5. — Определение деформированного положения при упругой просадке.
Рис. 6. — Расчет перемещения в различных структурных стадиях.

LES SYSTÈMES CONJUGUÉS, MOYEN D'EXPRIMER LA CONDITION DE COMPATIBILITÉ DANS LE CALCUL DES CONSTRUCTIONS

RÉSUMÉ

L'auteur présente une étude de synthèse sur les diverses possibilités offertes par l'utilisation des systèmes conjugués en vue d'exprimer la condition de compatibilité selon le spécifique des différentes catégories de problèmes de la théorie des constructions. En prenant pour point de départ la signification des systèmes conjugués, il montre que la condition de compatibilité d'une position déplacée de la structure considérée est analogue à la condition d'équilibre statique du système conjugué associé.

Dans le domaine des positions déplacées à caractère cinématique, l'auteur examine les configurations des déplacements virtuels, l'identification des systèmes à forme critique, la constitution et la combinaison des mécanismes de ruine plastique. Dans le domaine des positions déformées, il examine l'établissement complet de la configuration de la déformée au moyen d'éléments apparaissant directement dans le système conjugué, aussi bien dans le régime élastique, que dans le stade de ruine plastique. En outre, il poursuivit l'identification de la dernière rotule plastique et présente aussi le mode d'application de l'expression générale des déplacements dans les divers régimes de la structure.

L'auteur tâche, dans le présent travail, de montrer la manière dont la condition de compatibilité se reflète dans le système conjugué, pour les différents problèmes mentionnés, et indique, en outre, les moyens pratiques d'application.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Détermination de la configuration des déplacements virtuels.
Fig. 2. — Identification des systèmes à forme critique.
Fig. 3. — Constitution et combinaison des mécanismes de ruine plastique.
Fig. 4. — Détermination de la position déformée dans le régime élastique.
Fig. 5. — Détermination de la position déformée à la ruine plastique.
Fig. 6. — Calcul d'un déplacement dans les divers régimes de la structure.

BIBLIOGRAFIE

1. ALEX. GHEORGHIU, *Semnificația sistemelor conjugate și utilizarea acestora în calculul structurilor*. Comunicările Acad. R.P.R., VI, *6* (1956).
2. — *Sisteme conjugate în calculul structurilor*. Ed. tehnică, București, 1957.
3. — *Sur les systèmes conjugués et leur utilisation dans la construction des lignes d'influence*. Annales des Ponts et Chaussées, Paris, *6* (1958).
4. B. G. NEAL, *The plastic methods of structural analysis*. Chapman & Hall, London, 1956.

STUDII

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

STUDIUL PUTERII NECESARE AŞCHIERII OŢELURILOR CARBON OBIŞNUITE

DE

M. P. POPOV, I MITRICĂ şi E. DECIU

Pînă în prezent s-au elaborat studii de aşchiere pentru oţelurile carbon obişnuite (STAS 500-49) privind parametrii geometrici ai cuţitului de strung [3] şi regimurile economice de prelucrare [4]. Cercetările au arătat că pentru fiecare tip de oţel studiat există o valoare bine definită a unghiurilor optime care asigură cuţitului o durabilitate maximă.

Pentru măsurătorile de putere, la fel ca la experienţele efectuate pentru determinarea regimului economic, s-au utilizat cuţite armate cu plăcuţe S_1 de fabricaţie Harith şi ascuţite la geometria optimă cerută de fiecare oţel în parte. În tabela 1 se dau valorile medii ale unor caracteristici mecanice mai importante ale oţelurilor analizate, precum şi valorile optime ale unghiului de degajare.

Tabela 1

Oţelul	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
C (%)	0,12	0,23	0,28	0,45	0,63
σ_r (kgf/mm^2)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
H_B (kgf/mm^2)	110	123	153	175	238
$\gamma°$	18÷19	15	10	5	0

În cursul experienţelor au fost menţinute constante valorile optime ale unghiurilor: de aşezare principal α, de aşezare secundar α_1, de atac secundar $\varkappa_1$, de înclinaţie a muchiei principale tăietoare λ şi anume $\alpha = 11°$, $\alpha_1 = 15°$, $\varkappa_1 = 10°$, $\lambda \approx 0°$. Pentru unghiul de atac principal s-a adoptat valoarea $\varkappa = 45°$ [3]. Pentru măsurarea puterii utile s-a folosit metoda celor două wattmetre. S-a măsurat puterea la mersul în sarcină şi la mersul în gol al maşinii, diferenţa lor fiind considerată egală cu puterea utilă. S-a introdus prin aceasta un grad de aproximaţie pentru că se consideră randamentul maşinii unelte egal în cele două situaţii. În realitate, randamentul nu se menţine acelaşi, însă această variaţie nu poate influenţa asupra lucrării de faţă.

Acestea sînt condiţiile şi metodele utilizate în studiul de faţă.

Parametrii care influenţează procesul fizic al aşchierii influenţează şi puterea utilă a aşchierii. Dintre parametrii ce exercită cea mai mare influenţă se citează :

— Caracteristicile materialului prelucrat dintre care amintim :

a) gradul de deformare al aşchiei şi piesei care sînt funcţie de proprietăţile lor mecanice ;

b) indicele de ecruisare al materialului prelucrat ;

c) modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson.

— Parametrii geometrici ai sculei.

— Parametrii regimului de aşchiere.

— Forţele de frecare ce iau naştere în procesul aşchierii.

Între factorii enumeraţi există o influenţă reciprocă. În acest studiu se urmăreşte efectul global al condiţiilor care determină puterea utilă în cazul studiat.

Puterea de deformaţie se defineşte în acest caz ca produsul scalar dintre viteza de deplasare şi forţa de aşchiere. Lucrul mecanic util se obţine prin însumarea lucrului mecanic de deformare plastică şi de frecare pe feţele de degajare şi de aşezare şi a lucrului mecanic cerut de condiţiile de cedare elastică a stratului de metal al piesei de sub suprafeţele de aşezare. Rezultă deci că puterea utilă provine din procesul de deformare plastică şi elastică precum şi din frecare. Dacă se raportează valoarea acestor puteri la volumul stratului aşchiat în unitatea de timp se obţine lucrul mecanic specific respectiv condiţiilor date. De exemplu, lucrul mecanic specific al forţelor care acţionează pe faţa de degajare, este egal cu suma lucrului mecanic specific de deformaţie plastică din zona plastică şi lucrul mecanic specific de frecare pe faţa de degajare. Lucrul mecanic de deformaţie plastică se transformă în general în căldura ce se produce în procesul de formarea aşchiei, aceasta fiind la rîndul ei o funcţie de viteză. Acestea sînt pe scurt elementele fundamentale ce constituie baza fizică a problemei ce se studiază aici.

1. INFLUENŢA REGIMULUI DE AŞCHIERE ASUPRA PUTERII UTILE

a. *Puterea utilă la viteză oarecare şi geometrie optimă.* Parametrii regimului de aşchiere care determină puterea utilă necesară efectuării procesului de aşchiere sînt : avansul, adîncimea şi viteza de aşchiere. Formula structurală adoptată pentru determinarea puterii utile este de forma

$$N = C_2 \cdot t^{x_1} \cdot s^{y_1} \cdot v^{z}, \tag{1}$$

unde ca şi în alte lucrări [1], [2], [4], s-a notat

N — puterea utilă de aşchiere, kW,

t — adîncimea de tăiere, mm,

s — avansul, mm/rot,

v — viteza de aşchiere, m/min,

C_2 — constantă funcţie de materialul prelucrat şi de alţi factori ai aşchierii,

x_1, y_1, v — exponenţi funcţie de materialul prelucrat.

Deoarece puterea utilă în domeniul studiat variază practic direct proporţional cu viteza, s-a admis $z = 1$, fapt care se poate vedea din experienţele efectuate în domeniul uzual de viteze, avansuri şi adîncimi de tăiere. Datorită acestui fapt, formula (1) devine

$$N = C_2 \cdot t^{x_1} \cdot s^{y_1} \cdot v . \qquad (2)$$

Această formă va fi utilizată în decursul acestui studiu pentru calculul puterii utile.

Pentru fiecare oţel în parte s-au făcut experienţe şi s-a determinat evoluţia puterii utile în funcţie de viteză pentru diferite valori ale avansului şi adîncimii de tăiere.

Deoarece uzura cuţitului influenţează puterea utilă în mod diferit pentru fiecare material prelucrat în funcţie de regim şi de alţi parametri, măsurătorile de putere utilă s-au făcut cu cuţite nou ascuţite, a căror uzură pe faţa de aşezare secundară nu a depăşit 0,1—0,2 mm.

Pentru oricare din oţelurile studiate, la determinarea coeficientului C_2 şi a exponenţilor x_1 şi y_1, s-au luat în considerare pentru calcul, aceleaşi valori ale parametrilor s şi t. În cadrul fiecărui regim experimentat, s-au considerat în general în calcul, puterile utile măsurate la diverse valori ale vitezelor de aşchiere. S-au luat aceste măsuri, pentru a face posibilă comparaţia între puterile utile la regim constant şi geometrie optimă pentru diferite oţeluri experimentate.

În tabela 2 se dau valorile rezultate în urma prelucrării datelor experimentale, pentru coeficientul C_2 şi exponenţii x_1 şi y_1 în funcţie de valoarea medie a rezistenţei de rupere la tracţiune a oţelurilor experimentate.

Tabela 2

Oţelul	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70
σ_r (kgf/mm^2)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
C_2	0,0213	0,0238	0,0277	0,0384	0,0452
x_1	1,00	0,81	0,89	0,87	0,89
y_1	0,71	0,70	0,79	0,73	0,68

Puterile utile ce rezultă din calcul cu formula (2) şi tabela 2, sînt suficient de bine verificate de valorile puterii utile măsurate în domeniul regimului de așchiere analizat. Stabilirea valorilor C_2, x_1 și y_1 redate în tabela 2 s-a făcut ținîndu-se seama că abaterile dintre mărimile experimentale și cele rezultate din calculul și formula (2) să fie cît mai mici.

Analizînd valorile rezultate pentru coeficientul C_2, pentru cele cinci oțeluri studiate, se constată că valoarea acestuia crește o dată cu creșterea rezistenței de rupere la tracțiune.

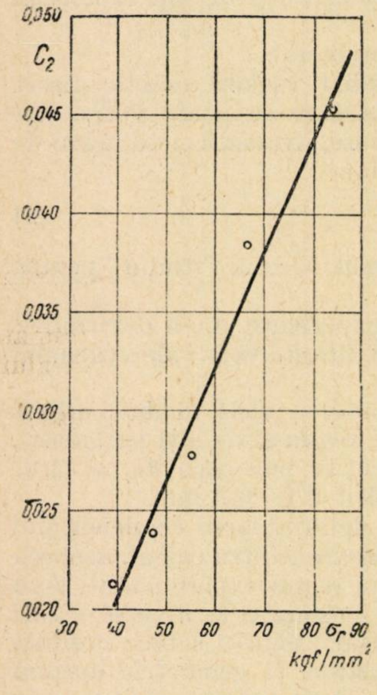


Fig. 1. — Variația coeficientului C_2 din formula (2) în funcție de rezistența medie de rupere la tracțiune σ_r.

Pe de altă parte, mărimea coeficientului C_2 este determinată și de valoarea unghiului de degajare care este la rîndul lui funcție de rezistența de rupere la tracțiune, așa cum se specifică în tabela 1.

În figura 1 se prezintă dependența dintre C_2 și σ_r. Relația obținută prin minimele patrate este

$$C_2 = 0{,}00058\ \sigma_r + 0{,}0023. \tag{3}$$

Aceeași dependență față de σ_r se poate constata și în ceea ce privește valoarea exponenților x_1 și y_1 (fig. 2).

Din calcul se obține

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}96 - 0{,}0011\ \sigma_r, \\ y_1 &= 0{,}75 - 0{,}00054\ \sigma_r. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Prin generalizarea formulei (2) în care C_2, x_1 și y_1 iau valorile (3) și (4), se poate calcula puterea utilă în funcție de caracteristicile mecanice σ_r sau H_B. Acest lucru este posibil deoarece, așa cum s-a arătat [3], relația între rezistența de rupere la tracțiune și duritatea Brinell măsurată pe epruvetele experimentate este de forma

$$\sigma_r = 0{,}34\ H_B + 3{,}81. \tag{5}$$

Se mai poate utiliza cu succes și formula empirică cunoscută

$$\sigma_r \approx 0{,}36\ H_B. \tag{6}$$

Atragem din nou atenția că se obțin rezultate în concordanță cu valorile măsurate, numai cînd se respectă geometria optimă a cuțitului pentru materialul de prelucrat. Relația dintre unghiul γ și rezistența de rupere la tracțiune σ_r este de forma

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{82{,}22}{\sigma_r}, \tag{7}$$

unde

γ — unghiul de degajare în grade,
σ_r — rezistența medie de rupere la tracțiune în kgf/mm².

Există o bună concordanță între valorile puterii utile calculate cu formula (2) cînd C_2, x_1, y_1 iau valorile fie din tabela 1, fie pe cele calculate cu (3), (4) și puterile utile măsurate.

Ca exemplu, în figura 3, pentru cazul prelucrării oțelului OL 50 la un anumit regim de lucru, s-au trasat curbele de putere utilă funcție de viteză cu ajutorul formulei (2). Curba *1* indică puterea utilă calculată cu ajutorul tabelei 2, iar curba *2* cu ajutorul relațiilor (3), (4). Pentru acest exemplu se constată că puterea utilă calculată este verificată mulțumitor de puterea utilă măsurată, mai cu seamă dacă se ține seama și de variația puterii o dată cu evoluția uzurii, așa după cum se va vedea ulterior.

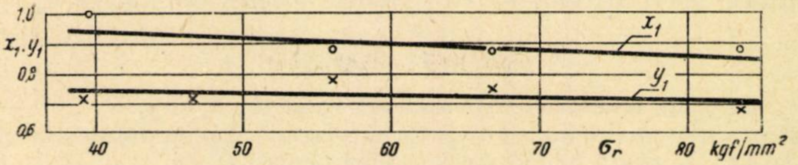


Fig. 2. — Variația coeficienților x_1 și y_1 din formula (2), în funcție de rezistența medie de rupere la tracțiune σ_r.

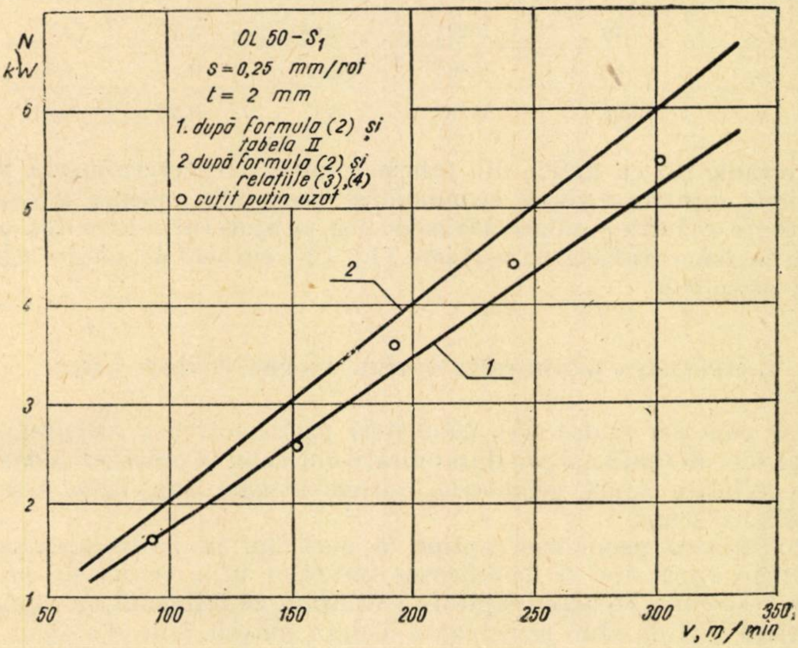


Fig. 3. — Variația puterii utile funcție de viteză, la $s = 0{,}25$ mm/rot, $t = 2$ mm, în cazul prelucrării oțelului OL 50.

Din analiza formulei de putere utilă (2), cînd C_2, x_1 și y_1 se calculează cu (3), (4) pentru cele cinci oțeluri studiate, cu condiția respectării parametrilor geometrici optimi, se poate determina influența avansului și a adîncimii de tăiere, asupra puterii utile. Se constată că pentru fiecare oțel, la o creștere dată atît a avansului s, cît și a adîncimii de tăiere t, corespunde pentru puterea utilă o creștere mai mică.

b. *Puterea utilă la viteza economică și geometria optimă.* Dacă în relația (2) ce permite calculul puterii utile pentru orice viteză de așchiere, se substituie acest parametru cu expresia vitezei economice v_{60} [4], se obține

$$N = C_3\, t^{x_2} \cdot s^{y_2} \tag{8}$$

unde C_3, x_2, y_2 au o semnificație analogă ca și C_2, x_1 și y_1.

Efectuîndu-se calculele cu ajutorul relației (3) și cu datele din tabelele (2) și (3), [4], se obțin următoarele valori pentru C_3, x_2 și y_2, ce se trec în tabela 3.

Tabela 3

σ_r (kgf/mm²)	39,2	46,5	56,0	66,6	83,4
C_3	2,16	3,29	3,64	3,78	3,77
x_2	0,86	0,69	0,75	0,73	0,69
y_2	0,23	0,28	0,37	0,35	0,23

Formula (8) cu datele din tabela 3 înlesnește determinarea puterii utile direct pentru regimul economic și geometria optimă a cuțitului pentru toate oțelurile studiate. De asemenea, cu ajutorul acestor date se pot construi în nomogramele de așchiere [1], [2], curbele de putere egală la regimul economic.

2. INFLUENȚA GEOMETRIEI OPTIME ASUPRA PUTERII UTILE

Așa cum s-a arătat [3], geometria părții active a plăcuței, are o influență bine definită asupra durabilității cuțitului în procesul de așchiere. Orice modificare adusă geometriei optime atrage după sine o scădere a durabilității sculei.

Modificarea geometriei optime a cuțitului la prelucrarea fiecărui oțel, atrage după sine și modificarea puterilor utile cerute de procesul de lucru respectiv. În acest capitol se va arăta ce influență au unghiurile de degajare γ și de atac principal $\varkappa$ asupra puterii utile. Calculul coeficienților de corecție ai puterii nu face obiectul prezentei lucrări. Din acest motiv utilizarea valorilor determinate pentru C_2, x_1 și y_1 din formula (2) dă rezultate bune numai în cazul respectării geometriei optime.

a. *Influența unghiului γ de degajare asupra puterii utile.* Cea mai mare influență asupra valorii puterii utile, comparativ cu celelalte unghiuri o are variația unghiului de degajare. Acest lucru se reflectă și în experiențele redate în această lucrare.

În figura 4 sînt redate valorile puterii utile în funcție de viteza de așchiere pentru mai multe valori ale unghiului de degajare. Experiențele au fost efectuate pe oțelul OL 50 la un regim de lucru oarecare.

S-au utilizat cuțite nou ascuțite la diferite valori ale unghiului de degajare, diferențiate între ele din 5 în 5°. Toți ceilalți parametri geometrici au fost menținuți constanți și egali cu valorile optime respective. Se vede din diagramă (fig. 4) că puterile utile scad o dată cu creșterea unghiului γ. De asemenea, din aceeași diagramă se observă că o dată cu creșterea vitezei de așchiere, crește și influența unghiului γ asupra puterii utile.

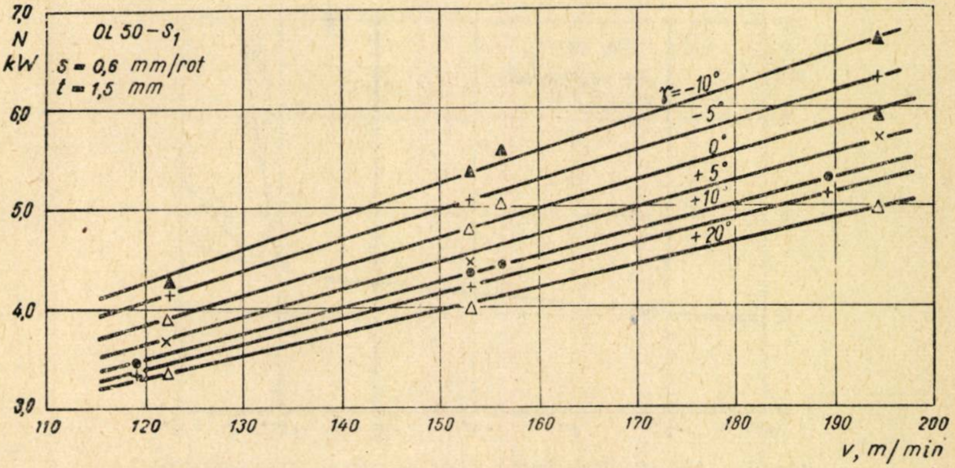


Fig. 4. — Variația puterii utile funcție de viteză la diferite unghiuri de degajare, în cazul prelucrării oțelului OL 50 cu $s = 0,6$ mm/rot, $t = 1,5$ mm.

Executînd experiențe pe oțelul OL 50 într-un domeniu limitat de viteze și anume $100 < v < 200$ m/min, s-a studiat influența pe care o are unghiul γ asupra deformațiilor din zona de așchiere. Astfel se poate afirma că o dată cu scăderea valorii unghiului γ cresc deformațiile plastice și elastice din așchie și de pe suprafața materialului prelucrat. Aceste deformații sînt un rezultat al solicitărilor suplimentare la care este supusă așchia și suprafața piesei, datorită suprafeței de degajare, care o dată cu micșorarea unghiului γ forțează așchia să se înfășoare după o elice cu un diametru mai mic. Este evident că aceste deformații suplimentare cer un consum de energie din ce în ce mai crescut o dată cu scăderea unghiului γ ceea ce se reflectă în creșterea puterii utile (fig. 4). Este cunoscut că în timpul deformațiilor plastice cea mai mare parte a energiei de deformație se transformă în energie calorică, ce ridică temperatura în zona de așchiere. Creșterea temperaturii atrage după sine o scădere a proprietăților mecanice ale așchiei și a materialului prelucrat din zona așchierii, deci duce la o micșorare a forțelor de așchiere. Creșterea puterii utile o dată cu creșterea vitezei se justifică prin aceea că pentru o creștere dată de viteză, scăderea forțelor de așchiere datorită temperaturii este cu mult mai mică.

Un factor care permite urmărirea mărimii deformaţiilor îl reprezintă diametrul elicii de înfăşurare al aşchiei.

După cum se vede din figura 5, diametrul elicei de înfăşurare variază liniar cu mărimea unghiului γ, pînă la $\gamma \leqslant 15°$ pentru toate vitezele experimentate în cazul oţelului OL 50.

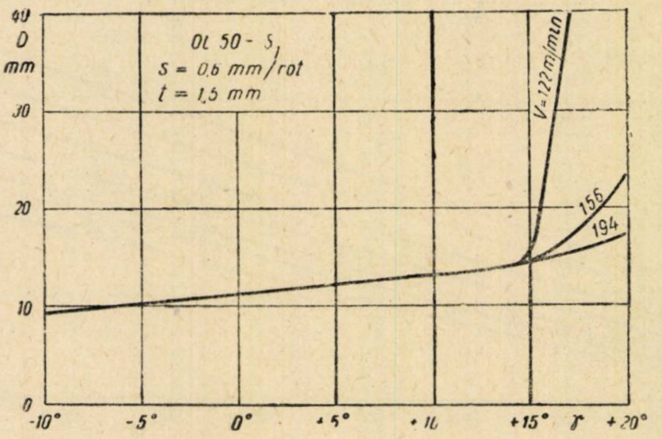


Fig. 5. — Variaţia diametrului elicei de înfăşurare a aşchiei la prelucrarea oţelului OL 50 cu diferite unghiuri de degajare şi diferite viteze de aşchiere la $s = 0{,}6$ mm/rot, $t = 1{,}5$ mm.

Pentru valori ale unghiului de degajare mai mari decît 15°, diametrul are o creştere mult mai rapidă decît pînă la această valoare a unghiului γ. În acest domeniu, creşterea diametrului este şi funcţie de viteză, ceea ce nu se remarcă în prima parte. Astfel o dată cu scăderea vitezei de aşchiere diametrul de înfăşurare al elicei creşte foarte repede. Se poate deci afirma că pentru valorile $\gamma \geqslant 15°$, viteza de aşchiere are o influenţă mult mai mare asupra deformaţiilor la care este supusă aşchia de către faţa de degajare. Se poate considera că aceasta este strîns legată de forţele de frecare ce iau naştere pe suprafaţa de degajare.

Cu cît diametrul elicei de înfăşurare este mai mic, cu atît se măreşte puterea utilă necesară dezvoltării procesului de aşchiere. O suplimentare pentru puterea utilă este cerută şi de fragmentarea de la sine a aşchiei care este în general determinată de valoarea unghiului de degajare, viteză, uzura cuţitului, materialul de prelucrat etc. O separare a influenţei fiecărui factor în parte este destul de greu de realizat, deoarece o dată cu variaţia unghiului γ se schimbă valoarea coeficientului de frecare şi grosimea stratului ecruisat de metal prelucrat.

Consumul mai mare de energie cerut de unghiurile de degajare negative se poate reduce uneori prin combinarea acestora cu unghiurile de degajare pozitive [8]. Acest lucru se realizează practic prin executarea faţetei, ce aduce de altfel îmbunătăţiri şi durabilităţii sculei. Se cunoaşte că lăţimea acestei faţete este funcţie de rezistenţa medie de rupere la tracţiune a materialelor ce se prelucrează. De obicei, valoarea ei se recomandă ca o funcţie de avans.

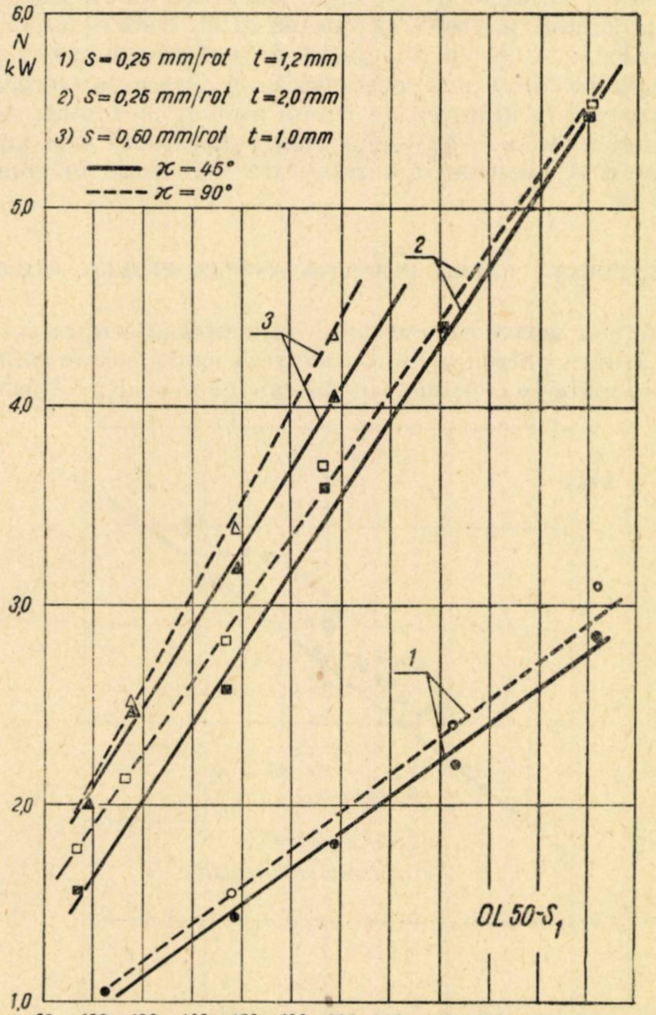


Fig. 6. — Variaţia puterii utile funcţie de unghiul de atac principal la prelucrarea oţelului OL 50 pentru diferite regimuri.

b. *Influenţa unghiului de atac principal* $\varkappa$ *asupra puterii utile.* Pentru unghiul $\varkappa$ s-au făcut studii atît din punct de vedere al durabilităţii [3], cînd acesta ia diverse valori, cît şi din punct de vedere al influenţei acestuia asupra regimului economic [4]. Pentru a vedea influenţa unghiului de atac principal asupra puterii utile, s-au făcut măsurători pe oţelul OL 50, pentru $\varkappa = 45°$ şi $\varkappa = 90°$.

Rezultatele obţinute au fost trasate în figura 6 şi au fost efectuate pe o gamă largă a vitezelor de aşchiere. Măsurătorile au arătat că o dată cu creşterea unghiului $\varkappa$, creşte şi puterea utilă. Deci se recomandă utilizarea unghiurilor $\varkappa < 90°$ şi din punct de vedere energetic, prelucrarea cu aceste unghiuri fiind mai economică, deoarece micşorează puterea absorbită raportată la unitatea de volum aşchiat pe minut. Aşa cum s-a arătat [3], unghiurile $\varkappa = 30° \div 45°$ dau o rezistenţă mai mare vîrfului cuţitului, asigurînd acestuia o durabilitate mai mare în comparaţie cu unghiul $\varkappa = 90°$.

3. INFLUENŢA UZURII PLĂCUŢEI ASUPRA PUTERII UTILE

Uzura feţelor active ale cuţitului influenţează asupra calităţii piesei prelucrate şi asupra puterii utile. Cu mărirea uzurii, scade calitatea piesei prelucrate şi se măreşte consumul de energie necesar dezvoltării procesului de prelucrare. În acest caz, creşterea de putere este o urmare a măririi forţelor de frecare deoarece feţele active ale plăcuţei capătă prin uzură o rugozitate din ce în ce mai pronunţată. În acelaşi timp, evoluţia uzurii

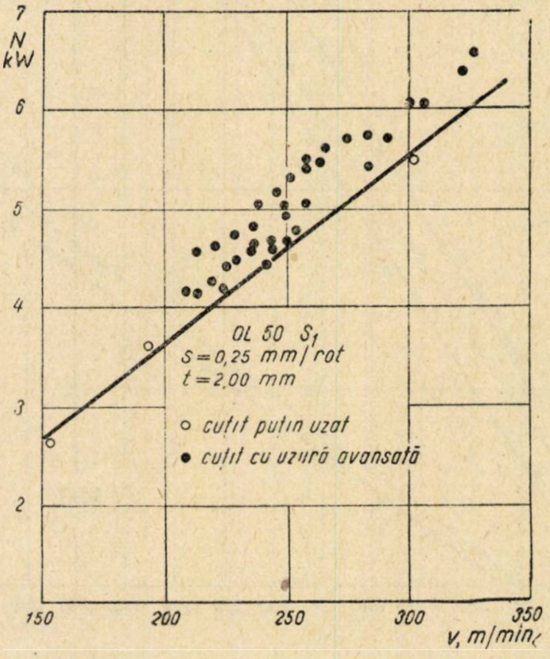


Fig. 7. — Influenţa uzurii cuţitului asupra puterii utile la prelucrarea oţelului OL 50 cu $s = 0,25$ mm/rot, $t = 2$ mm.

atrage după sine o creştere a suprafeţelor de contact dintre aşchie, piesă şi sculă. Creşterea coeficientului de frecare, respectiv a forţelor de frecare şi a deformaţiilor suplimentare ce se produc în aceste condiţii, au ca urmare mărirea puterii utile. Din acest motiv, puterea utilă necesară aşchierii este mai mare cînd se utilizează un cuţit uzat, faţă de situaţia cînd se întrebuinţează un cuţit nou ascuţit. Uzura cuţitului produce o înrăutăţire a condiţiilor de curgere a aşchiei pe faţa de degajare, mărind frecarea dintre aşchie şi plăcuţă. Fenomene similare se petrec şi pe cele două feţe de aşezare ale cuţitului.

Pentru a ilustra influenţa diferitelor grade de uzură a plăcuţei asupra puterii utile, s-au făcut măsurători de putere în cazul prelucrării oţelului OL 50 la un avans şi o adîncime de aşchiere constante.

Aşa cum se arată în figura 7, sporul de putere utilă cerut de uzura cuţitului ia valori pînă la 20% cînd cuţitul se uzează progresiv, pînă la $\delta\alpha_1 = 1$ mm faţă de puterea cerută de un cuţit neuzat.

Măsurătorile redate în figura 7 au fost efectuate pe lungimi mici din epruvetele experimentale. S-a căutat a se evita măsurătorile de putere pe epruvete lungi, deoarece creşterea progresivă a uzurii influenţează asupra puterii utile înregistrate.

4. ALŢI PARAMETRI CARE INFLUENŢEAZĂ PUTEREA UTILĂ

În afară de parametrii analizaţi în lucrarea de faţă care îşi manifestă influenţa asupra puterii de aşchiere, mai există şi alţi factori care influenţează la rîndul lor puterea utilă. Dintre aceşti factori semnalăm influenţa razei de racordare şi a faţetei, a spărgătorului de aşchii, a vibraţiilor şi a materialului plăcuţelor.

a) Atît raza de racordare cît şi faţeta de pe faţa de degajare, influenţează puterea utilă. Cu cît raza de racordare este mai mare, cu atît creşte mai mult puterea de aşchiere. Aceste creşteri de putere pot merge pînă la 20% faţă de puterea necesară cînd scula are vîrful neracordat [8].

b) Spărgătorul de aşchii cere o suplimentare de energie datorită faptului că el creează în aşchie deformaţii suplimentare necesare ruperii ei.

c) Vibraţia este un fenomen autooscilator nedorit ce are repercusiuni asupra calităţii suprafeţei piesei prelucrate şi asupra funcţionării în bune condiţii a maşinii unelte. Ea este provocată uneori şi de variaţia ciclică a coeficientului de frecare pe faţa de degajare.

În măsurătorile de putere utilă ce s-au efectuat, s-a evitat acest fenomen care ar fi dus de altfel la instabilitate şi la erori de citire pe aparatele de măsură.

d) Se poate considera că practic, compoziţia chimică şi structura plăcuţelor din carburi metalice nu influenţează sensibil puterea utilă măsurată. În condiţii identice de experimentare nu s-au putut obţine diferenţieri sensibile de putere la utilizarea cuţitelor armate cu plăcuţele S_1 şi $T_{15}K_6$. Se poate considera că aceste diferenţieri intră în domeniul erorilor de măsurare.

5. PUTEREA MEDIE ABSORBITĂ DE UN CM^3 METAL AŞCHIAT PE MINUT

În studiul de faţă s-au stabilit relaţiile ce permit a se determina puterea utilă în kW, cînd cuţitul este ascuţit la geometria optimă a fiecărui oţel analizat. În aceste condiţii s-a arătat că puterea absorbită la prelucrarea fiecărui material este determinată de rezistenţa de rupere la tracţiune sau de duritatea acestora. S-a arătat, de asemenea, că există o anumită dependenţă între puterea utilă şi parametrii regimului de aşchiere : viteză, avans şi adîncime de tăiere. Tot cu ajutorul acestor parametri se poate determina debitul aşchiat Q în cm^3/min. Acest debit este dat de produsul celor trei parametri, v, s şi t.

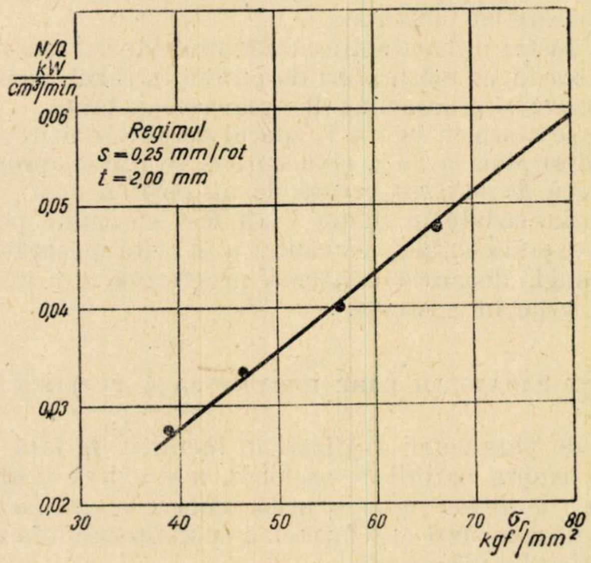


Fig. 8. — Variaţia puterii medii absorbite de 1 cm^3 metal aşchiat pe minut, în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune a oţelurilor carbon obişnuite, pentru s = 0,25 mm/rot, t = 2 mm.

Dacă se raportează puterea utilă calculată N în kW, la debitul Q în cm^3 metal aşchiat pe minut, se capătă valorile puterii medii absorbite. Un calcul de putere utilă medie absorbită s-a întreprins pentru cele cinci oţeluri studiate la un anumit regim de lucru. Puterile utile au fost calculate cu ajutorul relaţiilor (3), (4).

Rezultatele obţinute sînt redate în figura 8.

Unii autori au generalizat caracteristica de putere medie absorbită [9], indicînd anumite valori globale eşalonate atît pe game de durităţi cît şi pe procedee de prelucrare. Acest lucru a fost efectuat în vederea calculării puterii aproximative necesare prelucrării unui material, cînd se cunoaşte puterea medie absorbită. Dar de extinderea şi generalizarea concluziilor privitoare la acest capitol, nu ne ocupăm în studiul de faţă.

★

Pe baza studiilor asupra geometriei optime a cuţitului de strung, s-au determinat relaţiile de calcul ale puterii utile în procesul de aşchiere. Formulele de calcul ale puterii utile în cazul întrebuinţării cuţitului de strung ascuţit la geometrie optimă pentru prelucrarea oţelurilor din STAS 500-49 analizate, au fost determinate la regimuri de lucru şi durabilităţi mai frecvent întîlnite în industrie.

Calculul puterii utile la geometria optimă a cuţitului cu formulele preconizate, se recomandă a se efectua pînă la un plafon de putere utilă de circa 10—12 kW. Se deosebesc două tipuri de formule : cea pentru determinarea puterii utile la viteză oarecare şi cea de putere utilă la viteză economică. Al doilea tip de formulă este un caz particular al primului tip cînd viteza oarecare devine chiar viteza economică v_{60}.

Dintre parametrii geometrici, o mare influenţă asupra valorilor puterii utile o exercită unghiul de degajare. Acest lucru a fost exemplificat prin experienţele efectuate pe oţelul OL 50. Variaţia unghiului de degajare duce la modificarea condiţiilor de aşchiere, influenţînd astfel şi puterea utilă. Studiind, de asemenea, influenţa unghiului de atac principal asupra puterii utile, se remarcă faptul că o dată cu creşterea unghiului $\varkappa$, creşte şi puterea utilă.

Dintre factorii care influenţează puterea utilă, gradul de uzură al plăcuţei are o influenţă directă, mărind această putere o dată cu creşterea uzurii pe feţele active.

Puterea utilă mai poate fi influenţată de raza de racordare, de utilizarea faţetei, de întrebuinţarea spărgătorului de aşchii, de vibraţii şi de natura plăcuţei din carburi metalice.

Formulele de putere utilă prezentate în lucrarea de faţă oferă posibilitatea aflării puterii medii absorbite pe unitatea de volum aşchiat.

Dacă se ia în consideraţie şi puterea de mers în gol a maşinii se poate determina puterea totală ce trebuie furnizată de motor pentru o prelucrare în condiţii date.

Cunoaşterea energiei consumate şi deci a puterii utile pentru un anumit proces de prelucrare, prezintă printre altele un dublu interes :

— Calculînd preliminar puterea utilă pentru anumite condiţii de lucru se poate preconiza o încărcare raţională a maşinii unelte, în aşa fel ca aceasta să fie utilizată la capacitatea nominală.

— De asemenea, cu ajutorul caracteristicii de putere utilă se pot obţine date necesare pentru calculul de dimensionare al maşinilor unelte respective şi pentru alegerea motoarelor electrice de antrenare.

Primită la redacţie la 26 aprilie 1960

ИССЛЕДОВАНИЯ МОЩНОСТИ РЕЗАНИЯ ПРИ РАБОТЕ С ОБЫКНОВЕННЫМИ УГЛЕРОДИСТЫМИ СТАЛЯМИ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается полезная мощность при резании обыкновенных углеродистых сталей (STAS 500—49), когда применяются токарные резцы, оснащенные пластинками из твердых сплавов, доведенных до оптимальной геометрии заточки, соответствующей каждой стали.

В работе рассматриваются основные параметры, влияющие на мощность резания.

Определяются формулы для вычисления полезной мощности при любом режиме, при экономическом режиме и даются полезные, для практических применений, указания.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Изменение коэффициента C_2 из формулы (2) в зависимости от среднего сопротивления разрыву σ_r.

Рис. 2. — Изменение коэффициентов x_1 и y_1 из формулы (2) в зависимости от среднего сопротивления разрыву σ_r.

Рис. 3. — Изменение полезной мощности в зависимости от скорости при $s = 0{,}25$ мм/об, $t = 2$ мм, при обработке стали OL 50.

Рис. 4. — Изменение полезной мощности в зависимости от скорости при различных значениях переднего угла при обработке стали OL 50; $s = 0{,}6$ мм/об, $t = 1{,}5$ мм.

Рис. 5. — Изменение диаметра спирали обмотки стружки при обработке стали OL 50 с различными значениями переднего угла и скорости резания при $s = 0{,}6$ мм/об; $t = 1{,}5$ мм.

Рис. 6. — Изменение полезной мощности в зависимости от главного угла в плане при обработке стали OL 50 для разных режимов.

Рис. 7. — Влияние износа резца па полезную мощность при обработке стали OL 50; $s = 0{,}25$ мм/об; $t = 2$ мм.

Рис. 8. — Изменение средней мощности поглощаемой, в 1 см^3 срезанного металла в минуту, в зависимости от сопротивления разрыву обыкновенных углеродистых сталей при $s = 0{,}25$ мм/об; $t = 2$ мм.

ÉTUDE SUR LA PUISSANCE DE COUPE DANS LE CAS DES ACIERS AU CARBONE

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient la puissance absorbée au tournage des aciers au carbone (STAS 500-49), lorsqu'on utilise des outils de tour armés de carbures métalliques et affûtés selon la géométrie optimum correspondant à chaque acier.

Dans le présent travail, les auteurs analysent les principaux paramètres qui influent sur la puissance de coupe.

Ils établissent des formules permettant de calculer la puissance utile, à un régime quelconque, aussi bien qu'au régime économique, et donnent les indications nécessaires pour les applications pratiques.

EXPLICATIONS DES FIGURES

Fig. 1. — Variation du coefficient C_2 de la formule (2), en fonction de la résistance moyenne de rupture à la traction σ_r.

Fig. 2. — Variation des coefficients x_1 et y_1 de la formule (2), en fonction de la résistance moyenne de rupture à la traction σ_r.

Fig. 3. — Variation de la puissance absorbée en fonction de la vitesse, pour $s = 0{,}25$ mm/tour, $t = 2$ mm, dans le cas du travail de l'acier OL 50.

Fig. 4. — Variation de la puissance absorbée en fonction de la vitesse, pour diverses pentes effectives de coupe, dans le cas du travail de l'acier OL 50, lorsque $s = 0{,}6$ mm/tour et $t = 1{,}5$ mm.

Fig. 5. — Variation du diamètre de l'hélice enveloppante du copeau lors du travail de l'acier OL 50 à diverses pentes effectives de coupe et diverses vitesses de coupe, lorsque $s = 0{,}6$ mm/tour et $t = 1{,}5$ mm.

Fig. 6. — Variation de la puissance absorbée en fonction de l'angle d'arête de coupe latérale lors du travail de l'acier OL 50 sous divers régimes.

Fig. 7. — Influence de l'usure de l'outil sur la puissance absorbée lors du travail de l'acier OL 50, lorsque $s = 0{,}25$ mm/tour et $t = 2$ mm.

Fig. 8. — Variation de la puissance moyenne absorbée par 1 cm^3 de métal enlevé par minute, en fonction de la résistance de rupture à la traction des aciers au carbone ordinaires, lorsque $s = 0{,}25$ mm/tour et $t = 2$ mm.

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Despre regimul optim de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, 3 (1957).
2. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Asupra regimurilor optime de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, 1, (1959).
3. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Rezistenţa la uzură a sculei în funcţie de parametrii geometrici ai acesteia*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, 4 (1960).
4. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Parametrii regimului de aşchiere la oţelurile carbon obişnuite*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, 5 (1960).
5. Н. Н. ЗОРЕВ, *Вопросы механики процесса резания металлов*. Машгиз, Москва 1956.
6. М. Н. КЛУШИН, *Резание металлов*. Машгиз, Москва, 1953.
7. А. М. РОЗЕНБЕРГ, А. И. ЕРЕМИН, *Элементы теории процесса резания металлов*. Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
8. E. HLAMPAIN, *Théorie et pratique des outils de coupe*. Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
9. L. J. ST. CLAIR, *Etude et emploi de l'outil de coupe*. Ed. Dunod, Paris, 1956.
10. * * * *Машиностроение*, VII, Машгиз, Москва, 1947.

COMPARAȚIE ÎNTRE TĂIEREA VERTICALĂ A SOLURILOR CU O SINGURĂ LAMĂ ȘI TĂIEREA CU MAI MULTE LAME DISPUSE ÎN TREPTE

DE

IS. NICULESCU şi C. FLORESCU

INTRODUCERE

Solurile sînt medii anizotrope, iar anizotropia lor variază în deosebi pe direcție verticală (cu adîncimea), datorită modificării compoziției mineralogice, structurii, tăieturii, umidității etc. Acești factori determină în mare măsură caracteristicile fizico-mecanice ale solurilor în adîncime.

Pentru aceste motive, căile obișnuite folosite în studiul tăierii metalelor, nu pot găsi utilizare la soluri și de aceea este necesar a se face apel la cunoștințele din domeniul deformațiilor plastice.

Deoarece cunoașterea modului de comportare la tăiere a solurilor și influența diferiților factori asupra tăierii sînt de mare importanță pentru lucrările agricole diferite și de asemenea pentru dimensionarea și confecționarea diferitelor organe de tăiere a solului, se va prezenta în cele ce urmează un studiu teoretic privind tăierea verticală cu una sau mai multe lame (dispuse în trepte).

DESCRIEREA OPERAȚIEI DE TĂIERE VERTICALĂ CU LAME

Se consideră o lamă metalică, dispusă într-un plan vertical și deplasîndu-se în direcție orizontală. Elementele sale geometrice sînt

s = grosimea lamei,

b = lățimea lamei,

h = adîncimea de pătrundere în sol,

β = unghiul tăișului (valoarea optimă indicată de practică este $35 < \beta < 60°$).

Practica a arătat că în procesul de tăiere a solului, lama va dizloca din sol o felie de grosime aproximativ egală cu s, iar punerea în mişcare a solului se va face pe o zonă al cărei profil este reprezentat de conturul $ABDB'$. Aşadar, în timpul tăierii, solul tulburat este reprezentat de o prismă cu bazele $ABDB'$ şi înălţimea s, iar suprafeţele de rupere a solului

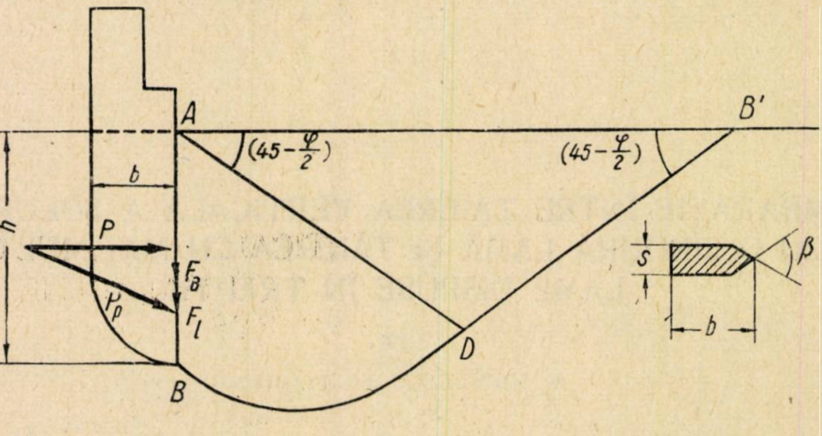


Fig. 1

sînt cele două baze ale prismei şi suprafaţa $BDB'B'_1$. (v. fig. 2). Aceasta din urmă este în acelaşi timp şi suprafaţa de alunecare şi frecare între solul dizlocat şi cel rămas. Ea este formată din o porţiune plană $DB'B'_1D_1$ care face unghiul $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ cu un plan orizontal (φ este unghiul de frecare interioară a solului) şi o altă porţiune curbă BDD_1B_1, tangentă la prima de-a lungul liniei DD_1. Linia DD_1 este intersecţia a două plane care trec respectiv prin AA_1 şi $B'B'_1$ şi sînt înclinate cu $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ faţă de un plan orizontal. Din acestea rezultă că muchiile BDB' şi B_1D_1B', care mărginesc suprafaţa de alunecare, vor fi formate din cîte o porţiune plană DB' respectiv $D_1B'_1$ la care în punctele D şi D_1 se racordează cîte o porţiune curbă DB şi D_1B_1.

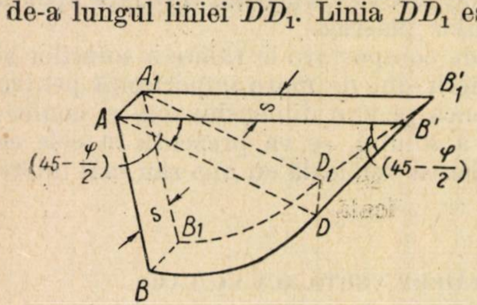


Fig. 2

Forma prismei de sol tulburat şi suprafaţa de alunecare aşa cum sînt prezentate mai sus, sînt explicate prin faptul că suprafeţele de rupere nu se produc după direcţia forţei ci după direcţia care face cu forţa un anumit unghi $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$. În zona din prisma de sol delimitată de suprafaţa terenului şi cele două plane înclinate cu $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ ce trece prin AA_1 şi $B'B'_1$, nu există frecări cu lama, aşa că se poate presupune că este valabilă ipoteza lui Rankine. Ducînd prin DD_1 un plan vertical, prisma de sol tulburat se împarte în două prisme $ABDE$ şi $DB'E$. Aceasta din urmă se găseşte în întregime în zona în care este valabilă ipoteza Rankine.

FORŢELE CE ACŢIONEAZĂ ASUPRA PRISMEI DE SOL TULBURAT

Se notează cu :

σ_p = presiunea specifică variabilă cu adîncimea, exercitată de lama asupra solului, în kgf/cm^2,

P = presiunea totală exercitată de lama asupra prismei de sol $= \int \sigma_p \cdot s \cdot dh$ cu kgf,

h' = adîncimea de pătrundere a unei lame mai mici în cm $(h' < h)$,

f_l = coeficient mediu de frecare între lama şi sol $= \frac{F_l}{P}$,

F_l = forţa de frecare între lama şi sol $= \int_A^B f \cdot \sigma_p s \cdot dh$ în kgf (forţa este paralelă cu AB),

a = coeficient mediu de aderenţă a solului la lama,

F_a = forţa de aderenţă între lamă şi sol $= \int_B^A a \cdot \sigma_p \cdot s \cdot dh$, kgf paralelă cu lama,

f şi f' = coeficienţi de frecare interioară între particulele componente a solului,

G = greutatea solului pus în mişcare,

c = coeficient mediu de coeziune a solului pe diferitele suprafeţe de separaţie (alunecare),

F_f = forţa de frecare de-a lungul suprafeţei de alunecare ($BDB' \times s$) (forţele de frecare laterale se neglijează, fiind mici) în kgf,

F_{c_1} = forţa de coeziune de pe suprafeţele laterale $= 2\ c \cdot$ aria $ABDB'$ kgf,

F_{c_2} = forţa de coeziune de pe suprafaţa de alunecare $= c \cdot$ aria BDB' (considerată paralelă cu direcţia DB') în kgf,

T = rezultanta reacţiunilor şi forţelor de frecare de pe suprafeţele de alunecare în kgf,

P_p = rezultanta forţelor P, F_l şi F_a (considerată că face unghiul ρ cu normala la direcţia AB).

P_p este dirijată în jos sub normala la AB. Dacă AB este verticala, forţa P_p tinde să îndese solul pe fundul făgaşului tăiat (suprafaţa $BDB' \times s$) şi chiar lateral în pereţii făgaşului pe zona de influenţă din faţa lamei. Ca urmare la aceasta, porozitatea solului se micşorează în zona de influenţă, rezistenţa la tăiere creşte şi lama are tendinţa să se urce. Prevenirea acestor efecte dăunătoare, se poate obţine înclinînd lama înainte cu un unghi faţă de verticala $\rho' > \rho$.

Din figura 1 se observă că

$$\rho = \operatorname{arctg} \frac{F_l + F_a}{P} = \operatorname{arctg} (f_l + a) . \qquad (1)$$

Coeficienții f_l și a se iau din tabele, așa că unghiul ρ poate fi calculat destul de ușor. El are valori în jurul 25—30°.

DETERMINAREA VALORII FORȚEI P ÎN CAZUL APLICĂRII TEORIEI COULOMB

În timpul tăierii cu o lamă ce pătrunde în sol pe adîncime AB, se pune în mișcare o masă de sol reprezentată de o prismă cu baza $ABDB'$ și înălțimea s.

Deocamdată facem unele simplificări și anume

— suprafața de alunecare este plană și înclinată cu unghiul $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ față de un plan orizontal,

— rezultanta T a reacțiunilor și a frecărilor de pe suprafața de alunecare face același unghi φ cu normala la această suprafață, ca și forțele elementare dT,

— coeficientul de frecare interioară, f, este constant pe toată suprafața de alunecare.

Dacă se pune $\overline{AB} = h$, din cele de mai sus rezultă

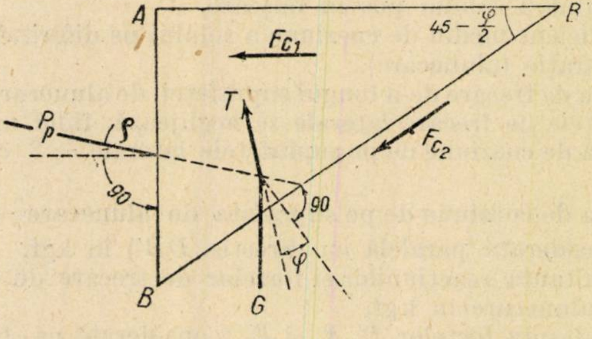


Fig. 3

$$F_f = G \cdot \cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot f = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}}{2} \cdot s \cdot \gamma_n \cdot \cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot f , \quad \text{sau}$$

$$F_f = 0{,}5\, h^2 \cdot s \cdot \gamma_n \cdot f \cdot \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) , \qquad (2)$$

$$T = \sqrt{G^2 \cdot \cos^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) + F_f^2} = 0{,}5 \cdot h^2 \cdot s \cdot \gamma_u \cdot \cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \times$$

$$\times \sqrt{1 + f \cdot \mathrm{tg}^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)} = 0{,}5 \cdot h^2 \cdot s \cdot \gamma_u \cdot \sin\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{1 + f \cdot \mathrm{tg}^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)}, \tag{3}$$

$$F_{c_1} = 2\,\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}}{2} \cdot c = \overline{AB}^2 \cdot c \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) = h^2 \cdot c \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{4}$$

$$F_{c_2} = AB \cdot \sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot s \cdot c = h \cdot s \cdot c \cdot \sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{5}$$

Ecuațiile (2), (3), (4) arată că forțele F_f, T, F_{c_1} și G care intră în compunerea forței P_p sînt proporționale cu pătratul adîncimii de tăiere h, iar celelalte componente F_a, F_l și F_{c_2} sînt proporționale, aproximativ cu adîncimea (de fapt coeficienții de aderență și de coeziune cresc cu adîncimea, așa că forțele care depind de acești coeficienți, variază cu o putere supraunitară a adîncimii de tăiere). Din cele de mai sus se deduce :

1. Rezultanta forțelor, P, este cu atît mai mare cu cît adîncimea de tăiere crește.

2. Forțele componente mai importante, inclusiv greutatea masei de sol pusă în mișcare, cresc proporțional cu pătratul adîncimii de tăiere, iar celelalte cu o putere supraunitară a adîncimii. Se poate afirma deci, că forța de tăiere (necesară deplasării lamei tăietoare) va crește aproximativ cu pătratul adîncimii de tăiere.

3. Divizînd adîncimea de tăiere și efectuînd deci o tăiere în trepte cu mai multe lame dispuse decalat (atît pe orizontală cît și pe verticală) într-un același plan vertical, forțele de sub 1 și 2 se micșorează în consecință, organele de tăiere vor putea fi mai puțin robuste, iar puterea totală necesară pentru efectuarea unei tăieri la o anumită adîncime devine astfel mai mică.

◆

Deoarece se cunosc valorile și direcțiile forțelor G, F_l, F_a, F_f, F_{c_1} și F_{c_2} și numai direcțiile forțelor P și T, devine posibil ca pe cale grafică, cu ajutorul poligonului forțelor, să se deducă și valorile acestor două forțe.

În poligonul forțelor de mai jos (fig. 4) s-a luat

$\overline{ab} = G$,
$\overline{bc} = F_a$,
$\overline{cd} = F_l$,
$\overline{de} = F_{c_1}'$,
$\overline{ef} = F_{c_2}$,
$\overline{fg} = F_f$,
$\overline{gh} = T$,
$\overline{ha} = P$.

Din examinarea figurii 4 se deduce că valoarea reacțiunii T (a cărei direcție face totdeauna unghiul φ' cu normala la planul de alunecare BB') depinde între altele și de direcția forței P și deci la rîndul său F_f

este influenţat de P. Din examinarea cercurilor lui Mohr, rezultă că planele de alunecare nu coincid cu planele unde se produc eforturile tangenţiale, ci cu planele în care eforturile ating o anumită înclinare $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ cu direcţiile eforturilor tangenţiale. Din aceasta se deduce că dacă lama tăietoare se înclină înainte cu un unghi oarecare ρ' atunci eforturile tangenţiale nu mai sînt orizontale şi deci unghiul $\widehat{AB'B} < \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$. Ecuaţia (1) arată că este indicat ca $\rho' > \rho$. Ca atare suprafaţa ABB' devine mai mică şi deci volumul prismei de sol pus în mişcare se micşorează. Consecinţele sînt

1. Toate forţele care depind de volumul de sol dizlocat se micşorează (G, F_f, T, F_{c1}) şi anume cu cît înclinarea lamei faţă de verticală se măreşte, cu atît volumul de sol şi deci şi forţele respective se reduc.

2. Rezultanta acestora (P) se va micşora de asemenea dacă lama tăietoare se înclină.

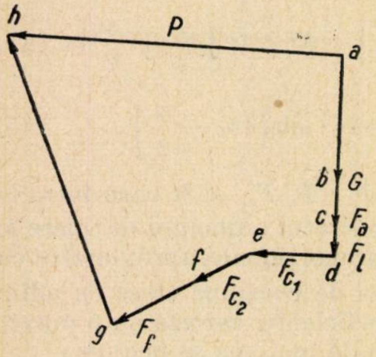


Fig. 4

DETERMINAREA FORŢEI P ÎN CAZUL APLICĂRII TEORIEI RANKINE

Teoria Rankine presupune absenţa forţelor de frecare şi aderenţa între lama tăietoare şi sol, iar lama urmează în deaproape deplasările prismei dislocate.

În acest caz presiunea specifică maximă, ce ia naştere în direcţie orizontală în momentul tăierii este, presiunea

$$\sigma_p = \gamma_u \cdot h \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + 2\, c \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{6}$$

Dacă se admite un coeficient de coeziune mediu, c, (constant) se poate scrie

$$P = \int \sigma_p dh = \frac{1}{2} \cdot \gamma_u \cdot h^2 \cdot \mathrm{tg}^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + 2\, c \cdot h \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{7}$$

Din ecuaţiile (6) şi (7) rezultă următoarele :

1) presiunea specifică creşte cu adîncimea de tăiere,

2) deoarece prin majorarea presiunii specifice, porozitatea solului se micşorează, iar compactitatea sa se măreşte, aceasta însemnează că şi coeficientul de coeziune se măreşte şi deci ambii termeni ai ecuaţiei (6) cresc cu adîncimea.

3) Forţa P creşte cu pătratul adîncimii de tăiere (primul termen al ecuaţiei (7)) şi de asemenea creşte mai mult decît proporţional cu adîn-

cimea (fiindcă c se mărește cu adîncimea); se poate deci afirma că P crește aproximativ cu patratul adîncimii de tăiere.

Și deci de aici se trage aceeași concluzie că forța P va fi mai mică dacă adîncimea de tăiere se împarte în mai multe trepte de tăiere, dispunînd lamele tăietoare decolat (orizontal și vertical) în același plan vertical de tăiere.

PREZENTAREA GEOMETRICĂ A TĂIERII CU O SINGURĂ LAMĂ SAU CU MAI MULTE LAME

a. *Cazul teoretic de tăiere după plane ce pornesc din punctul B*

1. Dacă se admite același unghi de frecare interioară (φ), între particulele de sol, atît în cazul tăierii cu o singură lamă (AB) cît și în cazul tăierii cu mai multe lame (a_1b_1, a_2b_2, $a_3b_3 \ldots$) atunci se constată că volumul de sol pus în mișcare de o singură lamă (AB) corespunde ariei ABb'_1, iar cel pus în mișcare de mai multe lame (spre exemplu 3) corespunde ariilor

$$a_1b_1b'_1 + a_2b_2b_1 + a_3Bb_2 < \text{aria } ABb'_1.$$

Ca atare masa de pămînt pusă în mișcare la tăierea în trepte este mult mai mică decît în cazul tăierii cu o singură lamă.

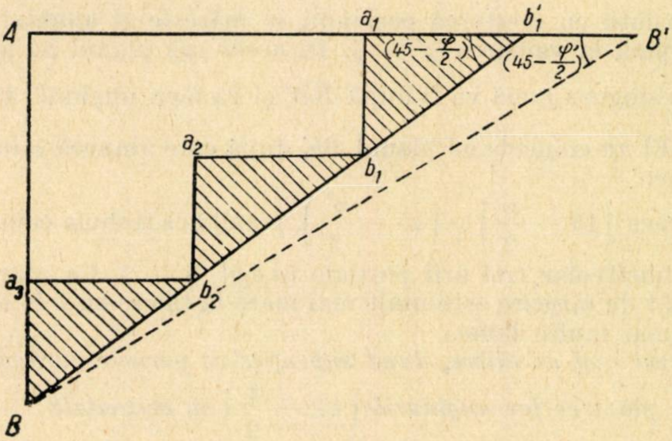


Fig. 5

Forța de tăiere în cazul a trei trepte va fi

$$P' = 3 \cdot 0{,}5 \cdot \gamma_u \cdot h'^2 \cdot \mathrm{tg}^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + 3 \cdot 2 \cdot c \cdot h' \cdot \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{8}$$

Dar $h' = \dfrac{h}{3}$ și $h'^2 = \dfrac{h^2}{9}$.

Aşadar

$$P' = 3\cdot 0{,}5\cdot\gamma_u\cdot\frac{h^2}{9}\cdot\mathrm{tg}^2\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)+3\cdot 2\cdot c\cdot\frac{h}{3}\cdot\mathrm{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=0{,}5\cdot\gamma_u\cdot\frac{h^2}{3}\mathrm{tg}^2\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)+2\cdot c\cdot h\cdot\mathrm{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)<P.$$

2. Dar presiunile specifice cresc cu adîncimea (ec. 6) şi de asemenea şi coeficienţii de coeziune. De aceea

$$\sigma_v = \gamma_u\cdot\frac{h}{3}\cdot\mathrm{tg}^2\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)+2\cdot c'\cdot\mathrm{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (6')$$

Deoarece $\frac{h}{3} < h$ şi $c' < c$ rezultă că

$$\sigma'_v < \sigma_s .$$

Prin urmare

$$P' = 0{,}5\cdot\gamma_u\frac{h^2}{3}\cdot\mathrm{tg}^2\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)+2\cdot c'\cdot h\cdot\mathrm{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (8')$$

Însă o dată cu creşterea coeziunii se măreşte şi unghiul de frecare interioară, pînă la valoarea $\varphi' > \varphi$. În acest caz planul de alunecare la tăierea cu o singură lamă va fi după BB' şi va face unghiul $\left(45-\frac{\varphi'}{2}\right)$ cu orizontala. El nu coincide cu planul Bb_1' după care alunecă solul la tăierea cu trei lame.

Deoarece $\left(45-\frac{\varphi}{2}\right) > \left(45-\frac{\varphi'}{2}\right)$, rezultă că trebuie comparată aria ABB' cu suma celor trei arii parţiale $(a_1b_1b_1^1 + \ldots)$. Ca atare, volumul de sol afectat de mişcare este mult mai mare la tăiere cu o lamă, decît la tăierea cu mai multe lame.

b. *Cazul real de tăiere, după suprafeţe ce pornesc curbe din B şi se continuă cu plane ce fac unghiurile* $\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)$ *cu orizontala*

Experienţele făcute pe diverse soluri arată că de fapt suprafaţa de alunecare porneşte din punctul B, dar nu este un plan, ci este mai complexă şi anume : ea începe ca o suprafaţă curbă din B care se racordează după o linie în punctul D cu un plan ce face unghiul $\left(45-\frac{\varphi'}{2}\right)$ cu o suprafaţă orizontală, aşa cum se arată în figurile 1 şi 6. Aşadar, pe porţiunea curbă BD se produce o comprimare şi deci o compactare a solului care aduce cu sine o mărire a forţei de tăiere necesară.

La o tăiere pe întreaga adîncime AB, zona de sol afectată de mişcare va fi $ABDB'$.

Împărțind adîncimea de tăiere în mai multe trepte (3), volumul de sol pus în mișcare corespunde ariilor ($a_1b_1b_1 + a_2b_2b_1 + a_3Bb_2$) al căror total este în orice caz mai mic decît aria $ABDB'$ (fig. 6). Mai trebuie ținut seama că unghiurile planurilor de alunecare parțiale $\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ sînt mai mari decît unghiul planului $\left(45 - \frac{\varphi'}{2}\right)$ corespunzător tăierii pe întreaga adîncime dintr-odată.

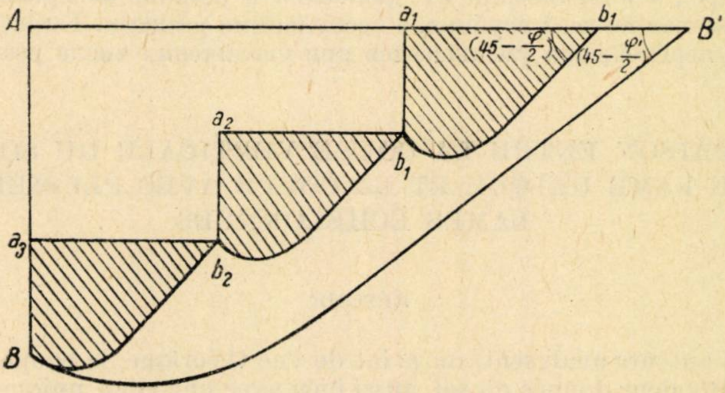


Fig. 6

CONCLUZII

Din expunerea de față rezultă că tăierea verticală în trepte este mai avantajoasă decît cea pe toată adîncimea dintr-odată, fiindcă prima deplasează simultan volume mai mici de sol, produce presiuni specifice mai mici și nu compactează prea mult solul în adîncime.

Urmează ca pe cale experimentală să se stabilească decalajul optim pe verticală (numărul de trepte) și decalajul pe orizontală (distanța între cuțite).

Primită la redacție la 14 martie 1960

СРАВНЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ОДНОРЕЗЦОВОГО РЕЗАНИЯ ГРУНТОВ СО СТУПЕНЬЧАТЫМ МНОГОРЕЗЦОВЫМ РЕЗАНИЕМ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается, с теоретической точки зрения, вертикальное резание до определенной глубины грунта одним резцом и несколькими резцами, расположенными в ступенях в вертикальной

плоскости, учитывая и другие параметры, встречающиеся в процессе резания. Вытекает, что для того, чтобы иметь возможно меньшую силу перемещения режущих деталей, необходимо чтобы резцы были наклонены вперед в направлении их движения и резание не производилось одним лемехом по всей глубине, а несколькими резцами. Также следует, что сила перемещения уменьшается при увеличении числа резцов.

COMPARAISON ENTRE LA COUPE VERTICALE DU SOL AVEC UNE LAME UNIQUE ET LA COUPE AVEC PLUSIEURS LAMES ÉCHELONNÉES

RÉSUMÉ

Les auteurs analysent, du point de vue théorique, la coupe verticale à une profondeur donnée du sol, aussi bien avec une lame unique, qu'avec plusieurs lames échelonnées dans un même plan vertical, tout en tenant compte des autres paramètres intervenant dans le processus de coupe. Il s'ensuit qu'afin d'obtenir une force de déplacement absorbée par les organes de coupe aussi petite que possible, il faut que les lames soient inclinées, vers l'avant, dans le sens de leur mouvement et que la coupe ne soit pas exécutée avec une seule lame dans toute la profondeur, mais avec plusieurs lames successives. Il s'ensuit, en outre, que la force de déplacement diminue lorsque le nombre des lames augmente.

S T U D I I

HIDROMECANICĂ

SUPRAFEȚELE BERNOULLI

DE

VICTOR VÂLCOVICI[1]

§ 1. INTRODUCERE

Suprafețele Bernoulli se pun în evidență mai ales în cazul mișcării permanente a fluidelor ideale (lipsite de viscozitate), barotrope, adică a fluidelor a căror ecuație a stării are forma

$$p = f(\rho). \tag{1}$$

Am însemnat cu p presiunea, cu ρ densitatea fluidului (masa redusă la unitatea de volum) și cu f o funcție derivabilă. În cele ce urmează vom folosi funcția $P(\rho)$ de ρ definită prin relația

$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \tag{2}$$

integrala din dreapta fiind o integrală obișnuită, nedefinită. Constanta aditivă care intră în constituirea funcției P nu va avea nici o importanță în calcule.

Folosirea suprafețelor Bernoulli în tratarea mișcării fluide reprezintă o simplificare însemnată; deoarece cu ajutorul acestor suprafețe mișcarea *tridimensională* a fluidului se reduce la una *bidimensională*, anume la scurgerea pe *suprafețele rigide Bernoulli.*

Astfel se poate face o apropiere, foarte utilă de altfel, între mișcarea plană, potențială, a fluidelor incompresibile, de o parte, și mișcarea tridimensională, rotațională a fluidelor compresibile, barotrope, de alta.

Urmărind mai de aproape această analogie, se pot distinge trei faze importante în evoluția problemei matematice a mișcării fluidelor ideale și anume:

Faza I, pe care am putea-o denumi faza Cauchy, privește mișcarea plană, irotațională, a fluidelor incompresibile. În această fază, mișcarea este presupusă a se repeta identic în toate planele paralele $z = \text{const.}$; tratarea ei matematică este dominată de existența a două funcții armonice φ și ψ de variabilele x, y, prima, *funcția potențială* φ al cărui gradient reprezintă ***vectorul viteză***, iar cea de a doua ψ, *funcția de curent*, care procură familia liniilor de curent prin ecuația $\psi = \text{const.}$ Cele două familii de curbe $\varphi = \text{const.}$ și $\psi = \text{const.}$ alcătuiesc împreună o *rețea ortogonală*, iar expresia $\varphi + i\,\psi$ $(i = \sqrt{-1})$ reprezintă o funcție analitică de variabila complexă $z = x + iy$.

---

[1] Universitatea „C. I. Parhon”.

Faza II, pe care am putea-o denumi *faza Ciaplîghin*, privește tot mișcarea plană — în planele $z = \text{const.}$ — tot irotațională, ca și în *faza Cauchy*, însă fluidul este *compresibil*. Această nouă fază reprezintă așadar un însemnat progres față de prima, întrucît fluidul nu mai este presupus incompresibil, cum era în faza Cauchy. Tratarea matematică a mișcării fluidului în faza II — inițiată de Ceaplîghin încă din 1904 — este dominată, de asemenea, de două funcții φ și ψ de x, y, funcția potențială φ dînd vectorul viteză prin gradientul ei, iar funcția ψ reprezentînd liniile de curent prin ecuația $\psi = \text{const.}$ Ca și în faza Cauchy, cele două familii de curbe $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, alcătuiesc laolaltă o *rețea ortogonală*.

Faza III, pe care am putea-o denumi *faza suprafețelor Bernoulli* (*SB*) consideră mișcarea *tridimensională* a fluidelor barotrope — deci compresibile, ca și în faza Ciaplîghin — însă ea realizează față de aceasta două progrese însemnate: mai întîi ea se ocupă de mișcarea *tridimensională* a fluidului, și al doilea, presupune că mișcarea este *rotațională*, adică vectorul vîrtej (turbion) este diferit de zero. S-ar putea spune deci că faza III cuprinde *tratarea matematică a mișcării generale (permanente) a unui fluid barotrop*. Tratarea matematică a acestei probleme generale va pune în evidență anumite proprietăți ale unor suprafețe rigide — *suprafețele Bernoulli* — pe care va avea loc mișcarea fluidului. În felul acesta, mișcarea *tridimensională* a fluidului se transformă într-una *bidimensională* — analog cu ceea ce se întîmplă în fazele I și II, cu deosebirea că planele $z = \text{const.}$ sînt înlocuite în faza III prin familia de suprafețe Bernoulli; totuși se pot pune în evidență și aici cele două funcții caracterizînd mișcarea, funcțiile φ și ψ, care alcătuiesc, pe o suprafață Bernoulli (*SB*), o rețea de curbe ortogonale, liniile de curent (pe *SB*) fiind date de relația $\psi = \text{const.}$ În ceea ce privește liniile de turbion care au în cazul mișcării rotaționale o existență analoagă cu aceea a liniilor de curent, sînt reprezentate cu ajutorul funcției potențiale φ printr-o ecuație de forma $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{const.}$, dacă notăm cu dn deplasarea pe normala la *SB*.

§ 2. ECUAȚIILE CLASICE DE MIȘCARE

Vom folosi ecuațiile lui Euler sub forma

$$-\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \times \operatorname{rot} \overline{u} = \operatorname{grad} B, \tag{3}$$

unde am notat cu $\bar{u}$ vectorul viteză și cu B scalarul

$$B = \frac{V^2}{2} + P - U, \tag{4}$$

V fiind modulul vitezei $\bar{u}$ ($V = |\bar{u}|$), iar U funcția al cărui gradient reprezintă vectorul forță redus la unitatea de masă.

Vom mai folosi ecuația (1) explicitată, precum și ecuația continuității

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{u}) = 0. \tag{5}$$

Ecuațiile (1), (3), (5) formează un sistem complet pentru necunoscutele problemei, $\bar{u}$, ρ, p considerate ca funcții de coordonatele spațiale x, y, z și de timpul t; ele se pot reduce la cinci ecuații scalare pentru cinci necunoscute scalare.

Forma (1) — mai puțin cunoscută — a ecuațiilor lui Euler are avantajul unei viziuni sintetice mai concentrate.

Din ea se poate deduce următoarea ecuație:

$$-\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{u} \times \bar{\omega}) = 0, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{u}, \tag{6}$$

prin aplicarea operatorului rot.

Observăm că ecuația (6) este, în fond, o condiție vectorială pentru vectorul viteză, $\bar{u}$, de unde rezultă că ea exprimă o *condiție necesară* pentru ca un vector oarecare $\bar{u}$, funcție de x, y, z, t, să poată reprezenta vectorul viteză $\bar{u}$ în mișcarea unui fluid ideal, barotrop. Condiția (6) este de altfel și *suficientă*, cu alte cuvinte, o dată îndeplinită, se vor putea determina funcțiile ρ și P așa fel ca ecuațiile sistemului să fie satisfăcute. În adevăr, condiția (6) spune că vectorul $-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \times \operatorname{rot} \bar{u}$ are rot nul deci, potrivit teoremei Stokes-Ostrogradski, va fi gradientul unei funcții F,

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \times \operatorname{rot} \bar{u} = \operatorname{grad} F.$$

Identificînd pe F cu B vom avea

$$\frac{V^2}{2} + P - U = F. \tag{7}$$

Densitatea ρ se poate scoate din ecuația (5) a continuității ca o funcție de x, y, z, t și deci presiunea p va fi cunoscută datorită ecuației stării (1). Relația (7) ne va da mijlocul de a determina pe U, căci P se determină cu ajutorul ecuației stării (1), așa încît ecuațiile (1), (3), (5) vor fi satisfăcute de vectorul $\bar{u}$ care ar îndeplini condiția (6).

De altfel, din condiția (6) se pot deduce fără dificultate ecuațiile lui Helmholtz privind vectorul turbion.

§ 3. CAZUL MIŞCĂRII PERMANENTE

Presupunînd mişcarea permanentă, ecuaţiile (3) şi (5) devin respectiv

$$\bar{u} \times \operatorname{rot} \bar{u} = \operatorname{grad} B \tag{8}$$

şi

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\bar{u}\right) = 0\,, \tag{9}$$

unde ρ_0 înseamnă o constantă, avînd dimensiunea unei mase specifice.

Aşadar, sistemul de ecuaţii (1), (3) şi (5) care urmează să determine mişcarea va fi înlocuit în acest caz prin sistemul format de ecuaţiile (1), (8) şi (9).

Ultimele două ecuaţii sînt susceptibile de o interpretare remarcabilă. În particular, ecuaţia (8) proiectată pe planul vectorilor $\bar{u}$, rot $\bar{u}$ ne dă

$$\frac{dB}{ds} = 0\,, \tag{10}$$

ds fiind o deplasare arbitrară în planul celor doi vectori, deoarece, după cum se ştie, proiecţia vectorului grad B pe direcţia deplasării ds este egală cu $\frac{dB}{ds}$. Dacă, în particular, ds înseamnă o deplasare pe linia de curent L trecînd prin punctul considerat P ecuaţia (10) spune că B rămîne constant de-a lungul acelei linii.

În mod analog se arată că B rămîne constant de-a lungul liniei de turbion L', care trece prin punctul P. Este evident că pe această din urmă linie B va lua valoarea pe care a avut-o pe linia de curent L trecînd prin punctul P; rezultă că pe toată suprafaţa formată de reţeaua de linii de curent L care trec prin diversele puncte ale liniei de turbion L', B va avea aceeaşi valoare (constantă), iar suprafaţa astfel alcătuită va fi identică cu suprafaţa formată de liniile de turbion trecînd prin diversele puncte ale liniei de curent L. Aceasta este o *suprafaţă Bernoulli* (*SB*).

Prima apariţie a acestei suprafeţe se găseşte la H. Poincaré ¹). Mai tîrziu, P. Appell o menţionează în cunoscutul tratat de mecanică ²). Între 1920 şi 1930, apar în revistele ştiinţifice italiene o seamă de lucrări interesante datorite cunoscuţilor matematicieni B. Segre, B. Caldonazzo, B. Finzi, U. Cisotti, A. Masotti ³), în care se studiază anumite proprietăţi ale *SB*; tot atunci apare şi numele de *suprafaţă Bernoulli* (Caldonazzo, Finzi). După 1950 au apărut în revistele sovietice unele lucrări de natură mai mult geometrică ⁴) datorite matematicienilor C. C. Biuşghens şi O. V. Golubeva, iar de curînd profesorul ieşan Gh. Gheorghiev a publicat unele observaţii interesante tot de natură geometrică ⁵).

---

¹) [1].
²) [2], p. 410.
³) [2] ... [11].
⁴) [13], [15], [16], [17], [18].
⁵) [18], [19].

Felul cum a fost dedusă mai sus SB arată că există o familie de astfel de suprafețe, depinzînd de un singur parametru, a cărei ecuație va fi de forma

$$B = \text{const.} \tag{11}$$

Ele sînt suprafețe rigide în fluid, iar mișcarea fluidului va fi o scurgere de-a lungul acestor suprafețe rigide, deoarece liniile de curent — care sînt identice cu traiectoriile particulelor fluide — se află situate pe astfel de suprafețe. Se poate spune deci că studiul mișcării *tridimensionale* a fluidului se reduce la studiul mișcării *bidimensionale* a unui fluid mobil pe *suprafețele Bernoulli* (SB). Această idee a fost accentuată în lucrările [20], [21], [22]. În cele ce urmează vom continua studiul mișcării, servindu-ne de un sistem avantajos de coordonate, pe care de altfel l-am mai folosit în [22].

§ 4. COORDONATE CURBILINII

Vom nota cu q^i $(i = 1, 2, 3)$ coordonatele curbilinii ale unui punct oarecare P din spațiu, a cărui poziție o presupunem determinată prin vectorul de poziție respectiv $\bar{r}$ (funcție de q^1, q^2, q^3). Vom avea deci, potrivit acestor ipoteze, pentru elementul de linie ds

$$(ds)^2 = g_{ij}\, dq^i\, dq^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)\,, \tag{12}$$

unde g_{ij} înseamnă componentele covariante ale tensorului fundamental al spațiului,

$$g_{ij} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j}\,. \tag{13}$$

Vectorul viteză $\bar{u}$ se va exprima prin relația

$$\bar{u} = u^i \bar{e}_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

unde am notat cu $\bar{e}_i$ *baza* sistemului curbiliniu adoptat,

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\,. \tag{15}$$

Mărimile u^i vor fi componentele contravariante ale vitezei $\bar{u}$ în această bază.

$$u^i = \dot{q}^i\,. \tag{16}$$

Componentele covariante u_i ale aceluiași vector $\bar{u}$ se vor obține cu ajutorul formulelor cunoscute

$$u_i = g_{ij}\, u^j\,. \tag{17}$$

Pentru a determina rețeaua de curbe a sistemului curbilin pe care-l vom adopta, vom presupune că congruența traiectoriilor ortogonale la familia de suprafețe (11) formează curbele q^3. Vom putea deci reprezenta familia (11) a SB prin ecuația

$$B = q^3\,. \tag{18}$$

Vom mai presupune că toate punctele de intersecție ale unei asemenea traiectorii ortogonale, cu suprafețele *SB* posedă aceleași coordonate q^1, q^2, acestea formînd un sistem de coordonate pe *SB*, date de rețeaua de curbe q^1 și q^2 pe *SB*. În felul acesta poziția oricărui punct din spațiu va fi determinată prin coordonatele q^i ($i = 1, 2, 3$), căci valoarea lui q^3 va determina *SB* din familia (18), pe care se află punctul considerat, iar q^1, q^2 îi vor determina poziția pe această *SB*.

Deoarece vectorul $\overline{u}$ este așezat pe *SB* (adică $q^3 =$ const.) rezultă din (16)

$$u^3 = 0. \tag{19}$$

Componenta corespunzătoare covariantă u_3 va fi de asemenea nulă. În adevăr, formula (17) ne dă

$$u_3 = g_{3j}\, u^j = g_{31}\, u^1 + g_{32}\, u^2 ,$$

unde va trebui să punem

$$g_{31} = g_{32} = 0 , \tag{20}$$

pentru că curbele q^3 fiind ortogonale față de curbele q^1 rezultă

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial q^3}\, dq^3\, \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^1} = 0 ,$$

adică, potrivit relației (13),

$$g_{31} = 0 ;$$

în mod analog, se obține relația $g_{32} = 0$.

Notînd cu v^i valoarea scalară a componentei după dq^i a vectorului $\overline{u}$

$$\overline{u} = v^i \text{ vers } \overline{e}_i , \tag{21}$$

vom putea deduce din (12) — pentru $dq^2 = dq^3 = 0$

$$ds^1 = g_{11}\, dq^1 ,$$

unde ds^1 înseamnă deplasarea elementară în sensul dq^1. Deducem

$$v^1 = g_{11}^{-}\, u^1$$

și deci, general,

$$v^i = H_i\, u^i \quad \text{(fără sumare) } i = 1, 2, 3,$$

dacă notăm

$$H_i^2 = g_{ii} \quad \text{(fără sumare) } i = 1, 2, 3.$$

Mărimile H_i sînt coeficienții lui Lamé.

§ 5. FUNCȚIA DE CURENT

Ecuația continuității (9) se poate scrie imediat în coordonate curbilinii dacă se folosește expresia divergenței în astfel de coordonate. Vom avea

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}\, \frac{\rho}{\rho_0}\, u^i\right) = 0 , \quad i = 1, 2, 3, \tag{22}$$

unde am notat

$$g = det\,(g_{ij})\,.$$

Explicit relația precedentă se scrie

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\sqrt{g}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,u^1\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\sqrt{g}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,u^2\right) = 0\,, \tag{22'}$$

deoarece u^3 e nul. Însă relația (22′) este identic satisfăcută dacă luăm

$$\frac{\rho}{\rho_0}\,g\,u^1 = \frac{\partial\psi}{\partial q^2}\,, \quad \frac{\rho}{\rho_0}\,g\,u^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial q^1}\,, \tag{23}$$

notînd cu ψ o funcție continuă de q^1, q^2, q^3, de două ori derivabilă în raport cu primele două variabile q^1, q^2, și avînd derivata $\frac{\partial^2\psi}{\partial q^1\,\partial q^2}$ continuă.

Relațiile (23) ne dau

$$d\psi = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\,(u^1 dq^2 - u^2 dq^1)\,. \tag{23'}$$

Însă de-a lungul unei linii de curent expresia din paranteza din dreapta este egală cu zero; cu alte cuvinte, *liniile de curent* vor fi caracterizate de ecuația

$$\psi = \text{const.} \tag{24}$$

Funcția ψ este așadar o *funcție de curent.*

§ 6. EXPRESIA FLUXULUI DE CURENT

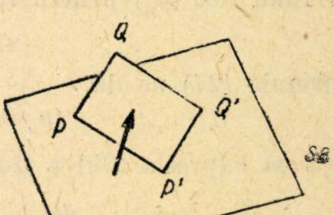


Fig. 1

Fie PP' un element de linie pe o suprafață oarecare SB (fig. 1) determinată de coordonata q^3, și fie QQ' elementul corespunzător acestuia pe suprafața SB determinată de valoarea $q^3 + dq^3$ a parametrului q^3; cu alte cuvinte, punctele Q și Q' sînt intersecțiile liniilor coordonate q^3 trecînd prin P și P', cu SB determinată de valoarea $q^3 + dq^3$ a parametrului q^3. Vom nota cu $d\bar{r}$ vectorul $\overline{PP'}$ și cu dr valoarea sa scalară. Valoarea fluxului de fluid dQ prin dreptunghiul $PP'Q'Q$ raportat la unitatea de timp va avea expresia

$$dQ = \rho\,u_n\,dr \cdot PQ\,, \tag{25}$$

dacă notăm cu u_n componenta vitezei $\bar{u}$ în punctul P, normală la elementul dr. Componenta u_n se calculează cu ajutorul produsului scalar $\bar{u}\,d\bar{r}$, anume

$$u_n = \left[(u)^2 - \left(\frac{\bar{u}\,d\bar{r}}{dr}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Vom avea deci

$$u_n\, dr = [(u)^2\, dr^2 - (\overline{u}\, d\overline{r})^2]^{1/2}. \tag{26}$$

Pe de altă parte avem

$$\overline{u}\,\overline{u} = (u)^2 = g_{ij}\, u^i u^j, \qquad (i, j = 1, 2)$$

$$dr^2 = ds^2 = g_{kl}\, dq^k\, dq^l \qquad (k, l = 1, 2)$$

şi

$$\overline{u}\, d\overline{r} = \overline{e}_i\, u^i\, \overline{e}_j\, dq^j = g_{ij}\, u^i\, dq^j,$$

$$(u_n\, dr)^2 = g_{ij}\, g_{kl}\, u^i u^j\, dq^k\, dq^l - g_{ij}\, u^i\, dq^j\, g_{kl}\, u^k\, dq^l$$

sau, cu o schimbare de indici,

$$(u_n dr)^2 = u^i u^j\, dq^k\, dq^l\, (ijkl), \tag{27}$$

unde am notat

$$(ijkl) = g_{ij}\, g_{kl} - g_{ik}\, g_{jl} \qquad (i, j, k, l = 1, 2).$$

Numărul expresiilor $(ijkl)$ unde i, j, k, l au numai valorile $1, 2$ va fi egal cu numărul aranjamentelor cu repetiţie de două obiecte luate cîte 4, adică $= 2^4 = 16$:

(1111)	(2222)	(1122)	(2211)
(1112)	(2221)	(1212)	(2121)
(1121)	(2212)		
(1211)	(2122)	(1221)	(2112)
(2111)	(1222)		

Observînd că cele 16 expresii $(ijkl)$ sînt toate nule afară de

$$(1122) = (2211) = G, \; (1212) = (2121) = -G,$$

G fiind det (g_{ij}) pentru $i, j = 1, 2$, adică

$$G = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \; (> 0) \tag{28}$$

formula (27) ne dă

$$(u_n\, dr)^2 = G\, (u^1\, dq^2 - u^2\, dq^1)^2,$$

aşa că expresia (25) a fluxului dQ devine

$$dQ = \rho \sqrt{G}\, (u^1\, dq^2 - u^2\, dq^1) \cdot PQ$$

luînd în dreapta valoarea absolută, bineînţeles. Formula precedentă ia o înfăţişare mai simplă dacă se înlocuieşte PQ prin elementul de linie ds, aşa cum reiese din (12) în lungul lui q^3 $(dq' = dq^2 = 0)$, adică

$$PQ = H_3\, dq^3, \qquad (H_3 = g_{33})$$

precum şi pe u^1, u^2 potrivit formulelor (23). Vom obţine astfel

$$dQ = d\,\psi\, dq^3. \tag{29}$$

Dacă cele două puncte P şi P' în loc de a fi vecine, ar fi situate pe SB la o distanţă finită, mărimea dQ ar avea expresia

$$dQ = [\psi(P') - \psi(P)]\, dq^3\,, \tag{29'}$$

luînd în dreapta valoarea absolută, ca mai sus.

§ 7. VECTORUL TURBION. FUNCŢIA POTENŢIALĂ

Vom defini vectorul turbion cu ajutorul componentelor covariante u_i $(i = 1, 2, 3)$ ale vectorului viteză. Vom considera anume tensorul covariant

$$\frac{\partial u_j}{\partial q^i} - \frac{\partial u_i}{\partial q^j}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

un tensor antisimetric de ordinul al doilea. Pseudovectorul asociat acestui tensor va avea componentele

$$2\,\omega^1 = \frac{\partial u_3}{\partial q^2} - \frac{\partial u_2}{\partial q^3},$$

$$2\,\omega^2 = \frac{\partial u_1}{\partial q^3} - \frac{\partial u_3}{\partial q^1},$$

$$2\,\omega^3 = \frac{\partial u_2}{\partial q^1} - \frac{\partial u_1}{\partial q^2}.$$

Este o densitate tensorială ale cărei componente vor fi date de

$$2\,\omega' = -\frac{\partial u_2}{\partial q^3}, \quad 2\,\omega^2 = \frac{\partial u_1}{\partial q^3}, \quad 2\,\omega^3 = \frac{\partial u_2}{\partial q^1} - \frac{\partial u_1}{\partial q^2}, \tag{30}$$

deoarece u_3 este nul, cum am văzut la § 4. Pe de altă parte liniile de turbion sînt situate pe SB, aşa încît ω^3 va fi de asemenea nul,

$$\frac{\partial u_2}{\partial q^1} - \frac{\partial u_1}{\partial q^2} = 0\,. \tag{30'}$$

Deducem că se poate admite existenţa unei funcţii φ (q^1, q^2, q^3) aşa fel ca să avem

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^1}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^2}\,. \tag{31}$$

Vom presupune că φ este o funcţie de două ori derivabilă în raport cu variabilele q^1, q^2, o dată continuu derivabilă în raport cu q^3 iar derivata mixtă $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial q^1 \partial q^2}$ continuă. Familia de curbe $\varphi = \text{const.}$ pe o SB va fi numită, prin analogie cu ceea ce se întîmplă în faza Cauchy, familia de curbe potențiale.

Se poate arăta că familia de curbe potențiale $\varphi = \text{const.}$ împreună cu familia de linii de curent de pe aceeași suprafață *SB* alcătuiesc o rețea ortogonală. În adevăr, notînd cu dq^i $(i = 1, 2)$ o deplasare elementară de-a lungul unei linii potențiale $\varphi = \text{const.}$ situată pe *SB*, și cu δq^i $(i=1, 2)$ o deplasare elementară pe o linie de curent $\psi = \text{const.}$ situată pe aceeași *SB* vom putea scrie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q^2} dq^2 = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q^1} \delta q^1 + \frac{\partial\psi}{\partial q^2} \delta q^2 = 0,$$

sau, cu (31) și (23),

$$u_1 dq^1 + u_2 dq^2 = 0,$$

$$-u^2 \delta q^1 + u^1 \delta q^2 = 0.$$

Exprimînd componentele covariante u_i ale vitezei în funcție de componentele contravariante u^i — formula (17) — cele două ecuații precedente devin

$$u^1 g_{i1} dq^i + u^2 g_{i2} dq^i = 0,$$

$$-u^1 \delta q^2 + u^2 \delta q^1 = 0.$$

Eliminînd pe u^1, u^2 între aceste două relații se obține

$$g_{ij} dq^i \delta q^j = 0,$$

ceea ce exprimă condiția cunoscută ca deplasările dq^i, δq^i să fie normale.

§ 8. ECUAȚIA LINIILOR DE TURBION

Ținînd seama de expresia (30) a componentelor turbionului, ecuația liniilor de turbion pe o *SB* se poate pune sub forma

$$\frac{dq^1}{-\dfrac{\partial u_2}{\partial q^3}} = \frac{dq^2}{\dfrac{\partial u_1}{\partial q^3}},$$

sau, cu ajutorul funcției potențiale φ, potrivit formulelor (31),

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^1 \partial q^3} dq^1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2 \partial q^3} = 0. \tag{32}$$

Să notăm cu Φ derivata $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q^3}$,

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial q^3}.$$

Relația (32) va deveni astfel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1}\, dq^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q^2}\, dq^2 = 0,$$

ceea ce conduce la integrala

$$\Phi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial q^3} = \text{const.} \tag{33}$$

pe *SB* ($q^3 = \text{const.}$).

Ecuația (33) reprezintă *liniile de turbion pe SB.*

§ 9. ECUAȚIILE FUNCȚIILOR φ ȘI ψ

Relația (17) care ne dă expresia componentelor covariante u_i în funcție de componentele contravariante u^i ale vitezei, poate fi completată cu relația

$$u^i = g^{ij}\, u_j, \tag{34}$$

dînd expresia componentelor contravariante u^i în funcție de componentele covariante u_i; ea se poate obține rezolvînd sistemul (17) în raport cu u^i. Vom avea deci

$$g^{ij} = \frac{\text{minor de } g_{ji}}{g}, \tag{35}$$

unde „minor de g_{ji}" înseamnă determinantul minor de ordinul al doilea în determinantul g,

$$g = \det\,(g_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, 3$$

corespunzător elementului g_{ji}. După cum se știe, mărimile g^{ij} reprezintă componentele contravariante ale tensorului fundamental g_{ij}.

Formula (35) ne dă de altfel valorile

$$\begin{gathered} g^{11} = \frac{g_{22}}{G}, \; g^{22} = \frac{g_{11}}{G}, \; g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{G}, \\ g^{33} = \frac{1}{g_{33}}, \; g^{31} = g^{32} = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Înlocuind atît în (17) cît și în (34) pe u_i și u^i în funcție de φ și ψ conform relațiilor (31) și (23) vom obține

$$\varphi_i = \frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\,(g_{i1}\psi_2 - g_{i2}\psi_1), \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}, \quad \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2) \tag{37}$$

și

$$\psi_1 = -\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\, g^{2i}\varphi_i, \quad \psi_2 = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\, g^{1i}\varphi_i. \tag{38}$$

Aceste formule — (37) şi (38) — reprezintă relaţiile dintre funcţiile φ şi ψ; ele generalizează cunoscutele relaţii Cauchy-Riemann privind partea reală şi partea imaginară a unei funcţii de variabila complexă $z = x + iy$. Eliminînd funcţia ψ între cele două relaţii (38) — prin derivare încrucişată $\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial q^1\,\partial q^2} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial q^2\,\partial q^1}\right)$ — se obţine ecuaţia pentru φ

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\,g^{ij}\,\varphi_j\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2), \tag{39}$$

sau, dezvoltat,

$$g^{11}\varphi_{11} + 2g^{12}\varphi_{12} + g^{22}\varphi_{22} + \ldots = 0, \quad \varphi_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^i\,\partial q^j}. \tag{40}$$

Am notat cu ... restul de termeni ai ecuaţiei în φ, care sînt de altfel numai termeni liniari şi de ordinul întîi în φ.

Discriminantul ecuaţiei caracteristice este egal cu $g^{11}g^{22} - (g^{12})^2$ adică, ţinînd seama de (36), cu $1/G$, aşadar un număr pozitiv : ecuaţia este din acest punct de vedere, de tip eliptic ; ea generalizează de altfel ecuaţia clasică a lui Laplace pentru două variabile.

În mod analog se poate obţine o ecuaţie similară pentru ψ, eliminînd funcţia φ prin derivare încrucişată, între cele două formule (37). Vom obţine astfel

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\rho_0 G}{\rho\sqrt{g}}\,g^{ij}\,\psi_j\right) = 0, \quad (i, j = 1, 2) \tag{41}$$

sau, dezvoltat,

$$g^{11}\psi_{11} + 2g^{12}\psi_{12} + g^{22}\psi_{22} + \ldots = 0, \quad \psi_{ij} = \frac{\partial^2\psi}{\partial q^i\,\partial q^j} \quad (i, j = 1, 2) \tag{42}$$

unde din nou am notat cu ... restul de termeni (de altfel numai liniari, de ordinul întîi) ai ecuaţiei în ψ. Cele două ecuaţii (40) şi (42) au aceeaşi formă dacă le limităm la termenii de ordinul al doilea. Ele generalizează, cum am mai menţionat, ecuaţia lui Laplace pentru două variabile.

§ 10. ALTE FORME ALE ECUAŢIILOR ÎN φ ŞI ψ

Ecuaţia în φ. Cu o uşoară transformare a sistemului alcătuit de ecuaţiile (1), (8) şi (9) se pot obţine alte forme pentru ecuaţiile în φ şi ψ decît acelea date sub (40) şi (42), care vor avea darul să realizeze o apropiere formală mai evidentă a mişcării acesteia generale, pe care o studiem, de mişcarea studiată de Ciaplîghin şi de şcoala sa. Vom considera în acest scop, ecuaţia lui Bernoulli (18) corespunzătoare mişcării, pe care o vom pune sub forma

$$\frac{1}{2}V^2 + P - U = q^3. \tag{43}$$

Pe de altă parte, exprimînd mărimea V^2 $(= g^{ij} u_i u_j)$ cu ajutorul potenţialului φ prin mijlocirea relaţiilor (31), vom avea

$$\frac{1}{2} g^{ij} \varphi_i \varphi_j + P - U = q^3 ; \; i, j = 1, 2, \tag{44}$$

de unde, prin derivare în raport cu q^i $(i = 1, 2)$, se scoate

$$g^{kl} \varphi_k \varphi_l + \frac{dP}{d\rho} \rho_i - U_i + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} \varphi_k \varphi_l = 0, \tag{45}$$

notînd

$$\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial q^i}, \; U_i = \frac{\partial U}{\partial q^i}, \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Vom introduce acum viteza sunetului c, conform ecuaţiei lui Hugoniot

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2, \tag{46}$$

aşa încît vom putea scrie

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dp} \frac{dp}{d\rho} = \frac{c^2}{\rho}. \tag{47}$$

Relaţia (45) devine

$$\frac{c^2}{\rho} \rho_i = U_i - g^{kl} \varphi_k \varphi_{li} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} \varphi_k \varphi_l. \tag{48}$$

Însă din (39) scoatem

$$\rho_i \sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_j + \rho \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_j) = 0. \tag{49}$$

Eliminînd pe ρ_i între aceste două din urmă relaţii obţinem

$$\sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_j \left(U_i - g^{kl} \varphi_k \varphi_{li} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} \varphi_k \varphi_l \right) + c^2 \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_j) = 0.$$

Vom face aici înlocuirile

$$g^{ij} \varphi_j = g^{ij} u_j = u^i, \; g^{kl} \varphi_k = g^{kl} u_k = u^l, \; u^l \varphi_{li} = u^j \varphi_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_j) = \sqrt{g}\, g^{ij} \varphi_{ij} + \varphi_j \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g}\, g^{ij})$$

şi vom divide toată relaţia cu $c^2 \sqrt{g}$. Vom avea astfel

$$\varphi_{ij} \left(g^{ij} - \frac{u^i u^j}{c^2} \right) - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} u^i \varphi_k \varphi_l + \frac{u^i U_i}{c^2} + \frac{\varphi_j}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g}\, g^{ij}) = 0, \tag{50}$$

ceea ce se poate scrie mai dezvoltat

$$\varphi_{11}\left[g^{11}-\frac{(u^1)^2}{c^2}\right]+2\varphi_{12}\left(g^{12}-\frac{u^1u^2}{c^2}\right)+\varphi_{22}\left[g^{22}-\frac{(u^2)^2}{c^2}\right]+\ldots=0, \tag{51}$$

unde am pus... în locul termenilor de ordinul întîi în φ (termeni de ordinul zero nu există).

Discriminantul caracteristicii va fi dat de expresia

$$D=\left[g^{11}-\frac{(u^1)^2}{c^2}\right]\left[g^{22}-\frac{(u^2)^2}{c^2}\right]-\left(g^{12}-\frac{u^1u^2}{c^2}\right)^2=$$

$$=g^{11}g^{22}-(g^{12})^2+2g^{12}\frac{u^1u^2}{c^2}-g^{11}\frac{(u^2)^2}{c^2}-g^{22}\frac{(u^1)^2}{c^2}.$$

Ținînd seama de formulele (36) și (28) vom avea pentru discriminantul D_φ

$$D_\varphi=\frac{G}{G^2}-\frac{1}{Gc^2}g_{ij}u^iu^j, \quad i,j=1,2$$

sau,

$$D_\varphi=\frac{1}{G}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right), \tag{52}$$

deoarece

$$g_{ij}u^iu^j=V^2.$$

Cum G este o mărime pozitivă, rezultă că discriminantul D_φ are semnul expresiei $1-\frac{V^2}{c^2}$, adică ecuația (51) va fi de tipul ***hiperbolic*** pentru mișcările ***supersonice,*** de tipul ***parabolic*** pentru cele ***transonice*** și de tipul ***eliptic*** pentru cele ***subsonice.***

Ecuația în ψ. Pornind de la ecuația (41), adică

$$\frac{\rho_0}{\rho^2}\rho_i\frac{G}{\sqrt{g}}g^{ij}\psi_j+\frac{\rho_0 G}{\rho\sqrt{g}}g^{ij}\psi_{ij}+\frac{\rho_0\psi_j}{\rho}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{G\,g^{ij}}{g}\right)=0\ (i,j=1,2), \tag{53}$$

vom înlocui derivata ρ_i prin expresia acesteia scoasă din ecuația Bernoulli (43), punînd această din urmă ecuație sub forma

$$\frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j+P-U=q^3.$$

Derivata ei în raport cu q^i ($i=1,2$) va fi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}u^jz^k+g_{jk}u^k\frac{\partial u^j}{\partial q^i}+\frac{c^2\rho_i}{\rho}-U_i=0. \tag{54}$$

Însă, din (23) se scoate prin derivare în raport cu q^i $(i = 1, 2)$

$$\frac{\partial u^1}{\partial q^i} = \frac{1}{\rho\sqrt{g}}\psi_{2i} - \frac{1}{\rho^2\sqrt{g}}\psi_2\rho_i, \quad \frac{\partial u^2}{\partial q^i} = -\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\psi_{1i} + \frac{1}{\rho^2\sqrt{g}}\psi_1\rho_i. \tag{55}$$

Substituind în (54) se scoate

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^i}u^j u^k + \rho_0\frac{g_{1k}u^k}{\rho\sqrt{g}}\left(\psi_{2i} - \frac{\rho_i}{\rho}\psi_2\right) +$$

$$+ \frac{\rho_0 g_{2k}u^k}{\rho\sqrt{g}}\left(-\psi_{1i} + \frac{\rho_i}{\rho}\psi_1\right) + \frac{c^2\rho_i}{\rho} - U_i = 0.$$

Vom face înlocuirile

$$g_{1k}u^k = u_1, \; g_{2k}u^k = u_2$$

și vom grupa termenii conținînd pe ρ_i; vom obține astfel

$$\rho_i\left(\frac{c^2}{\rho} + \frac{u_2\psi_1 - u_1\psi_2}{\rho^2\sqrt{g}}\right) = U_i + \frac{u_2\psi_{1i} - u_1\psi_{2i}}{\rho\sqrt{g}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}u^j u^k.$$

Observînd apoi că

$$\frac{-u_2\psi_1 + u_1\psi_2}{\rho\sqrt{g}} = u_1u^1 + u_2u^2 = V^2,$$

vom putea scrie

$$\rho_i\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2\sqrt{g}}\left(U_i + u_2\psi_{1i} - u_1\psi_{2i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}u^j u^k\right). \tag{56}$$

Eliminarea lui ρ_i între (50) și (53) ne va da

$$\rho c^2\sqrt{g}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)g^{ij}\psi_{ij} = g^{1j}\psi_j(u_2\psi_{11} - u_1\psi_{21}) + g^{2j}\psi_j(u_2\psi_{12} - u_1\psi_{22}) + \ldots$$

punînd în evidență numai termenii conținînd derivatele secunde ale lui ψ. Mai explicit, vom putea scrie

$$\psi_{11}\left[\rho c^2 g^{11}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\sqrt{g} - g^{1j}\psi_j u_2\right] + \psi_{22}\left[\rho c^2\sqrt{g}\,g^{22}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + g^{2j}\psi_j u_1\right] +$$

$$+ \psi_{12}\left[2\rho c^2\sqrt{g}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)g^{12} + g^{1j}\psi_j u_1 - g^{2j}\psi_j u_2\right] + \ldots = 0,$$

sau, folosind identitățile

$$g^{1j}\psi_j = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\,(-g^{11}u^2 + g^{12}u^1) = -\frac{\rho\sqrt{g}}{G\rho_0}g_{2j}u^j = -\frac{\rho\sqrt{g}}{G\rho_0}u_2,$$

$$g^{2j}\psi_j = \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}(-g^{21}u^2 + g^{22}u^1) = \frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_0 G}g_{1j}u^j = \frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_0 G}u_1,$$

care sînt evidente cu (23), și divizînd toată ecuația cu $1-\frac{V^2}{c^2}$,

$$\psi_{11}\left[g^{11}+\frac{(u_2)^2}{c^2kG}\right]+2\psi_{12}\left[g^{12}-\frac{u_1u_2}{c^2kG}\right]+\psi_{22}\left[g^{22}+\frac{(u_1)^2}{c^2kG}\right]+\ldots=0, \quad (57)$$

unde am notat

$$k=1-\frac{V^2}{c^2}.$$

Discriminantul caracteristicii acestei ecuații va avea expresia

$$D_\psi=\left[g^{11}+\frac{(u_2)^2}{c^2Gk}\right]\left[g^{22}+\frac{(u_1)^2}{c^2Gk}\right]-\left(g^{12}-\frac{u_1u_2}{c^2Gk}\right)^2=0,$$

adică

$$D_\psi=G\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Rezultă pentru ecuația (57) în ψ aceleași consecințe ca și pentru ecuația (51) în φ; ea va-fi de tipul *iperbolic* pentru mișcările *supersonice*, de tipul *parabolic* pentru cele *transonice* și de tipul *eliptic* pentru cele *subsonice*.

§ 11. LINII MACH

Referindu-ne la ecuația (51) în φ vom considera proiecțiile caracteristicilor corespunzătoare pe *SB*. Ecuațiile lor vor fi date de

$$\left[g^{11}-\frac{(u^1)^2}{c^2}\right](dq^2)^2+\left[g^{22}-\frac{(u^2)^2}{c^2}\right](dq^1)^2-2\left(g^{12}-\frac{u^1u^2}{c^2}\right)dq^2dq^1=0. \quad (58)$$

Curbele reprezentate de această ecuație diferențială sînt o generalizare a cunoscutelor *linii Mach* [1]).

Ele au proprietățile caracteristice ale liniilor Mach din mișcarea plană irotațională. În adevăr, notînd cu ds elementul de linie pe o curbă oarecare din familia (58) corespunzătoare deplasării dq^i vom avea

$$ds^2=g_{ij}\,dq^i\,dq^j=G\,[g^{22}(dq^1)^2+g^{11}(dq^2)^2-2g^{12}dq^1dq^2], \quad (59)$$

dacă ținem seama de relațiile (35). Rezultă că ecuația (57) se mai poate pune sub forma

$$ds^2=\frac{G}{c^2}(u^1dq^2-u^2dq^1)^2. \quad (60)$$

---

[1]) A se vedea d. ex. [26], p. 815.

Să considerăm tensorul contravariant

$$\Omega^{ij} = u^i\, dq^j - u^j\, dq^i\,,$$

care pe *SB* nu va avea diferită de zero decît componenta

$$\Omega^{12} = u^1 dq^2 - u^2 dq^1$$

precum și simetrica ei Ω^{21}. Pseudovectorul asociat acestui tensor va avea trei componente

$$\Omega_1 = \Omega^{23} = 0,\ \Omega_2 = \Omega^{31} = 0,\ \Omega_3 = \Omega^{12} = u^1 dq^2 - u^2 dq^1\,;$$

el va fi o *capacitate*. Deci componentele covariante ale tensorului corespunzător de ordinul întîi (vector propriu-zis) vor fi date de $\sqrt{g}\ \ \Omega_i$ iar componentele sale contravariante vor fi $\sqrt{g}\ g^{ij}\,\Omega_i$, adică 0, 0, $\sqrt{g}\ g^{33}\,\Omega_3$ $\left(=\frac{\sqrt{G}}{H_3}\,\Omega_3\right)$. Rezultă că componentele vectoriale ale produsului vectorial $\overline{u} \times d\overline{r}$, unde $d\overline{r}$ înseamnă vectorul de mărime ds de pe curba considerată, vor fi

$$0,\ 0,\ \sqrt{G}\ (u^1 dq^2 - u^2 dq^1).$$

Așadar, mărimea scalară a produsului vectorial $\overline{u} \times d\overline{r}$ va fi

$$\sqrt{G}\,(u^1 dq^2 - u^2 dq^1),$$

adică vom avea

$$u^1 dq^2 - u^2 dq^1 = \frac{V\, ds \sin\,(\overline{u},\, d\overline{r})}{\sqrt{G}}\,. \tag{61}$$

Substituind această expresie în (60) se obține

$$c^2 = V^2 \sin^2\,(\overline{u},\, d\overline{r}), \tag{62}$$

adică, *proiecția vitezei $\overline{u}$ pe direcția normalei la curbă este egală cu viteza sunetului.*

De aici se deduce imediat că *viteza $\overline{u}$ bisectează unghiul format de cele două curbe (58) care trec prin punctul considerat.*

Aceste două proprietăți sînt cunoscute pentru liniile Mach din mișcarea plană, irotațională. Ele se regăsesc aici, la mișcarea generală — rotațională, în spațiu — cu ajutorul suprafețelor *SB*. Din aceste motive vom conveni a numi *linii Mach*, curbele definite prin ecuația (58). Ele reprezintă o extindere naturală a liniilor Mach din mișcarea plană (cazul Ciaplîghin). De altfel, analogia lor cu liniile Mach din mișcarea plană poate fi dusă mai departe.

Trecînd la ecuația (53) în ψ, liniile Mach corespunzătoare vor fi date de ecuația

$$\left[g^{11} + \frac{(u_2)^2}{c^2Gk}\right](dq^2)^2 - 2\left(g^{12} - \frac{u_1u_2}{c^2Gk}\right)dq^1dq^2 + \left[g^{22} + \frac{(u_1)^2}{c^2Gk}\right](dq^1)^2 = 0. \tag{63}$$

Procedînd ca mai sus vom obține, în loc de (59), relația

$$ds^2 = \frac{1}{c^2 k}(u^1 dq^2 - u^2 dq^1)^2.$$

Relațiile (61) și (62) se mențin și în cazul ecuației (59), așa că cele două proprietăți semnalate mai sus vor fi valabile și în cazul liniilor Mach corespunzătoare ecuației în ψ.

§ 12. DETERMINAREA MIȘCĂRII

Funcțiile de q^1 q^2, q^3 care urmează a fi determinate sînt φ și ρ, două funcții scalare. Ecuațiile corespunzătoare vor fi: ecuația (39) și ecuația lui Bernoulli, $B = q^3$. Acesteia din urmă îi vom da forma (44)

$$\frac{1}{2} g^{ij} \varphi_i \varphi_j + P - U = q^3, \qquad (i, j = 1, 2) \tag{64}$$

unde P va fi considerat ca o funcție cunoscută de p (sau de ρ, prin ecuația stării), iar U — funcția de forță — de asemenea cunoscut.

În aplicații se mai poate folosi și o altă ecuație în φ, care se deduce direct din (8), iată cum. Componentele vectoriale ale vectorului grad B sînt, după cum se știe [27]

$$H_1 g^{1i} \frac{\partial B}{\partial q^i}, \qquad H_2 g^{2i} \frac{\partial B}{\partial q^i}, \qquad H_3 g^{3i} \frac{\partial B}{\partial q^i} \tag{65}$$

sau, cu $B = q^3$,

$$0,\ 0,\ \frac{1}{H_3}\cdot \tag{66}$$

Pe de altă parte, pseudovectorul $\bar{\omega} = \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{u}\right)$ este, după cum s-a văzut a §7, vectorul asociat al tensorului antisimetric

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial q^i} - \frac{\partial u_i}{\partial q^j}\right)\cdot \tag{67}$$

Componentele sale $\omega^1 (= \omega_{23})$, $\omega^2 (= \omega_{31})$, $\omega^3 (= \omega_{12})$ reprezintă o *densitate tensorială*, așa că $\frac{\omega^i}{\sqrt{g}}$ va fi un tensor de ordinul I, avînd deci componentele

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial u_2}{\partial q^3}, \quad \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial u_1}{\partial q_3}, \quad 0,$$

potrivit relațiilor (30) și (30′). Componentele covariante $\omega_i = g_{ij} \frac{j}{\sqrt{g}}$ ne vor da componentele vectoriale ale vectorului $\overline{u} \times \overline{\omega}$,

$$\begin{aligned} (\overline{u} \times \overline{\omega})^1 &= \frac{H_1}{\sqrt{g}} (u_2\omega_3 - u_3\omega_2), \\ (\overline{u} \times \overline{\omega})^2 &= \frac{H_2}{\sqrt{g}} (u_3\omega_1 - u_1\omega_3), \\ (\overline{u} \times \overline{\omega})^3 &= \frac{H}{\sqrt{g}} (u_1\omega_1 - u_2\omega_1), \end{aligned} \tag{68}$$

care, cu $u_3 = \omega_3 = 0$, se vor reduce la

$$0,\ 0,\ \frac{H_3}{\sqrt{g}} (u_1\omega_2 - u_2\omega_1)\,. \tag{69}$$

Rezultă că ecuația (8) se reduce la o singură ecuație scalară semnificativă

$$\frac{1}{H_3} = 2\frac{H_3}{\sqrt{g}} (u_1\omega_2 - u_2\omega_1). \tag{70}$$

Paranteza din dreapta se poate pune sub forma

$$u_1\omega_2 - u_2\omega_1 = g_{1i}g_{2j}(u^i\ \omega^j) - u^j\ \omega^i)\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{G}{\sqrt{g}} (u^1\omega^2 - u^2\omega^1),$$

așa încît relația (70) devine

$$u^1 \frac{\partial u_1}{\partial q^3} + u^2 \frac{\partial u_2}{\partial q^3} = 1\,, \tag{71}$$

ceea ce se poate pune și sub forma concentrată

$$g^{ij} u_j \frac{\partial u_i}{\partial q^3} = 1, \qquad i,j = 1,2 \tag{72}$$

sau

$$g^{ij}\,\varphi_j\,\varphi_{i3} = 1, \qquad i,j = 1,2\,. \tag{73}$$

Această ecuație poate fi uneori utilă în aplicații.

§ 13. TRANSFORMAREA HODOGRAFICĂ

S. A. Ciaplîghin a întrebuințat cu folos după cum se știe¹), transformarea hodografică. Adaptînd-o la mișcarea pe *SB* vom avea

$$V\cos\theta = \frac{u_1}{H_1}\,, \qquad V\cos(\alpha - \theta) = \frac{u_2}{H_2}\,, \tag{74}$$

---

¹) [26], p. 817 și urm., [25], p. 219.

unde am însemnat cu θ și α unghiurile

$$(V, q^1) = \theta, \qquad (q^2, q^1) = \alpha.$$

Însă pentru unghiul α avem [1]

$$H_1 H_2 \cos \alpha = g_{12} \tag{75}$$

și deci

$$H_1 H_2 \sin \alpha = \sqrt{G}. \tag{75'}$$

Pentru transformarea hodografică vom scrie relațiile (31) și (23') sub forma

$$d\varphi = u_1 dq^1 + u_2 dq^2, \tag{76}$$

$$d\psi = -\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\, u^2 dq^1 + \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g}\, u^1 dq^2,$$

de unde rezultă

$$dq^1 = \frac{u^1}{V^2} d\varphi - \frac{\rho_0 u_2}{\rho\sqrt{g}\, V^2} d\psi,$$

$$dq^2 = \frac{u^2}{V^2} d\varphi + \frac{\rho_0 u_1}{\rho\sqrt{g}\, V^2} d\psi. \tag{76'}$$

Vom înlocui pe u_1, u_2 prin expresiile lor din (74). Pentru u^1 vom avea

$$u^1 = g^{1i} u_i = g^{11} u_1 + g^{12} u_2,$$

sau, ținînd seama de (74)

$$u^1 = V\,[g^{11} H_1 \cos \theta + g^{12} H_2 \cos(\alpha - \theta)] =$$
$$= V\,[(g^{11} H_1 + g^{12} H_2 \cos \alpha) \cos \theta + g^{12} H_2 \sin \alpha \sin \theta].$$

Eliminînd pe sin α și cos α cu ajutorul relațiilor (75) și (75') vom obține, făcînd unele transformări elementare,

$$u^1 = \frac{V \cos \theta}{H_1}\left(1 - \frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \operatorname{tang} \theta\right), \tag{77}$$

ceea ce se mai poate pune sub forma

$$u^1 = \frac{V H_2 \sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{G}}. \tag{77'}$$

În mod analog, vom avea pentru u^2

$$u^2 = g^{2i} u_i = V\,[g^{21} H_1 \cos \theta + g^{22} H_2 \cos(\alpha - \theta)]$$

și după unele transformări elementare

$$u^2 = \frac{V H_1}{\sqrt{G}} \sin \theta. \tag{78}$$

---

[1] [27].

Relațiile (76′) se vor scrie, ținînd seama de (74), (77′) și (78),

$$dq^1 = \frac{H_2}{V}\left[\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{G}}\,d\varphi - \frac{\cos(\alpha-\theta)}{\rho\sqrt{g}}\,d\psi\right], \qquad (79)$$
$$dq^2 = \frac{H_1}{V}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\,d\varphi + \frac{\cos\theta}{\rho\sqrt{g}}\,d\psi\right).$$

În aceste relații vom considera pe α ca o funcție de componentele g_{ii} — cum reiese din (75), (75′) — iar coordonatele hodografice V și θ ale mișcării ca funcții de φ și ψ.

Vom presupune că jacobianul $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(V, \theta)}$ este finit și diferit de zero, așa încît, exprimînd variabilele φ, ψ cu ajutorul coordonatelor hodografice, V, θ relațiile (79) ne vor da

$$dq^1 = P_1\,dV + Q_1 d\theta, \qquad (80)$$
$$dq^2 = P_2\,dV + Q_2 d\theta,$$

unde P_1, P_2, Q_1, Q_2 vor avea expresiile

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{H_2}{V}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{G}}\,\varphi_V - \frac{H_2}{V}\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\rho\sqrt{g}}\,\psi_V,\\
Q_1 &= \frac{H_2}{V}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{G}}\,\varphi_\theta - \frac{H_2}{V}\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\rho\sqrt{g}}\,\psi_\theta,\\
P_2 &= \frac{H_1}{V}\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\,\varphi_V + \frac{H_1}{V}\frac{\cos\theta}{\rho\sqrt{g}}\,\psi_V,\\
Q_2 &= \frac{H_1}{V}\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} + \frac{H_1}{V}\frac{\cos\theta}{\rho\sqrt{g}}.
\end{aligned}\right| \qquad (81)$$

Impunîndu-le condiția de compatibilitate — condiția ca dq^1 și dq^2 să fie diferențiale totale exacte — se obțin relațiile

$$\frac{D(M_1, \varphi)}{D(V, \theta)} + \frac{D(N_1, \psi)}{D(V, \theta)} = 0, \qquad (82)$$
$$\frac{D(M_2, \varphi)}{D(V, \theta)} + \frac{D(N_2, \psi)}{D(V, \theta)} = 0,$$

unde am notat

$$M_1 = \frac{H_2}{V}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{G}}, \quad N_1 = -\frac{H_2}{V}\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\rho\sqrt{g}}, \quad M_2 = \frac{H_1}{V}\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}},$$
$$N_2 = \frac{H_1}{V}\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}. \qquad (83)$$

Relațiile (82) reprezintă generalizarea cunoscutelor relații ale lui S. A. Ciaplîghin din mișcarea plană, irotațională [1]), pentru mișcarea generală pe *SB* considerată aici.

Eliminînd pe φ între cele două ecuații (82) se obține o ecuație diferențială de ordinul al doilea pentru ψ ceea ce reprezintă o generalizare a cunoscutei ecuații Malenbroeck-Ciaplîghin [2]).

§ 14. CONDIȚIA CA O FAMILIE DE SUPRAFEȚE SĂ FIE *SB*

Fie

$$F^3(x, y, z) = \text{const.}$$

ecuația unei familii uniparametrice de suprafețe care urmează a reprezenta suprafețele Bernoulli (*SB*) ale unei mișcări fluide, permanente, x, y, z însemnînd coordonatele carteziene ortogonale ale unui punct oarecare. Ne propunem a determina condițiile pentru ca problema să fie cu putință. Raportînd mișcarea la un sistem curbilin de coordonate q^i $(i = 1, 2, 3)$, potrivit celor convenite, ecuația suprafețelor *SB* va fi $F^3(x, y, z) = q^3$. Celelalte două familii de suprafețe vor avea ecuațiile $F^i(x, y, z) = q^i$, $i = 1, 2$ unde funcțiile F^1 și F^2 vor trebui să satisfacă ecuațiile

$$\text{grad } F^i \text{ grad } F^3 = 0 \qquad i = 1, 2, \tag{84}$$

presupunînd că intersecțiile suprafețelor $F^1 = q^1$ și $F^2 = q^2$ sînt traiectoriile normale ale familiei $F^3 = q^3$. Vom nota, pentru a scurta scrierea

$$\bar{a}_i = \text{grad } F^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{85}$$

Calculul componentelor g_{ij} ale tensorului fundamental se face imediat, folosind formula (13) unde vom înlocui derivatele $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}$ prin expresiile obținute din rezolvarea ecuațiilor evidente

$$\bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j} = \delta_{ij}, \tag{85'}$$

unde δ_{ij} înseamnă tensorul lui Kronecker. Vom avea

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} (= \bar{e}_i) = \frac{\bar{a}_j \times \bar{a}_k}{\Delta}, \quad \Delta = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3), \tag{86}$$

ordinea i, j, k a indicilor fiind aceea a unei permutări pare între numerele 1, 2, 3. Rezultă pentru g_{ij} formula

$$g_{ij} (= \bar{e}_i \bar{e}_j) = \frac{1}{\Delta^2} (\bar{a}_j \times \bar{a}_k)(\bar{a}_k \times \bar{a}_i), \tag{87}$$

---

[1]) [26], p. 819, ecuațiile (89).

[2]) [26], p. 820, ecuația (92').

indicii i, j, k fiind numerele 1, 2, 3 după o permutare pară. Produsul scalar din dreapta se mai poate pune sub forma

$$(\bar{a}_j\bar{a}_k)(\bar{a}_k\bar{a}_i) - (\bar{a}_i\bar{a}_j)\,\bar{a}_k^2 ,$$

așa că formula (87) arată că g_{ij} este *minorul normat* al elementului $\bar{a}_i\bar{a}_j$ în determinantul *Gram*

$$D = \det(\bar{a}_i\bar{a}_j) = \Delta^2 . \tag{88}$$

Cum însă componenta contravariantă g^{ij} a tensorului fundamental este egală cu minorul normat al elementului g_{ij} în det (g_{ij}) rezultă că g^{ij} este însuși elementul $\bar{a}_i\bar{a}_j$,

$$g^{ij} = \bar{a}_i\bar{a}_j . \tag{89}$$

Însă relațiile (84) se pot scrie

$$\bar{a}_i\bar{a}_3 = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{90}$$

așa încît vom avea

$$g^{13} = g^{23} = 0. \tag{91}$$

De altfel, cum g_{ij} este minorul normat al elementului g^{ij} în determinantul det (g^{ij}), vom deduce

$$g_{13} = g_{23} = 0. \tag{92}$$

În definitiv vom avea, folosind formula (89)

$$g^{11} = (\bar{a}_1)^2, \quad g^{22} = (\bar{a}_2)^2, \quad g^{12} = \bar{a}_1\bar{a}_2 , \quad g^{33} = (\bar{a}_3)^2. \tag{93}$$

Deducem pentru g_{ij}, prin calcule simple

$$g_{11} = \frac{1}{(\bar{a}_1)^2 \sin^2(q^1q^2)}, \quad g_{22} = \frac{1}{(\bar{a}_2)^2 \sin^2(q^1q^2)}, \quad g_{33} = \frac{1}{(a)^2},$$
$$g_{12} = -\frac{\bar{a}_1\bar{a}_2}{(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)^2}. \tag{94}$$

Viteza $\bar{v}$ $(= \dot{\bar{r}})$ a punctului material considerat trebuie să se afle în planul tangent la *SB* deci vom avea

$$\bar{a}_3\bar{v} = 0 . \tag{95}$$

Turbionul $2\bar{\omega}$ se află tot pe *SB* așa că vom avea valabile relațiile (31) care arată existența unei funcții φ $(q^1q^2q^3)$. Această funcție va fi pusă sub o formă diferită folosind notația

$$\varphi(q^1, q^2, q^3) = \Phi(x, y, z),$$

unde $\Phi(x, y, z)$ înseamnă ceea ce devine φ cînd se înlocuiesc mărimile q^i prin $F^i(x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$. Vom avea prin urmare

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q^1} = \bar{e}_1 \operatorname{grad}\Phi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q^2} = \bar{e}_2 \operatorname{grad}\Phi \tag{96}$$

şi deci

$$u_i = \bar{e}_i \operatorname{grad} \Phi, \qquad i = 1, 2. \tag{97}$$

Funcţia $\Phi(x, y, z)$ trebuie să satisfacă ecuaţiile (64) şi (73) după ce vom fi făcut în aceste ecuaţii următoarele înlocuiri

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} = \bar{e}_i \operatorname{grad} \Phi, \qquad \varphi_{ij} = \bar{e}_j \operatorname{grad} (\bar{e}_i \operatorname{grad} \Phi)$$

şi în general

$$\frac{\partial A(x, y, z)}{\partial q^i} = \bar{e}_i \operatorname{grad} A,$$

pentru o funcţie oarecare $A(x, y, z)$.

Ecuaţia (73) este luată în loc de ecuaţia (39), ceea ce este permis, după cum s-a arătat în § 12.

Vom avea astfel ecuaţiile

$$\frac{1}{2} g^{ij} (\bar{e}_i \operatorname{grad} \Phi)(\bar{e}_j \operatorname{grad} \Phi) + P - U = F^3(x, y, z), \tag{98}$$

$$g^{ij} (\bar{e}_j \operatorname{grad} \Phi) [\bar{e}_3 \operatorname{grad} (\bar{e}_i \operatorname{grad} \Phi)] = 1, \qquad i, j = 1, 2, \tag{99}$$

pentru determinarea necunoscutelor ρ şi Φ ca funcţii de x, y, z. În aceste ecuaţii vom considera mărimile g, g^{ij}, $\bar{e}_i$ ca funcţii de x, y, z în virtutea relaţiilor (93), (94), (86), (85).

Relaţia (95), care apare în plus, reprezintă o condiţie pentru $F^3(x, y, z)$. Ea se poate pune sub o formă depinzînd de x, y, z, dacă observăm că vectorul $\bar{v}$ are expresia [1]

$$v = H_1 u^1 \operatorname{vers} \bar{e}_1 + H_2 u^2 \operatorname{vers} \bar{e}_2 + H_3 u^3 \operatorname{vers} \bar{e}_3,$$

unde H_i înseamnă coeficienţii lui Lamé

$$H_1 = g_{11},\ H_2 = g_{22},\ H_3 = g_{33},$$

iar u^i, componentele contravariante ale vectorului $\bar{u}$,

$$u^i = g^{ij} u_j = g^{ij} (\bar{e}_j \operatorname{grad} \Phi).$$

Aplicaţie. Să considerăm în particular $F^3 = z$. Vom putea lua în consecinţă $F^1 = x$, $F^2 = y$. Acesta este cazul tratat de L. Dragoş [2]. El corespunde unei mişcări pe plane paralele cu planul xy, fără a fi aceeaşi pe toate aceste plane.

Formulele calculate în acest paragraf ne vor da

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

$$u_1 = u^1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad u_2 = u^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

---

[1] [27].

[2] [23].

Condiția (95) este satisfăcută. Ecuația (99) devine

$$\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yz} = 1,$$

din care se deduce

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 2z - 2h(x, y), \tag{100}$$

$h(x, y)$ fiind o funcție arbitrară de x, y. Introducînd această soluție în (98) obținem

$$h(x, y) = \int \frac{dp}{\rho}. \tag{101}$$

Am presupus absente forțele masice ($U \equiv 0$).

Luînd pentru ecuația stării relația

$$p = \alpha \rho^{\gamma}, \quad \alpha = \text{const.}, \quad \gamma > 1$$

vom avea

$$h(x, y) = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}, \tag{102}$$

c fiind viteza sunetului determinată prin ecuația (46) a lui Hugoniot,

$$c^2 = \alpha\gamma \rho^{\gamma - 1}.$$

Așadar, masa specifică ρ este legată prin relația (102) de funcția arbitrară $h(x, y)$ de integrare. Rămîne să se determine funcția $h(x, y, z)$ cu ajutorul ecuației diferențiale (100) pentru a avea mișcarea. Condițiile la limită ale problemei fizice vor contribui la determinarea funcției $h(x, y)$.

Alte aplicații. Presupunînd că familia de *SB* ar fi dată de una din familiile de suprafețe care determină vreun sistem cunoscut de coordonate curbilinii, cum ar fi coordonatele cilindrice sau coordonatele polare, se poate ajunge la rezultate interesante fără mari dificultăți de calcul.

§ 15. CONCLUZII

Luînd în considerare suprafețele Bernoulli (*SB*) am putut reduce mișcarea permanentă a fluidelor barotrope, din *tridimensională*, într-una *bidimensională*, de-a lungul acestor suprafețe. Cum fluidele ideale cunoscute sînt mai toate barotrope, rezultă că practic vorbind, mișcarea generală tridimensională a fluidului ideal a fost redusă la o mișcare bidimensională.

Această reducere a numărului de dimensiuni aduce cu sine anumite simplificări de tratare, analoage acelora care apar în mișcarea plană potențială. În special, s-a pus în evidență și aici existența a două funcții, φ și ψ — ca și în cazul mișcării plane potențiale — unde φ posedă proprietatea esențială a funcției potențiale din mișcarea plană, aceea de a procura componentele vitezei prin derivatele ei parțiale în raport cu coordonatele curbilinii ale punctelor pe *SB*.

Funcţia ψ îndeplineşte rolul de funcţie de curent, adică, familia de linii de curent este dată de ecuaţia $\psi = \text{const.}$ — toate liniile de curent aflîndu-se aranjate pe suprafeţe Bernoulli (SB).

În sfîrşit, *liniile de turbion* — căci spre deosebire de faza Cauchy şi de faza Ciaplîghin, unde mişcarea era considerată *irotaţională*, aici mişcarea e presupusă a fi *rotaţională* — liniile de turbion sînt aşezate tot pe suprafeţele SB, iar ecuaţia lor este dată de formula simplă $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \text{const.}$, însemnînd cu dn deplasarea pe normala la SB.

Ecuaţiile diferenţiale pe care trebuie să le satisfacă funcţiile φ şi ψ sînt nişte generalizări ale ecuaţiei lui Laplace, tot de ordinul al doilea, cvasiliniare. Între aceste două funcţii există relaţii care generalizează relaţiile Cauchy-Riemann privind partea reală şi partea imaginară ale unei funcţii de o variabilă complexă.

Folosirea aceasta a suprafeţelor Bernoulli deschide perspective noi de lucru în diverse direcţii. De pildă, se pot impune unele condiţii suplimentare celor două funcţii φ şi ψ, aşa fel ca anumite aspecte geometrice sau cinematice să fie puse în evidenţă. În special, problema determinării unei mişcări fluide admiţînd o familie dată, uniparametrică, de suprafeţe drept SB, este solubilă. Cu ajutorul acesteia se pot determina mişcări particulare de un real interes, cum ar fi unele cazuri ale mişcării supersonice.

Primită la redacţie la 3 septembrie 1960

ПОВЕРХНОСТИ БЕРНУЛЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе доказывается, что движение баротропической идеальной жидкости имеет место на однопараметрическом семействе жестких поверхностей, называемых поверхностями Бернулли (ПБ), на которых находятся и вихревые линии. Двухмерное движение на ПБ определяется двумя функциями φ и ψ, играющими роль потенциальной функции и функции тока в плоском движении. Таким образом, вихревое трехмерное движение жидкости сводится к двухмерному движению.

LES SURFACES DE BERNOULLI

RÉSUMÉ

On démontre que le mouvement d'un fluide idéal, barotrope a lieu sur une famille de surfaces rigides (SB) dépendant d'un seul paramètre — les surfaces de Bernoulli. Les lignes de tourbillon du mouvement se trouvent également sur les surfaces (SB). Le mouvement en deux dimensions

sur SB est déterminé par deux fonctions, φ et ψ, jouant le rôle du potentiel des vitesses et de la fonction de courant qui interviennent dans le mouvement plan. On réduit de cette manière le mouvement fluide, rotationnel en trois dimensions à un mouvement en deux dimensions.

BIBLIOGRAFIE

1. H. POINCARÉ, *Théorie des tourbillons.* Paris, 1893.
2. P. A. APPELL, *Traité de Mécanique.* III. Ed. a III-a, 1921.
3. B. SEGRE, Ann. di Mat. *1*, 31—55 (1924).
4. B. CALDONAZZO, Rend. Lincei, *33*, 396—400 (1924).
5. — Rend. Lincei, **IV**, 124—126 (1926).
6. — Bull. Unione mat. it., **IV**, 1—3 (1925).
7. B. FINZI, Rend. Lincei, **VI**, 236—241 (1925).
8. — Rend. Palermo, 51, 1 — 24 (1927).
9. U. CISOTTI, Rend. Lincei, **VI**, 616—617 (1925).
10. A. MASOTTI, Rend. Lincei, **V**, 985—989 (1927).
11. — Rend. Lincei, **VI**, 224—228 (1927).
12. — Rend. Palermo, *52*, 313—330 (1928).
13. J. GRIALOU, C. R. Paris, 198, 1972—1973 (1934).
14. O. В. ГОЛУБЕВА, Прикл. мат. и мех., СССР, *78*, 287—294 (1950).
15. A. WINTNER, Quart. appl. Math.. **IX**, 102—105 (1951).
16. К. К. БИУШГЕНС, Докл. АН СССР, *78*, 837—840 (1951).
17. — Докл. АН СССР, *84*, 861—863 (1952).
18. GH. GHEORGHIEV, St. cerc. Iaşi, **II**, 1—18 (1951).
19. — Rev. Univ. Iaşi, **II**, 43—64 (1955).
20. V. VÂLCOVICI, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., **IV**, 541—545 (1952).
21. — Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., **V**, 147—152 (1953).
22. — Rend. Lincei, **XII**, 288—296 (1956).
23. L. DRAGOŞ, Rend. Lincei, **XXIV**, 142—148 (1958).
24. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*, I, II, Bucureşti, 1952—1955.
25. E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari*, Bucureşti, 1957.
26. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest et Paris, 1959.
27. V. VÂLCOVICI, ST. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Bucureşti, 1959.

HIDROMECANICĂ

APLICAȚIILE UNEI PROBLEME LA LIMITĂ ÎN MECANICA FLUIDELOR

DE

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ [1]

1. Metoda analogiilor electrohidrodinamice este larg utilizată pentru studiul unor probleme de mecanica fluidelor, în particular la mişcările în mediile poroase (de ex. [1]) — viteza de filtrație corespunzînd densității curentului electric, iar legea lui Darcy legii lui Ohm. Pentru rezolvarea problemelor de mişcări în medii poroase, se folosesc nu numai rezultatele teoriei electromagnetismului, ci şi a altor capitole ale fizicii matematice. O analogie mai rar subliniată este între mişcarea fluidelor perfecte şi mişcările liniare în mediile poroase. Astfel, particularizînd-se unele mişcări în medii poroase neomogene, se regăsesc cazuri clasice de mişcări staționare irotaționale ale fluidelor perfecte [2] [2]).

În lucrarea de față vom reaminti la început identitatrea problemelor matematice la care conduc teoria percusiunii asupra fluidelor perfecte şi unele probleme ale teoriei mişcărilor în mediile poroase omogene. Apoi vom rezolva efectiv cîteva probleme la limită particulare care apar în aceste teorii, iar în încheiere vom menționa posibilități de generalizare ale rezultatelor obținute.

2. Teoria percusiunii asupra fluidelor perfecte îşi propune a determina cîmpul vitezelor şi acțiunea hidrodinamică asupra unor suprafețe solide la sfîrşitul unui interval de timp foarte mic de-a lungul căruia acționează forțe impulsive. Pe lîngă interesul ce-l prezintă pentru proiectarea anumitor elemente, această teorie s-a dovedit utilă chiar pentru unele probleme speciale ale teoriei elasticității (de ex. [4]). Din punct de vedere matematic, cea mai generală problemă a teoriei percusiunii se poate formula astfel [5]:

---

[1]) Universitatea „C. I. Parhon".

[2]) O analogie indirectă între cazurile clasice menționate şi mişcarea apelor arteziene a fost menționată în [3].

Să se determine o funcţie armonică φ, definită într-un domeniu D în care ea este regulată, cunoscînd că pe frontiera $S = \bigcup\limits_{\nu=0}^{r} S$, a acestui domeniu

$$\varphi(M) = \begin{cases} 0 & , \ M \in S_0 \\ -p_{t_\alpha}(M)\,\rho^{-1} & , \ M \in S_\alpha \ , \ \alpha = 1, 2, \ldots, c, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_M = \begin{cases} 0 & , \ M \in S_\beta \ , \ \beta = c+1, c+2, \ldots, k, \\ \vec{V}_\gamma \cdot \vec{n}_\gamma(M) & , \ M \in S_\gamma \ , \ \gamma = k+1, k+2, \ldots, r. \end{cases} \tag{1}$$

Aici φ reprezintă potenţialul vitezelor, p_{t_α} presiunea impulsivă ce apare pe suprafaţa S_α, ρ densitatea fluidului, presupusă constantă, $\vec{V}_\gamma$ viteza instantanee comunicată suprafeţei S_γ, iar $\vec{n}_\gamma$ versorul normalei îndreptate spre fluid într-un punct curent al lui S_γ. Formularea aceasta presupune deci o serie de restricţii din punct de vedere fizic (fluidul incompresibil, suprafeţele solide ce vin în contact cu fluidul ca fiind impermeabile şi rigide, absenţa regiunilor de desprindere), totuşi ne vom mulţumi cu ea în cele ce urmează.

Rezolvînd problema (1), cîmpul vitezelor şi acţiunea hidrodinamică impulsivă, aplicată asupra suprafeţelor rigide fixe sau mobile vor fi date de formulele clasice

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{2}$$

$$\vec{P}_{t_m} = \rho \iint\limits_{S_k} \varphi\, \vec{n}_m\, d\sigma, \tag{3}$$

$$\vec{M}_{t_m} = \rho \iint\limits_{S_k} \varphi\, \vec{r} \times \vec{n}_m\, d\sigma \quad m = c+1, c+2, \ldots, r-1, r. \tag{4}$$

Să presupunem acum că avem o mişcare staţionară incompresibilă fără suprafeţe libere şi umede într-un mediu poros omogen caracterizat prin coeficientul de filtraţie k. Atunci, mediul poros fiind limitat numai de suprafeţe de alimentare şi de suprafeţe impermeabile, din punct de vedere matematic problema se reduce la determinarea unei funcţii armonice φ în domeniul $\mathcal{D}$ ocupat de mediul poros, ştiind că pe frontiera $S = \bigcup\limits_{\nu=0}^{r} S_\nu$ a domeniului $\mathcal{D}$ avem

$$\varphi(M) = \begin{cases} 0 & M \in S_0 \\ C_\alpha & , \ M \in S_\alpha \ , \ \alpha = 1, 2, \ldots, c, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_M = 0 \ , \ M \in S_\delta \ , \ \delta = c+1, \ c+2, \ldots, r, \tag{5}$$

φ fiind regulat peste tot în $\mathcal{D}$ sau putînd cel mult să aibă în cîteva puncte singularități logaritmice; S_0 și S_α reprezintă aici suprafețe de alimentare, iar S_δ suprafețe impermeabile. Odată funcția φ determinată, vitezele în mediul poros vor fi date tot de formula (2). Ținînd seama de definiția lui φ,

$$\rho = -k\left(\frac{p}{\rho g} + z\right), \tag{6}$$

axa Oz fiind după verticala ascendentă, vom avea pentru acțiunea hidrodinamică

$$\vec{F}_m = \frac{\rho g}{k} \iint\limits_{s_k} \varphi\, \vec{n}_m d\sigma + \rho g \iint\limits_{s_k} z\, \vec{n}\, d\sigma, \tag{7}$$

$$\vec{M}_m = \frac{\rho g}{k} \iint\limits_{s_k} \varphi\, \vec{r} \times \vec{n}_m d\sigma + \rho g \iint\limits_{s_k} z \vec{r} \times \vec{n}_m\, d\sigma. \tag{8}$$

$$m = c + 1,\ c + 2, \ldots, r - 1, r$$

În plus, o mărime ce va interesa în mod deosebit va fi debitul prin suprafețele S_α,

$$Q_\alpha = \rho \iint\limits_{s_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_M d\sigma \quad , \quad M \in S_\alpha \quad , \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, c. \tag{9}$$

Se observă deci că există o identitate între cele două probleme cu condiția ca să egalăm constantele $-p_{t_\alpha}/\rho$ cu $C_\alpha^{\text{[illegible]}}$, iar toate vitezele $\vec{V}_\gamma$ să fie nule, adică toate cele $r - c$ suprafețe să fie fixe. Să menționăm că existența unor singularități logaritmice în prima problemă ar corespunde unei simplificări în teoria percusiunii analoage simplificării curente din teoria mișcării apelor arteziene (de ex. [6]).

Problema la limită ce o vom rezolva pentru cîteva cazuri concrete va fi deci (5), și prin intermediul lui φ vom determina unele mărimi caracteristice.

3. Considerînd un fluid ce ocupă în planul mișcării domeniul $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant h$, razele $y = 0$ și $y = h$ reprezentînd suprafețe libere iar pe segmentul $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant h$ dîndu-se o presiune impulsivă p_{t_0}, problema revine prin reprezentarea conformă $Z = e^{az/h}$ la determinarea unei funcții armonice definită în semiplanul $Y > 0$, știind că $\varphi = 0$ pentru $Y = 0$, $|X| > 1$ și $\varphi = -2p_{t_0}/\rho$ pentru $Y = 0$, $|X| < 1$. Folosind integrala lui Poisson pentru semiplan, V. P. Alekseevskii [4] a găsit pe φ și apoi vitezele. Expresia potențialului complex se poate găsi ușor cu ajutorul unei formule clasice (de ex. [7])

$$f(Z) = \frac{2ip_{t_0}}{\pi\rho} \int_{-1}^{1} \frac{dU}{U - Z} = \frac{2ip_{t_0}}{\pi\rho} \ln \frac{Z - 1}{Z + 1}.$$

Revenind la planul fizic,

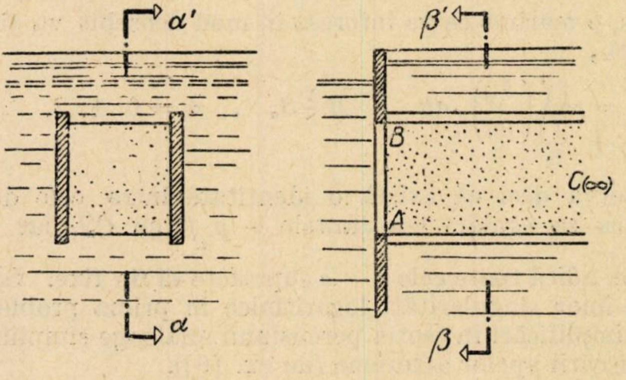
$$f(Z) = \frac{2ip_{t_0}}{\pi\rho} \ln \operatorname{th} \frac{\pi z}{2h}, \tag{10}$$

deci

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\frac{2p_{t_0}}{\pi\rho} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin(\pi y/h)}{\operatorname{sh}(\pi x/h)}, \\ \psi(x, y) &= -\frac{2p_{t_0}}{\pi\rho} \ln \frac{\operatorname{ch}(\pi x/h) - \cos(\pi y/h)}{\operatorname{ch}(\pi x/h) + \cos(\pi y/h)}. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

Să vedem acum ce corespondențe poate avea problema de percusiune plană de mai sus în hidrodinamica subterană. În cadrul mişcărilor incompresibile plane *verticale* condițiile ca pe razele $y = 0$ şi $y = h\,(x > 0)$ să avem $\varphi = C$, iar pe segmentul $0 < y < h$, $x = 0$ să avem $\varphi = C^*$, unde C şi C^* sînt constante, pot fi realizate prin dispozitivul din figura 1.

Un corespondent mult mai interesant îl găsim în cadrul mişcărilor incompresibile plane *orizontale*, şi anume în cadrul mişcărilor apelor arteziene, cînd aceste condiții apar în situația din figura 2. Dacă am căuta să calculăm debitul de fluid ce trece printr-un dreptunghi de lungime AB şi lățime unitate din (11) am găsi un debit infinit. Luînd două puncte A' şi B' pe latura AB astfel încît $AA' = BB' = s$, debitul prin suprafața $A'B' \times 1$ va avea expresia



Secțiunea ββ' Secțiunea αα'

Fig. 1

$$Q = \frac{8kH}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2h}. \tag{12}$$

În cazul unei mişcări schematizate în figura 3, debitul ce trece printr-una din razele AB sau $A'B'$ va fi

$$Q = \frac{4kH}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2h}. \tag{13}$$

4. Pentru a mai da un exemplu simplu de utilizare a acestei analogii în cazul plan să considerăm problema de percusiune schematizată în figura 4 şi care se reduce din punct de vedere matematic la următoarea : să se determine o funcţie armonică în semiplanul $y > 0$ minus semicercurile $(x \pm b)^2 + y^2 - R^2 < 0$, ştiind că $\varphi = 0$ pe razele $(b + R, \infty)$ şi $(-b - R, -\infty)$ şi $\varphi = -p_{i_0}/\rho$ pe segmentul $(-b + R, b - R)$ şi $\varphi \to 0$ cînd $| z | \to \infty$. Dar problema analoagă pentru filtraţia unui fluid greu într-un plan vertical este deja rezolvată (de ex. [8]), astfel încît folosind soluţia ei, printr-o simplă schimbare de o constantă obţinem răspunsul la problema de percusiune.

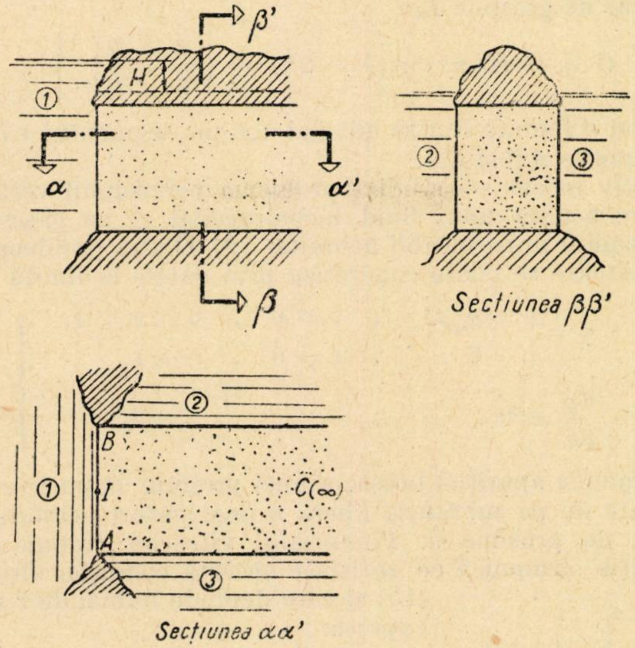

β'
H
①
α
α'
β
②
③
Secţiunea ββ'
②
B
①
I
C(∞)
A
③
Secţiunea αα'

Fig. 2

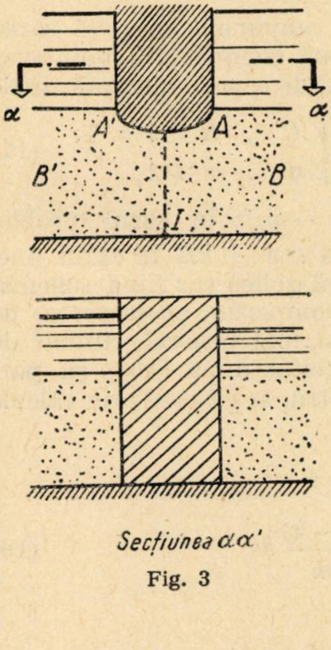

α
α'
A'
A
B'
B
I
Secţiunea αα'

Fig. 3

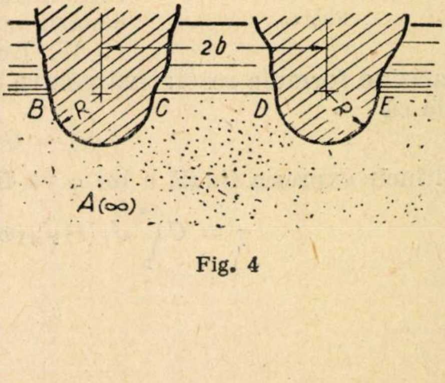


Fig. 4

Este interesant de semnalat analogul în cazul mişcării apelor arteziene, ce se poate reprezenta foarte uşor; transcriem aici doar debitul pentru un strat de grosime L,

$$Q = 4kHL\pi^{-1}\ln\left[1-2\left(1-\sqrt{\frac{b+R}{b-R}}\right)^{-1}\right], \tag{14}$$

H reprezentînd diferenţa dintre nivelul de pe segmentul CD şi nivelul comun de pe razele AB şi EA.

5. Relativ recent s-a studiat problema percusiunii verticale a unei plăci circulare asupra unui fluid incompresibil ce se găseşte deasupra unui plan orizontal impermeabil nelimitat [9]. O altă problemă de percusiune asemănătoare se poate concretiza prin datele la limită următoare:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \begin{cases} -p_{t_0}\rho^{-1}, & z = 0, \quad 0 < r < 1, \\ 0, & z = 0, \quad r > 1, \end{cases} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \qquad z = h, \end{array}\right\} \tag{15}$$

şi ea ar corespunde apariţiei bruşte a unei presiuni impulsive pe un cerc cu raza unitate de pe suprafaţa liberă a unei pături nelimitate de fluid incompresibil de grosime h. Potenţialul vitezelor trebuie să → 0 cînd $r \to \infty$ şi funcţia armonică ce satisface această condiţie, ultima condiţie (15) şi care depinde numai de r şi z va avea expresia

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty f(s)\frac{\operatorname{ch} s(h-z)}{\operatorname{ch} sh} J_0(sr)\,ds. \tag{16}$$

Urmează că dacă impunem ca φ să satisfacă şi primele două condiţii (15), vom avea de rezolvat sistemul de ecuaţii integrale duale

$$\int_0^\infty f(s) J_0(sr)\,ds = \begin{cases} C, & 0 < r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \tag{17}$$

C avînd valoarea $-p_{t_0}/\rho$ în cazul problemei de percusiune sau $\pm kH$ în cazul unei mişcări arteziene, al doilea caz fiind schematizat în figura 5. Comparînd acest sistem de ecuaţii cu sistemul mai general studiat de I. W. Busbridge (citat după [10]) şi, particularizînd formula rezolutivă pentru cazul nostru, se găseşte prin calcule simple că

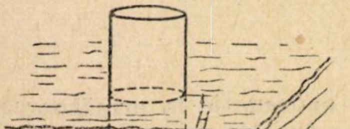


Fig. 5

$$f(s) = CJ_1(s),$$

astfel încît expresia finală a lui φ va fi

$$\varphi = C\int_0^\infty J_1(s) J_0(sr)\frac{\operatorname{ch} s(h-z)}{\operatorname{ch} sh}\,ds. \tag{18}$$

Acest rezultat l-am fi putut obține și direct dacă am fi făcut apel la integrala $\int_0^\infty J_1(s)\, J_0(sr)\, ds$, studiată de H. Weber în 1873 [10].

Viteza pe planul $z = h$ va fi verticală și va avea expresia

$$v(r,h) = -C \int_0^\infty sJ_1(s)\, J_0(sr)\, \mathrm{th}\, sh\, ds\,;$$

ținînd seama de dezvoltarea lui th sh după puterile lui e^{-2sh} și folosind formule și tabele existente în literatură (de ex. [12]) se poate calcula numeric viteza într-un punct oarecare al mediului poros. Pentru $r = 1$ viteza devine infinită, după cum se poate deduce ușor dintr-o formulă a lui Gegenbauer [13].

6. Exemplele de mai sus ilustrează utilitatea folosirii analogiei dintre teoria percusiunii și teoria filtrației, ele conducînd deseori din punct de vedere matematic la o aceeași problemă la limită, și numărul exemplelor s-ar putea înmulți ușor. Un exemplu a mai fost dat într-o lucrare recentă [14]; mai menționăm, de pildă, cazul cînd mediul poros sau fluidul perfect ocupă un semiplan minus o jumătate de tor, astfel încît într-o secțiune verticală ce conține punctul $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ să avem situația schematizată în figura 4.

De la o soluție staționară oarecare putem trece ușor la soluția nestaționară incompresibilă corespunzătoare folosind o formulă devenită clasică (de ex. [15]).

În sfîrșit mai menționăm posibilitatea folosirii rezultatelor teoriei percusiunii la mișcarea staționară liniară a gazelor, în care caz φ va însemna pătratul presiunii gazului, sau la mișcarea staționară cu suprafață liberă a fluidelor grele în teoria lui Boussinesq.

Primită la redacție la 9 februarie 1960

ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

Теория линейной стационарной фильтрации в однородных пористых средах и теория удара в идеальных жидкостях ведут с математической точки зрения к одной и той же смешанной граничной задаче: определение гармонической функции, зная, что на некотором участке границы, определяющей ее области, известно значение этой функции, а на остальном участке известна ее нормальная производная. Решая эффективно несколько граничных задач, приводятся примеры, иллюстрирующие эту аналогию, и в заключении указываются и другие задачи, в которых можно применить упомянутую аналогию.

LES APPLICATIONS D'UN PROBLÈME À LA LIMITE À LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

RÉSUMÉ

La théorie de la filtration linéaire stationnaire dans les milieux poreux homogènes et la théorie de la percussion appliquée aux fluides parfaits mènent, du point de vue mathématique, au même problème à la limite mixte, à savoir : déterminer une fonction harmonique lorsque l'on sait que sur une portion de la frontière de son domaine de définition c'est la valeur de la fonction qui est connue, tandis que sur l'autre portion est connue sa dérivée normale.

En résolvant effectivement quelques problèmes à la limite, on offre des exemples illustrant cette analogie. Pour finir, on indique d'autres problèmes, où l'analogie mentionnée ci-dessus peut être aussi utilisée.

BIBLIOGRAFIE

1. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод.* Москва, 1952, 518.
2. Şt. I. Gheorghiţă, *Cîteva mişcări în medii poroase neomogene.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Mat.-Fiz., **VI**, *4*, 823 (1954).
3. — *O analogie între hidrodinamica plană şi hidrodinamica subterană.* GMF, Seria A, *9*, 513 (1958).
4. В. П. Алексеевский, *О поле скоростей в бесконечном слое идеальной несжимаемой жидкости, вызванном действием мгновенных сил.* Укр. Мат. Ж., **XI**, 2, 199 (1959).
5. Şt. I. Gherogiţă, *On the impact theory on perfect incompresible fluids.* Revue de Physique, **IV**, *1*, 75 (1959).
6. — *Capitole din teoria mişcărilor în mediile poroase.* Bucureşti, 1957, 35.
7. Caius Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucarest — Paris, 1959, 60.
8. Iosef Kozeny, *Hydraulik.* Wien, 1953, 408.
9. И. И. Борович, В. И. Юдович, *Удар круглого диска о жидкость конечной глубины*, Прикл. Мат. и Мех. **XXI**, *4*, 254 (1957).
10. H. Weber, *Ueber die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme.* Jurnal für Math., **LXXV**, 73 (1873).
11. И. Снеддон, *Преобразования Фурье.* Москва, 1955, 89.
12. G. Eason, B. Noble, J. Sneddon, *On certain integral of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions.* Phil. Trans. of the Royal Soc. of London (A), **247**, 529 (1955).
13. Г. Н. Уатсон, *Теория Бесселевых функций, часть первая.* Москва, 1949, 427.
14. Şt. I. Gherogiţă, *A three-dimensional motion of the artesian waters.* Arch. Mech. Stosowanej, **X**, *5*, 612 (1958).
15. Б. Б. Дависон, *Движение грунтовых вод*, în *Некоторые новые вопросы механики сплошной среды.* Москва, 1938, 219.

STUDII

HIDROMECANICĂ

PARAMETRII CARACTERISTICI ȘI ECUAȚIA MIȘCĂRII MACROTURBULENTE

DE

E. RĂZVAN [1]

Într-o mișcare turbulentă uniformă sau chiar lent variată, energia cinetică de pulsație este de ordinul a 1% din energia totală disponibilă în secțiune și ca atare poate fi neglijată.

Într-o mișcare macroturbulentă, energia cinetică de pulsație reprezintă pînă la 50% din total și, nu numai că nu mai poate fi neglijată, dar capătă un rol hotărîtor. O astfel de mișcare apare de exemplu, în aval de evacuatorii barajelor și analiza ei prezintă un incontestabil interes, atît teoretic cît și practic. În cele ce urmează se au în vedere evacuatorii barajelor de căderi joase sau mijlocii, în avalul cărora conjugarea biefurilor se poate face prin salt hidraulic.

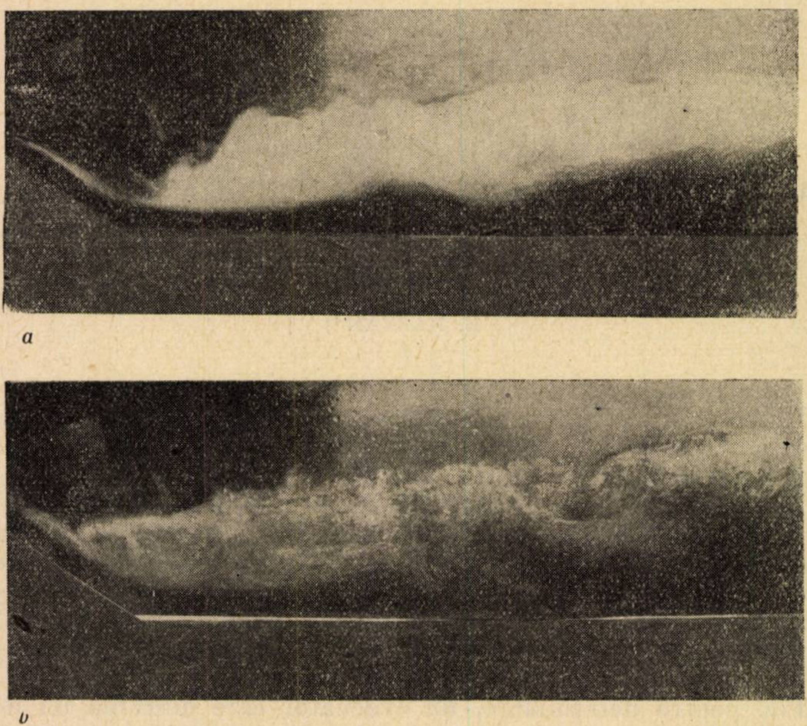
Fie, pentru determinare, un evacuator care descarcă un debit Q într-o albie aval netedă, de pantă $i < i_{cr}$ (Q) și de lățime B strict egală cu cea a evacuatorului ; fie h_2 o adîncime aval, normală pentru debitul Q și, în același timp, conjugată adîncimii contractate h_c. În aceste condiții, la piciorul evacuatorului apare saltul hidraulic plan.

În limitele saltului hidraulic au loc transformări calitative : după cum se știe, epura distribuției vitezelor pe verticală este puternic deformată, apare o zonă de tranzit și o mare zonă de vîrtejuri cu ax orizontal (fig. 1 *a*). În fiecare secțiune scurgerea are un caracter nepermanent, nivelul suprafeței pulsează. Suprafața de separație dintre cele două zone este nestabilă, la anumite intervale, vîrtejuri puternice pătrund prin lama zonei de tranzit și ajung la fund, producînd pe parcurs variații însemnate de presiune și viteza (fig. 1 *b*). Aceste vîrtejuri, de dimensiuni comparabile cu înălțimea curentului și de frecvență relativ mare (5—10 Hz), sînt antrenate spre aval, descompunîndu-se treptat în altele din ce în ce mai mici. Din figurile 1 *a* și 1 *b*, fixate la interval de 5 s se observă rezultatul mişcării vîrtejurilor : are loc un schimb însemnat de cantitate de mişcare între zona de tranzit şi zona de vîrtejuri.

---

[1] Institutul de studii și cercetări hidrotehnice.

Este evident că trecerea de la un regim de scurgere ca cel din salt, la altul uniform, nu se face brusc, ci are loc treptat în lungul scurgerii, în aşa-numita zonă de tranziţie.



a

b

Fig. 1

Fenomenul tipic care are loc în zona de tranziţie este descompunerea vîrtejurilor. Pentru a găsi parametrii care îl guvernează, este util să se analizeze acest fenomen schematizat la maximum.

Pusă astfel, problema se poate asimila cu cea a difuziei unui fir turbionar într-o masă fluidă infinită, problemă tratată în lucrările clasice de mecanica fluidelor [1].

Este cunoscută, din această disciplină, o teoremă a lui Helmholtz, după care, într-un fluid ideal, incompresibil aflat în mişcare sub acţiunea unor forţe masice constante, liniile turbionare se conservă. Expresia matematică a teoremei lui Helmholtz este

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dt} = (\overline{\Omega}\nabla)\cdot\overline{V}. \qquad (1)$$

În cazul unui fluid real, această teoremă se generalizează, prin adăugarea unui termen care ţine seama de vîscozitatea fluidului

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dt} = (\overline{\Omega}\cdot\nabla)\overline{V} + \nu\nabla^2\Omega, \tag{2}$$

sau, pentru problema plană

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dt} = \nu\nabla^2\Omega. \tag{3}$$

Deosebirea fizică esenţială dintre ecuaţiile (1) şi (2), formal diferite prin existenţa termenului $\nu\nabla^2\Omega$, este faptul că, în cazul fluidelor fără vîscozitate, individualitatea firelor de vîrtej se conservă, pe cînd în cazul fluidelor vîscoase, nu.

În lipsa unei surse exterioare de întreţinere a vîrtejului, particulele adiacente firului sînt antrenate în rotaţie, dar, în acelaşi timp, are loc difuzia vîrtejului în masa lichidă, descompunerea vîrtejului de dimensiuni superioare în altele de dimensiuni inferioare. Limita inferioară a dimensiunilor este condiţionată de valoarea vîscozităţii, care plafonează fracţionarea ulterioară, prin inerţie, a masei de lichid în rotaţie. Pentru determinare, fie în momentul iniţial $t = 0$, un fir de vîrtej rectiliniu, de circulaţie Γ. Să scriem în acest caz ecuaţia (3) în coordonate cilindrice (r, z, θ).

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + v_r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = \nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}\right).$$

Luînd axa Oz pe direcţia firului de vîrtej, avem

$$\Omega = \text{const.}\,(\theta) \quad , \quad v_r = v_z = 0 \quad , \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

şi relaţia precedentă devine :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right).$$

Această ecuaţie a fost integrată pornind de la considerente de analiză dimensională.

Într-adevăr, funcţia Ω depinde, în afară de r şi t, de parametrii Γ şi ν; mai mult, este evidentă proporţionalitatea directă dintre Ω şi Γ. Astfel :

$$\Omega = \Gamma f(r, t, \nu). \tag{4}$$

Ţinînd seama de dimensiunile mărimilor care intră în joc şi aplicînd relaţiei funcţionale (4) teorema π se obţine următoarea expresie a acestei relaţii :

$$f(r, t, \nu) = \frac{1}{\nu t}\, f\left(\frac{r^2}{\nu t}, 1, 1\right) \tag{5}$$

şi deci

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t} F\left(\frac{r^2}{\nu t}\right). \tag{6}$$

Această expresie se introduce în ecuaţia (3) şi notînd

$$\frac{r^2}{\nu t} = \sigma, \tag{7}$$

se obţine direct

$$\sigma\,[F(\sigma) + 4F'(\sigma)] = C. \tag{8}$$

Dar, cum pentru $\sigma = 0, \quad F(\sigma) \neq 0, \quad F'(\sigma) \neq 0,$
rezultă

$$F(\sigma) + 4F'(\sigma) = 0, \tag{9}$$

care se integrează direct şi se obţine

$$\Omega = A \frac{\Gamma}{\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{10}$$

Din condiţiile iniţiale

$$t = 0 \quad , \quad \Gamma_R = \Gamma,$$

se deduce valoarea constantei de integrare

$$A = \frac{1}{4\pi},$$

astfel că, în cele din urmă, se obţine

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{11}$$

Ecuaţia (11) exprimă tendinţa de amortizare a vîrtejurilor sub influenţa factorilor t, r, ν. În particular, după cum confirmă şi experienţa, deosebit de activ este rolul vîscozităţii în acest proces.

★

În cazul unui tub de vîrtejuri de dimensiuni finite, fenomenul difuziei vîrtejurilor este însă greu de exprimat cu mijloacele matematice folosite mai sus.

Acesta este un aspect al problemei, mult mai generale, a alegerii aparatului matematic capabil să descrie disiparea energiei în scurgerea macroturbulentă a unor mase importante de fluide grele, vîscoase.

Ecuaţiile clasice ale hidrodinamicii, care exprimă legăturile între viteze şi presiuni, pe de o parte, şi forţele exterioare pe de altă parte, au fost stabilite pentru volume elementare de fluid şi pentru intervale de timp infinit mici. Trecerea la curenţi de dimensiuni reale, implică integrarea ecuaţiilor diferenţiale respective. Pe lîngă dificultăţile de calcul cunoscute, această operaţie ridică şi unele obiecţii de principiu : se ştie că pentru anumite condiţii medii constante date (debit, secţiune transversală, pantă longitudinală) mişcarea fluidului, spre deosebire de cea a corpului solid, nu este determinată univoc : cîmpul vitezelor este nestaţionar, mişcarea are loc ca un proces stohastic, iar elementele ei sînt legate, în afară de dependenţe analitice care se referă la mişcarea medie — şi prin dependenţe corelative.

Un coeficient de corelaţie între două mărimi pulsatorii poate fi definit prin relaţia

$$R(\tau) = \frac{\overline{u'(t) \cdot u'(t+\tau)}}{\overline{u'^2}} \tag{12}$$

în care u' este o mărime pulsatorie, de exemplu viteza într-un punct.

Existenţa limitei

$$\lim_{\tau \to 0} R(\tau) = 1 \tag{13}$$

este dovada existenţei unei dependenţe funcţionale. Or, prelucrarea unor măsurători destul de îngrijite ale pulsaţiei vitezelor [2] pare să arate că, pentru vitezele în două puncte aflate într-un fluid în mişcare, coeficientul de corelaţie $R(\tau)$ tinde către zero, cînd distanţa între cele două puncte creşte. Aceasta înseamnă că relaţia dintre vitezele locale în două puncte îşi pierde caracterul funcţional şi devine statistică, în caz că cele două puncte se găsesc la distanţă finită.

Faţă de aceste rezultate a devenit dificilă însăşi alegerea parametrilor care să caracterizeze scurgerea macroturbulentă.

Pentru a depăşi această dificultate am considerat necesar să folosim pentru analizarea mişcării macroturbulente, elementele de analiză statistică pe care le găsim în actuala teorie spectrală a turbulenţei [3].

Această teorie porneşte de la ideea că nu numai mişcarea medie ci şi mişcarea pulsatorie este supusă anumitor legităţi, că pulsaţiile, care reprezintă în fond rezultatele trecerii unor mase de fluid în rotaţie, nu pot fi calificate ca fenomene pur întîmplătoare şi nimic mai mult. Şi de fapt ,,întîmplarea'' ca atare nu este o negare absolută a ,,necesităţii'', incompatibilă cu legitatea. Întîmplarea este o formă de manifestare a necesităţii şi o completare a ei : dacă necesitatea apare ca o manifestare exterioară a unor legături interioare principale, esenţiale, întîmplarea apare ca o manifestare a unor legături secundare, colaterale. Însă în anumite condiţii, acestea din urmă pot căpăta un rol hotărîtor şi întîmplarea trece în necesitate. În particular, în cazul scurgerii turbulente, pulsaţiile erau considerate ca pur întîmplătoare, în raport cu mişcarea medie ; studiate însă cu mijloace de analiză apropiate, respectiv cu ajutorul statisticii matematice, ele se pretează la o primă ordonare.

Astfel, ca orice mărime pulsatorie, pulsaţia vitezei se poate descompune, în principiu, în serie Fourrier

$$u(t) = a_0 + \sum_n (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad (14)$$

în care ω_0 este frecvenţa minimă a pulsaţiilor, iar
n este un număr întreg, pozitiv.

Descompunerea în serie Fourrier este efectiv posibilă dacă se admite că pulsaţia vitezelor conţine un spectru continuu de frecvenţe. Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că, în volumul considerat, trec mase de fluid în rotaţie, avînd dimensiuni continuu variabile între două limite : una, maximă, determinată de dimensiunile geometrice ale secţiunii transversale şi a doua, cea minimă, determinată de vîscozitatea fluidului.

Prelucrarea unor măsurători efectuate într-un curent izotrop turbulent au confirmat pe deplin această ipoteză ; au fost înregistrate pulsaţiile de viteză într-o mişcare plană, pe o întreagă secţiune de control, iar rezultatele măsurătorilor au fost prelucrate sub formă de puncte experimentale în coordonate ω şi $f(\omega)$, definite după cum urmează :

$$f(\omega) = \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \qquad (15)$$

în care ω este frecvenţa pulsaţiilor,
$f(\omega)$ este aşa-numita funcţie de densitate a probabilităţilor,
$R(\tau)$ este coeficientul de corelaţie, definit anterior.

Remarcabil este faptul că punctele experimentale provenite de pe întreaga secţiune, s-au grupat pe o curbă unică (fig. 2). Aceasta confirmă ipoteza descompunerii în spectru de frecvenţe. Dar nu numai atît : unicitatea curbei, este un indiciu al independenţei spectrului frecvenţelor de coordonate, în secţiunea transversală.

Se mai observă că spectrul rezultat admite o modă şi numai una, care, în cazul turbulenţei izotrope, este situată în zona de joasă frecvenţă. Rolul energetic al vitezelor corespunzătoare modei este predominant. Acest rezultat îl reţinem.

Trecînd la mişcarea macroturbulentă trebuie precizat de la început că disponibilul de energie cinetică de pulsaţie existent în fiecare secţiune, provine nu atît din creşterea amplitudinii pulsaţiilor, ci din creşterea frecvenţei pulsaţiilor de mare amplitudine. Acest lucru este uşor de înţeles, ţinînd seama de tezele teoriei spectrale a turbulenţei enunţate mai sus.

Vîrtejuri de mari proporţii apar şi într-o scurgere turbulentă sau lent variată, dar aici frecvenţa lor este sub 1 Hz (a se vedea şi fig. 2).

Creşterea energiei de pulsaţie nu se poate realiza decît prin creşterea frecvenţei vîrtejurilor de mari dimensiuni, ceea ce de fapt se şi produce în aval de saltul hidraulic, care este punctul de plecare şi sursa de întreţinere a procesului.

Rezultă că funcţia spectrală într-o secţiune a scurgerii macroturbulente trebuie să aibă aceeaşi structură ca şi în cazul analizat mai sus, cu deosebirea că moda curbei este deplasată în zona frecvențelor înalte (fig. 3).

În acest mod, întrevedem posibilitatea alegerii unui parametru, care să caracterizeze scurgerea macroturbulentă într-o secțiune: acesta ar fi o viteză corespunzătoare modei spectrului de frecvențe. Reamintim

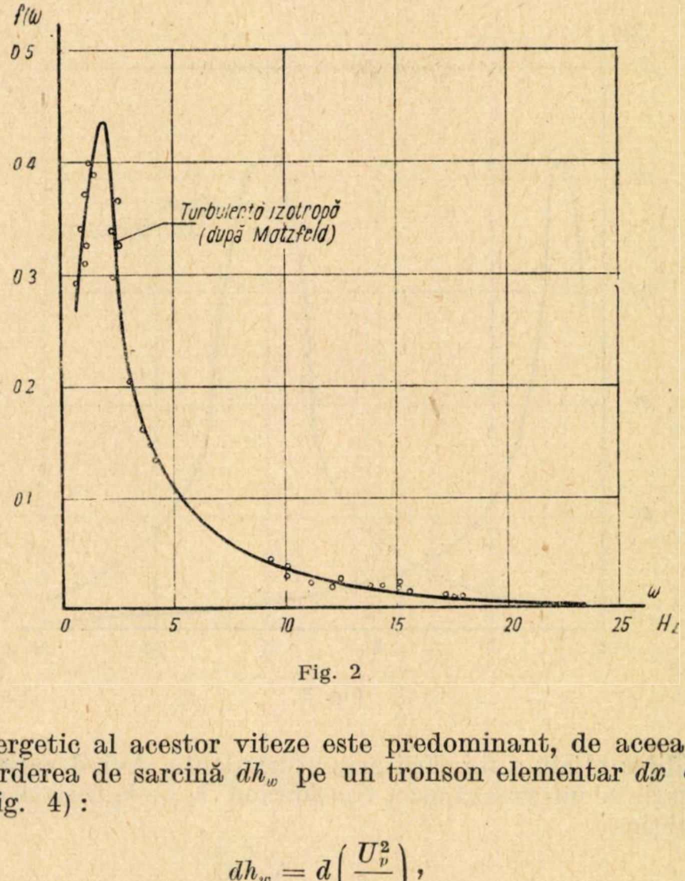


Fig. 2

că rolul energetic al acestor viteze este predominant, de aceea se poate scrie că pierderea de sarcină dh_w pe un tronson elementar dx este (a se vedea și fig. 4):

$$dh_w = d\left(\frac{U_p^2}{2g}\right), \tag{16}$$

în care

$U_p = V_2 + u_m$,

V_2 este viteza medie pe secțiune,

u_m este viteza de pulsație corespunzătoare modei spectrului de frecvențe în aceeași secțiune.

Pe de altă parte însă

$$dh_w = -\frac{U^2}{C(x)\, h_x} dx \tag{17}$$

Aici, $C(x)$ este un coeficient de rezistență hidraulică, variabil în lungul scurgerii.

Din ecuațiile (16) și (17) se deduce

$$d\left(\frac{U_p^2}{2g}\right) = -\frac{U_p^2}{C(x)\,h_x}\,dx, \tag{18}$$

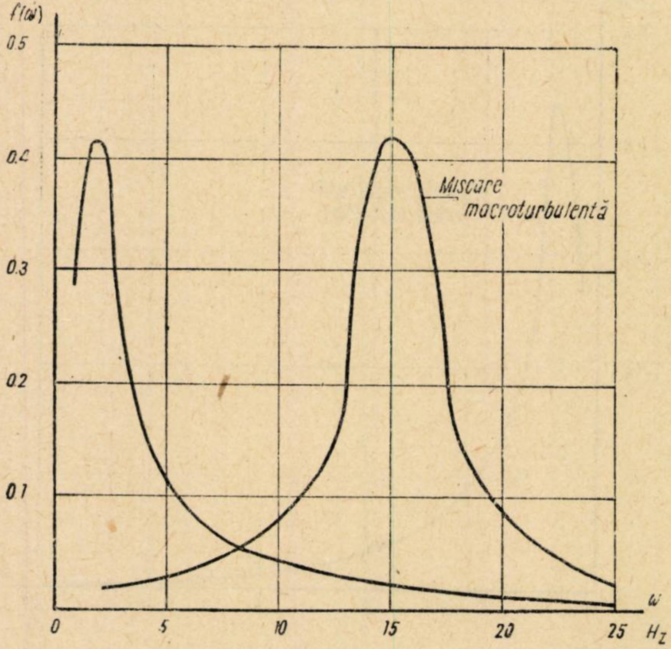


Fig. 3

o ecuație diferențială a mișcării macroturbulente. Avînd variabilele separabile, ecuația se integrează ușor, considerînd $h_x \simeq h_2$ ceea ce este admisibil. Se obține

$$U_p = U_{p0}\, e^{-\frac{g}{h_2}\int \frac{dx}{C(x)}} \tag{19}$$

în care U_{p0} este valoarea vitezei U_p în secțiunea extremă aval a saltului hidraulic.

De observat analogia de structură a relației (19), care exprimă variația vitezei caracteristice a pulsațiilor în lungul scurgerii macroturbulente, cu relația (11), care exprimă variația intensității unui fir de vîrtej într-o scurgere turbulentă.

În ecuația (19) intră un coeficient de pierderi care depinde de starea de pulsații în secțiunea respectivă. Este evident că pentru determinarea sa nu se poate folosi nici una din formulele propuse pentru coeficienții de rezistență în scurgerea turbulentă uniformă; aceasta, pentru că şi mecanismul pierderilor hidraulice în mişcarea macroturbulentă este altul. Determinarea variației coeficientului de rezistență în lungul scurgerii respectiv explicitarea funcției $C(x)$, rămîne o sarcină a etapei următoarelor studii.

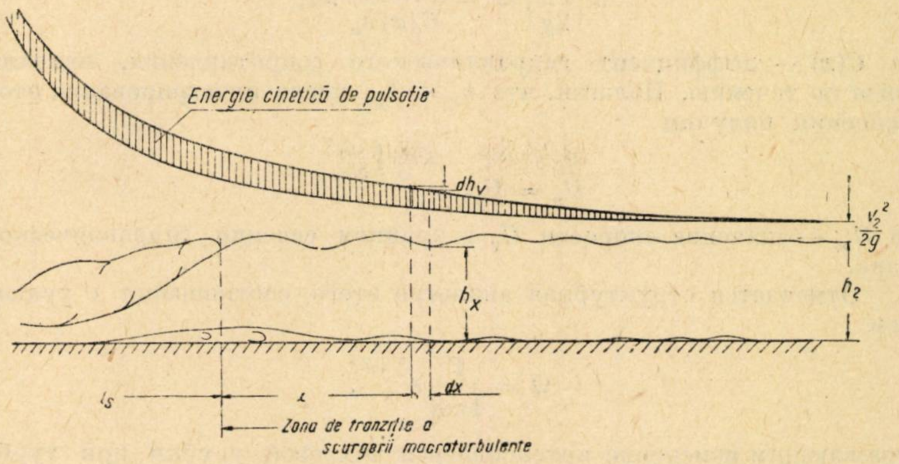

Energie cinetică de pulsație
dh_V
$\frac{V_2^2}{2g}$
h_x
h_2
l_s
L
dx
Zona de tranziție a scurgerii macroturbulente

Fig. 4

Primită la redacție la 18 februarie 1960; o nouă versiune la 6 august 1960

ХАРАКТЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И УРАВНЕНИЕ МАКРОТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Макротурбулентное движение характеризуется тем, что вихри больших размеров получают сравнительно высокие частоты (5—15 гц), что равносильно перемещению моды спектральной функции в диапазоне высоких частот (рис. 3).

Такое движение появляется, например, в нижнем бьефе водосбросов (рис. 1 *a*, *b*).

Учитывая преобладающую энергетическую роль скоростей, соответствующих моде спектра частот, предлагается в качестве характеристического параметра в некотором сечении плоского макротурбулентного течения:

$$U_p = V_2 + u_m,$$

где V_2 — средняя скорость по сечению, а u_m — пульсация, соответствующая вышеуказанной моде (рис. 2,3).

Таким образом, можно написать уравнение энергии в дифференциальном виде (рис. 4)

$$d\left(\frac{U_p^2}{2g}\right) = -\frac{U_p^2}{C(x)\,h_x}\,dx,$$

где $C(x)$ — коэффициент гидравлического сопротивления, изменяющийся по течению. Полагая, что $h_x \simeq h_2$, после интегрирования этого уравнения получим

$$U_p = U_{p0}\, e^{-\frac{g}{h_2}\int \frac{dx}{C(x)}},$$

где U_{p0} — значение скорости U_p в крайнем сечении гидравлического удара.

Отмечается структурная аналогия этого соотношения с уравнением

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\, e^{-\frac{r}{4\nu t}},$$

выражающим изменение интенсивности вихревой трубки при турбулентном течении.

Определение изменения коэффицента сопротивления вдоль макротурбулентного течения, и, соответственно, представление в явном виде соотношения $C(x)$, является предметом следующей стации исследования.

PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES ET ÉQUATION DU MOUVEMENT MACROTURBULENT

RÉSUMÉ

Le mouvement macroturbulent est caractérisé par le fait que les tourbillons de grandes proportions acquièrent des fréquences relativement hautes (5—15 Hz), ce qui équivaut au déplacement du mode de la fonction spectrale dans la zone des fréquences élevées (fig. 3).

C'est un tel mouvement qui apparaît, par exemple, en aval des évacuateurs de crue (fig. 1 *a* et *b*).

En tenant compte du rôle énergétique prédominant des vitesses correspondant au mode du spectre des fréquences, l'auteur propose comme paramètre caractéristique dans une section de l'écoulement macroturbulent plan :

$$U_p = V_2 + u_m,$$

où V_2 est la vitesse moyenne dans la section, et u_m la pulsation correspondant au mode, mentionnée ci-dessus (fig. 2 et 3).

Dans ce cas, l'équation de l'énergie pourra être exprimée sous la forme différentielle (fig. 4)

$$d\left(\frac{U_p^2}{2g}\right) = -\frac{U_p^2}{C(x)\,h_x}\,dx,$$

où $C(x)$ est un coefficient de perte de charge, variable le long de l'écoulement. En admettant que $h_x \simeq h_2$, cette équation donnera par intégration

$$U_p = U_{p0}\, e^{-\frac{g}{h_2}\int \frac{dx}{C(x)}},$$

où U_{p0} est la valeur de la vitesse U_p dans une section initiale, par exemple dans la section extrême en aval du ressaut hydraulique.

Il faut remarquer l'analogie de structure de cette relation avec

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\, e^{-\frac{r}{4\nu t}},$$

qui exprime la variation de l'intensité d'un fil tourbillonnaire dans un écoulement turbulent.

La détermination de la variation du coefficient de résistance le long de l'écoulement macroturbulent, respectivement l'explicitation de la relation $C(x)$ constituera l'objet de l'étape suivante de cette étude.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1953.
2. E. M. МИНСКИЙ, *Турбулентность руслового потока.* Ленинград, 1952.
3. A. A. TOWNSEND, *The structure of the turbulent flow.* Cambridge, 1956.
4. H. MOTZFELD, *Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen.* ZAMM, 1938, nr. 6.

STUDII

HIDROMECANICĂ

FENOMENE DE REZONANȚĂ LA MIȘCAREA FLUIDELOR CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ ÎN JURUL UNOR BARE CILINDRICE

DE

S. HÎNCU și D. DELICAN [1]

Pentru modelarea unor rezistențe caracteristice albiilor de rîuri în Institutul de studii și cercetări hidrotehnice București s-a organizat, un ciclu de experiențe referitoare la caracteristicile mișcării uniforme a fluidelor cu suprafață liberă în jurul unor bare rotunde, dispuse vertical în rînduri paralele cu direcția curentului și perpendiculare pe direcția curentului.

Experiențele s-au efectuat într-un canal hidraulic vitrat cu pantă variabilă de lungime 1 = 900 cm și lățimea b = 30 cm. Tronsonul central de lucru al canalului a fost de 4 m lungime [2].

Barele au fost confecționate din lemn cu un diametru d = 1,00 cm. și îmbibate mai întîi cu ulei de in fiert pentru a evita unele deformații care ar fi putut apare în contact cu apa.

Cu ajutorul unei soluții de hipermanganat de potasiu s-a vizualizat desprinderea alternativă, periodică, a vîrtejurilor Bénard-Kármán ce s-au format în spatele fiecărei bare cilindrice.

Pentru diferite pante i date canalului și pentru diverse debite Q introduse s-au obținut adîncimi h ale curentului cuprinse între 5,5 cm și 17,0 cm și viteze medii corespunzătoare secțiunii vii între bare $u = \frac{Q}{(b - nd)h} = 7 - 21$ cm/s (n — numărul barelor pe același rînd normal pe direcția scurgerii).

Dintre diferitele moduri de dispunere a barelor experimentale în canal, deosebit de interesantă în ceea ce privește apariția unor fenomene particulare ale scurgerii a fost așezarea barelor ca în figura 1.

---

[1] Institutul de studii și cercetări hidrotehnice.

[2] Experiențele au fost efectuate și prelucrate de tehn. Bodoagă Bianca.

Vîrtejurile alternate formate în spatele fiecărei bare au intrat în rezonanță în grupuri determinate, iar la suprafața liberă de scurgere au apărut valuri staționare simple avînd aceleași caracteristici pe întreaga lungime a canalului. Lungimea de undă și frecvența de oscilație a valurilor staționare erau în strînsă dependență de viteza *u* a curentului. Amplitudinea *a* a valurilor staționare ajungea în unele cazuri la valori relativ mari ($2a = 2{,}50 \div 2{,}80$ cm). Întreaga masă de fluid din canal intra într-o mișcare suplimentară oscilatorie plană normală pe direcția de scurgere a curentului.

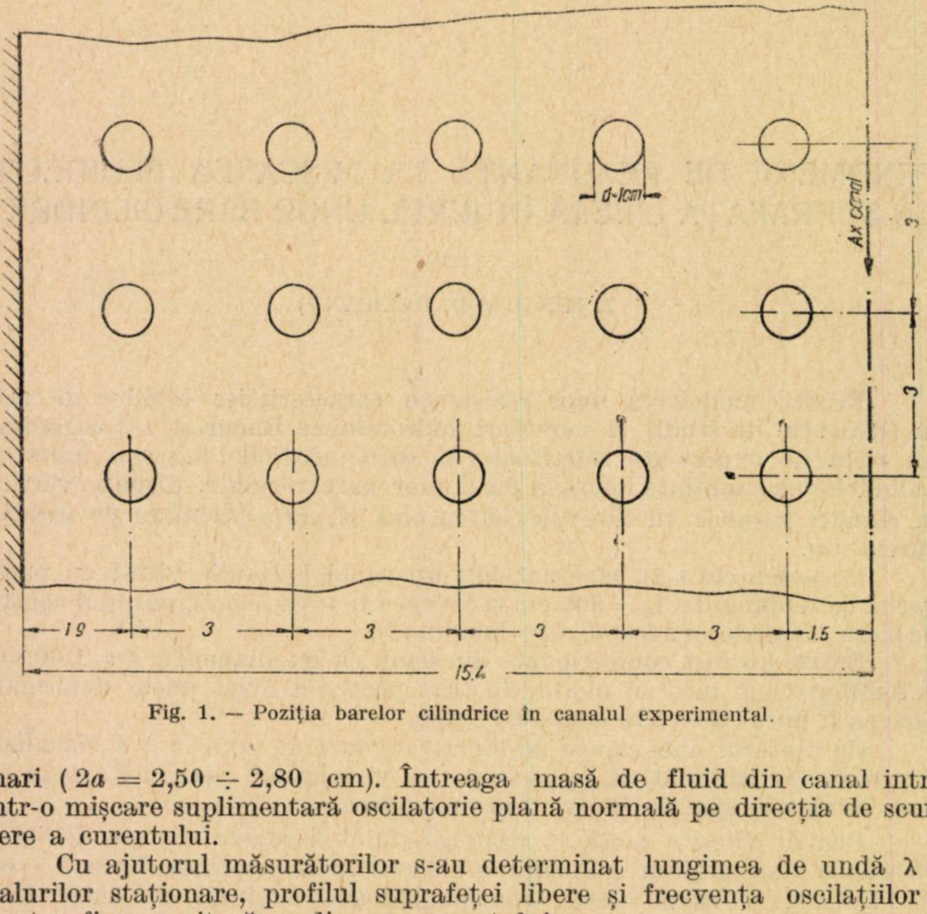


Fig. 1. — Poziția barelor cilindrice în canalul experimental.

Cu ajutorul măsurătorilor s-au determinat lungimea de undă λ a valurilor staționare, profilul suprafeței libere și frecvența oscilațiilor *f* pentru fiecare viteză medie *u* a curentului.

În figura 2 sînt date profilele suprafeței libere în momentele de deformație maximă a suprafeței libere pentru cîteva din vitezele medii longitudinale *u* ale fluidului.

Din observații directe și măsurători s-a putut constata că frecvența *f* a oscilațiilor suprafeței libere este aceeași cu frecvența de desprindere a vîrtejurilor alternate Bénard-Kármán.

Mișcarea în sus a suprafeței libere este determinată de convergența liniilor de curent din spatele barelor, iar mișcarea în jos este determinată de divergența acelorași linii de curent (fig. 3).

Pentru frecvență dată a desprinderii vîrtejurilor Bénard-Kármán, egală cu frecvența de oscilație a suprafeței libere, numărul barelor în spatele cărora liniile de curent converg sau diverg depinde de lungimea de undă a valurilor staționare.

Se poate vorbi deci de existența concomitentă a două fenomene interdependente de rezonanță : rezonanța vîrtejurilor alternate în cadrul aceluiași grup care determină o undă și rezonanța desprinderii vîrtejurilor cu mișcarea oscilatorie a suprafeței libere de scurgere.

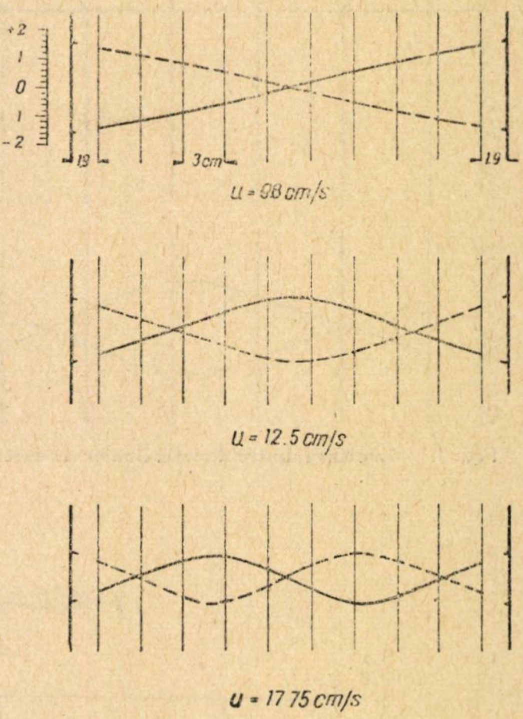


Fig. 2. — Secțiune transversală prin valurile staționare în momentele de deformație maximă a suprafeței libere.

Dacă pentru valurile staționare de la suprafața liberă se aplică teoria valurilor plane cu mișcare lentă [1] pentru frecvența f a oscilațiilor și pentru lungimea de undă λ se obțin relațiile

$$f = \sqrt{\frac{gm}{4b\pi}\,\mathrm{th}\,\frac{m\pi h}{b}}, \tag{1}$$

$$\lambda = \frac{g}{2\pi f^2}\,\mathrm{th}\,\frac{2\pi h}{\lambda}, \tag{2}$$

sau

$$\lambda = \frac{2b}{m}\,\frac{\mathrm{th}\,\dfrac{2\pi h}{\lambda}}{\mathrm{th}\,\dfrac{m\pi h}{b}} \tag{3}$$

unde m — este numărul liniilor nodale,
g — accelerația gravitațională.

În figurile 4 și 5 sînt reprezentate grafic relațiile (1) și (2) și punctele experimentale obținute pe bază de măsurători.

Graficele arată o satisfăcătoare concordanță între relațiile teoretice și rezultatele experimentale.

Pentru a ilustra existența fenomenului de rezonanță între desprinderea periodică a vîrtejurilor Bénard-Kármán și mișcarea oscilatorie a suprafeței libere va trebui să determinăm existența unei relații între viteza medie u a curentului, care pentru un diametru d dat al barelor, provoacă vîrtejuri cu o anumită frecvență de desprindere și caracteristicile mișcării oscilatorii a suprafeței libere.

Este cunoscut faptul că între numărul Reynolds scris cu viteza curentului u și cu diametrul barei cilindrice d $\left(\mathcal{R}_e = \frac{u \cdot d}{\nu}\right)$ și fenomenul

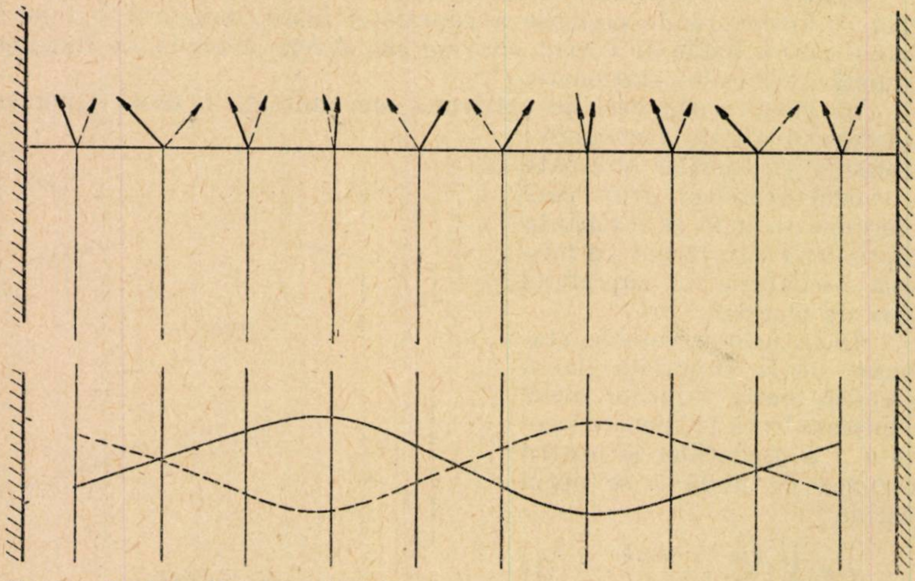


Fig. 3. — Legătura dintre direcția liniilor de curent și deformarea curbei suprafeței libere.

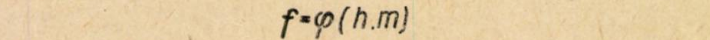


Fig. 4. — Dependența frecvenței oscilațiilor f de numărul liniilor nodale m și de adîncimea curentului h.

de apariție a vîrtejurilor în spatele barelor există o dependență determinată [2], [3]. Dacă fenomenul de apariție a vîrtejurilor se caracterizează cu ajutorul mărimii adimensionale a lui Strouchal, în care intră frecvența de desprindere a vîrtejurilor, atunci această dependență poate fi pusă sub forma în care este redată în [3].

$$\mathcal{S}h = \varphi(\mathcal{R}e) \qquad (4)$$

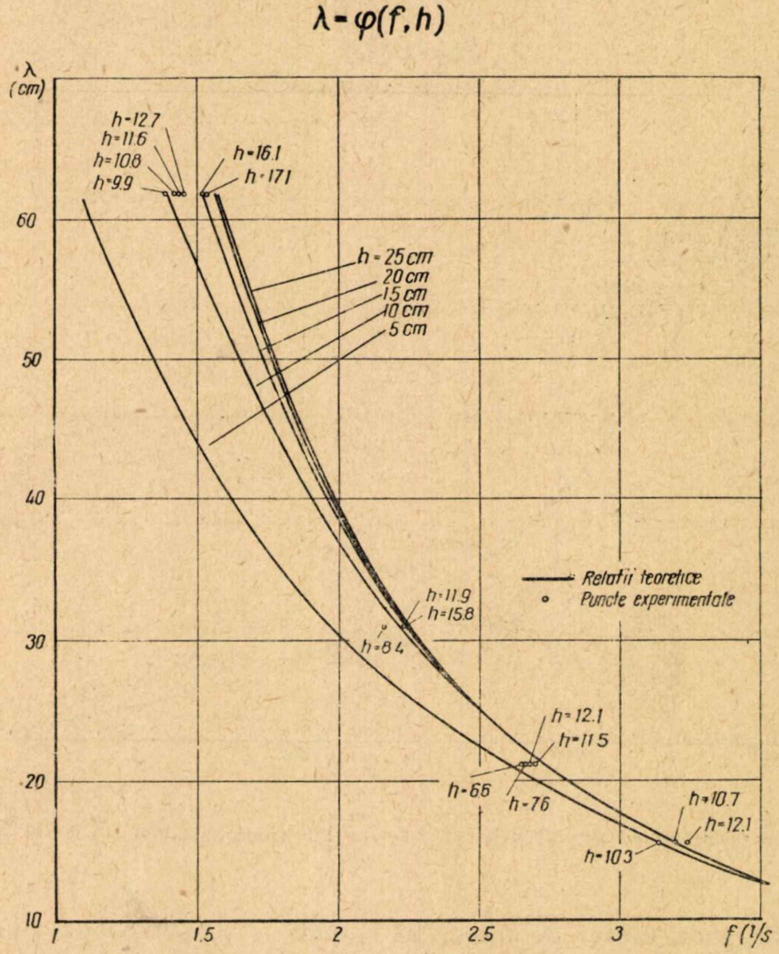


Fig. 5. — Dependența lungimii de undă λ de frecvența desprinderii vîrtejurilor alternate Bénard-Kármán *f* și de adîncimea curentului *h*.

Convenim ca mărimea adimensională $\mathcal{S}h$ să fie exprimată cu ajutorul frecvenței oscilațiilor suprafeței libere *f*, a lungimii de undă λ a acestor oscilații și a vitezei medii longitudinale *u* a curentului în canal

$$\mathcal{S}h_{\lambda} = \frac{f \cdot \lambda}{u}. \qquad (5)$$

Reprezentarea rezultatelor experimentale $\mathfrak{Sh}_\lambda = \varphi(\mathfrak{Re})$ în graficul din figura 6 ilustrează existenţa fenomenelor de rezonanţă amintite mai sus.

În dreptul fiecărui punct experimental sînt scrise şi valorile numărului Froude $\left(\mathfrak{F}_r = \dfrac{u^2}{gh}\right)$. Deşi valorile numărului Froude sînt cuprinse

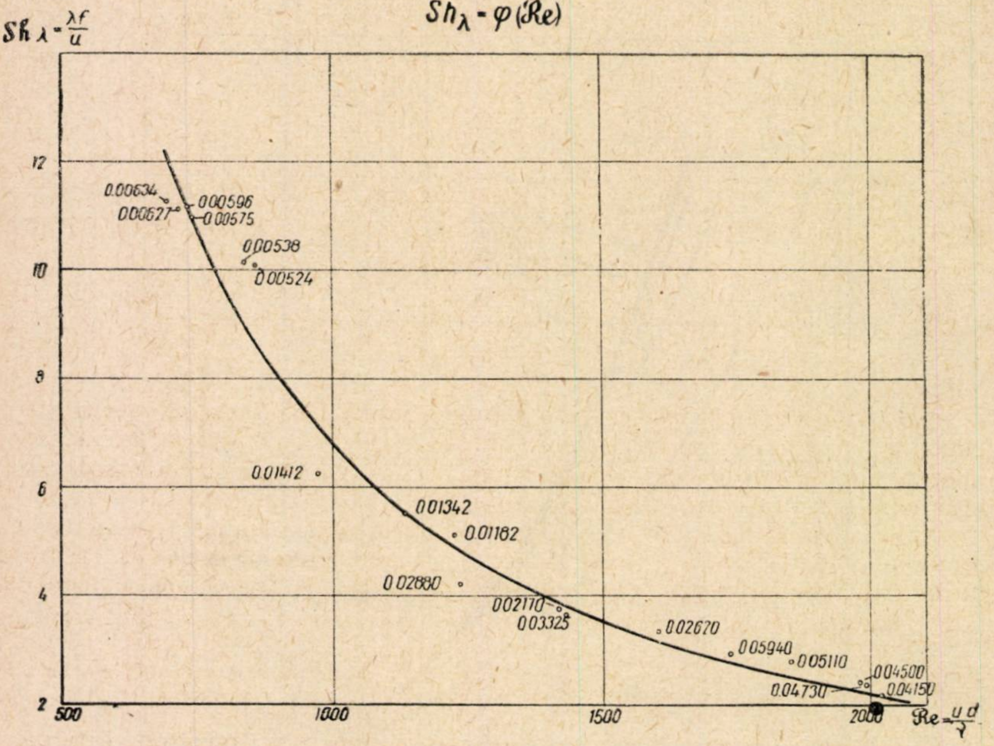


Fig. 6. — Dependenţa numărului Strouchal $\left(\mathfrak{Sh}_\lambda = \dfrac{f \cdot \lambda}{u}\right)$ de numărul Reynolds $\left(\mathfrak{Re} = \dfrac{u \cdot d}{\nu}\right)$.

într-un diapazon destul de mare ($\mathfrak{F}_r = 0{,}005 \div 0{,}071$) totuşi punctele experimentale se grupează satisfăcător în jurul curbei trasate.

Abaterile punctelor experimentale de la curbele trasate în graficele din figurile 4, 5 şi 6 se datoresc în mare măsură, pe de-o parte faptului că în canal viteza de scurgere între bare u nu era aceeaşi pe toată secţiunea canalului, pe de altă parte, inexistenţei unei egalităţi depline între frecvenţa oscilaţiei suprafeţei libere şi frecvenţa desprinderii vîrtejurilor Bénard-Kármán. Frecvenţa oscilaţiilor suprafeţei libere, după cum arată formula (1), pentru un număr m de linii nodale dat depinde de dimensiunile secţiunii transversale a canalului, iar frecvenţa desprinderii vîrtejurilor Bénard-Kármán depinde de viteza curentului *u* și de diametrul barei *d*.

Cu cît cele două frecvențe vor fi mai apropiate ca mărime, cu atît fenomenele de rezonanță vor fi mai puternice, și amplitudinea *a* a oscilațiilor va fi mai mare.

Apariția fenomenelor de rezonanță dă posibilitate să se efectueze măsurători mai certe cu privire la caracteristicile mișcării fluidelor în jurul barelor, să se cunoască mai amănunțit aceste caracteristici și să se ajungă la importante concluzii în ceea ce privește mișcarea turbulentă a fluidelor.

Primită la redacție la 24 decembrie 1959

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОКРУГ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

РЕЗЮМЕ

В работе описывается экспериментальное исследование резонансных явлений, появляющихся при движении воды со свободной поверхностью вокруг цилиндрических стержней, вертикально расположенных в канале с переменным углом наклона.

Появление резонанса отрыва, чередующихся вихрей Бенарда — Кармана обусловливает появление колебательного движения всего потока, перпендикулярно к направлению течения, в виде плоских волн.

Обработка экспериментальных результатов в виде $\mathcal{S}h_{\lambda} = \varphi(\mathcal{R}e)$ (где $\mathcal{S}h_{\lambda} = \frac{f \cdot \lambda}{u}$ определяет характеристики колебательного движения свободной поверхности и $\mathcal{R}e = \frac{u \cdot d}{\nu}$ характеристики явления отрыва чередующихся вихрей Бенарда — Кармана) иллюстрирует явление резонанса между отрывом вихрей и колебательным движением свободной поверхности.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Положение цилиндрических стержней в экспериментальном канале.

Рис. 2. — Поперечное сечение по стационарным волнам в моменты времени максимальной деформации свободной поверхности.

Рис. 3. — Связь между направлением линий тока и деформацией кривой свободной поверхности.

Рис. 4. — Зависимость частоты колебаний *f* от числа угловых линий *m* и глубины потока *h*.

Рис. 5. — Зависимость длины волны λ от частоты отрыва чередующихся вихрей Бенарда — Кармана f и глубины потока h.

Рис. 6. — Зависимость числа Струхаля $\left(\mathcal{S}h_{\lambda} = \frac{f \cdot \lambda}{u}\right)$ от числа Рейнольдса $\left(\mathcal{R}_e = \frac{u \cdot d}{\nu}\right)$.

PHÉNOMÈNES DE RÉSONANCE DANS LE MOUVEMENT DES FLUIDES À SURFACE LIBRE AUTOUR DES BARRES CYLINDRIQUES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs présentent une étude expérimentale des phénomènes de résonance apparaissant lors du mouvement de l'eau à niveau libre autour des barres cylindriques situées, verticalement, dans un canal à pente variable.

L'entrée en résonance des décrochages des tourbillons alternés de Bénard-Kármán produit l'apparition d'un mouvement oscillatoire du courant entier, perpendiculaire sur la direction d'écoulement, sous la forme d'ondes planes.

Les résultats expérimentaux mis sous la forme $\mathcal{S}h_{\lambda} = \varphi(\mathcal{R}_e)$ (où $\mathcal{S}h_{\lambda} = \frac{f \cdot \lambda}{u}$ définit les caractéristiques du mouvement oscillatoire de la surface libre, et $\mathcal{R}_e = \frac{u \cdot d}{\nu}$ les caractéristiques du phénomène de décrochage des tourbillons alternés de Bénard-Kármán) mettent en évidence le phénomène de résonance entre le décrochage des tourbillons et le mouvement oscillatoire de la surface libre.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Position des barres cylindriques dans le canal expérimental.

Fig. 2. — Section transversale dans les ondes stationnaires aux moments de déformation maximum de la surface libre.

Fig. 3. — La relation entre la direction des lignes de courant et la déformation de la courbe de la surface libre.

Fig. 4. — La manière dont la fréquence des oscillations f dépend du nombre des lignes nodales m et de la profondeur h du courant.

Fig. 5. — La manière dont la longueur d'onde λ dépend de la fréquence des décrochages des tourbillons alternés de Bénard-Kármán f et de la profondeur h du courant.

Fig. 6. — La dépendance du nombre de Strouchal $\left(\mathcal{Sh}_{\lambda} = \frac{f \cdot \lambda}{u}\right)$ du nombre de Reynolds $\left(\mathcal{Re} = \frac{u \cdot d}{\nu}\right)$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*. **II**. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955.
2. И. Прандтл, *Гидроаеромеханика*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1951.
3. М. А. Великанов, *Динамика русловых потоков*. I. Издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954.

ASUPRA CALCULULUI AERODINAMIC AL VEHICULELOR UTILIZÎND EFECTUL SOLULUI

DE

N. N. PATRAULEA, ŞT. ANDREI şi GH. RADO

1. *Introducere.* Principiul de funcţionare al vehiculelor bazate pe efectul solului este simplu. Sub platforma vehiculului se face o suprapresiune cu ajutorul unui compresor oarecare. Dacă marginile inferioare ale platformei ating solul, orizontal, etanşînd în felul acesta spaţiul de sub platformă, puterea necesară pentru producerea forţei portante este teoretic nulă. Dacă însă marginile platformei se găsesc la o anumită înălţime de-asupra solului, un flux de fluid scapă către exterior şi menţinerea suprapresiunii necesită evident un consum de putere. Totuşi eficacitatea sustentaţiei este mai bună decît în absenţa solului. Se înţelege că cu cît înălţimea, h a marginilor platformei faţă de sol va fi mai mică cu atît consumul de energie va fi mai mic.

În această lucrare ne propunem să indicăm metoda de calcul aerodinamic pentru diverse aspecte ale problemei luînd în considerare cele două tipuri fundamentale cunoscute sub denumirea cu *cameră plină* şi cu *jet inelar* [1].

2. *Vehiculul în care se realizează mişcarea potenţială în tot spaţiul dintre platformă şi sol* (cu camera plină). Să considerăm mai întîi cazul ipotetic al unui vehicul în care se realizează o suprapresiune sub platformă datorită unei scurgeri irotaţionale a fluidului în tot spaţiul dintre platformă şi sol (fig. 1).

Dacă notăm prin v', viteza asimptotică şi prin s, secţiunea asimptotică după ce fluidul a fost evacuat de-a lungul solului persupus perfect orizontal atunci cu neglijarea frecărilor, puterea necesară va fi aceea corespunzătoare energiei cinetice departe în aval, adică

$$N_{id} = \frac{\rho}{2} s\, v'^3 . \qquad (2.1)$$

Pe de altă parte, presiunea într-un punct din interiorul platformei va rezulta din teorema lui Bernoulli

$$p'' + \frac{\rho}{2} v^2 = p' + \frac{\rho}{2} v'^2 , \qquad (2.2)$$

unde prin p' s-a notat presiunea atmosferică iar v viteza în punctul considerat.

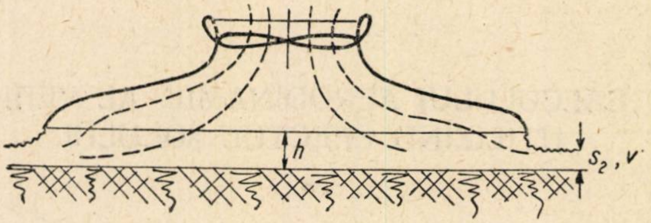


Fig. 1

Presupunînd o secţiune asimptotică, s, mică în raport cu secţiunile platformei, în relaţia de mai sus se poate neglija v în raport cu v' aşa încît suprapresiunea care domneşte în spaţiul dintre platformă şi sol este aproximativ, constantă

$$p'' - p' = \frac{\rho}{2} v'^2 . \qquad (2.3)$$

Se observă că aceeaşi diferenţă de presiune există şi între feţele elicei compresoare. Asupra platformei se va exercita deci următoarea forţă portantă

$$P = (p'' - p') S = \frac{\rho}{2} v'^2 S , \qquad (2.4)$$

unde S este aria bazei platformei. Vom introduce un coeficient de calitate a platformei definit prin :

$$C = \frac{P^{3/2}}{N \sqrt{2 \rho S}} \qquad (2.5)$$

în analogie cu coeficientul de calitate al elicopterelor sau în general al vehiculelor aerodinamice funcţionînd la punct fix.

În cazul vehiculului de faţă, ţinînd seama de formulele de mai sus, coeficientul de calitate ideal (în absenţa frecărilor) va avea expresia

$$C_{id} = \frac{D}{8 h \nu} , \qquad (2.6)$$

unde prin D s-a notat diametrul platformei, presupusă circulară, iar prin ν coeficientul de contracție a vînei definit prin

$$\nu = \frac{s}{\pi D h}. \tag{2.7}$$

Dacă se ține seama și de randamentul $\eta < 1$ al sistemului format din compresor și aducțiunea fluidului pînă la marginea platformei coeficientul de calitate va căpăta expresia

$$C = \frac{D}{8\,h\nu}\cdot\eta\,. \tag{2.8}$$

Dacă se notează

$$\chi = \frac{8\,Ch}{D}, \tag{2.9}$$

coeficientul de calitate se poate scrie în general,

$$C = \chi\cdot\frac{D}{h}\,. \tag{2.10}$$

Introducerea coeficientului χ este utilă deoarece se constată că la toate tipurile de vehicule cu efectul solului, variația coeficientului de calitate în funcție de D/h, este aproape liniară, χ variind relativ puțin cu D/h. Astfel în cazul de față

$$\chi = \frac{\eta}{\nu} \tag{2.11}$$

Pentru valori ale lui h/D pînă la 0,4 ($D/h > 2{,}5$) ν poate fi considerat constant și egal aproximativ cu 0,6. Pentru domeniile normale de utilizare ($h/D < 0{,}05$) și o configurație dată (η definit) parametrul χ este determinat, practic independent de h/D și are o valoare constantă, caracteristică vehiculului însuși (în jurul cifrei 1 dacă $\eta \approx 0{,}5$. Deci, ca ordin de mărime $C \approx \frac{D}{8h}$ (pentru h/D uzual $< 0{,}05$) putînd atinge valori destul de mari prin comparație, de exemplu, cu elicopterul unde $C \leqslant 0{,}8$.

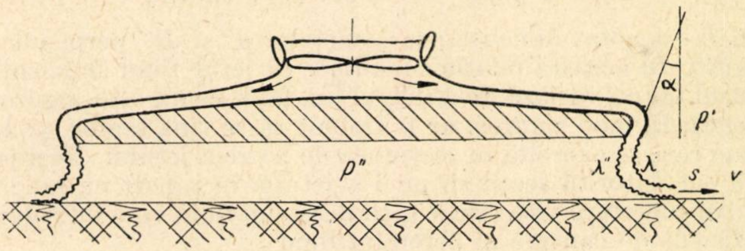


Fig. 2

3. *Cazul vehiculelor cu jet inelar subțire.* Figura 2 reprezintă aspectul scurgerii fluidului în cazul unui astfel de vehicul. Fluidul accelerat datorită

unui compresor oarecare este trimis către periferia platformei formînd la ieșire o pînză de jet inelară.

Este avantajos ca pînza de jet să nu aibă la marginea platformei o viteză verticală ci să facă un unghi α cu aceasta, către interior. În acest caz menținerea suprapresiunii se va face cu mai puțin consum de energie după cum se va arăta mai departe.

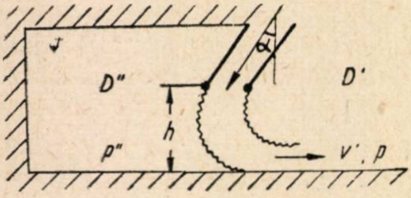


Fig. 3

Deoarece în clopot domnește o presiune constantă la regim permanent [1]), rezultă că vitezele pe cele două linii de discontinuitate a vitezelor λ' și λ'', care delimitează vîna liberă au valori constante, v' respectiv v'' și că liniile de discontinuitate sînt aproximativ arce de cerc [2]).

Deoarece jetul este presupus subțire, se poate considera problema în mișcare plană. În definitiv problema de bază care se pune constă în crearea unui *perete fluid* care să despartă un domeniu D'' unde există presiunea p'' de domeniul D' unde domnește presiunea p' (fig. 3).

Pentru ca peretele fluid să opereze, este necesar ca pînza de jet, care formează peretele fluid, să aibă un anumit impuls minim. Dacă impulsul este mai mare decît valoarea minimă necesară, o parte din fluidul jetului va intra și în domeniul D''. Dacă D'' este finit și închis, se va stabili un regim permanent la care se formează o presiune p'' în D'' și tot debitul jetului este evacuat mai departe numai în D'.

Pentru jetul subțire este valabilă următoarea expresie a teoremei impulsului pe direcția orizontală :

$$(p'' - p')\, h \cdot L = \rho\, s v'^2 (1 + \sin \alpha)\,, \tag{3.1}$$

unde prin L s-a notat dimensiunea camerelor p' și D'' perpendiculară pe planul figurii. În această relație s-a admis că jetul fiind suficient de subțire impulsul lui nu variază de-a lungul lui, fapt ce nu este riguros exact. De asemenea, în mod riguros, ar fi trebuit să se țină seama și de forțele de presiune care se exercită în secțiunea de ieșire a jetului. Neglijarea este justificată tot datorită secțiunii mici a jetului în raport cu lungimea lui.

Pentru caracterizarea eficacității peretelui fluid vom introduce următorul coeficient de calitate al peretelui fluid

$$\chi = \frac{[(p'' - p')\, LH]^{3/2}}{N \sqrt{2 \rho s}}\,, \tag{3.2}$$

unde prin s, s-a notat secțiunea jetului presupusă constantă. Ținînd seama de formulele (2.1) şi (3.1) expresia coeficientului de calitate a peretelui fluid devine

---

[1]) Dacă neglijăm mișcările interioare în clopot, datorite antrenării aerului din clopot prin viscozitate, de către fața interioară a jetului, în cazul cînd vîna nu este limitată și de către un perete interior pînă la buza de ieșire a jetului.

[2]) Acestea sînt riguros arce de cerc în cazul mișcării plane corespunzătoare și a jetului infinit subțire.

$$\varkappa_{id} = \sqrt{2}\,(1+\sin\alpha)^{3/2}. \qquad (3.3)$$

Notînd prin η randamentul sistemului format din compresoare şi aducţiunea fluidului pînă la secţiunea de ieşire, coeficientul real de calitate al peretelui fluid va fi

$$\varkappa = \eta\,\varkappa_{id} = \eta\sqrt{2}\,(1+\sin\alpha)^{3/2}. \qquad (3.3')$$

Revenind la problema vehiculului cu pînza inelară de jet, forţa portantă a acestuia se va compune din rezultanta presiunilor sub platformă şi din forţele care au dat naştere jetului reprezentate prin impulsul jetului la ieşirea sa din ajutaj

$$P = (p''-p')\,S + \rho\, s v'^2 \cos\alpha . \qquad (3.4)$$

După cum se vede, forţa portantă totală nu are nici o limită, ea crescînd liniar cu mărimea suprafeţei S, a platformei. Termenul al doilea al formulei (3.4) este în general mic în raport cu primul, dacă S este suficient de mare.

Vom defini, de asemenea, un coeficient de calitate în ceea ce priveşte portanţa totală,

$$C_{id} = \frac{P^{3/2}}{N_{id}\sqrt{2\rho S}} \qquad (3.5)$$

şi ţinînd seama de (3.6), se obţine

$$C_{id} = \frac{\left\{\rho s v^2\left[(1+\sin\alpha)\dfrac{S}{hL}+\cos\alpha\right]\right\}^{3/2}}{\dfrac{\rho}{2}\, s v^3\sqrt{2\rho s}\sqrt{\dfrac{S}{s}}},$$

unde L reprezintă deci perimetrul platformei. Efectuînd calculele se obţine mai departe,

$$C_{io} = \sqrt{2}\,\frac{\left[(1+\sin\alpha)\dfrac{S}{hL}+\cos\alpha\right]^{3/2}}{\sqrt{\dfrac{S}{s}}}, \qquad (3.6)$$

sau

$$C_{id} = \sqrt{2}\,\frac{S}{hL}\sqrt{\frac{s}{hL}}\left[(1+\sin\alpha)+\frac{hL}{S}\cos\alpha\right]^{3/2}. \qquad (3.7)$$

Se observă că dacă hL/S este suficient de mic aşa cum trebuie căutat să se întîmple în practică,

$$C_{id} \approx \varkappa\,\frac{S\sqrt{s}}{(hL)^{3/2}} = \sqrt{\frac{s}{S}}\cdot\left(\frac{S}{hL}\right)^{3/2}\cdot\varkappa = \frac{R\sqrt{\Delta R_j}}{2H^{3/2}}\cdot\varkappa,$$

unde $\varkappa$ este coeficientul de eficacitate a peretelui, R raza platformei dacă este circulară iar ΔR_j lățimea jetului.

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$C_{id} \approx \frac{2R\sqrt{\Delta R_j}}{h^{3/2}} \approx \frac{D}{h}\sqrt{\frac{\Delta R_j}{h}}\,. \tag{3.7'}$$

Coeficientul χ_{id} va avea în acest caz expresia,

$$\chi_{id} = 8\sqrt{\frac{\Delta R_j}{h}}\,. \tag{3.7''}$$

4. *Asupra unei tratări mai riguroase a problemei peretelui fluid.* În paragraful precedent s-a presupus jetul foarte subțire astfel că viteza în jet a putut fi considerată constantă. În realitate, jetul nu este infinit subțire și de altfel nici nu este economic să se creeze impulsul prin jeturi subțiri de mare viteză, deoarece pentru impuls constant, puterea necesară pentru producerea jetului tinde către infinit cînd secțiunea jetului tinde către zero.

Să considerăm cazul mai riguros cînd jetul nu este infinit subțire. În primul rînd, vom remarca că la distanță suficient de mare de ajutajul de ieșire a jetului și de sol, liniile de curent sînt aproape arcuri de cerc așa încît vom menține ipoteza că liniile de curent sînt tot circulare și în cazul jeturilor care nu sînt foarte subțiri.

Fie O centrul de curbură a liniilor de curent ale peretelui fluid, r', cea mai mică rază de curbură și r'' cea mai mare rază de curbură (fig. 4).

Neglijînd vîscozitatea fluidului, ecuația de mișcare pe direcția radială este

$$a_r = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \tag{4.1}$$

unde a_r este accelerația radială într-un punct oarecare din jet. Notînd cu v, viteza în același punct avem pe de altă parte

$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \tag{4.2}$$

deoarece liniile de curent au fost presupuse arce de cerc. Avem deci

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr}\,. \tag{4.3}$$

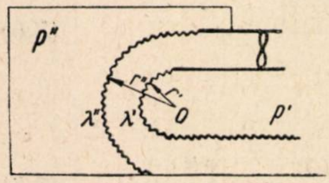


Fig. 4

Pe de altă parte, dacă constanta lui Bernoulli este aceeași în jet se mai poate scrie relația

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{2}v^2\right). \tag{4.4}$$

Eliminînd pe $\frac{dp}{dr}$ din (4.1) și (4.4) se obține, după efectuarea integralei următorul rezultat:

$$vr = v'r' = v''r'' = \text{const.} \tag{4.5}$$

Se deduce mai departe

$$p'' - p' = \frac{\rho}{2} v'^2 \left(1 - \frac{r'^2}{r''^2}\right). \tag{4.6}$$

Pe de altă parte, puterea necesară pentru producerea jetului va fi

$$N = \int_{r'}^{r''} \frac{\rho}{2} v'^2 v \, dr \tag{4.7}$$

și ținînd seama de (4.6), avem

$$N = \frac{\rho}{2} v'^3 r' \ln \frac{r''}{r'}. \tag{4.8}$$

Pe baza ecuației de mai sus se poate studia mai departe *eficiența* peretelui fluid care ar putea fi caracterizată prin numărul

$$\varkappa_{id} = \frac{[(p'' - p')(r'' + r')]^{3/2}}{N\sqrt{2\rho(r'' - r')}}, \tag{4.9}$$

în cazul unui unghi α de 90°, deoarece numai în acest caz distanța de la buza inferioară a platformei pînă la sol este $r'' + r'$. Cu modificări corespunzătoare s-ar putea defini un astfel de număr (pe care am putea să-l denumim *coeficient de calitate* al peretelui fluid) și pentru α oarecare. Vom rămîne deocamdată în cazul $\alpha = 90°$ deoarece este cel mai avantajos din punct de vedere energetic și, pe de altă parte, vrem să punem în evidență numai variația coeficientului de calitate cu grosimea jetului, $r'' - r'$.

Ținînd seama acum de formulele (4.6) și (4.7), (4.9) devine

$$\varkappa'_{id} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r'}{r''}\right)^3 \cdot \frac{r'' - r'}{r' \ln \frac{r''}{r'}}. \tag{4.10}$$

Se observă că, dacă r''/r' este aproape de unitate atunci putem scrie

$$\ln \frac{r''}{r'} = \ln\left(1 - \frac{r'' - r'}{r'}\right) \approx \frac{r'' - r'}{r'} \tag{4.11}$$

și deci, (4.10) devine

$$\varkappa'_{id} \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r'}{r''}\right)^3. \tag{4.10'}$$

Se verifică mai departe că dacă luăm $r'/r'' = 1$, regăsim valoarea dată de formula (3.2) în cazul $\alpha = 90°$ ceea ce era de altfel de aşteptat.

Comparînd însă (4.10)′ cu (3.2) şi cu atît mai mult 4(10) cu (3.2) observăm că coeficientul de calitate al peretelui fluid depinde de grosimea jetului, scăzînd cu acesta. Cu alte cuvinte puterea necesară pentru aceeaşi diferenţă de presiune între camerele despărţite de peretele fluid nu este tocmai invers proporţională cu rădăcina pătrată din grosimea jetului, avantajul energetic datorat măririi secţiunii fiind într-o oarecare măsură atenuat.

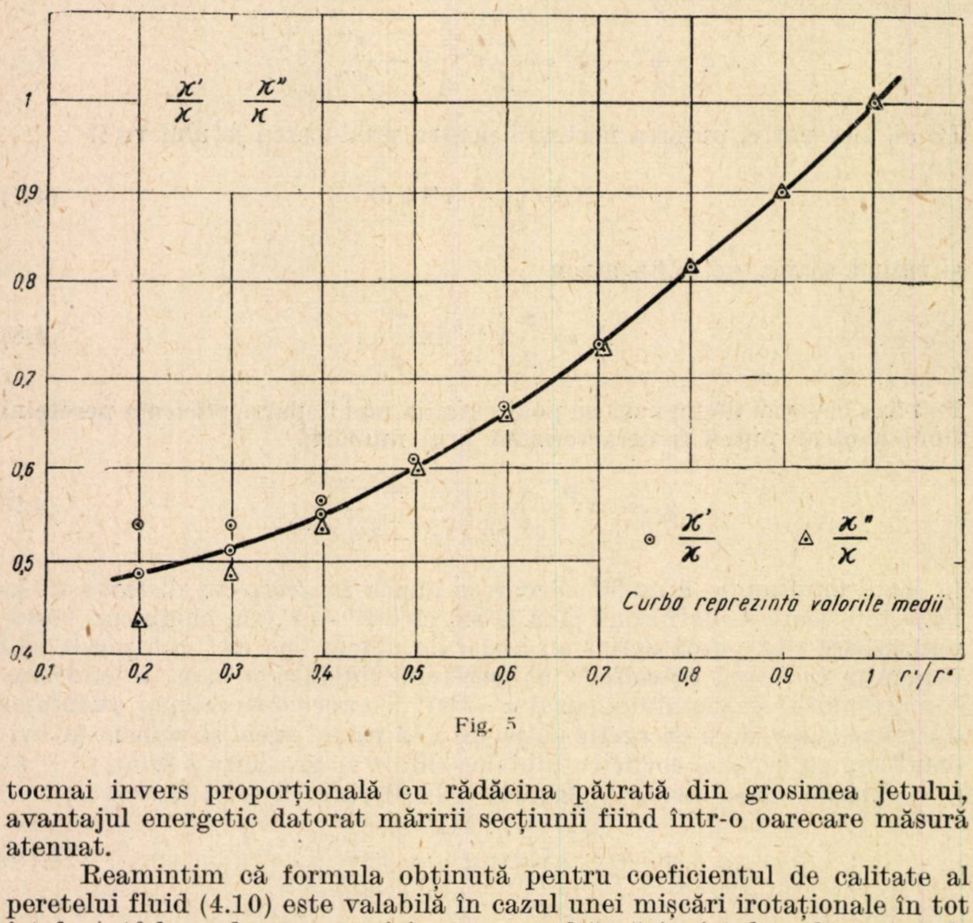


Fig. 5

Reamintim că formula obţinută pentru coeficientul de calitate al peretelui fluid (4.10) este valabilă în cazul unei mişcări irotaţionale în tot jetul. Astfel, pe baza acestei ipoteze rezultă că în jetul curbat vitezele nu sînt egale el descrescînd pe măsură ce raza de curbură creşte.

O altă situaţie particulară este aceea a unei astfel de distribuţii a constantei lui Bernoulli în liniile de curent ale jetului încît să corespundă unei distribuţii uniforme a vitezelor în vîna curbată.

Conform ecuaţiei (4.9), distribuţia presiunilor va fi dată în acest caz de

$$p - p' = \rho v^2 \int_{r'}^{r} \frac{dr}{r} = \rho v^2 \ln \frac{r}{r'}, \tag{4.12}$$

şi deci

$$p'' - p' = \rho\, v^2 \ln \frac{r''}{r'} . \tag{4.13}$$

Pe de altă parte, debitul de energie în vînă este

$$N = \int_{r'}^{r''} \left(p - p' + \frac{\rho}{2}\, v^2\right) \cdot v\, dr . \tag{4.14}$$

Ţinînd seama de (4.13) şi (4.14) se obţine următoarea expresie pentru coeficientul de calitate al peretelui fluid :

$$\varkappa''_{id} = \frac{\left(1 + \dfrac{r'}{r''}\right)^{3/2} \cdot \left(\ln \dfrac{r''}{r'}\right)^{3/2}}{\left[\ln \dfrac{r''}{r'} - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{r'}{r''}\right)\right] \sqrt{2\left(1 - \dfrac{r'}{r''}\right)}} . \tag{4.15}$$

În particular dacă jetul devine foarte subţire, din (4.15) se deduce făcîndu-se r'' să tindă către r' că expresia coeficientului de calitate al peretelui tinde către valoarea dată de relaţia (3.4) pentru $\alpha = 90°$. Folosind aceeaşi aproximaţie pentru logaritmi avem aproximativ,

$$\varkappa''_{id} = \frac{\left(1 + \dfrac{r'}{r''}\right)^{3/2}}{\left(1 - \dfrac{r'}{2r''}\right) \sqrt{2\, \dfrac{r'}{r''}}} .$$

În figura 5 s-a reprezentat variaţia rapoartelor $\dfrac{\varkappa'}{\varkappa}$ şi $\dfrac{\varkappa''}{\varkappa}$ în funcţie de $\dfrac{r'}{r''}$ în cele două ipoteze considerate, $\varkappa$ fiind coeficientul calculat pe baza ipotezei jetului infinit subţire.

5. *Calculul bazat pe rezolvarea unei probleme Kirchoff.* Metoda prezentată în paragraful precedent — deşi mai riguroasă în sensul că se ţine seama, în anumită măsură, de grosimea jetului — totuşi ea nu poate fi aplicată la jeturi prea groase în raport cu distanţa de sol.

În acest paragraf, indicăm o soluţionare a problemei bazată pe rezolvarea unei probleme Kirchoff corespunzătoare peretelui fluid. Pentru aceasta vom face ipoteza că mişcarea în jet este irotaţională şi că fluidul este adus la buza de ieşire $A''A'$ printr-un canal lung rectiliniu $M_1\, A'A''$.

Vom nota cu V viteza asimptotică la infinit amonte cu v' şi v'' vitezele pe liniile de discontinuitate λ' şi λ'', iar cu M primul punct de contact al jetului cu solul (fig. 6). Vom asocia planului de scurgere planul complex $z = x + iy$ şi pentru rezolvarea problemei vom considera reprezentarea conformă a domeniului de scurgere din planul z, pe banda infinit lungă de lăţime L, din planul auxiliar complex $\zeta = \xi + i\eta$.

Desigur, reprezentarea conformă nu este cunoscută mai dinainte şi de fapt în aceasta constă în esenţă problema.

Notînd prin w şi f viteza, respectiv, potenţialul complex, avem de îndeplinit următoarele condiţii la limită :

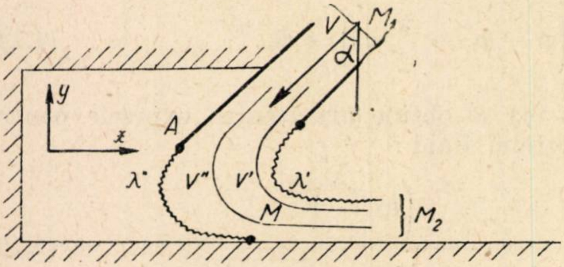


Fig. 6

$$\arg. w = \frac{\pi}{2} + \alpha\,, \tag{5.1}$$

pe pereţii canalului rectiliniu,

$$\arg. w = 0, \text{ pe sol}\,, \tag{5.2}$$

$$\left.\begin{aligned} |\,w\,| &= v' \text{ pe } \lambda'\,, \\ |\,w\,| &= v'' \text{ pe } \lambda''\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

În ceea ce piveşte potenţialul complex f, se poate considera drept condiţii la limită

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 0, \text{ pe } M_1\,A''\,\lambda''\,MM_2\,, \\ \psi &= VS_c, \text{ pe } M_1\,A'\,\lambda'\,M_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

unde prin S_c s-a însemnat secţiunea canalului la infinit amonte. Condiţiile la limită de mai sus sînt rezumate în figura 7 reprezentînd banda imagine din planul complex.

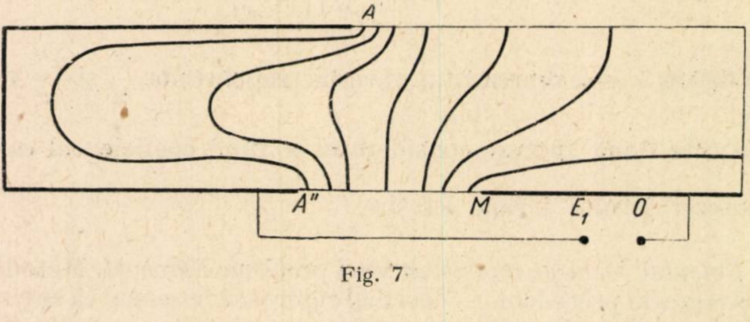


Fig. 7

Soluţionarea problemei se bazează pe determinarea independentă a funcţiilor

$$w\,(\zeta) = w\,[z\,(\zeta)]\,,$$

şi

$$f\,(\zeta) = f\,[z\,(\zeta)]\,.$$

Aceste funcţii se pot determina independent de cunoaşterea funcţiei care face transformarea conformă căutată, aceasta din urmă rezultînd apoi imediat.

Din motive de comoditate de calcul se consideră în loc de funcția $w(\zeta)$, funcția

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{w(\zeta)}{V} = \tau + i\sigma, \tag{5.5}$$

adică

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \ln \frac{w}{V}, \\ \sigma &= -\beta, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

β fiind argumentul vitezei, adică

$$w = |w| \cdot e^{-i\beta}. \tag{5.7}$$

Condițiile la limită pentru funcția $w(\zeta)$ rezultă deci

$$\begin{aligned} &\sigma = \frac{\pi}{2} + \alpha, \text{ pe } M_1 A' \text{ și } M_1 A'', \\ &\sigma = 0, \text{ pe } MM_2, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &\tau = \ln v'/V, \text{ pe } A'M_2, \\ &\tau = \ln v''/V, \text{ pe } A''M. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Imaginea punctelor A', A'', M în planul ζ nu sînt cunoscute așa încît se va rezolva problema în mod indirect. Se pun punctele menționate la întîmplare și după determinarea reprezentării conforme se calculează punctele corespunzătoare din planul fizic.

Pe baza faptului că domeniul este în formă de bandă și pe baza condițiilor la limită de mai sus rezultă imediat că potențialul complex este

$$f(\zeta) = \frac{SV}{L} \cdot \zeta. \tag{5.10}$$

În ceea ce privește determinarea funcțiunii $\omega(\zeta)$ rezolvarea matematică implică calcule laborioase așa încît noi vom indica o cale bazată pe analogia reoelectrică.

Astfel, făcînd analogia

$$\sigma \longrightarrow \Phi_1,$$

unde prin Φ_1 am însemnat potențialul electric, sîntem conduși să executăm următorul montaj în cuva reoelectrică care va avea forma unei benzi suficient de lungi : se fac frontierele pe care să dăm valorile funcției σ din materialul conductor și frontierele pe care τ este dat din material izolant (fig. 8). Conductorii $AM\,A'$ și MM_2 sînt legați la cele două borne ale generatorului.

Prin metode cunoscute se determină potențialele electrice adimensionale definite prin

$$\overline{\Phi}_1 = \frac{\Phi_1}{E_1}, \tag{5.11}$$

E_1 fiind diferența de potențial de la bornele generatorului (se consideră convențional că potențialul punctului A'' este mai mare).

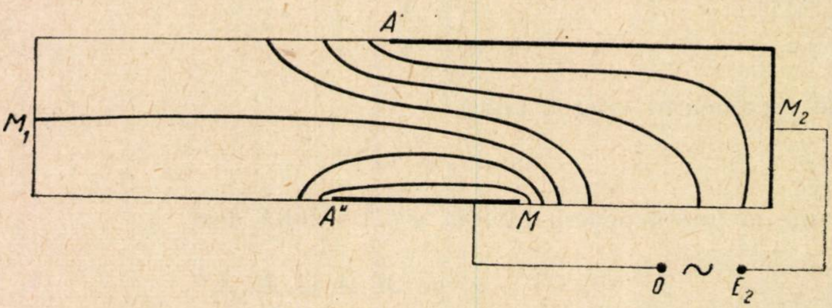


Fig. 8

Vom nota mai departe cu r_0 rezistivitatea electrolitului din cuvă şi cu h adîncimea sa. Rezultă următoarele relații de similitudine între elementele electrice şi cele aerodinamice :

$$\frac{\sigma}{\pi/2 + \alpha} = \overline{\Phi}_1 \longrightarrow \sigma = \overline{\Phi}_1\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \tag{5.12}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\ln \frac{v'}{v''}} = \frac{\Phi_1}{I_1 \cdot \frac{r_0}{h}} = \overline{\Phi}_1 \cdot \frac{E_1}{I_1 \cdot \frac{r_0}{h}}, \tag{5.13}$$

unde prin I_1 s-a notat intensitatea curentului. Din această relație se deduce raportul v'/v''. Pentru realizarea analogiei

$$\tau \longrightarrow \Phi_2$$

unde prin Φ_2 am însemnat potențialul electric, montajul în cuva reoelectrică, este acela arătat în figura 8.

În această analogie avem următoarea relație de similitudine :

$$\frac{\tau - \ln v''/V}{\ln v'/v''} = \frac{\Phi_2}{E_2} = \overline{\Phi}_2, \tag{5.14}$$

de unde se deduce

$$\tau = \Phi_2 \cdot \ln\frac{v'}{v''} + \ln\frac{v''}{V}. \tag{5.15}$$

Scriind relația (5.15) în punctul M_1, avem

$$0 = \bar{\Phi}_2 (M_1) \cdot \ln \frac{v'}{v''} + \ln \frac{v''}{V}, \tag{5.16}$$

de unde se deduce v''/V (v'/v'' este deja cunoscut din (5.13)).

Ținînd seama de formula (5.5) viteza complexă poate fi determinată în orice punct

$$\frac{w}{V} = e^{\omega(\xi)} = e^{\tau + i\sigma}. \tag{5.17}$$

Avînd determinate atît potențialul complex cît și viteza complexă în orice punct, ζ, reprezentarea conformă rezultă din relația

$$w(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}, \tag{5.18}$$

de unde

$$z = \frac{1}{V} \int \frac{df}{w/V}, \tag{5.19}$$

sau ținînd seama de (5.10)

$$z = \frac{S_c}{L} \int \frac{d\zeta}{w/V} \tag{5.20}$$

unde

$$\frac{w}{V} = e^{\tau} (\cos \sigma + i \sin \sigma). \tag{5.21}$$

În felul acesta este posibil să se calculeze geometria elementelor construcției din planul fizic z.

Coeficientul de calitate, $\varkappa$ al peretelui fluid îl vom defini în felul următor:

$$\varkappa_{id} = \frac{[(p'' - p')\, h]^{3/2}}{N \sqrt{2 \rho S_e}}. \tag{5.22}$$

Pe baza formulelor de mai sus avem

$$p'' - p' = \frac{\rho}{2} V^2 (\bar{v}'^2 - \bar{v}''^2) \tag{5.23}$$

și

$$N = \frac{\rho}{2} \bar{v}'^2 V^3 S_e, \tag{5.24}$$

unde

$$\bar{v} = \frac{v}{V};$$

(5.22) devine, deci

$$\varkappa_{id} = \frac{\left[(\bar{v}'^2 - \bar{v}''^2)\frac{h}{S_c}\right]^{3/2}}{2\bar{v}'^2}. \tag{5.25}$$

Parametrul h/S_c se determină cu ajutorul transformării conforme (5.20).

Pe baza valorilor ce se obţin pentru $\varkappa_{id}$, corespunzător diferitelor valori ale parametrilor, se pot deduce mai departe, ca şi în paragraful precedent, coeficienţii de calitate corespunzători.

Primită la redacţie la 12 mai 1960

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СРЕДСТВ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭФФЕКТА ЗЕМЛИ

РЕЗЮМЕ

В введении приводятся общие соображения о принципах и приспособлениях для аэродинамического поддерживания платформ вблизи земли путем применения эффекта земли.

Затем устанавливаются соотношения между геометрическими и энергетическими безразмерными параметрами, поддерживающей силы в случае круглых и кольцевых струй, определяя при этом и характерный коэффициент качества.

Из исследований изменения параметров делаются некоторые выводы о путях улучшения характеристик работы.

ON THE AERODYNAMIC CALCULATION OF VEHICLES BY USING THE GROUND EFFECT

ABSTRACT

This paper presents general considerations, on the principles and devices for the aerodynamic lift of platforms near the ground by using the ground effect.

The relationships between geometrical and energy dimensionless lift parameters are established in case of circular and annular jets and a characteristic quality coefficient is defined.

From an examination of the variation of parameters, certain conclusions are drawn on the manner in which the operating characteristics may be improved.

BIBLIOGRAFIE

1. E. K. Liberatore, *A parameter for comparing ground effect vehicles*. Aero-Space-Engineering, octombrie (1959).

STUDII

AEROMECANICĂ

DESPRE LIMITELE DE APLICABILITATE A UNEI TEORII A STABILITĂȚII MIȘCĂRILOR PARȚIAL CONTROLATE ALE AVIONULUI

DE

T. HACKER

1. S-a arătat [1] că în cazul mișcărilor parțial controlate ale aparatelor de zbor, mișcarea perturbată poate fi studiată pe baza unui sistem de ecuații diferențiale în care apar numai deviațiile parametrilor cinematici necontrolați. Acest sistem a fost denumit sistem auxiliar.

Modelul matematic al mișcării parțial controlate este atunci următorul.

Să considerăm sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t;\, x, \xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \Xi(t;\, x, \xi), \end{aligned} \tag{1}$$

cu $X(t;\,0,0)=0$ și $X(t;\,x,0)=\overline{X}(t,x)$, reprezentînd mișcarea perturbată a aparatului de zbor parțial controlat; x și ξ reprezită vectori, respectiv, m- și k-dimensionali, componentele cărora sînt, respectiv, deviațiile parametrilor cinematici liberi și controlați; X și Ξ sînt vectori de aceleași dimensiuni ca și x și ξ, respectiv, avînd drept componente funcții în general neliniare de cele m componente ale lui x, de cele l componente ale lui ξ, precum și de variabila independentă.

Se presupune că intervenția stabilizatoare încetează de îndată ce toate deviațiile parametrilor controlați se anulează ($\xi = 0$) și reapare numai dacă cel puțin una din aceste deviații ia valoare diferită de zero. Cu alte cuvinte, dacă

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X'(t\,;\,x,\ \xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \Xi'(t\,;\,x,\ \xi), \end{aligned} \tag{2}$$

reprezintă sistemul de ecuații ale mișcării perturbate libere, atunci

$$X'(t\,;\,x,\ 0) = X(t\,;\,x,\ 0) = \overline{X}(t,\ x).$$

DEFINIȚIA 1. *Soluția banală a sistemului auxiliar*

$$\frac{dx}{dt} = \overline{X}(t\,;\,x) \tag{3}$$

este stabilă în raport cu $\xi(t)$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există două funcții* $\delta(\varepsilon)$ și $\eta(\varepsilon)$ *astfel încît, dacă*

$$|\,\xi(t)\,| < \delta(\varepsilon) \quad \textit{pentru } t \geqslant t_0$$

și

$$|\,x_0\,| < \eta(\varepsilon)$$

atunci

$$|\,x(t\,;\,t_0,\ x_0)\,| < \varepsilon \quad \textit{pentru } t > t_0.$$

$x(t\,;\ t_0,\ x_0)$ *fiind soluția sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = X\,[t,\ x,\ \xi(t)],$$

corespunzătoare condiției inițiale

$$x(t_0\,;\,t_0,\ x_0) = x_0.$$

DEFINIȚIA 2. *Soluția banală a sistemului auxiliar este asimptotic stabilă în raport cu* $\xi(t)$, *pentru care* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t\,;\,t_0,\ x_0) = 0$, *dacă sînt satisfăcute condițiile definiției 1 și are loc relația*

$$\lim_{t\to\infty} x(t\,;\ t_0,\ x_0) = 0.$$

TEOREMĂ. *Dacă soluția banală a sistemului auxiliar este uniform asimptotic stabilă, ea este uniform asimptotic stabilă în raport cu* $\xi(t)$, (*pentru* $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0$).

Dacă $\xi(t)$ nu tinde către zero cînd t crește nedefinit, stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului (3) atrage după sine stabilitatea (simplă) în raport cu $\xi(t)$, dacă x_0 și ξ_0 sînt suficient de mici.

2. Pentru aplicații prezintă un deosebit interes evaluarea cantității δ (v. definiția 1) în funcție de valori ale mărimii pozitive ε, alese din considerente practice legate de securitate, confort, precizia evoluției etc.

În cele ce urmează se indică un procedeu de evaluare a acestei cantităţi. Se transcrie în formă scalară prima ecuaţie din sistemul (1)

$$\frac{dx_i}{dt} = \overline{X}_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m) + R_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k), \tag{4}$$

cu

$$R_i = X_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k) - X_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Pentru orice $t > t_0$ funcţiile R_i se presupun mărginite în modul, fie ρ_i marginile superioare respective. Fie, în continuare, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ şi $\delta_1, \ldots, \delta_k$, respectiv, componentele vectorilor ε şi $\delta\,(\varepsilon)$ (din definiţia 1). Atunci se vede uşor, că se poate scrie

$$| R_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k) | \leqslant \sum_{s=1}^{k} \delta_s \sup_{\substack{|x_i| < \varepsilon_i \\ |\xi_j| < \delta_j \\ t > t_0}} \left| \frac{\partial X_i}{\partial \xi_s} \right| \tag{5}$$

Pentru evaluarea cantităţilor δ_s se va urma o cale inspirată din raţionamentul utilizat de I. G. Malkin pentru demonstrarea uneia din teoremele sale de stabilitate în raport cu perturbaţiile cu acţiune continuă [2].

Se consideră o funcţie $W (t\,;\, x_1, \ldots, x_m)$ pozitiv definită (de ex. o formă patratică) a cărei derivată în raport cu t în virtutea sistemului auxiliar (3) este negativ definită.

În continuare fie $\overline{\rho}_i\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ cea mai mare valoare a lui ρ_i pentru care inegalităţile

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m} (X_s + \rho_s) \frac{\partial W}{\partial x_s} \right\}_{W = C^2} < 0 \tag{6}$$

sînt satisfăcute pe orice punct al elipsoidului mobil $W (t\,;\, x_1, \ldots, x_m) = C^2$ din spaţiul variabilelor x_s, unde $C^2 < \inf\limits_{\substack{|x_s| \geqslant \varepsilon_s \\ t > t_0}} W (t\,;\, x_1, \ldots, x_m)$, şi în orice moment $t \geqslant t_0$.

Atunci evaluarea căutată va fi dată de inegalităţile

$$\sum_{s=1}^{k} \delta_s \sup_{\substack{|x_s| < \varepsilon_s \\ |\xi_s| < \delta_s \\ t > t_0}} \left| \frac{\partial X_i}{\partial \xi_s} \right| = \sum_{s=1}^{k} \delta_s \sup_{\substack{|x_s| < \varepsilon_s \\ |\xi_s| < \delta_s \\ t > t_0}} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_s} (X_i + P_i) \right| \leqslant \overline{\rho}_i\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \tag{7}$$

P_i reprezintă forţele suplimentare provocate de comenzile cu care a intervenit pilotul pentru stabilizarea zborului ($P_i (t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k) = X\,(t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k) - X'\,(t\,;\, x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_k)$).

Considerînd problema liniarizată, aceste inegalități pot fi înlocuite cu următoarele

$$\sum_{s=1}^{k} \delta_s \sup_{\substack{|x_s|<\varepsilon_s \\ |\xi_s|<\delta_s \\ t>t_0}} \left| p_{is} + \frac{\partial P_i}{\partial \xi_s} \right| \leqslant \bar{\rho}_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \tag{8}$$

unde p_{is} sînt coeficienții termenilor liniari ai funcției X_i.

3. Semnificația formulei (8) este următoarea:

Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ marginile în care este necesar să se mențină deviațiile parametrilor cinematici necontrolați (liberi) din considerente practice (ca precizia evoluției, securitate, confort etc). Atunci formula (8) (sau (7)) indică cît de mici trebuie să fie marginile δ_s ale variabilelor constrînse în urma intervenției pilotului. Constantele p_{is} sînt date în funcție de parametrii constructivi ai avionului și de parametrii cinematici ai zborului neperturbat (mișcării de bază); $\frac{\partial P_i}{\partial \xi_s}$ se evaluează în funcție de natura controlului aplicat; iar $\bar{\rho}_j$, caracterizînd efectul comenzii, se calculează, în funcție de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ prin procedeul matematic indicat sau altul similar. Prin urmare dacă pentru valori date ε_i, nu se pot asigura valori suficient de mici pentru marginile δ_s pe toată durata mișcării perturbate, existența unei soluții stabile din punct de vedere matematic, nu asigură valori suficient de mici ale variabilelor libere.

O altă concluzie ce se poate trage din formula (8) este aceea că pentru un avion dat și o mișcare de bază dată, eficacitatea controlului parțial depinde nu numai de alegerea variabilelor constrînse ci și de alegerea comenzii. Cu alte cuvinte, pentru aceeași mișcare de bază, aceeași perturbație, constrîngerea acelorași variabile, o anumită comandă se poate dovedi eficientă, iar alta nu. Această concluzie este aproape imediată, întrucît orice comandă, pe lîngă variabilele pentru care a fost aplicată, afectează în mod inevitabil într-o măsură mai mare sau mai mică și ceilalți parametri cinematici. Dacă aceste efecte secundare acționează într-un sens nedorit și sînt prea mari, ele pot duce la nesatisfacerea condițiilor (8). Astfel, de exemplu, constrîngerea unghiului de tangaj prin intermediul tracțiunii poate provoca ca efect secundar nedorit o perturbare a vitezei de zbor. În alte cazuri însă efectele secundare pot acționa în același sens ca și efectul principal, concurînd la stabilizarea mișcării. De exemplu, controlul unghiului de tangaj în faza fugoidă a mișcării perturbate longitudinale cu ajutorul profundorului are efect stabilizator și asupra vitezei de zbor. Evident în fiecare caz, pilotul va alege în mod reflex fie comanda care asigură un efect secundar favorabil, fie, dacă acest lucru nu este posibil, comanda care comportă un efect secundar cît mai redus.

Primită la redacție la 12 mai 1960

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТИЧНО КОНТРОЛИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ САМОЛЕТА

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются некоторые аспекты теории устойчивости частично контролируемых движений самолетов, изложенные в одной из предыдущих работ.

Для данной теории предлагается способ оценки контролируемых переменных. С этой целью выводится соотношение, определяющее некоторые пределы для этих переменных, которые летчик должен обеспечить с тем, чтобы свободные переменные не превосходили определенные значения, необходимые по различным соображениям (безопасности, удобства полета и пр.). Указывается также влияние выбора органов управления на эффективность частичного контроля с точки зрения динамической устойчивости.

SUR LES LIMITES D'APPLICABILITÉ D'UNE THÉORIE DE LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS PARTIELLEMENT CONTRÔLÉS D'UN AVION

RÉSUMÉ

On présente certains aspects de la théorie de la stabilité des mouvements partiellement contrôlés des avions, exposée dans un article antérieur.

Cette théorie est complétée par un procédé d'évaluation des variables contraintes, c'est-à-dire, on déduit une relation à l'aide de laquelle on peut établir des limites pour ces variables qui doivent être assurées par le pilote, afin que les variables libres ne dépassent pas certaines valeurs imposées par maintes considérations (de sécurité du vol, de confort, etc). On indique aussi l'influence du choix des commandes sur l'efficacité du contrôle partiel en ce qui concerne la stabilité dynamique.

REFERINŢE

1. T. HACKER, *Stabilitatea avionului cu un număr redus de grade de libertate*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **10**, *3* (1959).
2. И. Г. МАЛКИН, *Теория устойчивости движения*, Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит. Москва-Ленинград, 1952.

CU PRIVIRE LA ERORILE DE ÎNREGISTRARE MAGNETICĂ A PARAMETRILOR CU VARIAȚIE LENTĂ

DE

V. CLEJA [1]) și D. PAVELESCU

Presupunem cunoscute din lucrări anterioare, avantajele tehnico-economice, pe care le oferă înregistrarea pe suport magnetic [3].

În diferite domenii, ca construcția de mașini, aeromecanică, geofizică etc., se impune tot mai mult necesitatea cunoașterii variației simultane a unui număr mare de parametri diferiți, sau variabili în puncte diferite.

Cu toate că aplicarea înregistrării magnetice conduce în aceste cazuri, la o serie de simplificări radicale, atît privind înregistrarea cît și reproducerea, totuși în special prin faptul că trebuie înregistrate în general fenomene cu variație lentă (0—10 Hz), performanțele sistemelor de înregistrare-redare sînt limitate de erorile introduse de înregistrarea magnetică [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Deși domeniul este deosebit de modern și interesant, în literatura de specialitate nu s-a acordat atenție suficientă acestor aspecte, publicîndu-se sisteme de înregistrare-redare, studiate pentru diferite scopuri, alegerea fiind făcută însă în mod preferențial.

În lucrarea de față ne-am propus să umplem acest gol existent în publicațiile de specialitate, prezentînd o serie de considerații teoretice în legătură cu erorile înregistrării magnetice [2]), metodele de eliminare și de compensare, pentru ca să fie bine precizată posibilitatea de limitare a erorilor specifice înregistrării magnetice și pentru ca alegerea sistemului de înregistrare magnetică să fie științific justificată.

---

[1]) Institutul de cercetări electrotehnice.

[2]) Este vorba de cazul variaţiilor lente (0—10 Hz).

I. ERORILE SPECIFICE ÎNREGISTRĂRII MAGNETICE

1. După cum se ştie, tensiunea la ieşirea capului de redare este de forma

$$e = K \frac{dB}{dt}, \tag{1}$$

sau în cazul oscilaţiilor staţionare

$$e = K\omega B \qquad (2)^{1)}$$

(B — inducţia remanentă a purtătorului magnetic; ω — pulsaţia oscilaţiei înregistrate; K — coeficient de proporţionalitate, specific capului magnetic).

De aici rezultă că componenta continuă a semnalului înregistrat nu poate fi reprodusă de capul magnetic, iar frecvenţele infrajoase vor fi reproduse la un nivel foarte coborît, comparabil cu nivelul zgomotelor.

2. Tehnologia actuală de fabricaţie a benzilor magnetice nu poate asigura o uniformitate absolută a sensibilităţii stratului magnetic nici pe lungimea şi nici pe lăţimea benzii.

În urma cercetării variaţiei sensibilităţii, la un mare număr de tipuri în diferite condiţii [1], s-a ajuns la următoarele concluzii mai importante :

a) Toate tipurile de bandă feromagnetică întrebuinţate la înregistrare au o neuniformitate a sensibilităţii cuprinsă între limitele 2...20%.

b) În spectrul acestei neuniformităţi sînt conţinute frecvenţe corespunzătoare unor perioade de la cîţiva centimetri la cîteva zeci de metri lungime de bandă magnetică (ceea ce corespunde, la vitezele uzuale unor frecvenţe între $10^{-3} - 10$ Hz).

c) Variaţia sensibilităţii nu depinde de nivelul sau frecvenţa semnalului înregistrat (pînă la circa 10 KHz).

3. Frecvenţa semnalului reprodus este proporţională cu viteza de deplasare a purtătorului magnetic. De aici şi din (2) rezultă în mod necesar că nivelul semnalului reprodus este şi el proporţional cu viteza de deplasare. Sistemele mecanice de acţionare a benzii asigură, fără măsuri speciale, o stabilitate a vitezei cuprinsă între 0,1% (magnetofoane stabile) şi 2% (magnetofoane portative).

Variaţia vitezei purtătorului magnetic influenţează asupra nivelului de ieşire datorită şi efectului de discriminator de frecvenţă care poate apare în regiunea crescătoare sau căzătoare a caracteristicii de frecvenţă.

4. În urma eforturilor mecanice au loc deformaţii mecanice ale benzii magnetice, atît cu caracter elastic cît şi cu caracter permanent.

În literatura tehnică acest aspect al distorsiunilor nu este reflectat. Se poate admite că efectul lor este analog cu efectul variaţiei de viteză.

5. Datorită diferitelor cauze, dintre care cea mai importantă o constituie neuniformitatea grosimii benzii, are loc o variaţie a distanţei între

---

1) Relaţia (2) este valabilă pînă la o anumită frecvenţă, mai sus de care intervin alţi factori ca : efectul de fantă, demagnetizarea benzii etc.

purtătorul magnetic și fanta capului magnetic. Aceasta duce la micșorarea nivelului semnalului redat

$$A \approx 54{,}6 \frac{d}{\lambda}, \qquad (3)$$

unde : A reprezintă micșorarea nivelului în decibeli ; d — distanța între purtător și fantă ; λ — lungimea de undă a oscilației înregistrate.

Variația nivelului de ieșire ce are loc în urma acestui fenomen se deosebește de cea datorită neuniformității sensibilității prin faptul că mărimea ei este funcție de frecvența semnalului.

6. Semnalele perturbatoare generate de sursele de erori enumerate mai sus, se caracterizează prin faptul că modificarea semnalului util de către ele, are loc nu prin însumarea la acest semnal, ci prin înmulțirea cu el.

II. METODE DE ELIMINARE A ERORILOR

1. Efectul de diferențiere (1) se compensează în tehnica curentă a înregistrării magnetice prin alegerea caracteristicii de frecvență a amplificatorilor de înregistrare-redare, astfel încît o dată cu amplificarea să se realizeze și integrarea semnalului util.

Această metodă este realizabilă pentru frecvențe de la 10 ... 20 Hz în sus. Pentru frecvențele mai joase, care constituie obiectul preocupărilor lucrării de față, această metodă devine practic nerealizabilă.

2. *Transformarea spectrului de frecvență.* Dacă un semnal avînd spectrul cuprins între $F_1 - F_2$ și înregistrat la viteza V de deplasare a benzii, este reprodus la viteza $V' = n \cdot V$ atunci spectrul semnalului reprodus va fi cuprins între frecvențele $n \cdot F_1 - n \cdot F_2$.

Metoda are dezavantaje care o fac aplicabilă numai în cazuri cu totul speciale. Aceste dezavantaje sînt imposibilitatea teoretică a reproducerii componentei continue și complicarea sistemului de acționare mecanică.

3. *Modulația.* Spectrul de frecvență poate fi transformat și în același timp deplasat pe scara frecvențelor prin aplicarea unui sistem de modulație. Aceasta dă posibilitatea reproducerii variațiilor oricît de lente, inclusiv componenta continuă.

Vom analiza pe scurt, calitativ, următoarele tipuri de modulație, din punctul de vedere al stabilității la erorile specifice înregistrării magnetice :

— modulația de amplitudine (simplă și fără purtătoare) ;
— modulația de frecvență sau fază ;
— modulația de impulsuri în amplitudine, frecvență, poziție și cod [1]).

3.1. *Modulația de amplitudine.* Fie $S = S(t)$ semnalul util, avînd spectrul cuprins în limitele 0 ... F Hz, semnal ce urmează a fi înregistrat și reprodus.

---

[1]) În cazul înregistrării magnetice, modulația de impulsuri în lărgime se transformă implicit în modulație de impulsuri în poziție, în conformitate cu formula (1).

Fie de asemenea $Z = Z(x)$, sensibilitatea benzii, funcție de coordonata punctului în care se consideră sensibilitatea. Deoarece în timpul procesului de înregistrare-redare, banda se deplasează cu viteza V, putem considera $x = V \cdot t$ și deci $Z = Z(t)$. Pe de altă parte sensibilitatea avînd o valoare medie mai mare decît 0 putem nota

$$Z = Z_0 + Z(t) \tag{4}$$

în care $Z_0 = \text{const.}$, reprezintă valoarea medie a sensibilității, iar $Z(t)$ variația în jurul valorii medii.

Spectrul funcției Z este situat în aceleași limite cu spectrul funcției S.

Notăm cu

$$\varepsilon = \frac{Z(t)}{Z_0}, \tag{5}$$

neuniformitatea relativă a sensibilității benzii.

Fie $U_0 \sin \omega_0 t$ oscilația purtătoare ce urmează a fi modulată cu semnalul util S; $(U_0 \gg |S_{\max}|)$; după modulație semnalul fiind de forma $[U_0 + S(t)] \sin \omega_0 t$, are spectrul cuprins în limitele $(f_0 - F) \ldots (f_0 + F)$.

La ieșirea din capul magnetic de redare, tensiunea va fi

$$u_e = KZ\,[U_0 + S(t)] \sin(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

în care K și φ sînt constante proprii aparaturii de înregistrare-redare.

După detecție vom avea

$$u_d = K_1 Z\,[U_0 + S(t)] \tag{7}$$

și ținînd seama de (4)

$$u_d = K_1 Z_0 U_0 + K_1 Z(t) U_0 + K_1 Z_0 S(t) + K_1 Z(t) S(t). \tag{7'}$$

În (7') numai $LK_1 Z_0 S(t)$ reproduce întocmai semnalul util; ceilalți termeni îl distorsionează. Observăm totuși că primul termen fiind constant, poate fi eliminat ușor. Rămîne așadar ca semnal reprodus

$$u_r = K_1 Z_0 S(t) + K_1 Z(t) U_0 + K_1 Z(t) S(t). \tag{8}$$

Eroarea relativă de reproducere va fi

$$e_r = \frac{K_1 Z(t) U_0 + K_1 Z(t) S(t)}{K_1 Z_0 S(t)} = \frac{Z(t)}{Z_0} \cdot \left[1 + \frac{U_0}{S(t)}\right] \tag{9}$$

sau avînd în vedere (5)

$$e_r = \varepsilon \left[1 + \frac{U_0}{S(t)}\right]. \tag{9'}$$

De aici rezultă că eroarea relativă la redare va fi de multe ori mai mare decît neuniformitatea relativă a sensibilității benzii și nu poate fi mai mică decît 2ε deoarece $S(t)$ nu poate fi mai mare decît U_0. Tot din (9') rezultă de exemplu că în cazul în care dinamica semnalului cuprinde numai 20 dB, eroarea relativă va fi

$$e_r = 11\,\varepsilon\,.$$

Rezultatul (9′) reflectă faptul că în cazul modulației de amplitudine simplă, în situația în care semnalul util tinde către zero, pe bandă se înregistrează purtătoarea, a cărei amplitudine variază totuși datorită neuniformității sensibilității. Variațiile de amplitudine ale purtătoarei sînt mult mai mari decît semnalul util. Prin urmare simpla modulație de amplitudine nu este corespunzătoare.

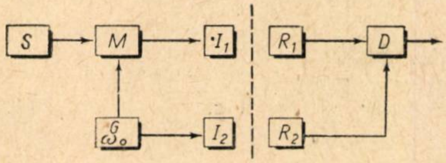


Fig. 1

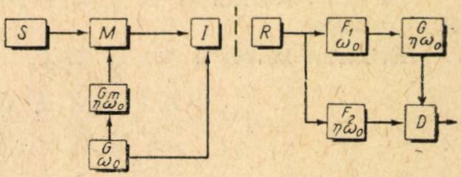


Fig. 2

3.2. *Modulația de amplitudine fără purtătoare.* Din cele arătate mai sus rezultă că existența purtătoarei în cazul absenței semnalului, generează erori foarte mari. Urmează în mod logic că eliminarea purtătoarei trebuie să ducă la îmbunătățirea performanțelor. Pentru a putea detecta însă oscilațiile reproduse, fără distorsiuni, în absența purtătoarei este necesar ca să conservăm faza purtătoarei. Aceasta se poate realiza prin înregistrarea separată a purtătoarei, fie pe o pistă foarte alăturată, fie pe aceeași pistă, însă cu frecvența modificată, așa cum se arată în schemele bloc din figurile 1 și 2.

În aceste figuri s-au făcut următoarele notații : S — sursa de semnal ; G — generatorul undei purtătoare ; G_m — generator multiplicator de frecvență ; M — modulator cu eliminarea purtătoarei ; I — sistem de înregistrare ; R — sistem de reproducere ; D — detector sincron ; F — filtre.

Păstrînd notațiile precedente, semnalul modulat după eliminarea purtătoarei va fi de forma

$$S(t)\, U_0 \sin \omega_0 t.$$

La ieșirea din capul magnetic de redare vom avea

$$u_e = K \cdot Z(t)\, S(t)\, U_0 \sin \omega_0 t. \qquad (10)$$

În cazul în care purtătoarea înregistrată separat este și ea afectată de variațiile sensibilității purtătorului magnetic, ea va avea forma

$$K_1 Z(t)\, U_0 \sin \omega_0 t.$$

Detectorul sincron realizează înmulțirea purtătoarei cu semnalul modulat și la ieșirea lui vom avea

$$u_d = K K_1 Z^2 S\, U_0^2 \sin^2 \omega_0 t \qquad (11)$$

și după filtrarea componentelor de frecvență ridicată, semnalul reprodus va fi

$$u_r = K_0\, U_0^2 Z^2(t)\, S(t) \qquad (12)$$

și ținînd seama de (4)

$$u_r = K_0\, U_0^2 Z^2(t)\, S(t) = K\, U_0^2 Z_0^2\, S(t) + 2\, K U_0^2 Z_0 Z(t)\, S(t) + \\ + K U_0^2 Z^2(t)\, S(t) \approx K\, U_0^2 Z_0^2\, S(t) + 2\, K\, U_0^2 Z_0\, Z(t)\, S(t) \qquad (12')$$

(s-a considerat $Z(t) \ll Z_0$).

În (12′) termenul $K\, U_0^2 Z_0^2 S(t)$ reprezintă semnalul util iar celălalt — eroarea.

Eroarea relativă va fi deci

$$e_r = \frac{2\, K\, U_0^2 Z_0 Z(T)\, S(t)}{K\, U_0^2 Z_0^2\, S(t)} = 2 \cdot \frac{Z(t)}{Z_0} = 2\, \varepsilon. \qquad (13)$$

În cazul în care purtătoarea înregistrată separat nu este afectată de variațiile sensibilității benzii (ceea ce se poate realiza cu ajutorul unui limitator sau folosind purtătoarea reprodusă numai la sincronizarea unui generator stabilizat în amplitudine) eroarea relativă va fi, așa cum se poate deduce în mod analog cu (13)

$$e_r = \varepsilon. \qquad (14)$$

Rezultă că modulația de amplitudine fără purtătoare este aplicabilă, dar semnalul va fi reprodus cu o eroare egală cu neuniformitatea relativă a sensibilității benzii [1]).

3.3. *Modulația de frecvență sau fază.* Aceste tipuri de modulație permit limitarea în amplitudine a semnalului reprodus și prin urmare elimină total influența variațiilor de nivel perturbatoare. În schimb, aceste sisteme sînt foarte sensibile la variația frecvenței semnalului, variație produsă de neuniformitatea vitezei de deplasare a benzii magnetice.

Într-adevăr, fie f_0 — frecvența centrală, $\Delta f_0\, S(t)$ — deviația de frecvență (proporțională cu valoarea semnalului $S(t)$), V_0 — viteza medie de deplasare a benzii, $V(t)$ — variația vitezei de deplasare.

Notăm variația relativă a vitezei de deplasare cu

$$\varepsilon' = \frac{V(t)}{V_0}. \qquad (15)$$

Dacă frecvența înregistrată la viteza V_0 este f_0, atunci variației de viteză $V(t)$ îi corespunde o variație a frecvenței Δf, astfel încît

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{V(t)}{V_0} = \varepsilon'. \qquad (15')$$

În cazul modulației de frecvență, frecvența instantanee a semnalului înregistrat va fi

$$f = f_0 + \Delta f_0\, S(t). \qquad (16)$$

---

[1]) Pentru simplificarea expunerii s-a omis intenționat eroarea datorită variației de viteză și a distanței dintre fantă și purtătorul magnetic. Este evident că această eroare se compune cu variația sensibilității și duce la mărirea lui ε în (9′), (13) și (14).

Frecvența instantanee a semnalului reprodus va fi în urma variației de viteză,

$$f_r \approx f_0 + \Delta f_0 S(t) + \Delta f \qquad (16')\,^{1)}$$

La ieșirea din discriminatorul de frecvență va fi prezent un semnal

$$u_d = K\,(\Delta f_0\, S(t) + \Delta f), \qquad (17)$$

unde K este constanta discriminatorului.

Primul termen reprezintă semnalul util, cel de-al doilea semnalul de eroare.

Eroarea relativă va fi, ținînd seama de (15'),

$$e_r = \frac{\Delta f}{\Delta f_0 S(t)} = \frac{\varepsilon'}{\dfrac{\Delta f_0}{f_0}\, S(t)}. \qquad (18)$$

Numitorul ultimului termen reprezintă adîncimea modulației. Se vede din (18) că pentru semnale mici, eroarea crește enorm, în mod analog cu situația arătată la modulația în amplitudine simplă. Pentru a limita eroarea este necesară limitarea dinamicei semnalului util. Se poate vedea ușor că dacă admitem ca realizabilă o deviație maximă a frecvenței de 30%, o deviație relativă a vitezei de deplasare de 0,5% și o eroare la reproducere de 5%, dinamica semnalului trebuie să fie de maximum 10 dB.

Aceste considerente fac modulația de frecvență la fel de necorespunzătoare ca și modulația de amplitudine simplă.

Avînd în vedere aceleași considerente, aplicate la modulația de fază, se poate afirma că aceasta din urmă este și ea la fel de necorespunzătoare.

3.4. *Modulația de impulsuri.* Fără a mai recurge la o serie de relații matematice ca în cazurile de mai sus, se poate deduce prin analogie că modulația de impulsuri în amplitudine este sensibilă la aceleași perturbații ca și modulația de amplitudine simplă. De asemenea, modulația de impulsuri în frecvență și poziție, nu are nici un avantaj în plus, față de modulația de frecvență sau fază.

Rezultă că singurul tip de modulație, care poate reduce eroarea la valori oricît de mici, pare a fi modulația de impulsuri în cod. Acest tip de modulație, cere însă, pe de o parte, o aparatură mult mai complicată, iar pe de altă parte, micșorează mult numărul de canale, ce poate fi înregistrat pe un singur purtător. Analiza posibilităților modulației de impulsuri în cod, va face însă obiectul unei lucrări separate.

III. METODE DE COMPENSARE A ERORILOR

În afară de ultimul, nici unul din sistemele de modulație enumerate mai sus, nu poate asigura o reproducere cu o eroare mai mică, decît neuni-

---

1) Egalitatea nu este riguroasă deoarece în variația perturbatoare Δf, este neglijată deviația frecvenței sub acțiunea semnalului util.

formitatea relativă a sensibilităţii purtătorului magnetic [1]). Mai mult, singurul sistem de modulaţie care menţine eroarea de reproducere egală cu neuniformitatea relativă a sensibilităţii benzii (modulaţia de amplitudine fără purtătoare), necesită un canal separat pentru conservarea fazei purtătoare.

Se pune întrebarea dacă folosirea unui canal suplimentar nu poate reduce eroarea sub această valoare, sau eliminarea ei completă. Folosirea unui canal suplimentar, fie decalat în spaţiu pe o pistă foarte alăturată, fie decalat în frecvenţă, se bazează pe faptul că o purtătoare înregistrată pe acest canal va fi supusă aceloraşi perturbaţii ca şi semnalul util. Semnalul corespunzător acestor perturbaţii poate fi folosit la anularea perturbaţiilor semnalului util.

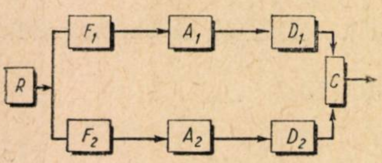


Fig. 3

Compensarea erorii se poate face, în general, în trei moduri diferite :

1. Primul mod de folosire al semnalului corector, constă în suprapunerea lui în contrafază cu semnalul ce vine din canalul util (fig. 3).

În figura 3 se menţin notaţiile anterioare : A — amplificatori; C — dispozitiv ce realizează scăderea semnalului compensator din semnalul distorsionat.

Semnalul distorsionat la ieşirea din detector va fi

$$u_1 = K\,Z(t)\,[U_0 + S(t)], \tag{19}$$

sau

$$u_1 = K Z_0 U_0 + K Z_0 S(t) + K Z(t) U_0 + K Z(t) S(t). \tag{19'}$$

Semnalul corector, la ieşirea din detectorul respectiv, va fi

$$u_2 = K\,Z(t)\,U_0, \tag{20}$$

sau

$$u_2 = K Z_0 U_0 + K Z(t) U_0. \tag{20'}$$

La ieşirea din dispozitivul de scădere

$$u = u_1 - u_2 = K Z_0 S(t) + K Z(t) S(t). \tag{21}$$

Primul termen reprezintă semnalul util iar al doilea termen — eroarea. Eroarea relativă va fi

$$e_r = \frac{K Z(t) S(t)}{K Z_0 S(t)} = \frac{Z(t)}{Z_0} = \varepsilon. \tag{22}$$

De aici rezultă că această metodă de compensare, relativ simplă, dă aceleaşi rezultate cu modulaţia de amplitudine fără purtătoare.

---

[1]) La care se adaugă eroarea produsă de contactul neuniform cu capul magnetic şi de variaţia vitezei de deplasare.

2. Alt mod de compensare, constă în acționarea cu semnal de compensare asupra parametrilor unui amplificator, astfel încît coeficientul de amplificare să scadă cînd nivelul semnalului crește și invers (fig. 4). S-a notat cu F_1 și F_2 filtrele pentru canalul util și respectiv canalul de compensare; A_1 — amplificator cu amplificare reglabilă; A_2 — amplificatorul canalului de compensare; D_1, D_2 — detectori.

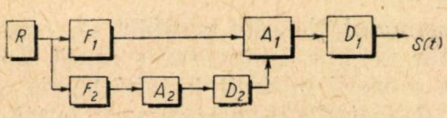


Fig. 4

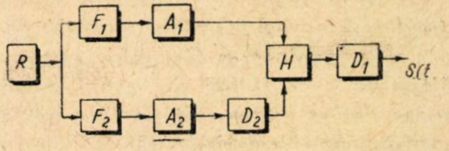


Fig. 5

Din teoria reglajului automat se știe că pentru a avea o compensare totală, este necesar ca să existe o dependență hiperbolică între coeficientul de amlpificare și tensiunea de reglaj. Această metodă poate da teoretic o compensare totală a erorii. Ea implică însă dificultăți tehnice, legate de realizarea unui amplificator cu caracteristica necesară.

În mod analog semnalul corector poate fi utilizat la reglarea turației motorului care efectuează deplasarea benzii magnetice, în cazul folosirii modulației de frecvență, ceea ce este legat, de asemenea, de mari dificultăți tehnice.

3. În sfîrșit, un alt mod de compensare [2], constă în raportarea semnalului distorsionat la semnalul corector (fig. 5).

În figura 5, H reprezintă blocul care realizează tensiunea de ieșire porporțională cu raportul tensiunilor de intrare.

La ieșirea din A_1, A_2, D_2, H, vom avea respectiv

$$u_1 = K_1 Z(t) [U_0 + S(t)] \sin \omega_0 t, \tag{23}$$

$$u_2 = K_2 Z(t) U_0 \sin \omega_0 t, \tag{24}$$

$$e = K_3 Z(t) U_0, \tag{25}$$

$$u_e = \frac{u_1}{e} = K_4 [U_0 + S(t)] \sin \omega_0 t, \tag{26}$$

Iar la ieșirea din D_1, după compensarea componentei continue vom avea:

$$E = K_5 S(t), \tag{26'}$$

adică după suprimarea completă a erorii.

Această ultimă metodă poate fi realizată cu mijloace relativ simple. O machetă realizată [2] a dat la ieșire o eroare de 0,57%, în timp ce neuniformitatea relativă a sensibilității benzii a fost de 10%.

IV. CONCLUZII

Din cele de mai sus desprindem următoarele:

1. Metodele comune de modulație (amplitudine, frecvență, fază, impulsuri-amplitudine, frecvență, poziție) nu numai că nu elimină per-

turbaţiile specifice înregistrării magnetice a parametrilor cu variaţie lentă, dar le amplifică într-o măsură care face ca aceste metode să necesite măsuri speciale de compensare, fără de care rezultatele sînt necorespunzătoare.

2. Modulaţia de amplitudine fără purtătoare, nu amplifică aceste perturbaţii, dar cere un canal suplimentar pentru conservarea fazei purtătoarei.

Modulaţia de impulsuri în cod, pare că este singura care poate asigura reducerea teoretic nelimitată a erorii.

3. Aplicarea tipurilor comune de modulaţie este posibilă cu condiţia de a se folosi un canal suplimentar pentru compensarea erorii. În acest caz se poate obţine fie o menţinere a erorii în limitele iniţiale, fie o compensare teoretic totală a ei, în funcţie de metoda de compensare folosită.

Primită la redacţie la 14 iulie 1960.

О ПОГРЕШНОСТЯХ МАГНИТНОЙ ЗАПИСИ МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ

РЕЗЮМЕ

Технико-экономические преимущества магнитной записи различных неэлектрических величин предполагаются известными. Специфические погрешности магнитной записи медленных изменений недостаточно освещены в специальной литературе. Как вытекает из предыдущих работ, эти погрешности значительно ограничивают применение магнитной записи во многих областях. По этим соображениям авторы поставили перед собой задачу описать характер помех присущих магнитной записи функций с медленным изменением (0÷10 гц). В работе рассматривается чувствительность известных систем модуляции к этим помехам. Дается, в общих чертах, описание нескольких методов компенсации погрешностей от этих помех.

Показывается, что единственной системой модуляций, нечувствительной к этим помехам, является кодово-импульсная модуляция. Остальные системы (амплитудная, частотная, фазовая, амплитудно-импульсная, временно-частотная) вводят очень большие погрешности, если не предусматривается соответствующая система компенсации.

ON THE ERRORS IN THE MAGNETIC TAPE RECORDINGS OF PARAMETERS WITH SLOW VARIATIONS

ABSTRACT

The technical and economical advantages of the tape recording of various non-electric quantities are known but the specific errors resulting from the recording of quantities with slow variations (0—10 C/s) are not

sufficiently treated in the speciality literature. As it results from previous papers, such errors considerably restrict the application of magnetic recordings. In view of these considerations, the authors have tried to describe the character of perturbations specific to the tape recording of parameters with slow variations (0—10 C/s). This paper analyses the sensitiveness of the known modulation systems to such perturbations. Several techniques for compensating the errors caused by these perturbations are described.

It is shown that the only modulation system which is not sensible to perturbations is the code impulse modulation. Other systems (amplitude, frequency, phase, amplitude impulses, frequency and time impulses) result in large errors, unless an adequate compensation system is provided.

BIBLIOGRAFIE

1. AZARCH A. H., *Issledovanie neravnomernosti ciuvstvitelnosti magnitoi lenti.* Lucrare depusă la Secţia de cercetări a Institutului electrotehnic de comunicaţii, Moscova, 1953.
2. CLEJA V., *Tocinaia magnitnaia zapisi funcţii.* Lucrare depusă la Secţia de cercetări a Institutului electronic de comunicaţii, Moscova, 1954.
3. PAVELESCU D., PANTELIMON TH., *Asupra înregistrării pe banda magnetică a unor mărimi mecanice cu variaţii lente.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
4. — *Canal — fix — pentru înregistrare-redare pe suport magnetic a fenomenelor cu variaţii lente.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1* (1958).
5. — *Înregistrare magnetică simultană a două mărimi mecanice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *2* (1959).
6. SCOTT H. D., *A Multiple Channel D. C. Recording System.* Electronic Engineering, June (1959).

PROBLEME ALE CERCETĂRII EXPERIMENTALE DE AERODINAMICA VITEZELOR MARI ÎN TUBUL DE ŞOC

DE

L. DUMITRESCU, I. JAKAB, E. PROCOPOVICI şi A. ZAHARESCU

INTRODUCERE

În cadrul cercetărilor de aerodinamica vitezelor mari, la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia" al Academiei R.P.R. se desfăşoară — începînd din anul 1956 — un program larg de lucrări în legătură cu realizarea şi exploatarea tuburilor de şoc.

Prima etapă a acestui program a avut drept obiectiv realizarea unui tub de şoc pentru cercetări de aerodinamică la viteze transonice şi supersonice, precum şi echiparea sa cu aparatura de măsură necesară.

Rezultatele acestor cercetări se prezintă în această lucrare de sinteză, precum şi în cîteva articole care tratează mai pe larg cîte o problemă din întregul ansamblu [1], [2], [3], [4], [5].

Ideea fundamentală de la care s-a pornit a fost de a folosi tubul de şoc pentru producerea unor scurgeri cvasi-staţionare de aer, cu viteză mare, înlocuind astfel sufleriile aerodinamice obişnuite cu acţionare continuă sau intermitentă, a căror construcţie cere investiţii considerabile. De aici au rezultat cerinţele impuse construcţiei tubului de şoc, precum şi aparaturii pentru măsurarea parametrilor aerodinamici care interesează.

1. TUBUL DE ŞOC

Principiul de funcţionare al tuburilor de şoc este cunoscut [6]; vom aminti doar că, prin producerea unei unde de şoc care se propagă de-a lungul tubului, iau naştere în spatele acesteia, două regimuri de scurgere cvasi-staţionară, cu numere Mach diferite, M şi M_2, care pot lua, în funcţie de raportul iniţial de presiuni, orice valoare, de la zero pînă la viteze supersonice. Alegînd convenabil lungimile relative ale elementelor tubului de şoc: camera de presiune, cea de vid şi poziţia secţiunii de experienţe, se poate obţine o durată utilă de funcţionare a tubului optimă; studiul acestei probleme a fost efectuat în prealabil [1], iar rezultatele sînt concretizate în construcţia tubului de şoc I.M.A. [2]. Acesta are o lungime totală de 11 m, fiind constituit din 12 tronsoane de 840 mm fiecare, şi două de 450 mm, independente. Poziţia lor relativă poate fi modificată după voie pentru a se realiza orice configuraţie a tubului. Dimensiunile secţiunii sale sînt de 300 × 190 mm, ceea ce permite instalarea unor machete suficient de

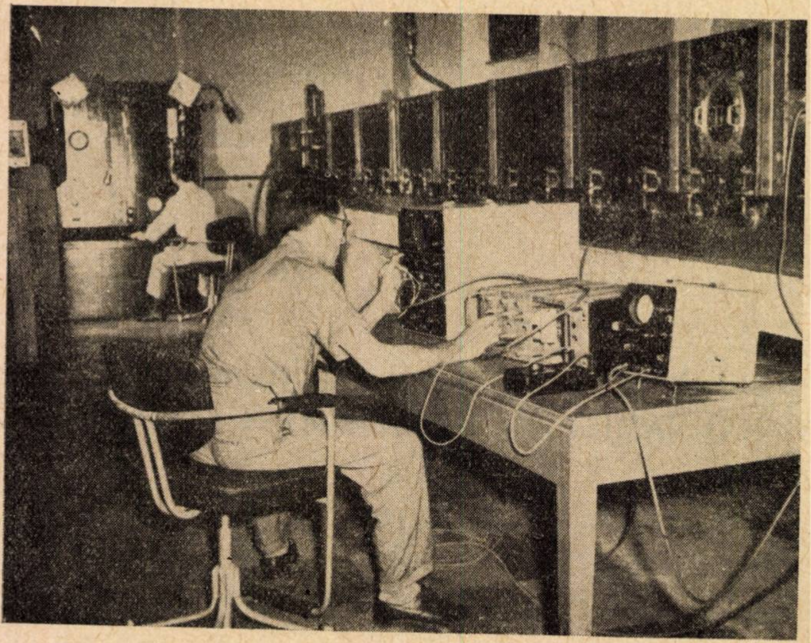


Fig. 1

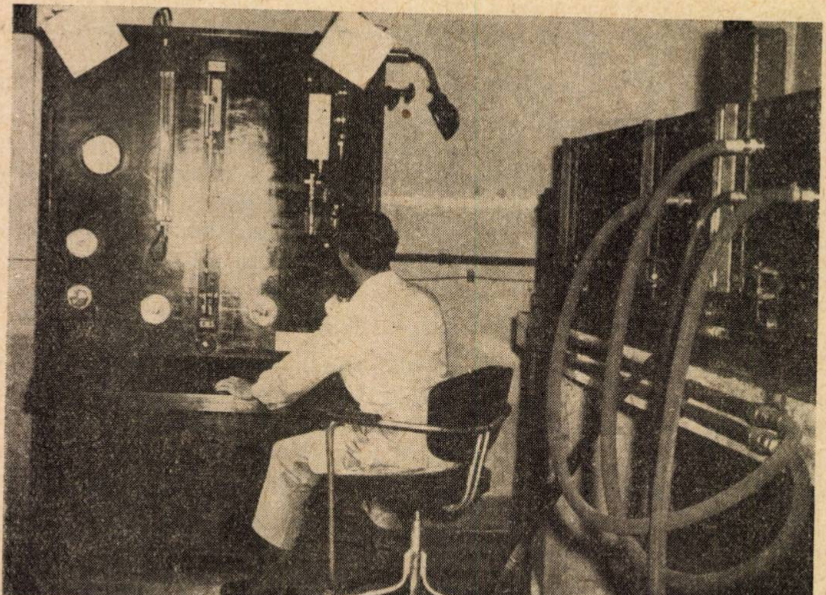


Fig. 2

mari pentru a se putea face studii utile, asupra acestora. În figura 1 este reprezentat tubul de şoc I.M.A., — în figura 2 — panoul de comandă al acestuia, iar în figura 3 — un tronson al tubului.

Diferitele particularităţi constructive ale tubului de şoc I.M.A. s-au dovedit foarte utile în cursul exploatării sale, scurtînd intervalele de timp dintre experienţe şi uşurînd manevrarea tubului.

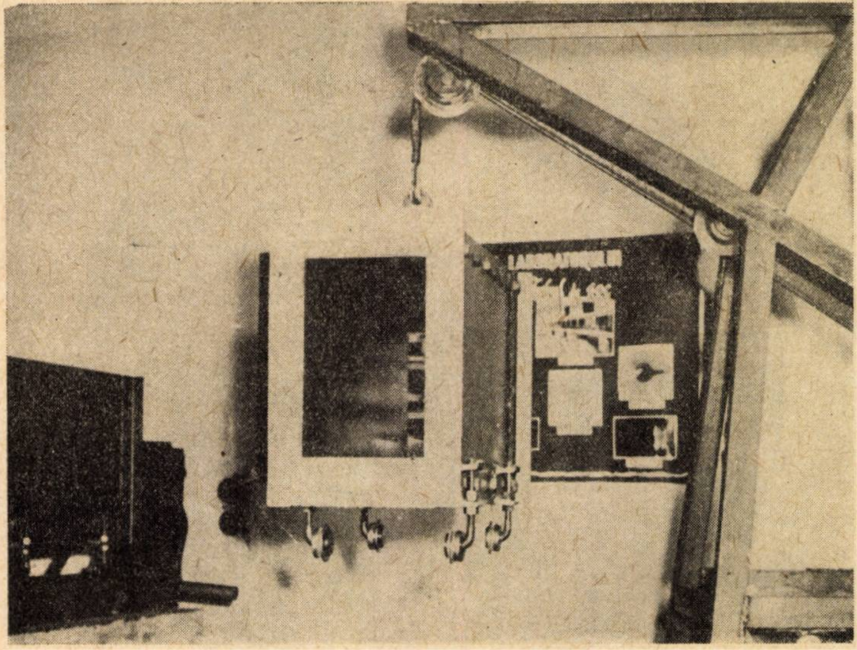


Fig. 3

Instalaţiile anexe cu care este dotat tubul de şoc (o pompă de vid de 1,7 kW şi vid rezidual 0,3 mm col. Hg şi un compresor de aer de 0,7 kW, dînd 7 atmosfere) permit realizarea unui vid maxim de 2 mm col. Hg şi a unei presiuni maxime de 6 atmosfere, ceea ce corespunde unor numere Mach maxime teoretice $M = 1{,}45$ şi $M_2 = 5{,}37$. Astfel, domeniul de utilizare al tubului de şoc, pentru cercetări de aerodinamică, se dovedeşte a fi foarte larg. Ca exemplu, se prezintă în figura 4, vizualizarea prin metoda umbrelor, a scurgerii supersonice cu $M_2 = 3$, în jurul unui con de 60° deschidere.

2. FOLOSIREA TUBULUI DE ŞOC PENTRU CERCETĂRI CANTITATIVE DE AERODINAMICA VITEZELOR MARI

Existenţa regimului de scurgere staţionar în tubul de şoc este pusă în evidenţă prin experienţele de vizualizare; pentru ca această scurgere să poată fi folosită, trebuie însă să se elaboreze metode adecvate de măsurare a parametrilor aerodinamici care interesează. În legătură cu aceasta, problema principală care se pune este aceea a duratei scurgerii permanente. Tubul de şoc I.M.A. a fost conceput astfel încît să asigure o durată de funcţionare medie de

5...10 milisecunde. Calculelele efectuate arată că, în configuraţia obişnuită de lucru a tubului, durata de funcţionare, în ambele regimuri de scurgere, variază în funcţie de numărul Mach, de la 10 milisecunde — pentru numere Mach mici (0...0,5) — pînă la 1,7 milisecunde — pentru numerele Mach maxime (4,5...5). Din punct de vedere aerodinamic, ceea ce contează nu este atît durata propriu-zisă a regimului, cît evaluarea acestei durate sub forma numărului de lungimi de model pe care le parcurg particulele de aer. Astfel privind problema rezultă din calcule că, pentru o lungime a modelului de 100 mm, se dispune de durata de funcţionare corespunzînd la un număr de lungimi de model variind în limite mai restrînse, de la 20 la 30, atunci cînd durata de funcţionare variază între valorile minime şi maxime. În aceste condiţii, un studiu calitativ al fenomenelor aerodinamice [7] arată că durata de funcţionare disponibilă este suficientă pentru ca regimul de scurgere de pe model să fie cel staţionar (cu excepţia, poate, a transferului de căldură, dacă nu se iau precauţii speciale).

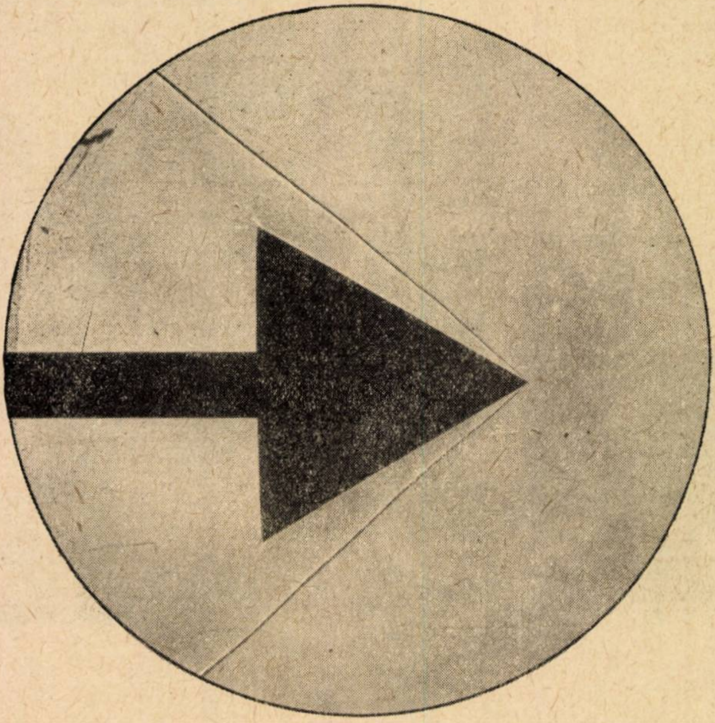


Fig. 4

Pentru utilizarea tubului de şoc la cercetări cantitative, este necesar de aceea să se elaboreze metode de măsură a parametrilor aerodinamici, cu un timp de răspuns care să reprezinte o fracţiune din durata minimă de funcţionare amintită mai sus. Remarcăm pe de altă parte, că există anumite intervale de timp în care scurgerea aerului pe model este nestaţionară şi că studiul acestor fenomene prezintă de asemenea importanţă pentru aerodinamică. Ca urmare, este absolut necesar să se reducă la minimum posibil timpul de răspuns al aparatelor de măsură, pentru ca acestea să poată urmări variaţiile parametrilor aerodinamici în asemenea regimuri nestaţionare.

3. APARATURA DE MĂSURĂ PENTRU TUBUL DE ŞOC

Pentru echiparea completă a tubului de şoc, în scopul efectuării unei varietăţi cît mai mari de cercetări experimentale, este necesar să se poată măsura un număr mare de parametri fizici.

Această chestiune preocupă în prezent un cerc larg de cercetători din diverse ţări, iar bibliografia în legătură cu aparatura de măsură elaborată în mod special pentru tuburile de şoc, este bogată [8], [9], [10], [11], [12], [13].

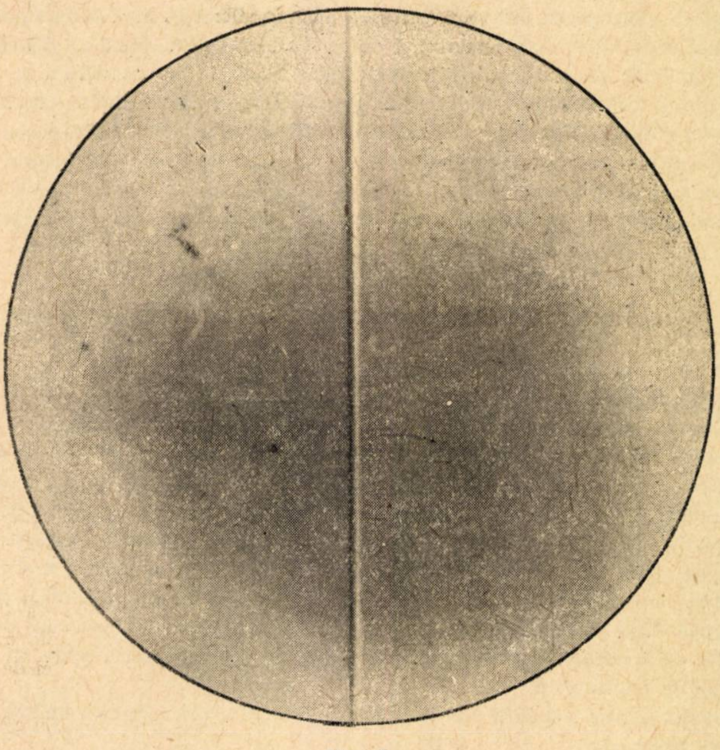


Fig. 5

În cadrul programului de lucrări legate de tubul de şoc I.M.A. s-au stabilit instalaţiile de măsură şi comandă necesare, a căror realizare să permită abordarea unui cîmp suficient de larg de probleme de aerodinamică cu ajutorul tubului de şoc existent. Aceste instalaţii sînt:

a) Aparatură pentru măsurarea parametrilor statici iniţiali ai aerului din tubul de şoc.

b) Releu de comandă cu întîrziere reglabilă, pentru declanşarea funcţionării aparatelor de măsură şi a dispozitivelor de iluminare cu scîntei pentru vizualizări.

c) Instalaţie pentru măsurarea vitezei de propagare a undei de şoc de-a lungul tubului.

d) Instalaţie pentru măsurarea distribuţiei presiunilor aerodinamice în tubul de şoc şi pe modele.

e) Balanţă aerodinamică — pentru măsurarea forţelor aerodinamice globale pe modele.

f) Instalaţie pentru măsurarea transferului de căldură la suprafaţa modelelor.

În etapa actuală a lucrărilor, studiul ultimelor două probleme nu a fost încă luat în considerare. Totuși, considerăm că echipamentul existent azi oferă posibilitatea efectuării unor cercetări destul de importante și variate, cu ajutorul tubului de șoc; lucrările pentru completarea și perfecționarea aparaturii de măsură vor continua și în viitor.

Măsurarea parametrilor inițiali ai aerului este o problemă tehnică curentă și a fost rezolvată prin dispunerea pe panoul de comandă al tubului de șoc (fig. 2) a unui număr de manometre și vacuummetre corespunzătoare. S-a acordat în special atenție preciziei de măsurare a vidului, care determină raportul de presiuni inițial din tubul de șoc, întrucît acest raport definește complet regimul de funcționare ulterioară a tubului.

Releul de comandă cu întîrziere variabilă a fost realizat în mod foarte simplu, cu ajutorul unei linii de întîrziere aerodinamice, formate dintr-un tub de lungime reglabilă, legat în derivație la tubul de șoc, și prin care se propagă o undă de șoc secundară care închide un contact electric, la capătul liniei de întîrziere [2]. Sistemul a dat completă satisfacție în utilizare, permițînd obținerea unor întîrzieri de 300—20 000 microsecunde, cu o precizie de ± 10 µs. Cu ajutorul acestui releu s-a putut realiza fotografia din figura 5, care reprezintă unda de șoc inițială în momentul trecerii prin fața camerei de experiențe. Se observă perfecta planeitate a acestei unde, criteriu pentru aprecierea gradului de uniformitate al scurgerii staționare din spatele ei.

4. MĂSURAREA VITEZEI DE PROPAGARE A UNDEI DE ȘOC

După cum s-a amintit mai sus, cunoașterea raportului presiunilor inițiale ale aerului din cele două compartimente ale tubului de șoc determină, în principiu complet, toată mișcarea ulterioară; totuși, motive accidentale — ca spargerea neregulată a diafragmei — precum și precizia insuficientă cu care se poate măsura vidul inițial, fac de dorit să se dispună de o metodă pentru măsurarea unei mărimi de referință, care să facă parte dintre parametrii aerodinamici ai scurgerii efective din tubul de șoc, chiar în timpul funcționării acestuia. În principiu s-ar putea lua drept referință oricare dintre parametrii scurgerii; măsurarea vitezei de propagare a undei de șoc prezintă însă avantajul că poate fi făcută cu o precizie destul de ridicată —0,1...0,3%, iar cunoașterea acestei viteze determină toți ceilalți parametri (temperatură, presiune, număr Mach etc.). Din acest motiv s-a stabilit de la început ca tubul de șoc I.M.A. să fie echipat cu o instalație pentru măsurarea vitezei de propagare a undei de șoc, servind drept mărime de referință.

Descrierea acestei instalații este făcută în altă lucrare [3], aici vom aminti numai principiul său de funcționare.

În cele mai multe vitezometre pentru unde de șoc [8], [11], [13], nu se recurge la măsurarea directă a vitezei, care este foarte dificilă și imprecisă [10], ci se determină viteza medie, calculată prin măsurarea intervalului de timp Δt scurs între momentele trecerii undei de șoc prin fața a doi detectori de undă, plasați la o distanță cunoscută l de-a lungul tubului. Întrucît viteza undei nu este constantă, suferind atenuări din cauza stratului limită, este util să se reducă pe cît posibil lungimea l, plasînd detectorii de undă cît mai aproape în amontele camerei de experiențe. La tubul de șoc I.M.A. s-a ales lungimea $l = 700$ mm, de unde rezultă că trebuie măsurate intervalele de timp Δt variind între 2 100 și 500 microsecunde.

În legătură cu realizarea vitezometrului, se pun două probleme principale: alegerea tipului de detector de undă, și alegerea tipului de cronograf pentru măsurarea intervalului.

În literatură, pentru tuburile de șoc cu performanțe analoage tubului I.M.A., s-au folosit la detectarea trecerii undei de șoc, montaje optice de strioscopie, care produc semnalele electrice cu ajutorul fotomultiplicatorilor electronici. Aceste metode sînt complicate, costisitoare și foarte sensibile la vibraţii şi alte perturbaţii. De aceea, pentru tubul de şoc I.M.A. s-au elaborat detectori de undă speciali, sensibili la saltul de presiune. Sensibilitatea detectorilor este relativ mare (cca 0,01 pF/pF. kg/cm^2) iar timpul de răspuns extrem de scăzut (2...5 μs), astfel încît utilizarea lor asigură o bună precizie la măsurarea vitezei undei de şoc.

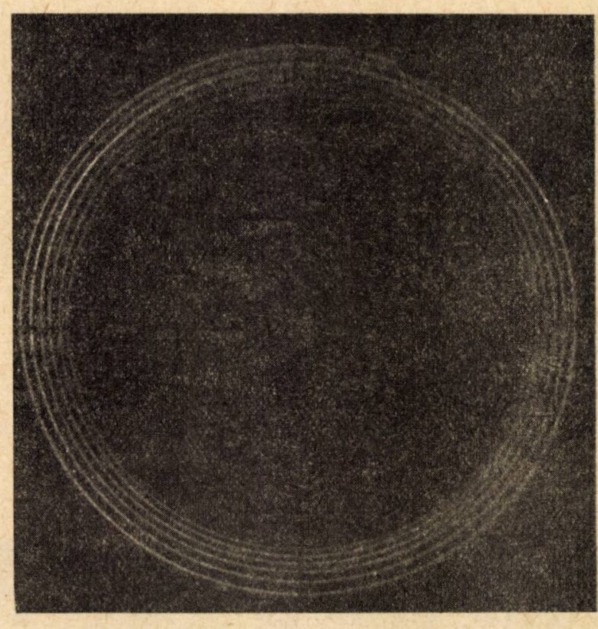


Fig. 6

Cronograful electronic elaborat pentru vitezometru foloseşte un tub catodic cu baleiaj spiral, măsurarea timpului reducîndu-se la determinarea pe o fotografie a arcului descris de spotul oscilografului între aprinderea şi stingerea sa, provocate de semnalele date de detectorii de undă. Perioada în care spotul tubului catodic efectuează o rotaţie completă, a fost aleasă de 500 μs, astfel încît se poate aprecia timpul Δt cu o precizie de ordinul microsecundei. Ţinem să remarcăm că alte cronografe, bazate pe principiul numărării unor impulsuri de frecvenţă ridicată sînt mult mai complexe, şi nici nu pot da performanţe mai bune. În figura 6 se prezintă ca exemplu o oscilogramă în care intervalul de timp măsurat este de 2939 μs.

5. MĂSURAREA PRESIUNILOR AERODINAMICE

Cunoaşterea distribuţiei presiunilor pe modele este de mare importanţă pentru cercetările de aerodinamică; problemele care apar în legătură cu aceasta sînt însă multiple, privind traductorii şi blocurile electronice de amplificare.

Traductorii de presiune trebuie să satisfacă unor condiţii foarte grele şi contradictorii, şi anume:

a) Să aibă o sensibilitate suficientă pentru a produce un semnal electric uşor de amplificat, chiar la diferenţele de presiune cele mai mici. În tubul de şoc I.M.A. variaţiile minime de presiune sînt de ordinul a 20 mm col. Hg, cele maxime atingînd 500 mm col. Hg. În aceeaşi ordine de idei, este de dorit ca traductorul de presiune să aibă un răspuns liniar, pe toată această gamă de presiuni, uşurînd astfel măsurările.

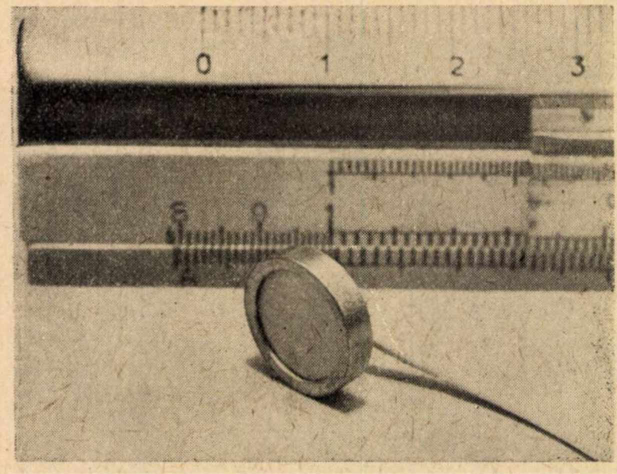


Fig. 7

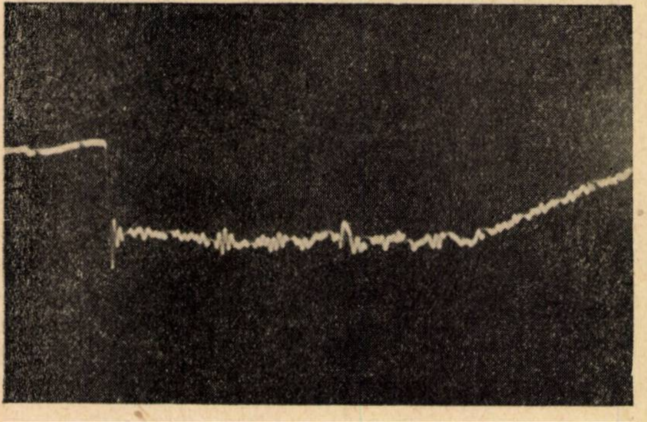


Fig. 8

b) Să aibă un timp de răspuns cît mai scurt. Pentru studiul regimurilor cvasistaţionare se poate considera că un timp de răspuns de ordinul a 150 μs este suficient; dacă se doreşte să se studieze şi regimurile de scurgere tranzitorii, timpul de răspuns trebuie mult redus.

c) Să aibă dimensiuni de gabarit cît mai mici, astfel încît să permită instalarea unui număr suficient de traductori în corpul unui model.

Rezultatele cercetărilor întreprinse [5] au dus la crearea unui tip de traductor de presiune capacitiv special, care posedă performanţe superioare altor construcţii cunoscute [9], [10].

Într-adevăr, sensibilitatea sa depăşeşte 0,01 pF/pF. kg/cm^2, semnalul păstrînd o liniaritate remarcabilă pe tot intervalul util de presiuni. De asemenea, timpul de răspuns este foarte scăzut, fiind de acelaşi ordin de mărime cu durata trecerii undei de şoc peste suprafaţa activă a traductorului (1. . .5 μs). În sfîrşit s-au realizat traductori avînd un diametru exterior de 10 mm, şi o lungime totală de 4 mm (fig. 7).

Soluţia elaborată pentru blocurile electronice de amplificare [4] se distinge prin simplitate, comportînd numai trei tuburi electronice pentru fiecare canal de măsurare şi în acelaşi timp, printr-o remarcabilă stabilitate în funcţionare.

În prima etapă s-au realizat şase canale de amplificare, care permit măsurarea simultană a presiunilor aerodinamice în şase puncte pe un model.

Ca exemplu de înregistrare, se prezintă în figura 8 oscilograma variaţiei presiunii statice în dreptul camerei de experienţe, în timpul unei încercări cu $M_s = 1{,}3$. Se observă saltul de presiune produs de trecerea undei de şoc, apoi intervalul de presiune constantă şi scăderea presiunii provocată de trecerea undei de rarefiere care se propagă în tub.

CONCLUZII

Studiile întreprinse, precum şi încercările de verificare la care a fost supusă aparatura elaborată pe baza acestor studii, confirmă posibilitatea măsurării în condiţii bune a parametrilor scurgerilor din tubul de şoc, care devine astfel un instrument de cercetare extrem de eficace pentru aerodinamica experimentală a vitezelor mari.

Este de remarcat că aparatura de măsură elaborată în acest scop are un domeniu de aplicabilitate mai larg decît cel al măsurătorilor în tubul de şoc, putînd fi adaptată pentru studiul altor fenomene cu variaţie rapidă.

Studiile urmărind dezvoltarea şi completarea aparaturii de măsură destinate cercetărilor în tubul de şoc vor fi continuate şi în viitor.

Primită la redacţie la 12 mai 1960

ВОПРОСЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АЭРОДИНАМИКЕ БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ УДАРНЫХ ТРУБ

РЕЗЮМЕ

Описывается ударная труба, построенная в Институте прикладной механики им. Траяна Вуя Академии РНР.

Ударная труба открывает возможность проведения экспериментальных исследований по аэродинамике больших скоростей, в выгодных с научно-технической точки зрения, условиях. Показываются трудности, которые встречаются при этом. Рассматриваются вопросы измерения скоростей, давлений и аэродинамических сил, возникающих во время очень непродолжительного квазистационарного течения, имеющего место в ударной трубе.

Описываются оригинальные методы, разработанные для этой цели, и приводятся полученные до сих пор результаты.

QUELQUES PROBLÈMES POSÉS PAR L'UTILISATION DES TUBES À CHOCS AUX RECHERCHES EXPÉRIMENTALES D'AÉRODYNAMIQUE DES GRANDES VITESSES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent le tube à chocs de l'Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia» de l'Académie de la République Populaire Roumaine.

Ils exposent les possibilités ouvertes par l'utilisation du tube à chocs pour les recherches expérimentales dans l'aérodynamique des grandes vitesses, dans des conditions très avantageuses au point de vue scientifique et technique, ainsi que les difficultés qui y surgissent.

On analyse plus spécialement les problèmes posés par la mesure des vitesses, des pressions et des forces aérodynamiques, dans les écoulements quasi-permanents de très courte durée, qui prennent naissance dans le tube à chocs.

On décrit les méthodes originales de mesure qui ont été développées à cette fin, et on présente les résultats obtenus jusqu'à présent.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Dumitrescu, *Calculul lungimii elementelor unui tub de şoc pentru o durată de funcționare dată.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2* (1956).
2. — *Tubul de şoc pentru cercetări de aerodinamică.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*, (1959).
3. I. Jakab, A. Zaharescu, L. Dumitrescu, *Metodă pentru măsurarea vitezei de propagare a undelor de șoc.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *1* (1961) (sub tipar).
4. E. Procopovici, *Măsurarea vibrațiilor și şocurilor mecanice cu traductori capacitivi.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *1* (1961) (sub tipar).
5. E. Procopovici, L. Dumitrescu, *Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de şoc.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *1* (1961) (sub tipar).
6. L. Dumitrescu, *Tubul de şoc și aplicațiile sale.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *1* (1956).
7. Ch. E. Wittcliff, M. R. Wilson, A. Hertzberg, *The Tailored Interface Shock Tunnel.* Journal of the Aero-Space Science, **26**, *4*, aprilie (1959).
8. R. Graindorge, *Utilisation d'une «barrière optique» pour la mesure de la vitesse de propagation d'une onde de choc dans un tube à chocs.* La Recherche Aéronautique, *41*, (1954).
9. Y.T.L.I., *High-Frequency Pressure Indicators for Aerodynamic Problems.* NACA, T.N. 3042 (1953).
10. J. Gordon Hall, *Shock tubes.* Institute of Aerophysics University of Toronto. UTIA Review, *12*. Part. II. May (1958).
11. B. D. Henshall, *On Some Aspects of the Use of Shock-Tubes for Aerodynamic Research* R. & M. 3044, Londra, 1957.
12. — *Some Notes on the Use of Resistance Termometers for the Measurement of Heat Transfer Rates in Shock Tubes.* A.R.C. Tehn. Report C.P. *408*, Londra, 1959.
13. — *Experimental Results from the N.P.L. Hypersonic Shock Tunnel.* N.P.L. (Aero) *372*, febr. (1959).

RECENZII

A. BĂRGLĂZAN, I. ANTON, V. ANTON, I. PREDA, *Încercările mașinilor hidraulice și pneumatice*. Ed. tehnică, București, 1959, 454 pag.

Pentru prima dată la noi în țară apare o lucrare de acest gen, sub imboldul cerințelor din ce în ce mai mari ridicate de dezvoltarea vertiginoasă a industriei noastre socialiste, izvorîtă din experiență tehnică și practică de laborator, rod al unei munci perseverente de mulți ani.

Prin conținutul ei multilateral și complex, cuprinzînd atît tehnica încercărilor variatelor tipuri de mașini hidraulice și pneumatice, cît și aceea a măsurării mărimilor fizice ce intervin aici, ea contribuie la îmbunătățirea calității și perfecționarea continuă a producției de mașini hidraulice și pneumatice, precum și la controlul funcționării acestora, chestiune de importanță capitală în problema automatizării proceselor industriale.

Prezentat la un nivel superior, bogat ilustrat cu schițe, diagrame și fotografii; printre care realizările romînești ocupă un loc de frunte, materialul este dispus în cele nouă părți ale cărții după cum urmează :

În prima parte, după o introducere în care se precizează poziția încercărilor pe mașini față de tehnică și știință, se tratează despre instrumente de măsură în general, clasificarea și precizia lor, teoria erorilor de măsurare și despre prelucrarea rezultatelor măsurărilor.

Partea a doua mult mai întinsă, cuprinde întreaga varietate a metodelor și instrumentelor de măsurare a mărimilor ce intervin la încercarea mașinilor hidraulice și pneumatice, de la cele mai simple la cele mai moderne. Aici sînt trecute în revistă în spirit critic metodele, instrumentele și aparatele pentru măsurarea mărimilor geometrice, a timpului, forțelor, temperaturii, densității, greutății specifice, viscozității, presiunilor, nivelelor, vitezelor, debitelor, turației, cuplului și a puterii.

În partea a treia sînt arătate instalațiile de etalonare și tarare a unora dintre aceste instrumente, precum și cele pentru determinarea pierderilor de sarcină liniare, locale și a caracteristicilor unui profil aerodinamic din cadrul Institutului politehnic Timișoara.

Partea a patra, datorită importanței mari a încercărilor pe model în hidraulică, cuprinde o expunere principială a problemei similitudinii în general și în special a relațiilor de similitudine specifice diverselor mașini hidraulice și pneumatice.

Ultimele cinci părți ale lucrării sînt consacrate exclusiv încercărilor de mașini, înzestrate bogat cu material ilustrativ și grafic. Astfel, în partea a cincea, sînt arătate încercările pompelor centrifuge și axiale, prezentîndu-se mai întîi curbele caracteristice de funcționare, instalațiile de încercare în circuit închis și deschis, metoda de lucru, precum și prelucrarea rezultatelor și interpretarea lor. De asemenea, sînt descrise și încercările la cavitație, insistîndu-se atît asupra laturii fizice a fenomenului, cît și asupra încercării propriu-zise. Tot aici sînt tratate în mod similar și încercările pompelor cu piston.

Partea a șasea se referă la încercările ventilatoarelor centrifuge și axiale. Printre secțiunile acestei părți, care în general urmează același plan sistematic ca în partea a cincea, s-a rezervat un spațiu și problemei de mare importanță și actualitate a zgomotului ventilatoarelor. Astfel, după o introducere de generalități se tratează și chestiunile privitoare la cauzele zgomotelor ventilatoarelor, măsurarea intensității lor precum și instalațiile pentru determinarea zgomotelor și ridicarea curbelor izofonice.

Partea a șaptea este rezervată încercărilor de suflante și compresoare, urmînd în general același plan.

În partea a opta se vorbește pe larg despre încercările turbinelor hidraulice. După o serie de considerații generale privitoare la încercările acestor mașini, se trece la descrierea încercării turbinelor Pelton, unde se acordă o atenție specială încercării injectoarelor. În continuare, se descriu încercările turbinelor Francis și axiale, arătîndu-se diverse instalații adecvate variatelor tipuri de turbine de acest gen, precum și ridicarea curbelor lor caracteristice. Se rezervă un loc special problemei controlului randamentului turbinelor hidraulice în exploatare și a încercărilor de cavitație la turbine,

Ultima parte a acestei lucrări este consacrată încercării transmisiilor hidraulice, unde după aceeași schemă generală sînt tratate atît cuplajele cît și transformatoarele hidraulice.

Această lucrare, importantă prin specificul conținutului ei și interesantă prin felul prezentării ei, răspunde unei necesități imperioase a literaturii noastre tehnice.

Sîntem convinși că apariția ei nu va întîrzia să-și arate cît de curînd roadele, contribuind într-o însemnată măsură la o mai bună pregătire a cadrelor de specialiști, ridicînd astfel și mai mult producția de mașini hidraulice la nivelul tehnicii noi.

M. Cazacu

В. В. НАЛИМОВ, *Применение математической статистики при анализе вещества*. (Folosirea statisticii matematice la analiza materiei). Физматгиз, 1960, 430 pag.

În ultimii zece ani statistica matematică a căpătat o mare dezvoltare și se aplică cu mult succes în tot mai multe domenii de activitate (construcția de mașini și aparate, industria chimică, metalurgie etc.).

Un domeniu nou de aplicare cu succes a statisticii matematice îl constituie analizele de laborator.

Dezvoltarea rapidă și introducerea pe scară largă a unor noi tipuri de aliaje a atras după sine și elaborarea unui număr mare de metode de analiză a lor. Dezvoltarea acestor metode se face mult mai rapid decît standardizarea lor, din care cauză compararea rezultatelor analizelor obținute prin diverse metode constituie o problemă deosebită.

Statistica matematică poate fi aplicată cu succes pentru rezolvarea acestei probleme, ea ne oferă posibilitatea stabilirii unor criterii judicioase de comparare a rezultatelor obținute prin diverse metode de analiză. Fiecare domeniu nou de aplicare a statisticii matematice necesită o prelucrare specială a teoriilor generale.

Lucrarea recenzată are ca obiectiv principal aplicarea statisticii matematice la analizele de laborator.

Ca structură generală, fiecare capitol cuprinde două părți : prima parte prezintă teoriile generale ale statisticii matematice, iar partea a doua aplicarea acestor teorii la rezolvarea unor probleme concrete ce apar la prelucrarea rezultatelor experimentale. Lucrarea cuprinde nouă capitole dezvoltate în ordinea de prezentare a problemelor statisticii matematice.

Astfel, în capitolul întîi sînt expuse problemele generale ale statisticii matematice. Al doilea cuprinde clasificarea erorilor de măsură, iar al treilea caracteristicile unei mărimi întîmplătoare (valoarea medie, dispersia, abaterea medie pătratică, adunarea erorilor etc.).

Capitolul patru cuprinde consideraţii asupra distribuţiilor normale (expresia analitică a distribuţiei normale, unele distribuţii speciale, distribuţia Student, distribuţia χ^2, criterii de stabilirea concordanţei între distribuţia normală şi cea observată etc.).

Capitolul cinci analizează distribuţia Poisson şi cea binominală.

Capitolul şase se ocupă în mod special de evaluarea rezultatelor analizelor şi dă criteriul de comparare a două medii, a unor dispersii, metodele de verificare a omogenităţii rezultatelor măsurătorilor, aprecieri asupra erorilor grosolane etc. De asemenea mai cuprinde şi consideraţii asupra caracterului întîmplător al fluctuaţiilor şi unele aprecieri metrologice pe baza inegalităţii lui Cebîşev.

Capitolul şapte se ocupă de analiza dispersiilor (determinarea dispersiunii condiţionate de un singur factor, condiţii pentru care se poate aplica analiza dispersiilor, eficacitatea analizei dispersiunilor etc.).

Capitolul opt tratează problema relaţiilor liniare (metoda celor mai mici pătrate, media ponderată a măsurătorilor neechilibrate, metoda regresiei, analiza corelaţiei etc.).

Capitolul nouă prezintă o serie de probleme legate de organizarea experimentului (luarea probelor şi tipizarea condiţiilor experimentului, stabilirea numărului determinărilor paralele, diagrame de control etc.).

Lucrarea a fost întocmită pe baza unui bogat material documentar (172 referinţe bibliografice) cu multe exemple concrete, ceea ce contribuie la înţelegerea materialului prezentat şi la utilizarea lui la prelucrarea rezultatelor de laborator.

C. Florescu

Н. А. ТОМАШОВ., *Теория коррозии и защиты металлов* (Teoria coroziunii şi protecţia metalelor). Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1959, 592 pag.

În prezent nu există domeniu al economiei naţionale unde să nu se pună problema protecţiei împotriva coroziunii a utilajului existent sau a celui nou proiectat.

În lucrarea recenzată sînt expuse rezultatele cercetărilor efectuate de autor împreună cu un colectiv numeros, în ultimii 10—15 ani, la secţia de coroziune a Institutului de chimie fizică al Academiei de Ştiinţe al U.R.S.S. Lucrarea a fost elaborată şi pe baza cursului de coroziune şi protecţia metalelor predat de autor studenţilor şi aspiranţilor de la Institutul de oţel din Moscova şi a unui important material bibliografic (aproximativ 400 indicaţii bibliografice).

Printre principalele probleme analizate de autor menţionăm :

— Cercetarea mecanismului electrochimic al distrugerii prin coroziune a metalelor şi stabilirea relaţiei cantitative între viteza coroziunii electrochimice şi cinetica proceselor de la electrozi.

— Consideraţii asupra factorului de control a procesului de coroziune şi elaborarea metodelor de apreciere cantitativă a procesului de coroziune.

— Stabilirea legilor de bază ale proceselor catodice care au loc în cazul depolarizării în prezenţa oxigenului.

— Determinarea cantitativă a capacității de pasivizare a metalelor și stabilirea legilor generale de lucru ale elementelor corozive în condițiile posibilității apariției stării pasive a metalului.

— Cercetarea mecanismului și stabilirea legilor generale ale proceselor de coroziune în sol, atmosferă și apă marină.

— Clasificarea metodelor de obținere a aliajelor rezistente la coroziune, pe baza aplicării teoriei electrochimice a coroziunii.

Lucrarea este împărțită în 4 părți și 20 capitole.

Partea I tratează problema coroziunii chimice a metalelor (considerații asupra peliculelor de pe metale, termodinamica și cinetica oxidării chimice a metalelor, coroziunea în atmosferă cu gaze etc.).

Partea a II-a tratează coroziunea electrochimică a metalelor (scara potențialelor electrice ale metalelor și mecanismul electrochimic al coroziunii metalelor, potențialele sistemelor galvanice binare și ale aliajelor metalice, influența polarității exterioare asupra curentului de coroziune interior, pasivitatea materialelor etc.).

Partea a III-a a lucrării se ocupă cu coroziunea metalelor în diferite condiții (coroziunea atmosferică, coroziunea subterană, coroziunea marină etc.).

Partea a IV-a este intitulată *Stabilitatea corozivă a metalelor și aliajelor* și se ocupă cu caracteristicile de coroziune a fierului, a aliajelor coroziv stabile pe bază de fier, a metalelor și aliajelor neferoase etc.).

Lucrarea cuprinde un bogat material experimental pe baza căruia autorul a putut stabili existența unor fenomene cu caracter de generalitate.

Rezultatele prezentate pot fi utilizate cu succes de specialiștii din acest domeniu, pentru alegerea celor mai adecvate metale sau aliaje și mijloace de protecție a mașinilor și utilajelor în condiții de funcționare și exploatare date.

P. Freund

GUSTAV BÜRGERMEISTER, HERBERT STEUP, *Stabilitätstheorie* I, mit Erläuterungen zu DIN 4114, Zweite berichtigte Auflage (Teoria stabilității I, cu comentarii la DIN 4114, ediția a 2-a, corectată). Akademie-Verlag, Berlin, 1959, 407 pag., 306 fig.

În domeniul instabilității elastice există publicat pînă în prezent un material extrem de bogat, răspîndit în cele mai variate publicații și limbi de pe glob. Cunoașterea începuturilor și urmărirea rezultatelor care îmbogățesc necontenit acest domeniu, devine imposibilă fără apariția unor lucrări de sinteză de proporții mai mari.

Autorii din R.D.G., dr.-ing. habil. Gustav Bürgermeister, profesor la Technische Hochschule Dresden și colaboratorul său dipl.-ing. Herbert Steup și-au propus realizarea unei asemenea lucrări de sinteză și, anticipăm, au reușit în mod cu totul deosebit acest lucru prin publicarea primului volum mai sus amintit.

Sînt tratate problemele de instabilitate privind bara dreaptă izolată supusă la flambajul simplu, flambaj cu încovoiere, flambaj cu încovoiere-răsucire și flambaj lateral.

Tabla de materii a primului volum, îmbrățișînd problemele mari enumerate precedent poate fi considerată completă, în ceea ce privesc metodele de abordare a problemelor și a punctelor de vedere în soluționarea lor.

Cartea cuprinde șase capitole mari.

Capitolul întîi *Considerații introductive asupra stabilității echilibrului* reprezintă o expunere de principiu a problemelor generale.

Primul paragraf (1.1) tratează despre asigurarea stabilității în cadrul cercetărilor în construcții. În continuare (1.2), se compară problemele de rezistență și de stabilitate. În problema de rezistență de ordinul întîi, condițiile de echilibru se scriu cu suficientă exactitate pe sistemul static determinat nedeformat. Cu această ipoteză, ecuațiile teoriei neliniare exacte se reduc la relații liniare simple (1.21).

Studiile care iau în considerație influența deformațiilor asupra ecuațiilor de echilibru, presupunînd totuși o relație liniarizată între curbură și derivatele deplasărilor, constituie teoria de ordinul al doilea.

Teoria deformațiilor mari, la care se consideră o expresie mai exactă a curburii, însă nu se ia în considerare efectul deplasărilor axiale, constituie după Chwalla teoria de ordinul al treilea (1.22).

În continuare, se prezintă problema de instabilitate cu bifurcarea echilibrului (1.23) și fără bifurcarea echilibrului (1.24).

Capitolul al doilea cuprinde rezolvarea problemelor de instabilitate prin metoda statică. Se începe cu cazul simplu al barei dintr-un material ideal-elastic, comprimată centric (2.2). Sînt examinate diferitele aspecte cum ar fi : bara de secțiune constantă, cu diferite rezemări la capete, bara cu rezemare continuă elastică, acțiunea temperaturii, bara cu moment de inerție variabil, forța normală variabilă (2.21).

În paragraful următor se fac considerații mai exacte în domeniul precritic și postcritic (2.22), precum : influența scurtării elastice a barei comprimate asupra sarcinii critice de bifurcare, influența deformației de forfecare, comportarea în domeniul postcritic.

Mai departe (2.3), este examinată bara comprimată, acționată și de momente inițiale : starea de deformație a barelor comprimate încărcate transversal și excentric (2.31) — bara cu sarcină transversală la mijlocul deschiderii, bara comprimată excentric cu excentricități egale sau de semn contrar, sarcina transversală sinusoidală, curbura inițială sinusoidală — ; criteriul suficient pentru bifurcarea echilibrului (2.32) și soluția prin iterație a problemei de rezistență.

Acțiunea forței de compresiune avînd o direcție care nu rămîne constantă este examinată în (2.4) : bara în consolă comprimată de o forță care rămîne tangentă la fibra medie (2.41), bara încastrată la care forța trece printr-un pol (2.42) și bara încărcată cu sarcini continui tangențiale.

Un alt paragraf (2.5) este consacrat studiului barei comprimate centric, alcătuită din material elastoplastic, forța de compresiune păstrîndu-și direcția inițială. Sînt menționate încercările lui Tetmajer, Kármán și ale Asociației germane pentru construcții metalice. Se mai examinează teoriile lui Engesser, Engesser-Kármán, efectul Shanley și soluția adoptată în DIN 4114 pentru flambajul în domeniul plastic.

Problema mai generală a compresiunii excentrice în domeniul elastoplastic este studiată în paragraful (2.6). Se indică studiul grafo-analitic exact și procedee aproximative pentru determinarea sarcinii capabile, în special acela al lui Jezek. Ultimul subpunct (2.635) detaliază verificarea după DIN 4114 a barelor comprimate și acționate concomitent de sarcini transversale.

Ultimul paragraf al capitolului (2.7) tratează despre problemele generale ale metodei statice în lumina teoriei elasticității.

Capitolul al treilea cuprinde rezolvarea problemelor de instabilitate prin metode energetice. Se expun : deducerea metodei energetice (lucrul mecanic de deformație și potențialul eforturilor interioare, lucrul mecanic și potențialul forțelor exterioare, principiul deplasărilor virtuale, principiul valorii staționare a potențialului elastic, sisteme neconservative, criterii energetice ale echilibrului, observații asupra analogiei cu conul) și aplicații ale metodei energetice.

Capitolul al patrulea tratează despre metodele aproximative pentru calculul sarcinilor de bifurcaţie. După generalităţi (4.1), urmează metoda aproximaţiilor succesive (4.2), procedeul lui Ritz (4.3), procedeul lui Galerkin (4.4), diferenţele finite (4.5), metoda seriilor (4.6), obţinerea limitelor superioară şi inferioară ale valorilor proprii cele mai reduse (4.7) şi metoda ecuaţiilor integrale (4.8).

Capitolul al cincilea abordează barele cu secţiune compusă. Pentru barele comprimate centric, se determină pe bază energetică, sarcina critică şi coeficientul de subţirime comparativ (ideal) pentru barele solidarizate cu plăcuţe (5.2); apoi se extinde aplicarea formulei aproximative a lui Engesser, se stabileşte coeficientul de subţirime pentru secţiunea alcătuită din două corniere dispuse în cruce, se indică limitele coeficienţilor de subţirime pentru barele izolate. În paragraful (5.3) se examinează problemele similare pentru barele solidarizate cu zăbreluţe; în paragraful următor (5.4) se dă calculul elementelor de solidarizare.

Capitolul al şaselea tratează despre flambajul cu încovoiere-răsucire şi flambajul lateral. După un scurt paragraf de generalităţi (6.1), urmează consideraţii de bază (6.2) (flambajul prin torsiune, flambajul prin încovoiere-răsucire şi bare cu pereţi subţiri), rezolvarea problemei de încovoiere-răsucire prin metoda statică (6.3) (bara avînd secţiunea simetrică în raport cu o axă, comprimată centric şi excentric), rezolvarea prin metoda energetică (6.4), cazuri de instabilitate ale barei drepte comprimate, cu diferite forme de secţiuni şi excentricităţi de aplicare a sarcinii (6.5).

Rezolvarea problemelor de flambaj lateral prin metoda statică este tratată detaliat în paragraful (6.6). Astfel, după generalităţi (6.61), se dă o regulă simplă pentru evitarea flambajului tălpii comprimate (6.62), urmează soluţia lui Prandtl (6.63), problema generală a grinzii (6.64), soluţiile ecuaţiilor diferenţiale pentru diferite condiţii marginale şi cazuri de încărcare (6.65) şi tratarea energetică a problemei flambajului lateral (6.66).

Fiecare din cele 6 capitole este urmat de o bogată bibliografie.

La sfîrşit se dau exemple de calcul numeric care îmbrăţişează întregul domeniu teoretic abordat în carte.

Cartea lui Bürgermeister şi Steup este o realizare valoroasă, care o face să ocupe un loc de cinste între monografiile existente în literatura mondială în problemele de instabilitate elastică.

Mircea Soare

---

* * * *Труды института машиноведения*, (Lucrările Institutului de maşini; Seminarul de teoria maşinilor şi mecanismelor), **XIX**, *76*, 64 pag.

Revista este editată de Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. şi publică lucrări ştiinţifice din domeniul teoriei generale a maşinilor şi mecanismelor cît şi a aplicaţiilor practice din acest domeniu.

Lucrările reflectă în general activitatea de cercetare ştiinţifică a seminarului de teoria maşinilor şi mecanismelor din cadrul Institutului maşinovedenia Moscova, de sub conducerea acad. I. I. Artobolevski.

În nr. 76 al revistei sînt cuprinse 6 articole:

L. A. Liberg, *Metoda grafică pentru determinarea lungimii elementelor cu mişcare spaţială a mecanismelor din bare articulate.* Articolul este consacrat rezolvării problemei determinării lungimii elementelor mecanismelor spaţiale şi rezolvării condiţiilor de rotire a mecanismelor spațiale cu patru elemente de tip manivelă-balansier, iar biela formînd cu manivela sau balansierul cuple de articulație sferice. Este dată de asemenea și metoda grafică aproximativă.

E. A. Tuhanova, *Asupra rezolvării ecuației de deplasare a pistonului unei mașini hidraulice în funcție de mișcarea sertărașului.* În articol este expusă metoda de formare și rezolvare a ecuației mișcării pistonului în funcție de deplasarea pistonului și în același timp se face o comparație dintre rezultatele din calcule și cele experimentale, lucru ce permite să se stabilească și domeniul de aplicație al metodei cît și influența formei sertărașului și al altor elemente constructive asupra nestabilității mișcării pistonului, la mașinile cu acționare hidraulică.

I. P. Zîbin, T. E. Akulov, L. G. Snițarenko și V. A. Ulianițkii, *Traductor rezistiv cu mercur, pentru măsurarea deformațiilor mari a materialelor.* În lucrare, autorii descriu modul de lucru cu astfel de traductori cît și realizarea constructivă a traductorilor rezistivi cu mercur. Traductorii rezistivi cu mercur (capilare cu mercur) sînt adecvați măsurării deformațiilor mari a materialelor cu modul de elasticitate mic, ce au aplicații și în medicină pentru măsurarea alungirilor diferiților mușchi în anumite condiții de excitare.

L. S. Grodzenskaia, *Aplicarea metodelor de proiectare a mecanismelor articulate, cu pauză.* Articolul prezintă o aplicație a unei metode de proiectare expusă de autori într-un alt număr al revistei, nr. 71. Drept exemplu este dat sinteza unui mecanism împingător pentru montarea bucșelor de la automatul EK, în mai multe variante. Se fac și mai multe considerații cinematice asupra sintezei și proiectării mecanismelor cu pauză.

G. P. Viatkin, *Determinarea legii de mișcare a agregatului mecanic după diagrama* E_c, ω^2. În articolul lui G. P. Viatkin este descrisă o metodă grafică de determinare a legii de mișcare a unui agregat în condiția, ca forța motrice să fie o funcție de poziție sau de viteză, iar forța rezistivă și masa redusă depind de poziția elementelor agregatului.

L. V. Korostelev, *Metodă aproximativă de determinare a mișcării mașinilor unelte acționate de motoare asincrone și de alegere a volantului.* În lucrare este expusă o metodă aproximativă pentru stabilirea mișcării mașinilor unelte acționate cu motoare electrice asincrone și bazată pe aceasta, o metodă aproximativă pentru calculul volantului. Problema este rezolvată pornind de la caracteristica dată a electromotorului, a cuplului rezistiv variabil și de la momentul de inerție redus, variabil.

L. Calmaciuc

I. KLEIS, *Об изнашивании металлов в абразивной струе. Труды Таллинского политехнического института*, серия А № 168, 1959, 27 стр. (Uzura metalelor într-un curent abraziv).

Fenomenul de uzură a metalelor supuse unui curent abraziv se manifestă la cazanele ce funcționează cu combustibil praf, dezintegratoarele pentru aducerea unor materiale în stare pulverulentă, instalațiile pneumatotransportoare, turbine de gaze cu combustibili solizi etc.

Necesitatea rezolvării problemei, impusă de asigurarea unei bune funcționări a instalațiilor a condus la multe și laborioase cercetări experimentale și concomitent la explicarea teoretică a acestui aspect al uzurii.

Cu toate că s-au obținut unele succese, mecanismul nu se poate considera definitiv descoperit și studiile în acest domeniu continuă.

În încercarea fundamentării teoretice s-au emis mai multe ipoteze : astfel unii cercetători presupun uzura legată de șocurile repetate ale curentului abraziv și oboseala straturilor superficiale ale metalelor, alţii subordonează fenomenului de aşchiere a metalelor, fără să se ajungă la o formulare completă şi unanim recunoscută.

Broşura al cărei autor este I. Kleis cuprinde rezultatele experimentale şi concluziile studiului întreprins de autor şi colaboratorii săi în acest domeniu şi unele aprecieri generale.

Instalaţia experimentală, de concepţie proprie, este simplă şi ingenioasă. Ea constă dintr-o roată prevăzută cu un orificiu central şi un canal radial şi este angrenată de un motor electric; particulele abrazive, printr-un dispozitiv de alimentare vin în orificiul central al roţii, de unde datorită forţei centrifuge traversează canalul radial şi lovesc epruvetele, prinse în nişte suporţi la exteriorul roţii. Epruvetele au fost confecţionate din oţel moale, oţel călit şi fontă hipoeutectică, iar ca agent de lucru s-a folosit nisip cuarţos de granulaţie diferită.

Pentru determinarea comportării particulelor abrazive la ieşirea din roata motoare şi după lovirea epruvetelor, s-a folosit o cameră de filmare rapidă.

Rezultatele remarcabile obţinute pe această bază sînt: precizarea traectoriilor — care sînt aproape liniare —, dependenţa dintre unghiul de ieşire al particulelor şi viteza roţii motoare, determinarea vitezei particulelor înainte şi după lovire etc.

Considerînd ca parametrii de bază ai uzurii, viteza particulelor şi unghiul lor de atac, s-au obţinut reprezentări ce stabilesc dependenţa dintre intensitate şi parametri precizaţi ai procesului, indicîndu-se curbe pentru diferite materiale şi pentru diferite dimensiuni ale agentului de lucru.

Din interpretarea acestor curbe s-a stabilit o fază incipientă a procesului, cînd metalul folosit se uzează cu intensitate variabilă în timp, denumită fază instabilă, după care procesul se stabilizează iar alura curbelor reprezentative este lineară.

Numărul mare de experienţe şi analiza lor minuţioasă a condus la stabilirea ecuaţiei care defineşte legea de variaţie a uzurii, funcţie de viteza particulelor şi de materialul epruvetelor; lege confirmată şi de experienţele altor cercetători. Cu acest prilej sînt menţionate unele puncte de vedere incorecte şi explicate cauzele acestor erori.

Rezultatele obţinute în urma experienţelor amintite evidenţiază aspectul macroscopic al fenomenului.

Pentru studiul lui mai intim s-au folosit metode de lucru (de măsurare) microscopice şi röntgenografice la determinarea deformărilor plastice ale straturilor metalice superficiale şi a modificărilor ce se produc în reţeaua cristalină a epruvetelor.

Din observarea efectelor uzurii la suprafaţa epruvetelor şi analogia cu cele produse la oţelul ecruisat prin lovire cu alice, se fac unele aprecieri asupra evoluţiei procesului, utilizîndu-se ecuaţiile bilanţului energetic.

Lucrarea, întocmită pe baza unui bogat material experimental şi cu un suport teoretic riguros, reprezintă un nou succes în dezlegarea acestui fenomen complicat de uzură, sugerînd totodată adoptarea unor soluţii tehnice imediate menite a îmbunătăţi comportarea în exploatare a instalaţiilor unde acesta se manifestă.

O. Biţă şi *I. Dincă*

IVO BABUŠKA, KAREL REKTORYS, FRANTIŠEK VYCICHLO, *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme* (Teoria matematică a elasticităţii pentru probleme plane). Akad.-Verlag, Berlin, 1960, 478 + XII pag.

Acest volum, publicat iniţial la Praga în 1954, a fost tradus în 1960 în limba germană, datorită interesului deosebit pe care-l prezintă. El a fost alcătuit în cadrul Institutului de matematică al Academiei de Ştiinţe a Republicii Socialiste Cehoslovace şi cuprinde o trecere în revistă a problemelor noi ce se pun în cadrul teoriei elasticităţii plane [1]).

Primele două capitole cuprind o introducere în teoria elasticităţii, formularea problemei plane, precum şi diferitele moduri de rezolvare ale ei. Capitolele al III-lea şi al IV-lea prezintă rezolvarea problemei pentru domenii finite, folosind metodele lui Mushelişvili, Lauricella şi Şerman, precum şi metoda transformărilor conforme. Capitolul al V-lea conţine unele dezvoltări matematice, utile înţelegerii şi aplicării metodelor de calcul folosite în lucrare.

Ediţia germană a acestei lucrări cuprinde unele completări, în special în ceea ce priveşte exemplele de calcul, faţă de ediţia precedentă.

Cartea autorilor cehi este interesantă pentru toţi cei ce se ocupă de ecuaţiile fizicii matematice şi în special de teoria elasticităţii.

P. P. Teodorescu

HERBERT HASSELGRUBER, *Temperaturberechnungen für mechanische Reibkupplungen* (Calcule de temperatură pentru cuplaje mecanice cu fricţiune). Editura Friedr. Vieweg & Sohn-Braunschweig, 1959, 47 pag., 23 figuri.

Lucrarea apărută în cadrul unei serii de publicaţii asupra transmisiilor care se editează de Societatea Germană pentru construcţii de maşini (VDMA) reprezintă continuarea unei lucrări cu aceeaşi temă publicată în anul 1953 ca disertaţie a autorului la Politehnica din Aachen.

Cuprinsul lucrării este următorul:

Cap. 1. Introducere.
,, 2. Calculul cantităţii de căldură care ia naştere în procesul de cuplare.
,, 3. Calculul temperaturilor pentru durate scurte de ambreiere şi cuplare nerepetată.
,, 4. Cercetarea influenţelor marginale.
,, 5. Procese de ambreiere favorabile din punct de vedere termic.
,, 6. Procese de ambreiere repetate.
,, 7. Ecuaţii numerice şi exemple de calcul.

Datorită numeroaselor avantaje pe care le prezintă cuplajele, cu fricţiune sînt utilizate pe scară foarte largă în diferitele sectoare ale construcţiilor de maşini. Între aceste avantaje se menţionează costul redus datorită simplităţii lor constructive, precum şi transmiterea fără alunecare şi deci fără pierderi a momentului de torsiune după terminarea procesului de ambreiere. Ele prezintă însă şi unele dezavantaje datorită amortizării insuficiente a şocurilor şi a imposibilităţii de reglare a momentului transmis, ceea ce a determinat utilizarea în unele sectoare a cuplajelor hidraulice şi electromagnetice.

La proiectarea cuplajelor mecanice cu fricţiune se prescriu în general două condiţii, de limitare pe de o parte a presiunii specifice pe suprafeţele de frecare şi pe de altă parte a lucrului mecanic specific de frecare. Autorul consideră că a doua condiţie, aceea a limitării lucrului mecanic specific de frecare, nu caracterizează solicitarea termică a cuplajului. Cuplajul va atinge limita de solicitare termică cu temperatura maximă care apare, cînd există şi pericolul arderii sau scoaterii din funcţiune a materialului de fricţiune.

Acest considerent a determinat efectuarea studiului, privind cercetarea variaţiei temperaturii în cuplaje, în cursul procesului de ambreiere.

---

[1]) O relatare mai detaliată a cuprinsului ediţiei cehe a acestei lucrări a fost dată în Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 799 (1956).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Pentru determinarea cantității de căldură produsă în procesul de ambreiere, se determină ecuațiile de mișcare ale elementului conducător și elementului condus, ținînd seama de momentele de inerție respective și se determină pe această bază, durata procesului de ambreiere și apoi cantitatea de căldură aferentă, pentru cuplaje cilindrice și conice. În acest studiu s-a considerat că momentul motor, momentul rezistent, momentul capabil al cuplajului și deci coeficientul de frecare și presiunea de contact sînt constante în tot cursul acestui proces.

Calculul temperaturilor pentru durate scurte de ambreiere și cuplare unică reprezintă o contribuție originală a autorului.

Se pornește de la ecuația de bază a propagării căldurii a lui Fourier care se rezolvă în ipoteza că sîntem în prezența unui cîmp de temperaturi datorit unor surse de căldură (singularități), repartizate spațial și în timp. Pe această bază se obține ecuația fundamentală pentru determinarea temperaturilor în raport cu mediul înconjurător.

O ecuație similară a fost folosită de H. Blok pentru studiul încălzirii instantanee în cazul laminării filmului de lubrefianți între două piese în frecare.

La rezolvarea ecuației fundamentale deduse, s-a făcut ipoteza că aportul de căldură în impul procesului de ambreiere, este dat sub forma unei serii de puteri în t și că în restul timpului nu are loc nici un aport de căldură, ajungîndu-se astfel la relații de calcul relativ simple.

Cercetarea influențelor marginale și anume a căderii de temperatură la marginea unei fâșii a cuplajului și a producerii de căldură, de-a lungul unei suprafețe cilindrice de lungime infinită, au arătat că ipotezele admise și în speță a unui cîmp de temperaturi, unidimensional sînt perfect admisibile pentru procese de ambreiere nerepetate. Se studiază de asemenea corecțiile necesare pentru durate mari de ambreiere și grosimi de perete mici ai cuplajului.

O importanță deosebită se acordă studiului proceselor de ambreiere favorabile din punct de vedere termic, atît pentru cuplaje cu materiale perfect izolatoare (asbest, ferodou) cît și pentru cazul frecării metal pe metal. Se ajunge la concluzia interesantă, că *din punct de vedere termic momentul optim al cuplajului este egal cu dublul momentului rezistent*, în acest caz temperatura de vîrf avînd valoarea minimă și se trasează curbele de variație a temperaturilor maxime în funcție de momentul capabil al cuplajului.

Studiul proceselor de ambreiere repetate, care prezintă importanța la cuplajele multor instalații, ca de exemplu la cuplajul principal al tobei troliilor de foraj este mult mai complex În acest caz, căldura se propagă în întregul corp al cuplajului și trebuie luată în considerare transmiterea căldurii la suprafețele exterioare ale cuplajului, deci, variația temperaturilor este determinată în mare măsură de forma cuplajului. Pentru aceste motive autorul cercetează numai trei cazuri mai simple și anume :

a) variația temperaturii într-un cuplaj cu masă metalică foarte mare.

b) încălzirea unui cuplaj cu pereți subțiri unde căldura nu este evacuată prin conductibilitate, ci exclusiv prin transmiterea căldurii pe suprafețele exterioare.

c) un caz tranzitoriu între a și b.

În toate cazurile s-a admis că procesele de ambreiere se succed în intervale de timp egale. Cazul b s-a studiat pe baza relațiilor date de G. A. G. Fazekas în cercetarea făcută asupra încălzirii tamburilor de frînă.

Pentru ușurarea folosirii rezultatelor acestui studiu de către proiectanți, se dau în capitolul final indicații asupra dimensiunilor termenilor care intervin în ecuațiile deduse, caracteristici tehnice principale pentru discuri de oțel și de fontă și relații de calcul pentru cuplaje cilindrice și conice precum și două aplicații.

Autorul arată că după elaborarea studiului său, T. P. Newcomb a publicat în revista Brit. J. Of. Appl. Phys. două lucrări în care a rezolvat problema încălzirii frînelor cu ajutorul transformării lui Laplace. Rezultatul final al acestor lucrări corespunde cu cel al autorului și este confirmat de determinările experimentale făcute cu termoelemente cu inerție mică.

Lucrarea este însoțită de o bibliografie bogată — 24 lucrări — care reprezintă o contribuție prețioasă pentru documentarea în domeniul studiului încălzirii cuplajelor și frînelor.

În concluzie, lucrarea recenzată reprezintă o contribuție originală și importantă în studiul proceselor termice din cuplajele cu fricțiune, iar rezultatele obținute pot fi aplicate la proiectarea cuplajelor.

Trebuie menționat însă că o serie de ipoteze simplificatoare, ca aceea a momentelor constante în procesul de ambreiere sînt destul de departe de realitate. Aceasta este valabil în special, pentru momentul capabil al cuplajului, care variază datorită variației coeficientului de frecare, cu viteza relativă a discurilor cuplajului.

Studiul nu este aplicabil cuplajelor cu fricțiune cu acționare hidraulică și pneumatică care sînt folosite tot mai frecvent, datorită variației presiunii în timpul procesului de ambreiere și a modificării condițiilor de schimb de căldură în interiorul cuplajului. Problema importantă a studiului temperaturilor în cuplaje cu fricțiune cu procese de ambreiere repetate nu este aprofundată suficient.

Problemele menționate își așteaptă încă rezolvarea, iar studiul lor trebuie abordat cît mai curînd pentru îmbunătățirea bazei de proiectare și construcției cuplajelor cu fricțiune.

I. Hirsch

W. JUST, *Steuerung und Stabilität von Drehflügelflugzeugen* Ed. Flugtechnick, Stuttgart, 1957, 263 pag.

Progresele înregistrate în domeniul construcțiilor de elicoptere sînt fără îndoială remarcabile.

Există în prezent o întreagă gamă de tipuri constructive de elicoptere cu excelente calități de zbor și cercetările întreprinse au arătat că sînt posibile încă multe și prețioase perfecționări.

Printre problemele mult dezbătute cu privire la elicoptere și încă în atenția cercetării, sînt și acelea ale conducerii și stabilității.

Dacă la unele categorii de avioane aceste probleme se pot socoti rezolvate, la elicoptere nu se poate spune același lucru.

Teoria elicopterului, în general, se află în faza discuțiilor și transformărilor.

De aceea, lucrări de mai mare amploare care să fi sistematizat și selecționat materialul referitor la anumite probleme ce privesc elicopterele sînt foarte prețioase.

Pe această cale lucrarea *Steuerung und Stabilität von Drehflügelflugzeugen* de dr. ing. habil. W. Just prezintă la nivel înalt un bogat material cu privire la comanda și stabilitatea elicopterelor.

Lucrarea cuprinde două părți, prima referitoare la comanda elicopterelor, iar cea de a doua la stabilitatea acestora.

În prima parte lăsînd de-o parte introducerea sînt dezvoltate șapte capitole privind comanda longitudinală, comanda transversală, comanda de direcție, comanda verticală, echilibrul de forțe, efectele cuplate, precum și o comparație între elicoptere și avioane în ceea ce privește comenzile.

În cadrul primelor capitole sînt dezvoltate principalele moduri de comandă ca de exemplu comanda prin deplasarea capului rotorului prin înclinarea capului rotorului, prin variația ciclică etc.

În a doua parte exceptînd, de asemenea, introducerea sînt dezvoltate nouă capitole privind stabilitatea în zbor la punct fix și la viteze mici avînd ca grade de libertate viteza V și unghiul planului articulațiilor cu orizontala θ, apoi aceeași problemă avînd ca grade de libertate în plus unghiurile de bătaie a_1 și b_1.

Se analizează după aceea stabilitatea în zbor spre înainte avînd ca grade de libertate V, θ și unghiul de incidență al rotorului α apoi aceeași problemă avînd în plus ca grad de libertate viteza periferică U.

Teoria resursei ca și determinării în zbor a derivatelor stabilității le sînt de asemenea consacrate cîte un capitol.

În sfîrșit, ultimele trei capitole sînt consacrate respectiv stabilității în zbor spre înainte cu gradele de libertate V_x, V_y, V_z, ω_x, ω_y, ω_z, a_0, a_1, b_1 stabilității automate și utilizării operatorilor EA respectiv funcțiilor EA în calculele de stabilitate și comandă.

În cadrul fiecărui capitol sînt stabilite ecuațiile de mișcare dîndu-se și soluțiile acestora, fie prin metodele obișnuite, fie utilzînd metodele calculului operațional. Fiecare problemă tratată este precedată de o introducere fizică și încheiată cu un exemplu numeric.

Se dau de asemenea multe grafice ale mărimilor ce interesează stabilitatea.

Prin lucrarea *Steuerung und Stabilität von Drehflügelflugzeugen* autorul, care este un specialist cunoscut, aduce o importantă contribuție la cunoașterea problemelor de stabilitate și comanda elicopterelor.

Al. Marinescu

L. FÖPPL, E. MÖNCH, *Praktische Spannungsoptik* (Fotoelasticitate practică). Ed. a II-a, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959, 209 pag.

Teoria fotoelasticității se ocupă cu determinarea stării de solicitare în interiorul unui corp elastic, în cazul în care metodele analitice de calcul sînt dificil de aplicat, cu ajutorul unor modele alcătuite din material optic sensibil. Primele studii în această direcție s-au dezvoltat în special în domeniul problemei plane a elasticității; în ultimul timp însă aceste metode au început să fie aplicate și la probleme tridimensionale sau au fost adaptate la diferite tipuri de corpuri, de exemplu la corpuri cu proprietăți plastice.

Lucrarea prof. L. Föppl și E. Mönch reflectă cele mai noi studii în această direcție.

Prima parte cuprinde bazele teoretice și experimentale ale fotoelasticității. Se studiază întîi problema plană, insistîndu-se asupra fenomenului fizic și asupra posibilităților de experimentare. Urmează problemele tridimensionale, cazul tensiunilor înghețate, cercetarea materialului folosit pentru modele. Rezultatele obținute se extind la alte genuri de probleme, cum ar fi cele privind plăcile plane și curbe.

Partea a doua se ocupă de cercetări deosebite legate de determinarea stării de tensiune pe cale optică. Se indică astfel diferite metode de determinare deplină a stării de tensiune plană (determinarea sumei tensiunilor normale), atît prin procedee aproximative de calcul, cît și pe cale experimentală. De asemenea se indică metode legate de problemele spațiale. Autorii prezintă apoi unele rezultate cu privire la problemele dinamice precum și la problemele corpurilor solicitate dincolo de limita de elasticitate (probleme de fotoplasticitate).

În partea a treia se dau diferite aplicații practice ale rezultatelor obținute. Menționăm astfel determinarea stării de tensiune în dinții unor roți sau în elemente de fundație. O problemă interesantă o constituie grinzile de beton armat, pentru care se fac studii speciale.

Volumul este însoțit de o bogată bibliografie.

Experiența autorilor face ca această carte să fie utilă tuturor celor care se ocupă cu cercetări pe modele.

P. P. Teodorescu

* * * *Handbuch der Physik.* Herausgegeben von S. Flügge, Band VI. *Elastizität und Plastizität* (Enciclopedie de fizică, editată de S. Flügge, vol. VI. Elasticitate și plasticitate), Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, 642 pag.

Enciclopedia de fizică apare în limbile germană și engleză, cuprinzînd articole de sinteză din diferite ramuri ale fizicii, grupate pe specialități. Volumul al VI-lea al acestei enciclopedii cuprinde cele mai importante probleme din domeniul mecanicii corpului solid deformabil.

Prima parte, redactată de I. N. Sneddon și D. S. Berry, cuprinde teoria clasică a elasticității. După o succintă prezentare a teoriei generale (analiza stării de tensiune și a stării de deformație, metode de rezolvare) se trece la probleme unidimensionale (torsiunea și încovoierea barelor drepte) și la probleme bidimensionale. Aici se insistă asupra metodei funcțiilor de variabilă complexă și asupra metodelor operaționale de calcul. Se dau apoi rezultate pentru probleme spațiale, insistîndu-se asupra metodei transformărilor integrale. Capitole speciale sînt consacrate problemelor dinamice și de termoelasticitate.

Partea de fotoelasticitate este scrisă de H. T. Jessop. După o introducere, privind bazele optice și mecanice ale fotoelasticității, se aplică această metodă experimentală la probleme plane și la probleme spațiale; exemple din domenii variate ilustrează expunerea teoretică.

Teoria matematică a mediului continuu anelastic, redactată de A. M. Freudenthal și H. Geiringer, cuprinde două părți. Prima parte se ocupă de continuumul anelastic. După unele rezultate privind mecanica și termodinamica unui astfel de continuum, se trece la un studiu detaliat al relațiilor care leagă tensiunile de deformații specifice; în felul acesta se consideră mediile vîsco-elastice și vîsco-plastice, precum și problemele de structură a corpurilor. Partea a doua tratează corpul ideal plastic. Se formulează problema generală tridimensională și se dau soluții discontinue, folosind metoda caracteristicilor. O atenție specială este acordată problemei plane a plasticității. În cadrul problemelor la limită se consideră pe rînd stadiul elastic, stadiul elasto-plastic și stadiul perfect plastic, dîndu-se diferite exemple.

M. Reiner se ocupă de problemele de reologie. După unele generalități, se prezintă probleme de macroreologie (fenomene de primul și de al doilea ordin) și de microreologie.

Problemele de rupere sînt considerate de G. R. Irwin și problemele de oboseală a materialelor de A. M. Freudenthal.

Lucrarea cuprinde, într-un număr relativ redus de pagini, un material foarte vast, pus la curent cu cele mai noi cercetări, deosebit de interesant pentru cercetătorii din domeniul mecanicii corpului solid deformabil.

P. P. Teodorescu

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

Proskura G. F., *Ghidrodinamika turbomaşin*. Vidarniţvo Akademii Nauk Ukrainskoi RSR, Kiev, 1959, 578 p.

— *Promişlennaia telemehanika*. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1960, 284 p.

— *Nikolai Vasilevici Melnikov*. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1960, 39 p.

Davidov L. K., *Vodonosnost rek SSSR. Ee kolebaniia i vliianie na nee fiziko-gheograficeskih faktorov*. Ghidrometroizdat. Leningrad, 1947, 162 p.

Gavrilov A. M. i Bogomazova Z. P., *Prakticeskaia ghidrologhia*. Ghidrometroizdat, Leningrad, 1948, 106 p.

Gavrilov A. M., *Selskie GES i ghidrologhia*. Ghidrometroizdat, Leningrad, 1952, 34 p.

Ghinko S. S., *Vodnoenergheticeskie bogatstva SSSR, ih izucenie i izpolzovanie*. Ghidrometroizdat, Leningrad, 1955, 196 p.

Minskii E. M., *Turbulentnost ruslovogo potoka*. Ghidrometroizdat, Leningrad, 1952, 163 p.

Nejuhovskii R. A., *Reka Neva*. Ghidrometroizdat, Leningrad, 1957, 190 p.

— *Trudi Novocerkasskogo politehniceskogo instituta*. Tom 106, 1960, 109 p.

Rothhaupt E., Meissner E., Schenkl H., *Technologie des Maschinenbaus*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1960, 613 p.

Rumpf K. H., *Bauelemente der Elektronik*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1960, 290 p.

Damerow G., Leudert W, *Technologie der metallurgischen Industrie*. VEB Verlag Technik. Berlin, 1959, 315 p.

Wiemer A., *Pneumatische Längenmessung*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1960, 155 p.

Namme J. Mc., *Analysis of symetric cylinder shells*. London, 1955, 88 p.

Butterweck H. J., *Mikrowellenbandfilter unter Verwendung mehrerer Eigenschwingungen in einem Hohlraum*. Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen, 1959, 107 p.

Disertaţii primite de la Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

Sprenger H., *Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren*. 1959, 84 p.

Coester R., *Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Querstromgebläsen*, 1959, 57 p.

Dinkelacker H. R., *Experimentelle Verfolgung zweidimensionaler instationärer Gasströmungen auf Grund der Gas-Flachwasser-Analogie*, 1959, 86 p.

CLAVUOT CHR., *Welle und Rohr aus starrplastischem Material unter Zug und Torsion*, 1959, 74 p.

ACKERET J., *Raumfahrt*. Zürich, 1960, 45 p.

Disertații primite de la Technische Hochschule Aachen

WAMAN ACHWAL, *Über die Feuchtigkeitsaufnahme und das Wasserrückhaltevermögen von Harnstoff- Formaldehyd-Harzen und ihre Bedeutung*. 1960, 122 p.

PINNEKAMP W., *Ein Beitrag zur Berechnung von Amplituden und dynamischen Beanspruchungen bei transversalen Resonanzschwingungen werkstoffgedämpfter, elastisch gelagerter Balken*. 1960, 135 p.

SCHWARZ H., *Vorschläge zur Elimination von Kopplungen in Mehrfachregelkreisen*. 1960, 70 p.

KREISKORTE H., *Über Beanspruchung und Belastbarkeit von Kupplungsbefestigungsvorrichtungen von Lastkraftwagen*. 1959, 117 p.

Publicații primite de la „Centre d'Etudes Supérieures de Mécanique", Paris

OUDART A., *Température et enthalpie de film*. 1959, 11 p.

CARRIÈRE M., *Méthodes d'études des écoulements permanents supersoniques et des écoulements non permanents*. 1960, 41 p.

BRODIN J., *Machines à calculer et mécanique du vol*. 1959, 47 p.

SIDERBOTTON O. M., DHARMARAJAN S., *The Effects if Inelastic Action on the Resistance of various Types of Loads of Ductile Members made from Various Classes of Metals*. Dep. of Theoretical and Applied Mechanics, Urbana, Illinois, 1958, 25 p.

ROBERTSON J. M., *A Study of Turbulent Plane Couette Flow*. Dep. of Theoretical and Applied Mechanics, Urbana, Illinois, 1959, 50 p.

BRUCH D. O., SIDEBOTTOM O. M., SMITH J. O., *Axial Tension and Bending Interaction Curves for Members loaded inelastically*. Dep. of Theoretical and Applied Mechanics, Urbana, Illinois, 1959, 1958, 26 p.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XI 1960

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
BĂLAN ŞT., Învăţămîntul mecanicii în institutele de învăţămînt tehnic superior	6	1361
CARAFOLI ELIE, Dezvoltarea cercetărilor ştiinţifice în Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R.	6	1345
IVANCENCO AL., Colaborarea strînsă între cercetarea ştiinţifică şi producţie	6	1369
STUDII		
AEROMECANICĂ		
CARAFOLI ELIE şi MATEESCU DAN, Metoda generală pentru determinarea interferenţei dintre aripă şi fuzelaj conic în regim supersonic	1	11
CARAFOLI ELIE şi MATEESCU DAN, Scurgerea supersonică în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj conic	2	325
CARAFOLI ELIE şi SĂNDULESCU Ş., Mişcarea oscilatorie armonică a ampenajelor în regim supersonic	3	557
CARAFOLI ELIE şi NĂSTASE A., Aripa triunghiulară de rezistenţă minimă în curent supersonic	4	817
HACKER T., Despre limitele de aplicabilitate a unei teorii a stabilităţii mişcărilor parţial controlate ale avionului	6	1581
MARINESCU AL., Observaţii cu privire la mişcarea în jurul carenelor de revoluţie	2	339
MARINESCU AL., Stabilitatea dinamică a convertoplanelor în evoluţii frecvente de zbor	4	835
OROVEANU T., Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene	5	1249
PATRAULEA N. N., ANDREI ŞT., RADO GH., Asupra calculului aerodinamic al vehiculelor utilizînd efectul solului	6	1565
PROCOPOVICI E., Traductor capacitiv de foarte mică inerţie pentru detectarea undelor de şoc	5	1293
SĂNDULESCU ŞERBAN, Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor poligonale cu şarnieră sonică avînd o mişcare oscilatorie armonică	1	49
SĂVULESCU ŞT., Determinarea caracteristicilor stratului limită tridimensional. Aplicaţii la cazul palelor de ventilator axial	1	61
SĂVULESCU ŞT., Utilizarea profilelor tip de viteze pentru determinarea calitativă a unor caracteristici ale scurgerii turbulente anizotrope	5	1269
HIDROMECANICĂ		
DUMITRESCU DUMITRU şi IONESCU VASILE, Studiul mişcării lamelor deversante infinite într-un plan vertical	2	345
DUMITRESCU DUMITRU, IONESCU V. şi CRĂCIUN C., Mişcarea fluidelor grele deversante într-un plan vertical	3	569
GHEORGHIŢĂ ŞT. I., Aplicaţiile unei probleme la limită în mecanica fluidelor	6	1535
HÎNCU S. şi DELICAN D., Fenomene de rezonanţă la mişcarea fluidelor cu suprafaţă liberă în jurul unor bare cilindrice	6	1555
MANEA V., O extindere a domeniului de utilizare a legii Darcy	4	865

	Nr.	Pag.
OROVEANU T., Cîteva considerații asupra scurgerii cu suprafață liberă a unui lichid printr-un mediu poros neomogen	1	79
OROVEANU T., Asupra dislocuirii lichid-lichid, într-un mediu poros	4	847
RĂZVAN E., Parametrii caracteristici și ecuația mișcării macroturbulente	6	1543
VÂLCOVICI V., Suprafețe Bernoulli	6	1507

TEORIA MECANISMELOR

	Nr.	Pag.
MAROȘ D., CSULAK A., Bazele teoretice ale prelucrării corecte a melcilor și a roților melcate	1	103
PELECUDI CHR., BOGDAN R. C. și CALMACIUC L., Contribuții la cinematica mecanismului cu patru elemente articulate	2	365
PELECUDI CHR. și CALCAN V., Contribuții la sinteza mecanismelor curbelor ciclice	3	627
PELECUDI CHR., CALCAN V. I., Asupra sintezei mecanismelor curbelor ciclice superioare	5	1133
TUTUNARU D., DEMIAN T., Asupra determinării profilului camelor la mecanismele cu tachet cu disc plan	6	1411

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

	Nr.	Pag.
BIȚĂ O. și COLABORATORI, Posibilități de caracterizare a materialelor de fricțiune	5	1117
CONSTANTINESCU V. N., Asupra comportării dinamice a lagărelor cu aer	4	893
PAVELESCU D., ILIUC I., BARBUL SANDA, PROCOPOVICI E., NĂSTASE M. și CONSTANTINESCU V., Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi	6	1397
TIPEI N. și CONSTANTINESCU V. N., Generalizarea ecuației lui Reynolds la studiul lubrificației în regim turbulent	2	359
TIPEI N., Lubrificația tridimensională a suprafețelor de alungire mică, la viteze mari	3	595
TIPEI N., Problema bidimensională a lubrificației în regim turbulent incompresibil, în cazul viscozității variabile	4	883
TIPEI N.. CONSTANTINESCU V. N., Influența legii de variații a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente din stratul de lubrifiant	5	1091
TIPEI N., CONSTANTINESCU V. N., NICA AL., Calculul lagărelor de alunecare.	6	1377
TONDL ALEŠ, Cîteva rezultate experimentale privind mișcarea fusului în lagăr	3	603
TONDL ALEŠ, Influența exercitată de reazemul elastic al fundațiilor asupra oscilațiilor auto-excitate ale rotoarelor datorită acțiunii filmului de lubrifiant al lagărelor de alunecare	5	1103

CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI

	Nr.	Pag.
NIȚĂ M. M., Asupra mișcării rachetei într-un cîmp de forțe centrale	6	1419

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

	Nr.	Pag.
ARCAN M. și TANNENBAUM M., Unele aspecte ale problemei fisurării betonului armat studiate fotoelastic	2	397
ARCAN M., Cercetări cu privire la încovoierea grinzilor cu goluri rectangulare	5	1175
BOICU N., Unele probleme ale torsiunii barelor cilindrice cu strat exterior de material diferit	2	479
BRILLA J., Probleme la limită mixte pentru plăcile anizotrope	4	909
CĂRARE T., AMZULESCU C., Asupra unor sistematizări în calculul static al cadrelor monotone multiple prin ecuații cu diferențe finite	3	747
CETĂȚEANU STELIAN, Grinzi cu inimă plină rigidizate transversal unilateral	1	261
DERSKI VLADIMIR-Varșovia, Despre unele probleme ale termoelasticității	1	131
DINCĂ FL., BOICU N., Calculul elasto-dinamic al tuburilor cilindrice circulare solicitate axial simetric	5	1201
GHEORGHIU AL., Sistemele conjugate, mijloc de exprimare a condiției de compatibilitate în calculul structurilor	6	1459

Nr. Pag.

HANGAN M., Ordinea de apariție și rotirea articulațiilor plastice la o structură statică solicitată de o sarcină permanentă și un grup de sarcini ce crește proporțional 6 1445
HANUŠKA A., Despre posibilitatea aplicării funcțiilor proprii pentru calculul plăcilor în formă de patrulater oarecare 3 675
IFRIM M., Influența perturbațiilor seismice asupra structurilor elastice. . . . 3 771
LIBRESCU L., Asupra teoriei structurilor elastice subțiri, construite din straturi 4 937
MIHAILESCU MIRCEA și MIHAILESCU YVONNE, Învelitori de translație calculate prin metoda relaxării 1 211
MIȘICU MIRCEA, Problema dinamică a torsiunii (Aplicații) 1 153
MIȘICU MIRCEA, Asupra propagării perturbațiilor secundare și primare ale cîmpului total 3 651
MIȘICU MIRCEA, Asupra comportării reologice a barelor scurte de cupru supuse la șocuri cu mase solide și fluide 5 1149
NICOLAU E., Unele probleme ale modelării fotoelastice a betonului armat . 2 409
PÎRVULESCU S. NICOLAE, Despre turtirea elastică a burlanelor de sondă sub acțiunea presiunii exterioare 2 437
PÎRVULESCU S. NICOLAE, Despre modulul de superelasticitate 3 695
PRIȘCU RADU și IAMANDI CONST., Considerații asupra dimensionării barajelor de greutate cu profilul trapezoidal 3 735
PELECUDI CHR. și PLATON V., Tensiunile de creștere radiale și longitudinale ale lemnului 1 195
SOARE MIRCEA, Aplicarea metodei plurilocale la calculul plăcilor curbe subțiri 1 239
SANDI HOREA, Ecuațiile barelor subțiri elastice I 2 449
SANDI HOREA, Ecuațiile barelor subțiri elastice II 4 957
TEODORESCU P. P., Cîteva considerații în legătură cu calculul grinzilor drepte 1 173
TEODORESCU P. P., Asupra problemei spațiale a elastodinamicii. 3 681
TEODORESCU P.P., Asupra unor sisteme infinite de ecuații liniare, care intervin în problema plană a teoriei elasticității pentru un domeniu dreptunghiular 4 925
VALENTA J., Starea elasto-plastică a recipientelor cu straturi multiple . . . 2 379
VISARION V., STĂNESCU C., Formularea stării de momente pure cvasiinvariante pentru învelitorile elastice subțiri și echivalența acestei formulări cu teoria clasică a învelitorilor 5 1195
VISARION V., Calculul dinamic al unor părți componente ale carcaselor autobuzelor prin utilizarea teoriei plăcilor ortotrope curbe. 3 711

VIBRAȚII

PROCOPOVICI E., Măsurarea vibrațiilor și șocurilor mecanice cu traductori capacitivi 4 1019
RIPEANU A., Determinarea pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a arborilor cotiți 4 997

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

FLORESCU C. I. și VASILESCU M., Asupra variațiilor rezistenței la penetrare a solurilor 2 501
FLORESCU C. I., VASILESCU M., Posibilități de clasificare a tipurilor de sol și de determinare a efectelor lucrărilor cu ajutorul unor mărimi fizicomecanice 5 1233
MARCU V. și FREUND P., Asupra aderenței straturilor metalizate pe suprafețe plane 2 491
NICULESCU IS. și FLORESCU C., Comparație între tăierea verticală a solurilor cu o singură lamă și tăierea cu mai multe lame dispuse în trepte . 6 1497
POPOV M. P., MITRICĂ I., DECIU E., Rezistența la uzură a sculei în funcție de parametrii geometrici ai acesteia 4 983
POPOV M. P., MITRICĂ I., DECIU E., Parametrii regimului de așchiere la oțelurile carbon obișnuite 5 1219

	Nr.	Pag.
POPOV M. P., MITRICĂ I., DECIU E., Studiul puterii necesare aşchierii oţelurilor carbon obişnuite	6	1481

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

	Nr.	Pag.
CLEJA V. şi PAVELESCU D., Cu privire la erorile de înregistrare magnetică a parametrilor cu variaţie lentă	6	1587

NOTE

	Nr.	Pag.
DUMITRESCU LUCIAN, Asupra numărului Mach limită al scurgerii într-un tub de şoc	2	513
GUŞEF L., Asupra unei proprietăţi geometrice ale axelor principale de inerţie ale unei figuri plane	5	1303

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

	Nr.	Pag.
AMZULESCU C., Asupra unor formule practice pentru calculul învelitorilor circulare cilindrice	4	1037
CONSTANTINESCU V. N. şi MARIN GH., Motor pneumatic cu lagăre cu aer	1	291
ILIUC I., FREUND P., Aparat pentru determinarea grosimii straturilor protectoare pe cale nedestructivă	3	785
MARIN GH., Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură	2	523
PAVELESCU D., Aspecte privind eficacitatea metodelor de măsură radioactive şi cu semiconductori, funcţie de traductoare şi domeniul cercetării	1	283
PAVELESCU D. şi ILIUC I., Densitometru cu semiconductori pentru dozimetria cu film	2	515
PONOMAREV K. K., O metodă matricială pentru calculul vibraţiilor cadrelor	4	1027
ZAHARESCU A., Tensometru static cu comutare pe 15 puncte de măsură	1	297
DUMITRESCU L., JAKAB I., PROCOPOVICI E., ZAHARESCU A., Probleme ale cercetării experimentale de aerodinamica vitezelor mari în tubul de şoc	6	1599

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

	Nr.	Pag.
BOGDAN C. RADU, Congresul de mecanisme — Aachen — 1959	3	793
CARAFOLI ELIE şi HACKER T., Congresul unional de mecanică teoretică şi aplicată, Moscova 27.I—3.II.1960	5	1311

RECENZII

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XI 1960

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	№	Стр.
БЭЛАН Ш., Преподавание механики в высших технических учебных заведениях	6	1361
ИВАНЧЕНКО А., Тесная связь научных исследований с производством	6	1345
КАРАФОЛИ ЭЛИЕ, Развитие научных исследований в Институте прикладной механики Академии РНР	6	1369

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
КАРАФОЛИ ЭЛИЕ и МАТЕЕСКУ ДАН, Общий метод определения интерференции между крылом и коническим фюзеляжем в сверхзвуковом режиме	1	11
КАРАФОЛИ ЭЛИЕ и МАТЕЕСКУ ДАН, Сверхзвуковое обтекание системы: крестообразное крыло — конический фюзеляж	2	325
КАРАФОЛИ ЭЛИЕ и СЭНДУЛЕСКУ Ш., Колебательное гармоническое движение оперений в сверхзвуковом режиме	3	557
КАРАФОЛИ ЭЛИЕ и НЭСТАСЕ А., Тонкое треугольное крыло минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке	4	817
МАРИНЕСКУ А., Замечания в связи с движением вокруг обтекателей в виде тел вращения	2	339
МАРИНЕСКУ А., Динамическая устойчивость конвертопланов при обычных режимах полета	4	835
ОРОВЯНУ Т., О течении газов в неоднородных пористых средах . .	5	1249
ПАТРАУЛЯ Н. Н., АНДРЕЙ Ш. и РАДО Г., Аэродинамический расчет средств передвижения с применением эффекта земли	6	1565
ПРОКОПОВИЧ Е., Емкостный датчик очень малой инерции для улавливания ударных волн	5	1293
СЭНДУЛЕСКУ Ш., Аэродинамическая характеристика многоугольных элеронов со звуковым шарниром, имеющим гармоническое колебательное движение	1	49
СЭВУЛЕСКУ Ш., Определение характеристики трехмерного пограничного слоя. Практическое применение в случае лопастей осевого вентилятора	1	61
СЭВУЛЕСКУ Ш., Использование типовых профилей скоростей для качественной оценки некоторых характеристик анизотропных турбулентных течений	5	1269
ХАКЕР Т., О пределах применимости теории устойчивости, частично контролируемых движений самолета	6	1581

ГИДРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
ВЫЛКОВИЧ ВИКТОР, Поверхности Бернулли	6	1507
ГЕОРГИЦЭ Ш. И., Применения одной граничной задачи в механике жидкостей	6	1535
ДУМИТРЕСКУ Д. и ИОНЕСКУ В., Исследование движения бесконечных переливающихся струй в вертикальной плоскости	2	345

	№	Стр.
ДУМИТРЕСКУ Д., ИОНЕСКУ В. и КРЭЧУН К., Движение тяжелых переливающихся жидкостей в вертикальной плоскости	3	569
МАНЯ В., Распространение области применимости закона Дарси	4	865
ОРОВЯНУ Т., Некоторые соображения о течении жидкости со свободной поверхностью через неоднородную пористую среду	1	79
ОРОВЯНУ Т., О вытеснении жидкости другой жидкостью в пористой среде	4	847
РЭЗВАН Е., Характеристические параметры и уравнение макротурбулентного движения	6	1543
ХЫНКУ С. и ДЕЛИКАН Д., Резонансные явления при движении жидкостей со свободной поверхностью вокруг цилиндрических стержней	6	1555

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

МАРОШ Д. и ЧУЛАК А., Теоретические основы правильной обработки червяков и червячных зубчатых колес	1	103
ПЕЛЕКУДИ К., БОГДАН Р. и КАЛМАЧУК Л., К кинематике шарнирного четырехзвенного механизма	2	365
ПЕЛЕКУДИ К. и КАЛКАН В. И., К синтезу механизмов циклических кривых	3	627
ПЕЛЕКУДИ К. и КАЛКАН В. И., К синтезу механизмов циклических кривых высшего порядка	5	1133
ТУТУНАРУ Д. и ДЕМИАН Т., К определению профиля механизмов с плоским толкателем	6	1411

СМАЗКА—ТРЕНИЕ—ИЗНОС

БИЦЭ ОЛЬГА и сотрудники, О возможности определения характеристик фрикционных материалов	5	1117
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О динамическом поведении воздушных подшипников	4	893
ПАВЕЛЕСКУ Д., ИЛЮК И., БАРБУЛ С., ПРОКОПОВИЧ Е., НЭСТАСЕ М. и КОНСТАНТИНЕСКУ В., Метод исследования износа подшипников при помощи радиоактивных изотопов	6	1397
ТИПЕЙ Н. и КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Распространение уравнения Рейнольдса на исследование смазки при турбулентном режиме .	2	359
ТИПЕЙ Н., Трехмерная смазка поверхностей малого удлинения при больших скоростях	3	595
ТИПЕЙ Н., Двухмерная задача смазки в несжимаемом турбулентном режиме при переменной вязкости	4	883
ТИПЕЙ Н. и КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Влияние закона изменения пути смешения на турбулентное движение в смазочном слое	5	1091
ТИПЕЙ Н., КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н. и НИКА А., Расчет подшипников скольжения	6	1377
ТОНДЛЬ А., Некоторые экспериментальные результаты в связи с движением цапфы в подшипнике	3	603
ТОНДЛЬ А., Влияние установки машин на упругоопертой массе фундамента с низкой частотой колебаний на самовозбуждаемые колебания роторов в результате воздействия несущего слоя смазки подшипников скольжения	5	1103

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

НИЦЭ М. М., О движении ракеты в центральном поле сил	6	1419

УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

АРКАН М. и ТАНЕНБАУМ М., Некоторые аспекты задачи трещинообразования в железобетоне, исследуемой методом фотоупругости . .	2	397

	№	Стр.
АРКАН М., Исследования по изгибу балок с прямоугольными отверстиями	5	1175
БОЙКУ Н., Некоторые задачи кручения цилиндрического стержня с покрытием из другого материала	2	479
БРИЛЛА Ж., Смешанные граничные задачи для анизотропных пластинок	4	909
ВАЛЕНТА Ж., Упруго-пластическое состояние многослойных сосудов	2	379
ВИСАРИОН В., Динамический расчет некоторых составляющих частей автобусных каркасов путем применения кривых автотропных пластинок	3	711
ВИСАРИОН В. и СТЭНЕСКУ К., Формальное приведение суммарного напряженного состояния тонких упругих оболочек к чисто моментному квазиинвариантному состоянию	5	1195
ГАНУШКА АЛЕКСАНДРУ, О возможности использования собственных функций для расчета изгиба произвольных четырехугольных плит	3	675
ГЕОРГИУ АЛЕКСАНДРУ, Сопряженные системы, средство выражения условия совместимости при расчете конструкций	6	1459
ДЕРЗКИЙ В., О некоторых задачах термоупругости	1	131
ДИНКЭ Ф. и БОЙКУ Н., Упруго-динамический расчет круглых цилиндрических труб при осесимметрических нагрузках	5	1201
ИФРИМ М., Влияние сейсмических возмущений на упругие конструкции	3	771
КЭРАРЕ Т. и АМЗУЛЕСКУ К., О систематизации при статическом расчете монотонных многократных рам при помощи уравнений с конечными разностями	3	747
ЛИБРЕСКУ Л., К теории тонких оболочек, составленных из упругих слоев	4	937
МИХАЙЛЕСКУ М. и МИХАЙЛЕСКУ И., Линейчатые оболочки рассчитанные методом релаксации	1	211
МИШИКУ М., Динамическая задача кручения	1	153
МИШИКУ М., О распространении вторичных и первичных возмущений общего реомагнитного поля	3	651
МИШИКУ М., О реологическом поведении коротких медных стержней, подверженных ударам о твердые и жидкие массы	5	1149
НИКОЛАУ Э., Некоторые задачи фотоупругого моделирования железобетона	2	409
ПЕЛЕКУДИ К. и ПЛАТОН Б., Радиальные и продольные напряжения роста древесины	1	195
ПРИШКУ Р. и ЯМАНДИ К., Соображения в связи с определением размеров гравитационных плотин трапецоидального профиля	3	735
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Об упругом сплющивании обсадных труб под действием внешних явлений	2	437
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., О модуле суперупругости	3	695
САНДИ Х., Уравнения упругих тонких стержней. I	2	449
САНДИ Х., Уравнения упругих тонких стержней. II	4	957
СОАРЕ М., Применение многопозиционного метода при расчете тонких изогнутых пластин	1	239
ТЕОДОРЕСКУ П. П., Некоторые соображения о расчете прямых балок	1	173
ТЕОДОРЕСКУ П. П., К пространственной задаче эластодинамики	3	681
ТЕОДОРЕСКУ П. П., О некоторых бесконечных системах линейных уравнений, встречающихся в плоской задаче теории упругости для прямоугольной области	4	925
ХАНГАН МИХАИЛ, Порядок появления и вращения пластических шарниров статической конструкции под действием установившейся нагрузки и пропорционально возрастающей группы нагрузок	6	1445
ЧЕТЭЦЯНУ Ш., Сплошные балки с односторонним укреплением	1	261

№ Стр.

ВИБРАЦИИ

ПРОКОПОВИЧ Е., Измерение колебаний и механических ударов при помощи емкостных датчиков . . . 4 1019
РЫПЯНУ А., Определение собственных пульсаций, соответствующих вибрационному кручению изогнутой оси . . . 4 997

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

МАРКУ В. и ФРЕЙНД П., О прилипании металлизированных слоев на плоские поверхности . . . 2 491
НИКУЛЕСКУ И. и ФЛОРЕСКУ К., Сравнение вертикального однорезцового резания грунтов со ступеньчатым многорезцовым резанием . 6 1497
ПОПОВ М. П., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е., Износоустойчивость инструмента в зависимости от его геометрических параметров . . . 4 983
ПОПОВ М. П., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е., Параметры режима резания для обыкновенных углеродистых сталей . . . 5 1219
ПОПОВ М. П., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е., Исследования мощности резания при работе с обыкновенными углеродистыми сталями . . . 6 1481
ФЛОРЕСКУ К. И. и ВАСИЛЕСКУ М., Об изменениях сопротивления грунтов на внедрение . . . 2 501
ФЛОРЕСКУ К. И. и ВАСИЛЕСКУ М., Возможности классификации типов грунтов и определения эффектов работ при помощи физико-механических величин . . . 5 1233

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

КЛЕЖА В. и ПАВЕЛЕСКУ Д., О погрешностях магнитной записи медленно изменяющихся параметров . . . 6 1587

ЗАМЕТКИ

ГУШЕВ Л., Об одном геометрическом свойстве главных осей инерции . 5 1303
ДУМИТРЕСКУ Л., О максимальном числе Маха течения в ударной трубе 2 513

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

АМЗУЛЕСКУ Ч., О некоторых практических формулах для расчета круглых цилиндрических оболочек . . . 4 1037
ЗАХАРЕСКУ А., Статический тензометр с переключением на 15 точек измерения . . . 1 297
ИЛЮК И. и ФРЕЙНД П., Прибор для определения толщины защитных слоев неразрывным методом . . . 3 785
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н. и МАРИН Г., Пневматический двигатель на подшипниках с воздушной смазкой . . . 1 291
МАРИН Т., Прибор для калориметривания процессов изнашивания . . 2 523
ПАВЕЛЕСКУ Д., Эффективность радиоактивных методов измерения и методов с полупроводниками в зависимости от датчиков и области исследования . . . 1 283
ПАВЕЛЕСКУ Д. и ИЛЮК И., Плотнометр с полупроводниками для дозиметрии с использованием фотопленки . . . 2 515
ПОНОМАРЕВ К. К., Матричный прием расчета колебаний рам . . . 4 1027

УЧАСТИЕ В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ЗА РУБЕЖОМ

КАРАФОЛИ ЭЛИЕ и ХАКЕР ТИБЕРИУ, Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Москва, 27 января—3 февраля 1960 года 5 1311
БОГДАН К., РАДУ Конгресс по механизмам. Аахен, 1959 . . . 3 793

РЕЦЕНЗИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XI 1960

INDEX ALPHABÉTIQUE

Nº Page
BĂLAN ŞT., L'enseignement de la mécanique dans les instituts d'enseignement supérieur technique . . . 6 1361
CARAFOLI ELIE, Essor des recherches scientifiques à l'Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia » de l'Académie de la République Populaire Roumaine . . . 6 1345
IVANCENCO AL., Collaboration étroite entre la recherche scientifique et la production . . . 6 1369

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

CARAFOLI ELIE et MATEESCU DAN, Méthode générale pour déterminer l'interférence entre l'aile et le fuselage conique en régime supersonique . . . 1 11
CARAFOLI ELIE et MATEESCU DAN, Écoulement supersonique autour du système aile cruciforme-fuselage conique . . . 2 325
CARAFOLI ELIE et SĂNDULESCU S., Le mouvement oscillatoire harmonique des empennages, en régime supersonique . . . 3 557
CARAFOLI ELIE et NĂSTASE ADRIANA, L'aile triangulaire mince à traînée minimum, en courant supersonique . . . 4 817
HACKER T., Sur les limites d'applicabilité d'une théorie de la stabilité des mouvements partiellement contrôlés d'un avion . . . 6 1581
MARINESCU AL., Remarques sur le mouvement autour des carènes de révolution . . . 2 339
MARINESCU AL., Stabilité dynamique des convertoplanes en évolutions fréquentes de vol . . . 4 835
OROVEANU T., Sur l'écoulement des gaz à travers des milieux poreux non homogènes . . . 5 1249
PATRAULEA N. N., ANDREI ŞT. and RADO GH., On the aerodynamic calculation of vehicles by using the ground effect . . . 6 1565
PROCOPOVICI E., Traducteur capacitif à très petite inertie pour la détection des ondes de choc . . . 5 1293
SĂNDULESCU ŞERBAN, Caractéristiques aérodynamiques des ailerons polygonaux à charnière sonique, ayant un mouvement oscillatoire harmonique 1 49
SĂVULESCU ŞT., Détermination des caractéristiques de la couche limite à trois dimensions. Applications au cas des pales d'un ventilateur axial . . . 1 61
SĂVULESCU ŞT., Utilisation de profils de vitesse type pour l'évaluation qualitative de certaines caractéristiques de l'écoulement turbulent anisotrope 5 1269

HYDROMÉCANIQUE

DUMITRESCU DUMITRU et IONESCU VASILE, Étude du mouvement des lames déversantes infinies dans un plan vertical . . . 2 345
DUMITRESCU DUMITRU, IONESCU V. et CRĂCIUN C., Le mouvement des fluides pesants déversants, dans un plan vertical . . . 3 569

	Nº	Page
GHEORGHIŢĂ ŞT. I., Les applications d'un problème à la limite à la mécanique des fluides	6	1535
HÎNCU S. et DELICAN D., Problèmes de résonance soulevés par le mouvement autour des barres cylindriques des fluides à surface libre	6	1555
MANEA V., Une extension du domaine d'utilisation de la loi de Darcy	4	865
OROVEANU T., Considérations sur l'écoulement à surface libre d'un liquide à travers un milieu poreux non homogène	1	79
OROVEANU T., Sur le déplacement liquide-liquide dans un milieu poreux	4	847
RĂZVAN E., Paramètres caractéristiques et équation du mouvement macroturbulent	6	1543
VÂLCOVICI VICTOR, Les surfaces de Bernoulli	6	1507

THÉORIE DES MÉCANISMES

	Nº	Page
MAROŞ D. et CSULAK A., Bases théoriques de la fabrication correcte des vis sans fin et des roues hélicoïdales	1	103
PELECUDI CHR., BOGDAN R. C. und CALMACIUC L., Beiträge zur Kinematik des Gelenkvierecks	2	365
PELECUDI CHR. et CALCAN V. I., Contribution à la synthèse des mécanismes des courbes cycliques	3	627
PELECUDI CHR. et CALCAN V. I., Sur la synthèse des mécanismes des courbes cycliques supérieures	5	1133
TUTUNARU D. und DEMIAN T., Methode zur Bestimmung des Profils von Kurvengetrieben mit ebenem Talerstössel	6	1411

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

	Nº	Page
BIŢĂ OLGA et collab., Possibilité de caractériser les matériaux de friction	5	1117
CONSTANTINESCU V. N., Sur le comportement dynamique des paliers à air	4	893
PAVELESCU D., ILIUC I., BARBUL SANDA, PROCOPOVICI E., NĂSTASE M. and CONSTANTINESCU V., A method for studying the wear of bearings with radioactive isotopes	6	1397
TIPEI N. et CONSTANTINESCU V. N., Généralisation de l'équation de Reynolds à l'étude de la lubrification en régime turbulent	2	359
TIPEI N., Lubrification tridimensionnelle des surfaces à petit allongement, aux grandes vitesses	3	595
TIPEI N., The two-dimensional problem of incompressible turbulent lubrication in case of variable viscosity	4	883
TIPEI N. et CONSTANTINESCU V. N., Influence de la variation de la longueur de mélange sur la lubrification turbulente	5	1091
TIPEI N., CONSTANTINESCU V. N. and NICA AL., Calculation of journal bearings	6	1377
TONDL ALEŠ, Quelques résultats expérimentaux concernant le mouvement d'un arbre dans un palier	3	603
TONDL ALEŠ, Influence exercée par l'appui élastique des fondations sur les oscillations auto-excitées des rotors, par suite de l'action du film lubrifiant des paliers lisses	5	1103

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE

	Nº	Page
NIŢĂ M. M., Sur le mouvement d'une fusée dans un champ de forces centrales	6	1419

ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — RHÉOLOGIE

	Nº	Page
ARCAN M. und TANNENBAUM M., Spannungsoptische Untersuchungen des Reissens von Stahlbeton	2	397
ARCAN M., Recherches sur la flexion des poutres aux trous rectangulaires	5	1175
BOICU N., Quelques problèmes de la torsion des barres cylindriques à couche externe d'un matériel différent	2	479

	Nº	Page
BRILLA J., Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten	4	909
CĂRARE T. et AMZULESCU C., Quelques systématisations dans le calcul statique des cadres monotones multiples, par des équations aux différences finies	3	747
CETĂŢEANU STELIAN, Poutres à âme pleine raidies unilatéralement	1	261
DERSKY VLADIMIR, Sur quelques problèmes de la thermoélasticité	1	131
DINCĂ FL. et BOICU N., Calcul élasto-dynamique des tubes cylindriques circulaires sollicités symétriquement par rapport à l'axe	5	1201
GHEORGHIU AL., Les systèmes conjugués — moyen d'exprimer la condition de compatibilité dans le calcul des constructions	6	1459
HANGAN M., The order of occurrence and the rotation of plastic hinges for a static structure subjected to a permanent loading and a group of proportionally increasing loads	6	1445
HANUŠKA A., Über die Anwendungsmöglichkeit der Eigenfunktionen zur Berechnung nichtrechteckiger Viereckplatten	3	675
IFRIM M., Influence des perturbations séismiques sur les structures élastiques.	3	771
LIBRESCU L., Sur la théorie des structures minces, construites par des couches élastiques	4	937
MIHAILESCU MIRCEA and MIHAILESCU YVONNE, Translation shells calculated through the relaxation method	1	211
MIŞICU MIRCEA, Problème dynamique de la torsion (Applications)	1	153
MIŞICU MIRCEA, On the propagation of secondary and primary perturbations of the total rheomagnetic field	3	651
MIŞICU MIRCEA, Sur le comportement rhéologique des barres courtes de cuivre soumises à des chocs avec les masses solides et fluides	5	1149
NICOLAU E., Quelques problèmes soulevés par l'étude au moyen de modèles photo-élastiques du béton armé	2	409
PÎRVULESCU NICOLAE S., Sur l'instabilité élastique des parois des tubes de sondes sous l'action de la pression extérieure	2	437
PÎRVULESCU NICOLAE S., Sur le module d'hyperélasticité	3	695
PRIŞCU RADU et IAMANDI CONST., Considérations sur le calcul des barrages-poids à profil trapézoïdal	3	735
PELECUDI CHR. et PLATON V., Tensions radiales et longitudinales de croissance du bois	1	195
SOARE MIRCEA, Application de la méthode plurilocale au calcul des coques	1	239
SANDI HOREA, Équations des barres élastiques minces. I	2	449
SANDI HOREA, Équations des barres élastiques minces. II	4	957
TEODORESCU P. P., Considérations sur le calcul des poutres droites	1	173
TEODORESCU P. P., On the spatial problem of elastodynamics	3	681
TEODORESCU P. P., Sur quelques systèmes infinis d'équations linéaires qui interviennent dans le problème plan de la théorie de l'élasticité pour un domaine rectangulaire	4	925
VALENTA J., Elasto-plastic state of multi-layer vessels	2	379
VISARION V. et STĂNESCU C., Réduction formelle de l'état de tension globale des voiles élastiques minces à l'état quasi-invariant des moments purs	5	1195
VISARION V., Calcul dynamique de certaines parties composantes des caissons d'autobus au moyen de la théorie des plaques orthotropes courbes	3	711

VIBRATIONS

	Nº	Page
PROCOPOVICI E., La mesure des vibrations et des chocs mécaniques au moyen de traducteurs capacitifs	4	1019
RIPEANU ANDREI, Determination of the natural frequency of torsional vibrations of crankshafts	4	997

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

	Nº	Page
FLORESCU C. I. et VASILESCU M., Sur les variations de la résistance à la pénétration des sols	2	501

	Nº	Page
FLORESCU C. I. et VASILESCU M., Possibilités de classifier les types de sol et de déterminer les effets des travaux au moyen de certaines grandeurs physico-mécaniques	5	1233
MARCU V. et FREUND P., Sur l'adhérence aux surfaces planes des couches métallisées	2	491
NICULESCU IS. et FLORESCU C., Comparaison entre la coupe verticale du sol avec une lame unique et la coupe avec plusieurs lames échelonnées	6	1497
POPOV M. P., MITRICĂ I. et DECIU E., La résistance à l'usure d'un outil en fonction de ses paramètres géométriques	4	983
POPOV M. P., MITRICĂ I. et DECIU E., Paramètres du régime de coupe dans le cas des aciers au carbone	5	1219
POPOV M. P., MITRICĂ I. et DECIU E., Étude sur la puissance de coupe dans le cas des aciers au carbone	6	1481

TECHNIQUE DES MESURES

	Nº	Page
CLEJA V. and PAVELESCU D., On the errors in the magnetic tape recordings of parameters with slow variations	6	1587

NOTES

	Nº	Page
DUMITRESCU L., On the value of the maximum Mach number in a shock-tube	2	513
GOUCHEFF L., Sur une propriété géométrique des axes principaux d'inertie	5	1303

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

	Nº	Page
AMZULESCU CEZAR, Considérations sur quelques formules pratiques pour le calcul des coques cylindriques circulaires	4	1037
CONSTANTINESCU V. N. et MARIN GH., Moteur pneumatique à coussinets d'air	1	291
ILIUC I. et FREUND P., Appareil pour la détermination de l'épaisseur des couches protectrices, sans les endommager	3	785
MARIN GH., Appareil pour les mesures calorimétriques des processus d'usure	2	523
PAVELESCU D., Efficiency of radioactive and semiconductor measuring methods as related to gauges and the investigated field	1	283
PAVELESCU D. and ILIUC I., Semi-conductor densimeter for film dosimetry.	2	515
PONOMAREV K. K., Une méthode matricielle pour le calcul des vibrations des cadres	4	1027
ZAHARESCU A., Tensomètre statique à commutation sur 15 points de mesure	1	297
DUMITRESCU L., JAKAB I., PROCOPOVICI E. et ZAHARESCU A., Quelques problèmes posés par l'utilisation des tubes à chocs aux recherches expérimentales d'aérodynamique des grandes vitesses	6	1599

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

	Nº	Page
BOGDAN RADU C., Congrès de Mécanismes — Aix-la-Chapelle — 1959	3	793
CARAFOLI ELIE et HACKER TIBERIU, Le Congrès Unional de Mécanique théorique et appliquée, Moscou, 27 janvier — 3 février 1960	5	1311

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul Dvs. pentru anul 1961.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE, AGENȚIILE POȘTALE, PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII.